

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Béjaïa

Faculté des Science Exactes

Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire de fin d'études

Spécialité : Mathématiques Financières

Thème :

Evaluation du risque d'insolvabilité par la méthode de Monte-Carlo : Application à la branche RC automobile de l'Agence SAA 3201

Présenté par :

Amrane Sara et Bellil Soumia

Devant le jury composé de :

Président	M. DJABRI Rabah,	MCB,	U. de Béjaïa
Rapporteuse	Mme BENOUARET Zina,	MCB,	U. de Béjaïa
Co-rapporteuse	Mme HOCINE Safia,	MAA,	U. de Béjaïa
Examineur	M. TOUAZI Atik,	MCB,	U. d'Alger 1
Examinatrice	Mlle BOUCHEBAH Kahina,	MAA,	U. de Béjaïa
Invitée	Mme BOUBALOU Nabila,	Chef d'agence,	SAA 3201 Béjaïa

*** Promotion 2018/2019 ***

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	2
1 Présentation du secteur d'assurance et position du problème	5
1.1 Historique de l'assurance en Algérie	5
1.1.1 La période 1962 – 1989	5
1.1.2 L'ouverture et la libéralisation du marché	6
1.1.3 Quelques définitions	7
1.2 Les sociétés algériennes d'assurances	9
1.3 Présentation de la société d'Assurance (SAA)	10
1.3.1 Présentation de l'Agence 3201 Béjaïa	11
1.3.2 Les différentes types d'assurance	13
1.3.3 Assurance automobile	13
1.3.4 Position du problème	18
2 Modèles du risque et théorie de la ruine	20
2.1 Introduction	20
2.2 L'introduction aux modèles probabilités du risque	20
2.2.1 Modèle individuel et Modèle collectif	21
2.2.2 Le modèle du risque classique	23
2.2.3 Probabilité de ruine	25
2.2.4 Modèle du risque classique (Cramèr-Lundberg)	26
2.2.5 Modèle du Sparre-Andersen	32
2.3 Méthode d'estimation	32

2.3.1	Estimation statistique	33
2.3.2	Testes statistiques	34
2.4	Simulation de variable aléatoire	36
2.4.1	Inversion de la fonction de répartition	36
2.4.2	Méthode de rejet	36
2.4.3	Vérification par histogramme	37
2.4.4	Méthode Monte Carlo	37
2.4.5	Méthode Importance sampling (Échantillonnage préférentiel)	38
2.4.6	Autre méthode de simulation de variable aléatoire	40
2.5	Conclusion	40
3	Simulation de la probabilité de ruine de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Bejaia	41
3.1	Introduction	41
3.2	Modélisation de la réserve de la branche RC automobile	41
3.2.1	Collecte des données	42
3.2.2	Ajustement des données	43
3.3	Calcul de la probabilité de ruine de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa	50
3.4	Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini	52
3.4.1	Construction l'algorithme	52
3.4.2	Implémentation et interprétation des résultats	53
3.4.3	Interprétation des résultats	58
A	Distributions du nombre et du montant des réclamations	i
A.1	Distributions du nombre de réclamations	i
A.2	Distributions du montant des réclamations	iv
B	Transformation de Laplace	vi
B.1	Définitions	vi
B.2	Transformée de Laplace	viii

TABLE DES FIGURES

1.1	Organisation de l'agence 3201 Béjaia	12
1.2	Code usage	16
1.3	Code de genre	17
1.4	Code de puissance	17
1.5	Code Tarif	17
2.1	Actuaire: Métier pluridisciplinaire	21
2.2	Évolution du processus de réserve au cours du temps	24
2.3	Évolution du processus inverse	24
2.4	Histogramme et densité	38
3.1	Ajustement des données du nombre de réclamations par la loi de Poisson.	44
3.2	Ajustement des données du nombre de réclamations par la loi exponentielle.	46
3.3	Ajustement des données du montant des réclamations par la loi de Weibull.	47
3.4	Ajustement des données du montant des réclamations par la loi de Log- normale.	48
3.5	Ajustement des données du nombre de primes reçues par la loi de Poisson.	49
3.6	Ajustement des données du montant de primes reçues par la loi de Poisson.	50
3.7	La probabilité de ruine à horizon fini (le montant des réclamation de loi weibull).	55
3.8	La probabilité de ruine à horizon fini (le montant des réclamation de loi weibull).	55

3.9	La probabilité de ruine à horizon fini avec le montant des réclamation de loi exponentielle.	57
3.10	Erreur entre les deux probabilités de ruine pour le montant exponentielle.	57
A.1	Les distributions membres de la classe $(a, b, 0)$	iii
A.2	Les distributions membres de la classe $(a, b, 1)$	iii
B.1	Tableau de transformé de Laplace	ix

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Modélisation du nombre de réclamations par la loi de Poisson.	44
3.2	Modélisation du montant des réclamations par la loi exponentielle.	45
3.3	Modélisation du montant des réclamations par la loi de Weibull.	46
3.4	Modélisation du montant des réclamations par la loi de Log-normale.	47
3.5	Ajustement du nombre de primes reçues.	48
3.6	Ajustement du montant total mensuel des primes reçues.	49
3.7	Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini pour différentes valeurs de \tilde{c} où le montant des réclamations de loi de weibull.	54
3.8	Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini pour différentes valeurs de \tilde{c} où le montant des réclamation de loi exponentielle.	56
3.9	Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini pour différentes valeurs de \tilde{c} où le montant des réclamation de loi log-normal.	58

LIST OF ALGORITHMS

1 Algorithme de simulation de la probabilité de ruine à horizon fini. 52

REMERCIEMENTS

En premier lieu, nous remercions Dieu qu'il soit loué pour nous avoir donné la force et la patience nécessaires pour accomplir ce travail.

Nous tenons à remercier très sincèrement *M^{me}* **Benouaret Zina** et *M^{me}* **Hocine Safia** qui nous ont fait l'honneur d'accepter de diriger notre mémoire, pour leurs patience, leurs orientations, leurs précieux conseils et leurs aide constants qu'elles nous ont apportés tout au long de ce travail.

Nous devons également des égards à *M^{me}* **Boualou Nabila**, chef de l'agence SAA 3201 de Béjaïa, de nous avoir accueilli dans son agence d'assurance et tout les personnes de l'agence.

Nous tenons aussi à remercier chaleureusement *M.* **Larbi Asli**, *M.* **Amrane Mouloud** et *M.* **Cheurfa Fatah** pour leur générosité et la grande patience dont elles ont su faire preuve malgré leurs charges professionnelles.

Nous somme profondément reconnaissante envers *M.* **Karim Abbas**, pour la compréhension, les discussions et de nombreux conseils .

Nous remercions profondément les membres du jury de nous avoir fait l'honneur de juger ce travail.

A toute notre promotion Mastre 2019 .

DÉDICACE

Je dédie ce modeste
travail à ceux que j'ai de plus cher :
mes parents, mon frère Aboubaker
, ma chère soeur Oumayma , ma
famille, mes copines :Hanan et
Malika, à ma binome Sara
à mon amie Houria
à Ammar
♡

♡Soumia

Je dédie ce modeste
travail à ceux que j'ai de plus cher :
mes parents, mon frère Abderrahim
, ma chère soeur Chahinez , ma
famille, mes copines :Noura et
Rayan, à ma binome Somia
à mon amie Fatiha
à Billel
♡

♡Sara

Des abréviations

- **2A** : L'Algérienne des Assurances.
- **BEA** :Banque Extérieur d'Algérie.
- **BNP** :Banque PARIBAS.
- **CAAR** : Compagnie Algérienne d'Assurance et de Réassurance.
- **CAAT** : Compagnie Algérienne des Assurances des Transports.
- **CAGEX** : Compagnie Algérienne d'assurance et de Garantie à l'Exportation.
- **CASH** : Compagnie d'Assurance des Hydrocarbures.
- **CCR** : Compagnie Centrale de Réassurance.
- **CIAR** : Compagnie Internationale d'Assurance et de Réassurance.
- **CNMA** : Caisse Nationale de Mutualité Agricole.
- **FNI** : Fond National d'Investissement.
- **GAM** : Société d'Assurance Méditerranéenne.
- **MAATEC** : Mutuelle Algérienne d'Assurance des Travailleurs de l'Education et de la Culture.
- **MACIF** :Mutuelle Assurance de Commerçons et Industriels de France.
- **SAA** : Société Algérienne des Assurances.
- **SGCI** : Société de Garantie des Crédits Immobiliers.
- **SPA** : Société Par Action.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le risque est un évènement futur, incertain et ne dépendant pas exclusivement de la volonté de l'assuré qui peut être aussi un évènement certain mais dont la date de survenance est inconnue(cf. [28]). Par définition, le risque est naît de l'aléa et peut être appréhendé grâce aux développements les plus avancés du calcul des probabilités qui permettent d'aborder les problèmes concrets de gestion du risque empruntés à l'actuariat. L'activité appelée " actuariat ", accomplie par des actuaires, consiste à faire des calculs de probabilités à partir des renseignements on données statistiques. Ces calculs sont le plus souvent destinés à établir des taux de primes d'assurance en tenant compte de la fréquence des risques courus.

L'assurance est, par définition, un système qui permet de prémunir un individu, une association ou une entreprise contre les conséquences financières et économiques liées à la survenance d'un risque particulier. Le moyen mis en œuvre par les organismes d'assurance pour les prémunir contre ce risque est de les associer à une communauté de personnes, qui cotise pour être en mesure d'indemniser ceux parmi ses membres qui subiraient des dommages matériels ou corporels en cas de réalisation du risque. L'assurance est donc un système de gestion des risques basé sur la notion de solidarité.

Depuis son apparition jusqu'à nos jours, l'assurance n'a cessé d'évoluer et de se développer parallèlement aux activités des individus. L'assurance se trouve impliquée dans tous les rouages de l'économie car, par ses mécanismes de compensation, elle rend acceptable la prise du risque incombant au progrès et, de ce fait, garantit aux individus et aux ménages la sécurité de leurs revenus et de leur patrimoine, évitant aux victimes des sinistres le risque de ruine et de misère. Mais que adviendrait-il de ces compagnies d'assurance lors-

qu'elles courent elles-mêmes un risque ?

L'étude des processus stochastiques a révolutionné la modélisation de plusieurs modèles financiers qui permet d'anticiper les évolutions futures des processus considérés. C'est donc l'approche stochastique et la théorie des probabilités avancée qui ont permis le développement de la théorie du risque en assurance. En effet, on utilise des processus stochastiques à temps discret ou continu afin de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance et de déterminer les montants à mettre en réserve pour faire face aux sinistres. Ces modèles stochastiques sont appelés modèles du risque.

Le modèle de risque est un outil de base pour les actuaires. A l'aide de ce processus, on définit plusieurs mesures du risque, en particulier, la probabilité de ruine qui est une caractéristique très importante mais qui ne possède malheureusement pas de formules explicites dans la plupart des modèles de risque. De nombreux résultats ont été démontrés dans la littérature, pour mieux décrire la réalité. Le modèle de risque classique fondé par Filip Lundberg, connu comme la base du fondement de la théorie du risque, a connu plusieurs généralisations, en particulier, le modèle de Sparre-Andersen.(cf. [5])

Les problèmes de ruine ont toujours été une partie importante des mathématiques actuarielles. Nous serons amenés à considérer une compagnie d'assurance qui veut investir une certaine somme d'argent dans une branche d'assurance. Cette compagnie va s'intéresser aux conditions de mise en place de cette assurance, comme la tarification, afin que le montant des indemnisations ne dépasse pas le capital. Il s'agit donc de modéliser le processus de l'assurance et de chercher à établir, suivant les paramètres de ce modèle, la probabilité de dépassement du capital, c'est-à-dire la ruine ou l'insolvabilité de la compagnie d'assurance.

Dans ce travail, nous allons considérer, l'activité provenant du côté purement assurance. Si pour cela la balance entre les réserves des sinistres tenant compte d'un capital initial et les primes d'assurance, Le modèle de risque, unidimensionnel, composé d'une seule branche d'assurance, est un modèle utilisé pour décrire ce mécanisme d'arrivée des sinistres et des montants des réclamations. Le modèle concerne l'assurance non-vie, c'est-à-dire, les assurances dommages par opposition aux assurances vie qui présentent d'autres problèmes et relèvent d'une autre modélisation.

Cette étude sera développée en trois étapes :

- 1- Il s'agit d'abord de présenter le mécanisme général de l'assurance qui demeure un secteur économique important en Algérie et comment travail au niveau des compagnie d'assurances et les tarifs.
- 2- Exposer une synthèse bibliographique sur la théorie de la ruine et la théorie du risque de façon générale.
- 3- Présenter quelques méthodes numériques d'estimation de la probabilité de ruine. En particulier, appliquer la méthode de Monte-Carlo sur des données réelles, de la branche d'assurance de RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa. L'objectif du travail est donc la réalisations De ce fait, d'une application concrète sur l'évolution de la richesse d'une branche d'assurance par l'approche stochastique et nous tenterons d'évaluer par la méthode de Monte-Carlo sa probabilité de ruine, c'est-à-dire, la probabilité que les dommages à payer aux assurés dépassent les cotisations, ce qui est connu comme un indicateur incontournable dans la théorie du risque.

Notre plan de travail se compose en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter des concepts et l'activité d'assurance en Algérie. Cette partie basé sur le non-actuaire qui pour ont ainsi mieux appréhender le cadre économique.

Le deuxième chapitre est consacré aux principes fondamentaux de la théorie du risque par l'approche stochastique, théorie dans laquelle les sciences actuarielles sont profondément ancrées, et essentiellement sur la théorie de la ruine. Il s'agira de présenter les principaux concepts et résultats de cette théorie appliqués aux modèles du risque unidimensionnels.

Le dernier chapitre concerne les bases de la théorie des statistiques utilisées dans la modélisation des risques en assurance et son application sur des données réel de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa.

Notre travail s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche induites à partir de l'étude réalisée.

Dans l'annexe, nous présenterions les différentes distributions qui modélisent le nombre et le montant des réclamations et quelques notion sur la transformée de Laplace.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DU SECTEUR D'ASSURANCE ET POSITION DU PROBLÈME

1.1 Historique de l'assurance en Algérie

Pendant toute la période coloniale, l'assurance en Algérie s'est confondue avec l'évolution de l'assurance en France. Cela conduit après l'indépendance à l'héritage des lois et des règlements antérieurs qui n'ont été abrogés qu'en 1975. Après cette période, de nouvelles lois sont apparues permettant à l'assurance en Algérie de connaître un nouvel essor.(cf. [15])

1.1.1 La période 1962 – 1989

Cette période a été caractérisée par une nationalisation et une spécialisation de l'activité d'assurance.

En 1963, les compagnies d'assurances étrangères se sont obligé de céder 10% de leurs portefeuilles au profit de la Compagnie Algérienne d'Assurance et de Réassurance (CAAR). Les compagnies étrangères ont refusé de céder à cette obligation, et ont arrêté toute activité d'assurance en Algérie. (cf. [18]) En 1964, outre la CAAR, les Sociétés algériennes d'assurances SAA (société Algéro-Egyptienne) avec la Société Tunisienne d'assurance et de Réassurance (STAR), sont les sociétés qui ont continué d'exercer leurs activités aux côtés de deux Mutuelles d'assurances, l'une pour les risques agricoles et l'autre pour les travailleurs de l'enseignement.

En 1966, l'Algérie indépendant institue le monopole de l'État sur les opérations d'assurance (l'ordonnance n^o 66 – 127 du 27 mai 1966). Les entreprises publiques nationalisées étaient : la CAAR, spécialisée dans les risque transports et industriels, et la SAA pour les risque automobiles, assurance de personnes et risques simples pendant la période de 1973 à 1989.

Depuis la création de la Campagne Centrale de Réassurance en 1975, une obligation a été fait aux compagnies d'effectuer l'intégralité de leur cessions au profit de la CCR.

En 1982, accentuation de la spécialisation avec la création de la CCAT qui s'est concentrée sur les risques de la branche transports, prenant une part de marché de la CAAR qui détenait le monopole sur les risques industriels.(cf. [8])

1.1.2 L'ouverture et la libéralisation du marché

L'Algérie connaît vers la fin des années 80, une série de réformes très importantes visant à introduire la transition d'une économie administrée à une économie de marché. (cf. [34])

L'ordonnance n^o 95 – 07 du 25 janvier 1995 supprime le monopole de l'État sur le marché d'assurance, permettant la naissance des compagnies privées. (cf. [15])

Enfin, c'est par ce texte que sont " réintroduits " les intermédiaires d'assurances (agents généraux et courtiers), disparus avec l'institution du monopole de l'État sur l'activité d'assurance.

En Février 2006, une nouvelle loi n^o 06 – 04 du 20 février 2006 cette nouvelle loi modifie l'ordonnance 95 – 07. Les principaux apports sont :

- Renforcement de l'activité en assurances de personnes.
- Généralisation de l'assurance de groupe.
- Réforme du droit du bénéficiaire.
- Création de la bancassurance.
- Séparation des activités des compagnies vie et non-vie.
- Renforcement de la sécurité financière.
- Création d'un fonds de garantie des assurés.
- Obligation de libération totale du capital pour agrément.
- Ouverture du marché aux succursales des sociétés d'assurances et/ou de réassurances étrangères.

- Institution d'une Commission de supervision des assurances chargée de :
 - 1- Veiller au respect, par les sociétés et intermédiaires d'assurances agréés, des dispositions législatives et réglementaires relatives à l'assurance et à la réassurance.
 - 2- S'assurer que ces sociétés tiennent et sont toujours en mesure de tenir les engagements qu'elles ont contracté à l'égard des assurés.
 - 3- Vérifier les informations sur l'origine des fonds servant à la constitution ou à l'augmentation du capital social de la société d'assurances et / ou de réassurance.

1.1.3 Quelques définitions

•Compagnie d'assurance

Une compagnie d'assurance est une entreprise qui fournit des services d'assurance à des clients qui deviennent des assurés. Les prestations d'assurance sont effectuées soit par des sociétés soit par des mutuelles. Une captive d'assurance n'est pas une compagnie d'assurance.

•Le sinistre

C'est la réalisation d'un événement prévu au contrat et susceptible d'entraîner la prise en charge financière du dommage par l'assureur.

La définition du sinistre est en fonction des risques couverts par exemple, la survenance d'un incendie entraînant des dommages constitue un sinistre, la réclamation du tiers en assurance responsabilité civile constitue un sinistre, etc.

•Le contrat d'assurance

L'article 2 de l'ordonnance n°95/07 du 25/01/1995 dit que l'assurance est, au sens de l'article 619 du code civil, un contrat par lequel l'assureur s'oblige, moyennant des primes ou autres versements pécuniaires, à fournir à l'assuré ou au tiers bénéficiaire au profit duquel l'assurance est souscrite, une somme d'argent, une rente ou une autre prestation pécuniaire, en cas de réalisation du risque prévu au contrat .(cf. [19])

•La réclamation

La réclamation dit aussi perte, est une somme déboursée pour les sinistres.(cf. [19])

•La réserve

Les réserves mentionnées par le plan comptable sectoriel des assurances(les réserves obligataires) :(cf. [32])

- Les réserves de capitalisation : Destinées à compenser la dépréciation des valeurs mobilières comprises dans l'actif de l'entreprise.
- Les réserves pour fluctuation de change : Destinées à prendre en charge les plus-values nettes des moins-values sur conversion des devises lors de l'inventaire.
- Les réserves pour remboursement de l'emprunt pour font d'établissement : Constituées lorsque le remboursement n'obéit pas l'annuité constante.

•Le risque

Le risque représente la probabilité de survenance du dommage contre lequel l'assuré cherche à se prémunir au moyen d'un contrat souscrit auprès d'un assureur.

•La prime

C'est la contrepartie que donne l'assuré à l'assureur en échange de la garantie qui lui est accordée. En d'autres termes, c'est le prix de la garantie. Elle peut être constante comme elle peut être variable d'un exercice à l'autre.

Il existe trois types de primes : la prime pure, nette et totale.(cf. [19])

1)La prime pure

C'est la prime permettant à l'assureur de régler les sinistres frappant la mutualité des assurés. Elle est également appelée (prime de risque) ou encore (prime d'équilibre).(cf. [18])

La prime pure est égale à la fréquence du risque multipliée par le coût moyen d'un sinistre.

$$pp = f \times cm,$$

où, pp représente prime pure, f c'est la fréquence et cm indique le coût moyen d'un sinistre.

2) La prime nette

C'est la prime figurant sur les tarifs des sociétés d'assurances. Elle est parfois appelée prime commerciale. Elle est égale à l'addition de la prime pure et des chargements permettant de couvrir les frais des acquisitions et de gestion du contrat.(cf. [18])

$$pn = pp + \text{chargements},$$

où, pn c'est la prime nette et pp représente prime pure.

3) La prime totale

C'est la prime payée par l'assuré. Elle est égale à l'addition de la prime nette, des frais accessoires et des taxes.(cf. [18])

$$pt = pn + fa + \text{taxes},$$

où, pt indique la prime totale et fa c'est les frais accessoires.

1.2 Les sociétés algériennes d'assurances

Les compagnies d'assurances et de réassurance sont au nombre de 21, où 10 sociétés sont publiques, 9 sociétés sont privées et 2 sont mutuelles.(cf. [35])

Sociétés publiques et le monopole public de la réassurance

Il existe quatre compagnies généralistes qui opèrent dans toutes les branches d'assurances, la CAAR, la SAA, la CAAT et la CASH. Les trois premières compagnies publiques ont créé trois filiales d'assurances de personnes en application de la loi 06/04 qui impose aux sociétés d'assurances de séparer les assurances de dommages et celles de personnes. Les trois sociétés en question sont : « TAAMINE LIFE ALGERIE » SPA, filiale de la CAAT : « CAARAMA assurance » SPA, filiale de la CAAR et « Société d'assurance de prévoyance et de santé » SPA, filiale issue du partenariat entre la SAA et la compagnie française MACIF : deux compagnies publiques sont spécialisées dans l'assurance du risque crédit : la CAGEX (assurance crédit à l'exportation) et la SGCI (assurance crédit à l'immobilier) ; une société publique de réassurance, la CCR, Compagnie centrale de réassurance, bénéficie des cessions préférentielles du marché et de la garantie de l'État.

Sociétés privées algériennes

Les sociétés privées d'assurance sont les suivantes :

- 2A, Algérienne des assurances.
- Alliance Assurances (société cotée sur la bourse d'Alger).
- CIAR, Compagnie internationale d'assurance et de réassurance et sa filiale d'assurance de personnes Macir-Vie.
- Salama Assurances (ex Al Baraka Oua Al Amane).
- TRUST Algeria.

Sociétés privées étrangères

Il existe trois sociétés étrangères :

- Axa Algérie qui a ouvert sa première agence en décembre 2011, et dispose de deux filiales (Dommages et Vie), en partenariat avec le FNI 36%, et la BEA 15% (filiale de l'entreprise française Axa).
- Cardif El Djazaïr, première société agréée spécialisée en assurances de personnes en Algérie (filiale de l'entreprise française BNP).
- GAM, Générale d'assurance méditerranéenne (appartenant au groupe ECP, société de capital-investissement panafricaine).

Sociétés mutuelles

les sociétés mutuelles qui existent sont :

- CNMA, mutuelle agricole, héritière de la mutualité agricole française, représente une part de 6% du marché .
- MAATEC, mutuelle des travailleurs de l'éducation nationale et de la culture.

1.3 Présentation de la société d'Assurance (SAA)

La SAA a été créée au lendemain de l'indépendance de l'Algérie en 12 décembre 1963, sous forme de société mixte, Algéro-Egyptienne. Ceci lui a valu des débuts difficiles, tant sur le plan de production que sur celui de la gestion. Les opérations ont débuté en Février 1964 avec un personnel égyptien et un personnel de base Algérien. Les problèmes

de gestion l'emportèrent beaucoup plus que les problèmes techniques, ce qui a entraîné un conflit interne aboutissant à des changements à la tête de l'entreprise. Ces changements amenèrent une algérianisation rapide de l'encadrement. Pendant ce temps, l'entreprise connaissait un chiffre d'affaires substantiel.

Sous le monopole, en 1966, la SAA n'emploiera plus quelques techniciens égyptiens pour assurer des tâches connait un développement de type classique.

Pour sortir la société de cette situation et lui donner un nouveau souffle, un changement est intervenu au niveau de la direction générale en 1972. A partir de là, la société devait connaître un développement rapide, marqué notamment par le progrès considérable de son chiffre d'affaires.

Développement eu pour effet de doubler le champ d'activité de la société en pratiquant d'autres formes d'assurances que l'assurance des personnes, assurance automobile, incendie et explosion(risque simple), le vol, le bris glace, les dégâts des eaux, la responsabilité civile à caractères familial, commercial et artisanal, les multirisques.

Consciente de la tâche qui lui est confiée de développer le marché des assurances, la SAA se devait aller au devant des assurés en luttant d'une manière permanente contre toutes les tentatives de centralisations bureaucratique qui ne pourraient que tenir son image de marque.

Actuellement, le réseau de distribution de la SAA est le plus dense ; il est réparti à travers toutes les régions du pays. Il est composé de 509 agences soutenues par 14 directions régionales dont 5 à l'ouest, 5 au centre et 4 à l'est, tournées essentiellement vers le marché dans l'optique d'une démarche de proximité vis-à-vis des clients. Les agences sont classées selon le chiffre d'affaires de type A, B et C.

1.3.1 Présentation de l'Agence 3201 Béjaia

Le siège de la société est situé à Alger. En Algérie il ont rangé les directions régionales 5 ou Centre et 5 a Ouest et pour Est il y a 5 directions . Au niveau de la direction Est on a 3 directions régionales avec une autre a Sétif . La direction de Sétif possède 51 agence 50 Agences de type A,B,C et une Agence 3201 de type A, cette dernière fournie a son tour avec 3 services :

- Service automobile.
- Service risque divers

1. Risques divers agricoles.
2. Risques divers particuliers.
3. Assurance des personnes.
4. Automobile.

Service comptabilité.

Organisation de l'Agence 3201 Béjaïa

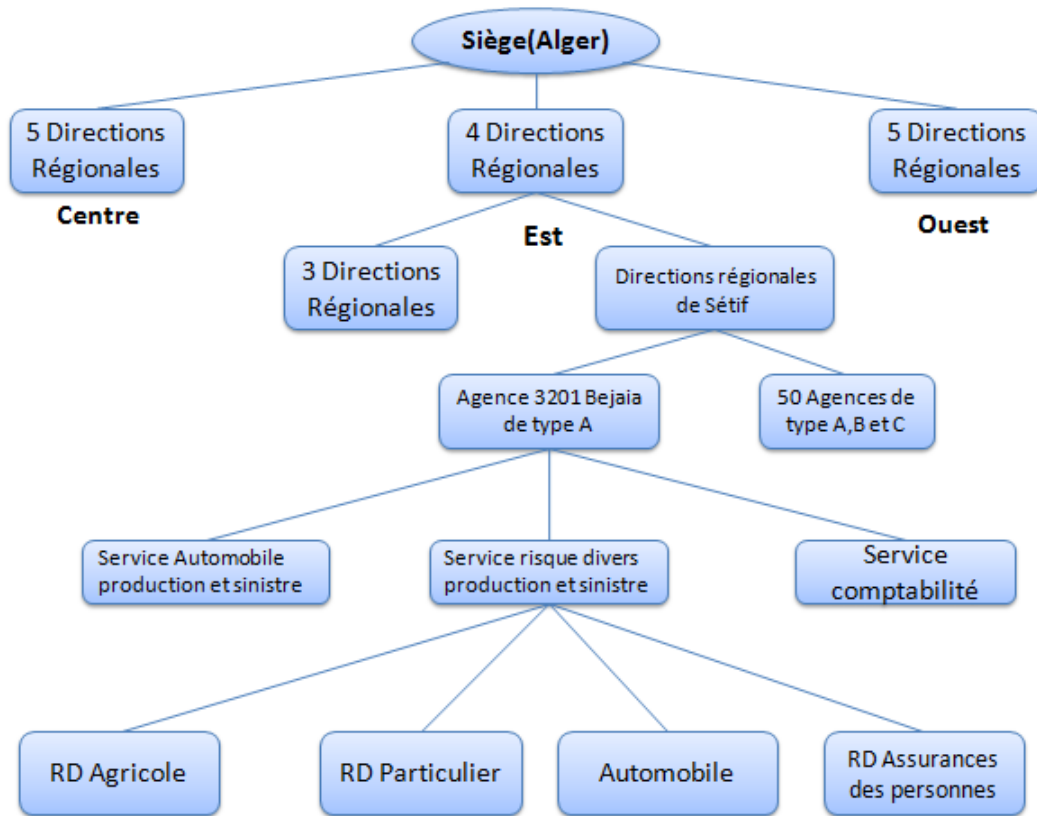


FIGURE 1.1 – Organisation de l'agence 3201 Béjaïa

1.3.2 Les différentes types d'assurance

Les différentes garanties prises en charge par l'agence sont les suivantes :

- 1 Assurance automobile, risque simple et les flottes.
- 2 Assurance de personnes.
- 3 Assurance incendie et éléments naturels.
- 4 Assurance de responsabilités civiles générales.
- 5 Assurance transport.

1.3.3 Assurance automobile

Une assurance automobile est obligatoire pour tout propriétaire d'un véhicule automobile. L'assurance automobile couvre un véhicule et ceux qui le conduisent. Généralement, désigne le principal utilisateur du véhicule comme conducteur principal et les autres, comme conducteurs occasionnels. Pour établir la prime, l'assureur tiendra compte de l'expérience de sinistre du conducteur principal ainsi que de celle des autres conducteurs. la législation algérienne en vigueur, oblige le propriétaire d'un véhicule, personne morale ou physique, de l'assurer chez une compagnie d'assurance agréée par l'état. Il existe plusieurs types de garanties, nous allons citer les plus connues :(cf. [43])

Garantie de responsabilité civil (RC)

C'est une assurance obligatoire la responsabilité civile couvre qui l'on appelle "les prestations civiles " de personnes tierces. d'autre parton dit l'assureur paie à votre place les frais occasionnés aux autres lors d'un accident dont vous portez la responsabilité. dans le cadre de cette branche de garantie, ces frais peuvent concerner les lésions corporels (mort, blessure), ou les dégâts matériels.

Au même temps, elle ne remboursera pas les dommages de votre voiture, même si elle est conduite par quelqu'un d'autre aussi elle ne couvrira pas vos lésions corporelles si vous conduisez et que vous êtes fautifs sauf en cas d'incapacité supérieure à 50%.

Donc est une assurance de dommage, a caractère indemnitaire dont l'objet est la dette de responsabilité de l'assuré envers la tierce victime.cela vos dire que lorsque un individu s'assure il s'engage par l'intermédiaire de la compagnie d'assurance à indemniser une victime .

Garantie des dommages causés au véhicule assuré

En cas de collision avec un autre véhicule, de choc contre un corps fixe ou mobile, ou de renversement sans collision préalable, du véhicule assuré, sont garantis :

- 1 L'indemnisation des dommages, qui cet événement aura causé au véhicule assuré ou aux accessoires ou pièces de rechange prévues dans le catalogue du constructeur.
- 2 Est compris dans la garantie le paiement de la réparation des dommages causé par : hautes eaux, inondations, éboulement de rochers, chutes de pierres, glissement de terrains et grêle à l'exclusion de tout autre cataclysme.

Garantie de dommage et collision

En cas de collision survenant hors des garages, remises ou propriétés, occupés par l'assuré, entre le véhicule assuré et, soit un piéton identifié, soit un véhicule ou un animal domestique appartenant à un tiers identifié, la société garantit, à l'assuré, le paiement.

Garantie de bris de glaces

La société garantit, à l'assuré, la réparation ou l'indemnisation des dommages causés, au véhicule assuré, à la suite d'un bris :

- du pare brise.
- de la lunette arrière.
- de la lunette du toit ouvrant.
- des glaces latérales.
- des glaces des rétroviseurs latéraux.

La garantie joue indifféremment que le véhicule soit en mouvement ou à l'arrêt.

Garantie de vole

En cas de vol ou de tentative de vol, et si des dommages en sont résultés, la SAA rembourse tous les frais engagés après l'accord préalable, notamment en cas de disparition ou de détérioration du véhicule.

Garantie d'incendie et expositions

Sont garantis les dommages subis par véhicule assuré et par les accessoires et les pièces de rechange dont le catalogue du constructeur prévoit la livraison en même temps que

le véhicule, lorsque ces dommages résultent de l'un des événements suivants : incendie, combustion spontanée, chute de la foudre et explosions à l'exclusion des dommages occasionnés par tout explosif transporté illégalement ou n'ayant pas été déclaré préalablement à l'assureur.

Garantie défense et recours

Cette garantie permet à l'assuré qui l'achète d'obtenir le remboursement des frais d'enquête, d'expertise, et de constitution d'avocat engagé en vue :

- Soit d'obtenir la réparation des dommages matériels subis par les objets transportés ou de dommages corporels.
- Soit pour se défendre en cas d'action en justice exercée contre lui.

Garanties contractuelles

Ces garanties permettent d'accorder au souscripteur des garanties contractuelles ainsi qu'aux membres transportés de sa famille. Il s'agit des garanties suivantes :

- 1 En cas de décès, dans ce cas l'assureur s'engage à verser le capital prévu aux conditions particulières.
- 2 En cas d'infirmité permanente, c'est à dire lorsque les personnes transportées sont atteintes d'une incapacité donnée, l'assureur s'engage à verser une indemnité égale au produit du capital garanti par le taux d'incapacité qui est calculé comme suit :
$$\text{capital} \times \text{taux d'invalidité.}$$
- 3 Frais de traitement, c'est à dire qu'ils permettent de rembourser à l'assuré tous les frais médicaux pharmaceutique ..., à condition de les justifier par les pièces légales requises.

Disposition spéciale relative au secours des blessés de la route

Même si le contrat ne comporte aucune des garanties dommages éprouvés par le véhicule, la société rembourse à l'assuré les frais réellement engagés par lui, pour le nettoyage ou la remise en état de effets vestimentaires, de ceux des personnes l'accompagnant et des garnitures intérieures du véhicule lorsque ces frais sont la conséquence directe de dommages résultant du transport bénévole et gratuit d'une personne blessée lors d'un accident de la route.

Présentation du tarif Défense et recours

Le tarif automobile consiste un instrument de travail indisponible pour les réduction en agences.

Les critères retenus pour la tarification de la RC automobile

Tout tarifs des différent garanties est base toujours sur le tarif du garantie du responsabilité civil. l'octroi de la couverture nécessite certains renseignement propres aux véhicule à couvrir :

1. L'usage : traditionnellement les assureurs distinguent entre les usages privés.
Il existe 7 code usage.

Code	Désignation
0	Affaire
1	Fonctionnaire
2	Commerce, Auto-école
3	Taxi, Location.
4	Transport public de marchandises TPM
5	Transport public de voyageurs TPV
6	Véhicules spéciaux

FIGURE 1.2 – Code usage

2. La zone circulation : La tarification peut être différente selon la zone dans laquelle le véhicule est amené à circuler. L'intensité du trafic routier influe sur la fréquence des accidents.

Nous avons deux codes :

- a : Zone Nord.
- b : Zone sud.

3. Le genre : les véhicules sont classés par catégories ou genres. Chaque assureur peut créer ses propres catégories et sous catégories de véhicules.

Il y a environ 32 code, nous donnons les plus fréquents :

Code	Désignation
00	Véhicules particuliers sans remorques
01	Remorque et véhicules particuliers
02	Motocyclettes sans side-cars jusqu'à 125cm³
03	Side-cars, triporteurs
05	Cyclomoteurs jusqu'à 50 cm³
30	Véhicules dont le poids excède 3.5 tonnes
31	Remorque dont le poids total excède 3.5 tonnes
32	Transport publique de marchandises (TPM) dont la charge utile est supérieure à 2 tonnes
33	Remorque TPM
34	Transport publique voyageur
38	Tracteurs forestiers
45	Engins de chantiers-matériel de transport public avec utilisation sur la voie publique

FIGURE 1.3 – Code de genre

Ils excites autres critères en jeu pour situer la catégorie de tarification à appliquer, il s'agit :

1. De la puissance fiscale du véhicule de la cylindrée ou de tonnage.
2. De la valeur du véhicule.
3. De la durée de couverture.

Ses catégorie défini la puissance de la voiture. Les différent code existe :

Code	Désignation
0	<5CV
1	Entre 5 et 6
2	Entre 7 et 10
3	>11

FIGURE 1.4 – Code de puissance

A partir de ces donnée, le producteur définie le tarif du garantie.

Code genre	Code zone	Code usage	Code puissance
------------	-----------	------------	----------------

FIGURE 1.5 – Code Tarif

1.3.4 Position du problème

L'opération d'assurance a pour objectif le transfert total ou partiel des conséquences financières du risque subi par l'assuré vers une société d'assurance. Les dépenses prises en charge par la société peuvent correspondre soit à des indemnités à verser à des tiers au titre de la responsabilité (civile, professionnelle, ou autre) de l'assuré, soit à la réparation des dommages subis par ce dernier. Il sera donc dans l'intérêt des compagnies d'assurance d'obtenir le volume de production nécessaire afin d'éviter son insolvabilité.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude mathématique de modèles stochastiques, adaptés aux réserves financières allouées un portefeuille de contrats d'assurance non-vie d'une compagnie d'assurance.

Le secteur des assurances qui se développe de plus en plus en Algérie conduit les actuaires algériens à s'interroger sur la probabilité qu'un organisme d'assurance ne puisse plus disposer de fonds pour faire face aux montants des réclamations des sinistres. L'objectif de ce travail est de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance et d'évaluer sa probabilité de ruine, c'est-à-dire, la probabilité que les dommages à payer aux assurés dépassent les cotisations. La société algérienne d'assurance SAA a pris conscience de l'ampleur de ce problème. C'est pourquoi, nous envisageons d'évaluer la probabilité de ruine de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa en fonction du capital initial investi. L'un des outils les plus puissants pour comprendre l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance, l'équilibre à long terme des résultats de la compagnie d'assurance correspond à la notion mathématique de probabilité de ruine. Le concept de probabilité de ruine sera basé sur les modèles du risque qui relèvent de la théorie de la ruine.

Dans cette étude, nous allons essayer d'apporter quelques éléments de réponses aux questions posées. Ainsi, notre méthodologie de travail fait appel à une recherche bibliographique sur le thème d'une part, une collecte de données auprès de l'agence SAA 3201 de Béjaïa d'autre part et enfin, l'application des résultats de la théorie du risque et de la ruine à la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa, comment on peut résoudre ce problème?

Conclusion

Le marché des assurances a subi un développement rapide, si pour cela la compagnie d'assurance aura des difficultés économiques et d'établir une stratégie de concurrence.

CHAPITRE 2

MODÈLES DU RISQUE ET THÉORIE DE LA RUINE

2.1 Introduction

Le but la théorie du risque est l'analyse mathématique des fluctuations aléatoires dans les opération d'assurance. Une bonne partie des travaux sur la théorie du risque est divisée en deux grandes classes : l'étude du problème de la ruine et l'étude de certaines fonctions de répartition nécessaires pour analyser les fluctuations aléatoires d'une opération d'assurance. Le problème de la ruine suscite un grand intérêt, par exemple dans la question bien actuelle des marges de solvabilité.

2.2 L'introduction aux modèles probabilités du risque

Dans les demains de finances et d'assurance, les sciences actuarielles contient la théorie mathématique qui peut contribuer à promouvoir le développement des méthodes mathématiques les plus rationnelles dans la gestion du risque, dans ces domaines .(cf. [3]) L'actuaire est un spécialiste en l'application de statistique, notamment du calcul des probabilités, aux opérations de finance et d'assurance. Le rôle des actuaires dans les compagnies d'assurance est d'assurer la solvabilité de ces sociétés. La théorie du risque appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance. Il s'agit de l'étude mathématique de modèles stochastiques et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance de type non-vie d'une compagnie d'assurance.

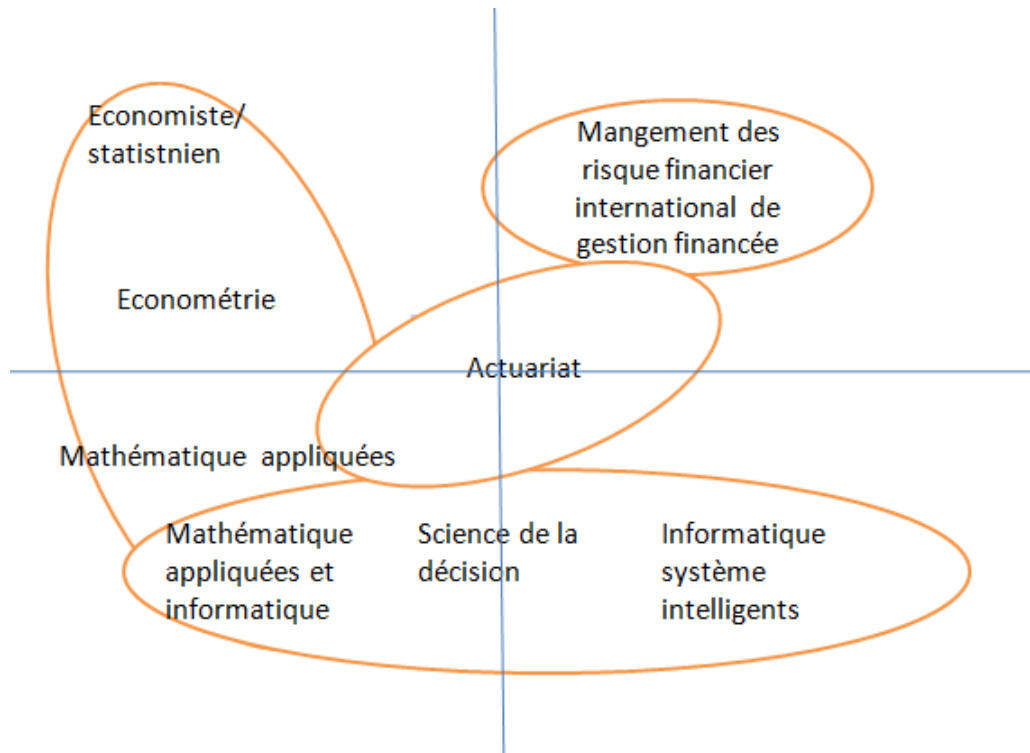


FIGURE 2.1 – Actuaire : Métier pluridisciplinaire
(cf. [4])

2.2.1 Modèle individuel et Modèle collectif

Dans cette cellule, nous présentons deux modèles de probabilités qui décrivent la charge totale des pertes (sinistres) selon deux concepts.

Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge totale générée par les sinistres individuels par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant n contrats est définie par la formule suivante :

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^n X_i,$$

où, X_i est une variable aléatoire positive qui indique le montant total des sinistres subit par l'assuré i sur la période d'observation. (cf. [42])

Considérons à présent q_i la probabilité que la police i produise au moins un sinistre sur la période et p_i celle qu'elle n'en produise aucun.

Si $F_i(x) = P(X_i \leq x)$ désigne la fonction de répartition de X_i , on a donc : $F_i(0) = p_i < 1$.

Si $G_i(x) = P(X_i \leq x | X_i > 0)$ est la fonction de répartition de la charge des sinistres relative à la police i sachant que celle-ci a produit au moins un sinistre, on obtient les relations suivantes entre $F_i(x)$ et $G_i(x)$:

$$F_i(x) = p_i \mathbf{1}_{x \geq 0} + q_i G_i(x), x > 0$$

$$G_i(x) = \frac{F_i(x) - F_i(0)}{1 - F_i(0)}$$

Nous avons, les deux premiers moments de la charge globale des sinistres à savoir l'espérance et la variance de S^{Ind} s'expriment aisément en fonction des deux premiers moments des montants de sinistres par contrat :

$$E[S^{Ind}] = \sum_{i=1}^n E[X_i], \quad (2.1)$$

et

$$Var[S^{Ind}] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]. \quad (2.2)$$

Le montant de sinistre X_i engendré par la police i peut s'exprimer sous la forme

$$X_i = I_i Y_i.$$

Où I_i vaut 1 si la police i a été touchée par au moins un sinistre, 0 sinon et Y_i représente la somme des montants de sinistres qui ont touché la police i si au moins un sinistre est survenu.

Les variables aléatoires $I_1, I_2, \dots, I_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont supposées mutuellement indépendantes. Sous cette hypothèse, le montant de la prime pure est donné par

$$E[X_i] = E[I_i]E[Y_i].$$

Sous l'hypothèse d'indépendance, en notant B^{Ind} la fonction de répartition de S^{Ind} , on a

$$B^{Ind} = F_{12} \times \dots \times F_n.$$

Cette fonction de répartition est toutefois difficile à calculer. Le passage au modèle collectif va permettre de l'approcher. (cf. [42])

Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale des sinistres, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre tout assuré confondue, cette charge est définie par :

$$S^{Col} = \sum_{i=1}^N X_i,$$

où X_i représente le montant de la $i^{\text{ème}}$ perte et N est une variable aléatoire de nombre de pertes.

Remarque 1.1 On parle de modèle collectif car on associe la même loi de probabilité pour les pertes. Par conséquent, le modèle individuel avec les pertes de même loi de probabilité est un cas particulier du modèle collectif quand N est une constante :

$$P(N = n) = 1. \text{ (cf. [27])}$$

2.2.2 Le modèle du risque classique

Le processus de la réserve $\{R(t); t \geq 0\}$ est défini par l'équation suivant :

$$R(t) = u + ct - Z(t), \forall t \geq 0, \quad (2.3)$$

où

- u : est la réserve initiale de la compagnie d'assurance.
- c : est la prime ou le taux de cotisation par unité de temps.
- $Z(t)$: est le processus de pertes agrégées avec $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, et X_i le montant de la $i^{\text{ème}}$ réclamations $\{N(t); t \geq 0\}$ où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ .
- On définit également le processus de risque $\{S(t); t \geq 0\}$ par l'équation suivante :

$$S(t) = u - R(t), \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

,

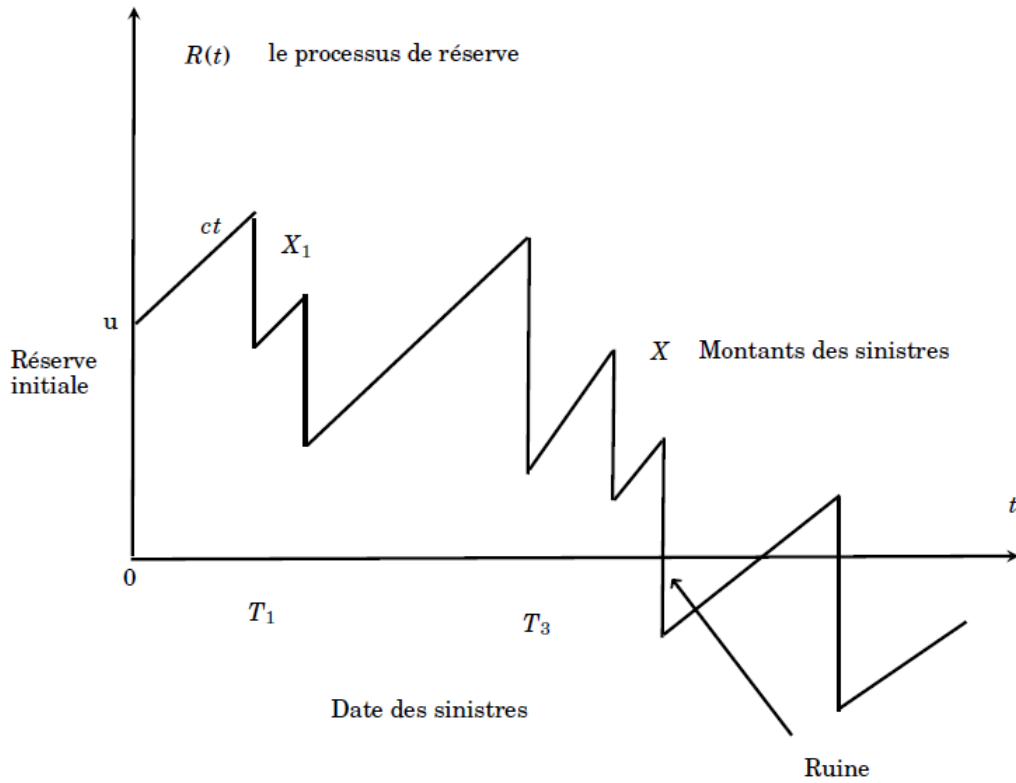


FIGURE 2.2 – Évolution du processus de réserve au cours du temps

Remarque

Il y a une relation de corrélation directe entre $R(t)$ et $S(t)$, à chaque fois le réserve disent et le risque monté la figure suivant présent cette relation :

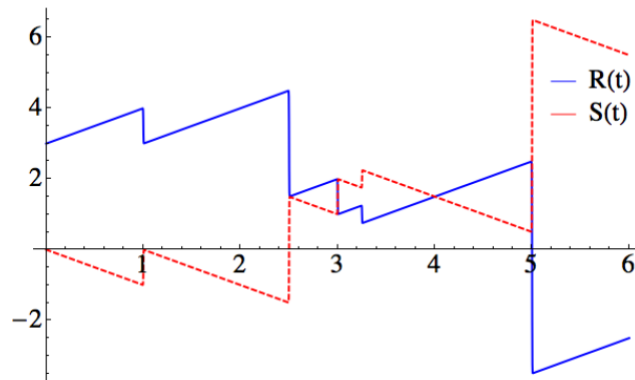


FIGURE 2.3 – Évolution du processus inverse

2.2.3 Probabilité de ruine

En se basant sur le processus $\{R(t); t \geq 0\}$ a fin de gérer la situation financière de la compagnie plusieurs mesure du risque est été développées. La mesure du risque la plus étudiée est la probabilité de la ruine.

Définition 1.2

La probabilité de ruine ultime ou en temps infinie, notée Ψ est défini par : (cf. [23])

$$\Psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 / R_0 = u). \quad (2.5)$$

C'est la probabilité que la compagnie tombé en état d'insolvabilité.

La Probabilité de ruine avant un instant T ou probabilité de ruine en temps fini est définie par :

$$\Psi(u, T) = P(\inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 / R(0) = u).$$

Les Probabilités complémentaires où probabilités de non-ruine en temps infini et fini sont définies respectivement par les relations suivantes :

$$\Phi(u) = 1 - \Psi(u), \quad (2.6)$$

et

$$\Phi(u, T) = 1 - \Psi(u, T). \quad (2.7)$$

Autres mesures du risque

En théorie de la ruine, les autres mesures du risque qui doit été étudiées sont :(cf. [3])

- L'instant de la ruine :

$$\tau(u) = \inf_{t \geq 0} X(t) < 0 / X(0) = u.$$

Par convention $\tau = +\infty$ si $X(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

- Le temps passé en dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement :

$$\tau'(u) - \tau(u) \text{ où } \tau'(u) = \inf_{t > \tau(u)} X(t) = 0.$$

- La sévérité maximale est donnée par :

$$\inf_{t > 0} X(t).$$

- La sévérité agrégée de la ruine jusqu'au rétablissement :

$$J(u) = \int_{\tau(u)}^{\tau'(u)} |X(t)| dt.$$

- Le temps total passé en-dessous de zéro :

$$T(u) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{X(t) < 0} dt.$$

Plus de détails sur ces mesures du risque sont donnés dans Asmussane et Loisel. (cf. [6][30])

Remarque

Le processus de Poisson composé $\{Z(t), t \geq 0\}$ est défini par :

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0, \quad (2.8)$$

Est une somme des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson. (cf. [7][2])

2.2.4 Modèle du risque classique (Cramèr-Lundberg)

Le modèle de Cramer-Lundberg (dit classique) est défini par le processus de la resserve $\{R(t), t \geq 0\}$ (cf. [11])

$$R(t) = u + ct - Z(t), t \geq 0. \quad (2.9)$$

Le modèle de Lundberg

Le modèle de Lundberg est un modèle de Cramer-Lendberg caractérisé par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est à dire,

$$F_X(y) = 1 - \exp\left\{-\frac{y}{\mu}\right\}, \forall y \geq 0,$$

où μ : est la moyenne des montants de réclamations.

Et $X_i, i \in N^*$ sont des variable aléatoire de même distribution F_x .(cf. [11])

Chargement du sécurité

On Considère le modèle du risque donnée la relation (2, 9) :

$$R(t) = u + ct - Z(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \forall t \geq 0,$$

On a :(cf. [13])

$$E(R(t)) = u + ct - \lambda\mu t,$$

est la réserve moyenne de la compagnie d'assurance.

$$R_{T_n} = u + cT_n - Z_{T_n} = u - \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i)$$

avec T_{nn} sont les instants où la ruine peut se produire, il s'agit des instants d'arriver des réclamations.

Dans ce cas, on peut réécrire la probabilité de ruine comme suit :

$$\Psi(u) = 1 - P \left\{ \max_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i) \leq \mu \right\}$$

Par la loi des grands nombres on a, $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - cT_i)}{n}$ converge presque surement vers :

$$E(X_1 - cT_1) = \mu - \left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

Si $\lambda\mu > c$, qui converge presque surement vers $+\infty$ alors la ruine est presque sure (ou certaine).

Par contre si $\lambda\mu < c$, on a converge presque sure vers $-\infty$ dans ce cas la ruine n'est pas presque sure.

Autrement dit, $\lambda\mu < c$ et la condition de non ruine certaine de la compagnie d'assurance. Par conséquent on peut définir le chargement de sécurité relatif par

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1,$$

qui doit être donc positif.

Quelque résultats d'évaluation de la probabilité de ruine

Dans cette partie, on s'intéresse sur quelques résultats à l'évaluation de la probabilité de ruine en temps infini. (cf. [9])

a) Approximation de Cramér-Lundberg

Soit $\Psi(u)$, avec $u \geq 0$ la probabilité de ruine du modèle (2, 9) en temps infini. on suppose que le chargement de sécurité relatif $\theta = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} > 1$. On note $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ avec F la fonction de répartition des montants des réclamations.(cf. [25])

En utilisant les arguments de renouvellement et sous les conditions liées au temps et au montant de la premier réclamation on a : (cf. [22])

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \Psi(u-y) \bar{F}(y) dy. \quad (2.10)$$

Il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cela signifie que, sous certaines condition, on peut obtenir quelques approximations de cette mesure du risque. Les premiers travaux sur ces approximations ont été réalisés par Cramer-Lundberg en 1930. La condition Cramer-Lundberg stimule l'existence d'une constante $k > 0$ satisfaisant l'équation de Lundberg suivante : (cf. [27])

$$\int_0^\infty e^{kx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda},$$

qui est équivalente à :

$$\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = 1 + \theta,$$

où $G(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x s^{ks} \bar{F}(y) dy$ est la distribution équilibrée de F .

Supposons que l'équation $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = 1 + \theta$ est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine dans le modèle Cramér-Lundberg vérifie la relation suivante :

$$\Psi(u) \sim \frac{\theta u}{k \int_0^\infty y e^{ky} \bar{F}(y) dy} e^{-ku} \text{ quand } u \rightarrow \infty.$$

Si $\int_0^\infty x e^{kx} dG < \infty$,

avec $a(x) \sim b(x)$ quand $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$.

Dans le cas où $\int_0^\infty x e^{kx} dG = \infty$, on a

$$\Psi(u) = o(e^{-ku}) \text{ quand } u \rightarrow \infty$$

De plus, on a l'inégalité de Lundberg donnée par :

$$\Psi(u) \leq e^{-ku}, u \geq 0. \quad (2.11)$$

Approximations Modèle Lundberg

Dans le modèle de Lundberg, on a

$\bar{F}(x) = \exp\left\{-\frac{x}{\mu}\right\}$, $x \geq 0$, c'est à dire, la distribution des montants de réclamation dans le modèle de Lundberg est exponentielle, on aura la formule explicite de la probabilité de ruine : (cf. [25])

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\frac{\theta u}{\mu(1+\theta)}\right\}. \quad (2.12)$$

b) Borne de Lundberg

L'inégalité de Lundberg garantit que la probabilité à horizon infini est bornée par une fonction qui réduit d'une façon exponentielle en fonction de capital initial, avec θ qui présente le coefficient d'ajustement existe et $\theta > 0, u \geq 0$ alors : (cf. [40])

$$a_- \exp\{-\theta u\} \leq \Psi(u) \leq a_+ \exp\{-\theta u\} \quad (2.13)$$

où

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\theta x} \int_x^\infty (1-F_X(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\theta y} (1-F_X(y)) dy},$$

et

$$a_+ = \sup_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\theta x} \int_x^\infty (1-F_X(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\theta y} (1-F_X(y)) dy},$$

c) Formule de Pollaczak-Khinchine

On la formule de Pollaczak-Khinchine la formule suivant :

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \bar{F}_X^{s* n}(u),$$

où

$$\overline{F_X^s}^{*n}(u) = 1 - (F_X^s)^{*n}.$$

et $(F_X^s)^{*n}$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de la fonction de distribution $F_X^s(x)$ est qui égale à l'expression :

$$F_X^s(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy, x \geq 0.$$

La formule $\Psi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{c}) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda\mu}{c})^n \overline{F_X^s}^{*n}(u)$ est appelée formule de Pollaczkaek-Khinchine ou encore formule de Beehan.(cf. [37])

La représentation en série infinie donnée dans $\Psi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{c}) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda\mu}{c})^n \overline{F_X^s}^{*n}(u)$ est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des approximations numériques de la probabilité de ruine (u), telle que l'algorithme de Panjer. (cf. [37])

La formule de Pollaczkaek-Khinchine dans le modèle de Lendberg

En utilisant la formule de Pollaczkaek-Khinchine pour des montants de réclamations de distribution exponentielle et de moyenne μ , on obtient la formule explicite de la probabilité de ruine en temps infini :

$$\Psi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{c}) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda\mu}{c})^n \overline{(F_X^s)^{*n}}(u).$$

Pour des montants de réclamations exponentiels de paramètre $\frac{1}{\mu}$, nous avons

$$F_X(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{u}{\mu}} & \text{si } u \geq 0, \\ 0 & \text{Si non.} \end{cases}$$

Calculons $F_X^s(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy, u \geq 0$

$$F_X^s(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \frac{1}{\mu} \left(\frac{-1}{\frac{1}{\mu}} \right) \left[e^{-\frac{y}{\mu}} \right]_0^u = 1 - e^{-\frac{u}{\mu}}.$$

Ainsi, $F_{X(u)}^s = F_X(u), u \in \mathfrak{R}$ et $(F_X^s)^{*n}$ représente la $n^{\text{ème}}$ convolution de F_X^s .(cf. [35])

Puisque nous avons l'indépendance des n variables aléatoires $X_i, i = \overline{1, n}$, de distribution comme $(\frac{1}{\mu})$ et que $F_X^s = F_X$, alors $(F_X^s)^{*n}$ est la fonction de répartition de la somme des n variables aléatoires $X_i, i = \overline{1, n}$. Nous utiliserons les transformées de Laplace afin de déterminer $(F_X^s)^{*n}$.

$\hat{L}_{(F_X^s)^{*n}} = [\hat{L}_{(F_X^s)}]^n$, ou encore $\hat{L}_{(f_X^s)^{*n}} = [\hat{L}_{(f_X^s)}]^n$, où f_X est la densité de probabilité des montants de réclamations $X_i, i = 1, \dots, n$. Ainsi ,

$$\hat{L}_{(F_X^s)}(x) = \int_0^\infty f_x(t)e^{-xt}dt = \int_0^\infty \frac{1}{\mu}e^{-(\frac{1}{\mu})t}dt = \frac{1}{1+\mu x}.$$

En utilisant la table des transformées de Laplace , on trouve que (cf. [39])

$$(F_X^s)^{*n}(x) = \frac{\frac{1}{\mu}(\frac{1}{\mu}x)^{n-1}}{(n-1)!}, x \geq 0,$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'Erlang $(\frac{1}{\mu}, n)$ dont la fonction de répartition est donnée par

$$(F_X^s)^{*n}(x) = \Gamma(n, \frac{1}{\mu}x)(n-1)! = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu}x} \frac{(\frac{1}{\mu}x)^k}{k!}.$$

Ce résultat signifie que la somme de n variables indépendantes et de une distribution exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$ est une loi d'Erlang $(\frac{1}{\mu}, n)$, Alors

$$\overline{(F_X^s)^{*n}}(x) = 1 - (F_X^s)^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu}x} \frac{(\frac{1}{\mu}x)^k}{k!}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu}x} \frac{(\frac{1}{\mu}x)^k}{k!} \\ &= (1-\rho)e^{-\frac{1}{\mu}u} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{\mu}u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho)e^{-\frac{1}{\mu}u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{\mu}u)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \rho^n \\ &= (1-\rho)e^{-\frac{1}{\mu}u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{\mu}u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho} \\ &= \rho e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\rho u}{\mu})^k}{k!} \\ &= \rho e^{-\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}} u. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression explicite suivante de $\Psi(u)$:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right).$$

d) Montant des réclamations subexponentiel

Dans le cas des montants de réclamations à queues lourdes, le comportement asymptotique de $\psi(u)$ est différent de l'approximation de Gramer-Lendberg. Le résultat suivant présente une approximation de $\psi(u)$ dans le cas où la queue de distribution intégrée F_X^s est subexponentielle.

Théorème D'après la théorème des réclamations subexponentiel, on a :

Soit $\rho = \frac{\lambda\mu}{c}$ et supposons $F_X^s \in S = \{F : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F^{*n}}{F(x)} = 2\}$. Alors

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1-F_X^s(u)} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Donc la forme explicite de $\Psi(u)$ est :

$$\Psi(u) = \frac{\rho}{1-\rho}(1 - F_X^s(u))$$

Démonstration dans (cf. [41]).

e) Autres approches En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de large champs d'application dans les modèles du risque, d'autres approches ont été développées. Ces méthode détermination de la probabilité de ruine permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation stochastique se retrouvent dans d'autres domaines. Comme l'approche de Vylder, diffusion, le modèle perturbé par un mouvement Brownien, etc.

2.2.5 Modèle du Sparre-Andersen

On 1957 Sparre Andersen a proposé une généralisation du modèle du risque classique. Il dit que au lieu de supposer que le temps entre deux réclamation successives sont des variables aléatoire suivent une même loi exponentielle, il a conservé l'hypothèse d'indépendance tout en permettant que le temps entre les réclamation ait une distribution autre que la loi exponentielle. (cf. [5])

Ce modèle il est plus compliqué que le modèle dans le cas de Poisson composé, mais celui-ci est plus général pour modélisation de produits d'assurance. (cf. [1])

2.3 Méthode d'estimation

Il existe de nombreuses méthodes pour estimer un paramètre θ . Par exemple, la méthode des estimations graphiques à partir des graphes de probabilité, dans cette section, nous ne nous intéressons qu'aux deux méthodes d'estimation les plus usuelles, la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance.

Mais il faut d'abord définir précisément ce qu'une estimation et surtout un estimateur.

1) Définition d'un estimation

Pour estimer θ on ne dispose que des données x_1, \dots, x_n , donc une estimation de θ sera une fonction de ces observations.(cf. [20])

2.3.1 Estimation statistique

L'un des problèmes majeurs rencontrés en statistique est le problème suivant : On désire étudier une population de densité de probabilité $f(x, \theta)$, où la forme de f est connue mais dont on ne connaît pas la valeur du paramètre θ . Il suffit alors de trouver θ pour que la densité de probabilité $f(x, \theta)$ soit entièrement déterminée.

La méthode des moments

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n-échantillon issu d'une variable aléatoire X de densité $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ où : $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ sont des paramètres inconnus.

La méthode des moments consiste à estimer les paramètres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, en égalisant les moments empiriques calculés à partir de l'échantillon avec les moments théoriques de même ordre.

Soit $\mu'_r = E(X^r)$, $r = 1, 2, \dots, k$ moments d'ordre r de la population (théorique) et on note $M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$ moment empirique d'ordre r de l'échantillon. (cf. [10])

La méthode du maximum de vraisemblance

Le MLE consiste à choisir comme estimateur celui qui réalise le maximum strict de la vraisemblance de l'échantillon, on écrit : (cf. [36])

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, \tilde{\theta}) = \text{Sup}_{\theta \in \Theta} L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$$

Il faudrait alors résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\delta \log L(X, \theta)}{\delta \theta} = 0 \\ \frac{\delta^2 \log L(X, \theta)}{\delta \theta^2} < 0 \end{cases}$$

Remarque Maximiser $L(x, \theta)$ revient à maximiser $\log L(x, \theta)$. Il est plus commode de maximiser $\log L(x, \theta)$. (cf. [10])

Intervalle de confiance

Cette technique consiste à déterminer deux statistiques T_1 et T_2 en fonction de l'échantillon X_1, \dots, X_n tel que (cf. [4])

$$P [T_1 \leq \theta \leq T_2] = 1 - \alpha .$$

L'intervalle $[T_1, T_2]$ est appelé intervalle de confiance de θ de niveau $1 - \alpha$.

Soit T un estimateur de θ obtenu par une méthode d'estimation ponctuelle. Nous avons :

$$P [\theta - \xi_1 \leq T \leq \theta + \xi_2] = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(T - \xi_2) \leq \theta \leq T + \xi_1 = 1 - \alpha .$$

L'intervalle de confiance de θ est alors $[T - \xi_2, T + \xi_1]$. Il suffit donc de trouver ξ_1 et ξ_2 pour que l'intervalle de confiance de θ soit entièrement déterminé, ceci en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} P(T < \theta - \xi_1) = \frac{\alpha}{2} \\ P(T < \theta - \xi_2) = \frac{\alpha}{2} . \end{cases}$$

2.3.2 Testes statistiques

Un test statistique est une procédure de décision entre deux hypothèses concernant un ou plusieurs échantillons.

Test khi-deux

L'idée est de découper le domaine de la distribution en intervalles. Dans chaque intervalle, on calcule à partir de la loi spécifiée sous H_0 la fréquence théorique attendue. On compte ensuite combien d'observations l'on retrouve dans chaque intervalle. (cf. [16][45])

Après avoir découpé l'intervalle d'observation en k classes, on construit un indice d mesurant l'écart constaté entre les effectifs réels et les effectifs théoriques. Soit E l'étendue de l'échantillon et c l'amplitude de la classe où $c = \frac{E}{k}$.

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

où n_i = effectif observé dans la classe i .

n = effectif total observé.

p_i = probabilité d'obtenir une observation de la loi de probabilité théorique dans la classe i .

np_i = effectif théorique dans la classe i .

χ^2 suit asymptotiquement une loi de χ^2 à $k - q - 1$ degrés de liberté où q le nombre de paramètres à estimer de signification α .

La règle de décision est la suivante :

- Si $\chi_n^2 < \chi_{k-q-1}^2$ on accepte l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie.
- Si $\chi_n^2 > \chi_{k-q-1}^2$ on rejette l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie.

où χ_{c-q-1}^2 est la valeur tabulé du Khi-deux à $(cq1)$ degrés de liberté avec un niveau de signification α .

Test de Kolmogorov-Smirnov

L'idée du test est de comparer la fonction de distribution expérimentale à la fonction de répartition théorique. On mesure la différence maximale entre ces deux fonctions (en valeur absolue).(cf. [3][17])

On note :

$D_n = \max | F_n(x) - F_0(x) |$. Nous avons,

$$\Pr[D_n < d_{(n,\alpha)}] = 1 - \alpha,$$

où : α est le niveau de signification du test et $d_{(n,\alpha)}$ est le quantile tabulé du test de Kolmogorov-Smirnov.

La règle de décision est la suivante :

- si $D_n < d_{(n,\alpha)}$, on accepte l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie,
- si $D_n > d_{(n,\alpha)}$, on rejette l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie.

c) Tests d'indépendance

Ce test est un test bilatéral utilisé pour vérifier si les observations sont mutuellement indépendantes. On considère les données tel qu'elles sont collectées. On divise l'échantillon en deux classes :

- n_1 : le nombre d'observation dans la classe une (1).
- n_2 : le nombre d'observation dans la classe une (2).
- On enregistre un signe (+) si l'observation est dans la classe (1).
- On enregistre un signe (–) si l'observation est dans la classe (2).
- On compte le nombre r de séquence homogènes de (+) et (–).
- On définit un seuil de signification et on accepte H_0 : les observations sont indépendantes.
- Si r est compris entre les valeurs critiques lues sur la tables de Kolmogorov-Smirnov et Khi-deux si n_1 et $n_2 \leq 20$.

- Si n_1 ou $n_2 > 20$. On utilise le résultat suivant $r \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ou $\mu = \frac{2n_1n_2}{n} + 1$ et $\sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2n)}{n^2(n-1)}$. (cf. [22])

Dans notre étude, ces tests sont très utilisés pour vérifier l'indépendance entre le nombre et le montant des réclamations. (cf. [3])

2.4 Simulation de variable aléatoire

Nous présentons ici quelques méthodes classiques de simulation d'une variable aléatoire.

2.4.1 Inversion de la fonction de répartition

La méthode d'inversion est la plus simple des méthodes générales de simulation. Elle consiste à composer l'inverse de la fonction de répartition F de la distribution à simuler avec un générateur de la loi uniforme sur $[0, 1]$. F n'étant pas toujours inversible au sens classique, on définit son inverse de la façon suivante :

$$\forall u \in [0, 1], F^{-1}(u) = \inf \{x; F(x) \geq u\} .$$

De point de vue théorique, le principe de la méthode est justifié dans la proposition suivante :

Proposition 1.3. Soient F une fonction de répartition sur \mathfrak{R} et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors la variable aléatoire

$$X = F^{-1}(U),$$

a pour fonction de répartition F .

Cette proposition permet d'obtenir les formules analytiques utiles pour simuler un grand nombre de lois. (cf. [31])

2.4.2 Méthode de rejet

Le contexte est le suivant : on veut simuler une variable aléatoire X de densité f , mais f est trop compliquée pour que ceci puisse se faire directement. On dispose par contre d'une densité auxiliaire g telle que :

a- on peut simuler Y de densité g .

b- il existe une constante c telle que, pour tout y , $f(y) \leq cg(y)$.

c- pour tout y , on peut calculer le rapport $\frac{f(y)}{(cg(y))}$.

Considérons alors deux suites indépendantes de variables aléatoires :

a- $(Y_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de densité g .

b- $(U_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi uniforme.

Concrètement, Y correspond à une proposition et U à un tirage pile ou face pour décider si on accepte ou non cette proposition. Nous noterons r la fonction rapport d'acceptation pour le pile ou face, à savoir : $r(y) = \frac{f(y)}{(cg(y))}$ si $g(y) > 0$, $r(y) = 0$ sinon. Par ailleurs, f et g étant des densités, la constante c intervenant dans la majoration est bien entendu supérieure à 1 :

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} cg(x)dx = c \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = c.$$

Ceci étant acquis, le résultat suivant montre comment simuler suivant la densité f voulue.(cf. [24])

2.4.3 Vérification par histogramme

Quand on simule une variable aléatoire réelle à l'aide d'une des méthodes ci-dessus, on peut vérifier empiriquement que la loi simulée est bien celle que l'on voulait. Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité f (avec une dérivée f' vérifiant $\|f'\|_{\infty} < C$ pour une certaine constant C).

Pour tout $a < b$,

$$\frac{1}{n(b-a)} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(X_i) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{P(X_1 \in [a,b])}{b-a},$$

et $\frac{P(X_1 \in [a,b])}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{P(X_1 \in [a,b])}{b-a} - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) - f(a) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) - f(a) dt \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b C|t-a| dt \\ &\quad \xrightarrow[b \searrow a]{} \frac{C(b-a)}{2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc l'histogramme (correctement renormalisé) des n valeurs simulées X_1, X_2, \dots, X_n est proche de la densité f .(cf. [33])

2.4.4 Méthode Monte Carlo

La simulation Monte Carlo est une méthode numérique qui est utilisée lorsqu'il est difficile de déterminer la distribution d'un échantillon à partir d'un raisonnement

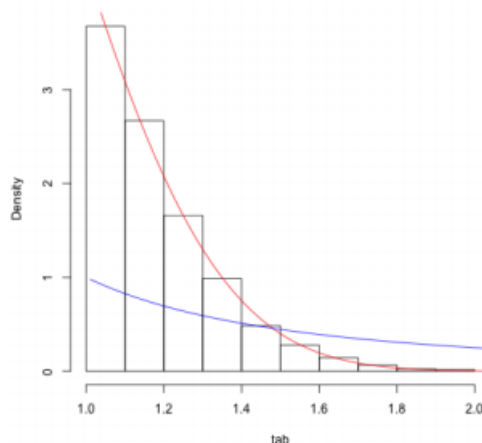


FIGURE 2.4 – Histogramme et densité

mathématique. Elle est basée sur le tirage de nombres aléatoires. Généralement, nous utilisons des séries de nombres pseudo-aléatoires générées par des algorithmes spécialisés. (cf. [31][27])

Cette méthode s'appuie sur la loi des grands nombres pour des sommes de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée :

Si X_i sont des v.a.i.i.d de loi g , et si $E(|f(X_1)|) < \infty$, alors

$$\bar{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} E(f(X_1)) = I = \int_E f(x) dg(x).$$

Ainsi, si l'on peut simuler des variables de loi g , pour avoir une approximation de I , il suffit de tirer un grand nombre de variables de loi g , et de calculer \bar{I}_n .

2.4.5 Méthode Importance sampling (Échantillonnage préférentiel)

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilité (\mathbb{R}^d, A, P) est de densité de probabilité f . (cf. [12])

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n échantillon issu de la variable aléatoire X , on cherche à calculer :

$$I = E[g(x)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx.$$

Soit maintenant, \tilde{f} la densité d'une autre loi de la probabilité tel que $\tilde{f} > 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x) = 1$.

Il est claire que $E[g(x)]$ peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(\mathbf{x})] &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx. \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \times \tilde{f}(x)dx \\
&= E \left[\frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \right] \\
&= E \left[\frac{g(y_i)f(y_i)}{\tilde{f}(y_i)} \right].
\end{aligned}$$

Si y est une variable aléatoire indépendants de la loi de probabilité \tilde{f} sur l'espace probabilité (\mathbb{R}^d, A, P) on estime I par :

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(y_i)f(y_i)}{\tilde{f}(y_i)},$$

et y_i sont des variable aléatoire indépendants de la loi de probabilité \tilde{f} . Le calcul de $E[g(x)]$ sur l'approximation $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(y_i)f(y_i)}{\tilde{f}(y_i)}$ sera plus efficace que l'approximation $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$ si $v = \left[\frac{g(y)f(y)}{\tilde{f}(y)} \right] \ll v[g(n)]$

Exemple

Estimer l'intégrale I par la méthode de l'échantillonnage préférentielle :

$$I = \int_0^2 x^2 dx.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \int_0^2 x^2 dx \\
&= \int_0^2 2x^2 \times \frac{1}{2} dx \\
&= E \left[2x^2 \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 2\}} \right].
\end{aligned}$$

Prenons : $g(x) = 2x^2 \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 2\}}$ et f est la densité de probabilité de la loi $U_{[0,2]}$ et \tilde{f} la densité de probabilité définie par :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 2\}} + \frac{4}{5} \mathbf{1}_{\{1 \leq x \leq 2\}}.$$

Donc l'écarte type théorique est :

$$\sigma_f^2 \left(\frac{g}{\tilde{f}} \right) = \int_0^2 \left(\frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \right)^2 \times \tilde{f}(x) dx - \int_0^2 \left(\frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \times \tilde{f}(x) dx \right)^2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \right)^2 \times \tilde{f}(x) dx &= \int_0^1 \frac{2x^2 * \frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} * \frac{1}{5} dx + \int_0^1 \frac{2x^2 * \frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} * \frac{4}{5} dx \\
&= \int_0^1 5x^4 dx + \int_1^2 \frac{5}{4} x^4 dx \\
&= x^5 \Big|_0^1 + \frac{x^5}{4} \Big|_1^2 = \frac{35}{4}. \\
\int_0^2 \left(\frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} \times \tilde{f}(x) dx \right)^2 &= \int_0^1 \frac{2x^2 * \frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} dx + \int_1^2 \frac{2x^2 * \frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} dx + \int_1^2 \frac{2x^2 \frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} \frac{4}{5} dx \\
&= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx \\
&= \int_0^2 x^2 dx \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

D'où l'écart type théorique :

$$\sigma_f \left(\frac{g_f}{f} \right) = \sqrt{\frac{59}{36}} \approx 1,28$$

on remarque qu'avec la méthode de la fonction d'importance, on réduit l'écart type de $I = \int_0^2 x^2 dx$ est $\sigma_f \left(\frac{g_f}{f} \right) = 1,28 < \sigma_f(y) = 2,38$.

Remarque

On peut simulé le modèle de réserve de la compagnie d'assurance par la méthode d'échantillonnage préférentiel comme ils sont fait P.Pudlo et F.Rousset dans (cf. [34])

2.4.6 Autre méthode de simulation de variable aléatoire

Ils existes d'autres méthodes de simulation qui peuvent-être utilisée pour simulé notre on site : La méthode de variable de contrôle pour obtenir une réduction de variance en exploitant la corrélation entre plusieurs statistique, la méthode variable antithétiques , la méthode des échantillonnage moyen et la méthode de stratification.

2.5 Conclusion

Le modèle de risque classique, connu comme une base de la théorie de la ruine. Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de la théorie de la ruine au sens exacte est des approximation de modèle du risque classique et le modèle de sparre-Andersen a la fin on a présenté quelque méthodes de simulation.

CHAPITRE 3

SIMULATION DE LA PROBABILITÉ DE RUINE DE LA BRANCHE RC AUTOMOBILE DE L'AGENCE SAA 3201 DE BEJAIA

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on modélise la réserve de la compagnie SAA 3201, et on calcule par la probabilité de ruine en utilisant une méthode de simulation pour faire une étude comparative, on calcule la probabilité de ruine on se basant sur des formules explicites existantes dans la littérature, et on compare avec celle obtenue avec simulation.

3.2 Modélisation de la réserve de la branche RC automobile

La modélisation de l'activité d'assurance qui base sur l'analyse des données de la branche considéré afin de substituer le système étudié par un modèle du risque. Cela, nous avons besoin de déterminer ses paramètres à savoir : la prime, le nombre et le montant des réclamations des sinistres.

En temps certaine, le processus décrivant l'évolution d'un portefeuille d'assurance est défini comme suit :

$$X(t) = u + \Pi(t) - R(t) = u + \Pi(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

où

u : la réserve initiale.

$\Pi(t)$: le volume des primes reçu chaque mois par la compagnie.

Z_i : les montants de sinistres.

$N(t)$: nombre de réclamations.

3.2.1 Collecte des données

Les données collectées s'étalent sur une période de deux ans, du 01/01/2017 au 31/12/2018 au sein de l'agence SAA 3201 de Béjaia. Pour modéliser la réserve de la branche RC automobile, nous nous sommes intéressées aux données suivantes :

La réserve initiale

Nous considérons la réserve initiale $u > 0$ de la branche RC automobile au 31 décembre 2016.

Le nombre de primes reçues (processus de comptage des primes)

On note $\{N'(t), t \geq 0\}$ le processus de comptage des primes reçues, pour tout t et $h \geq 0$ vérifie :

- $N'(0) = 0$,
- $N'(t) \in N$,
- $N'(t) \leq N'(t + h)$.

Sur la période fixée, nous avons compté 24 observations.

Le volume des primes

Soit c_i le montant de la $i^{\text{ème}}$ prime reçue. $\Pi(t)$ représente les recettes reçue jusqu'à l'instant t , si on suppose que la prime est constante alors : $\Pi(t) = ct$. c est le taux de prime mensuel qui sera estimé.

Le nombre de réclamations (processus de comptage des réclamations)

Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ modélise le nombre de réclamations tel que l'arrivée des réclamations est aléatoire. La durée de remboursement peut être de quelques jours, de quelques mois ou encore de plusieurs années. Il y a des cas où le sinistre ne peut être jamais remboursé s'il y a un manque dans son dossier de réclamation.

Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ vérifie pour tout $t, h \geq 0$:

- $N(0) = 0$,
- $N(t) \in N$,
- $N(t) \leq N(t + h)$.

$N(t + h) - N(t)$ représente le nombre de réclamations dans l'intervalle $]t, t + h]$, où t est donné en mois d'après la nature des données qui sont des résultats mensuels. Nous avons relevé un échantillon de 24 observations, correspondant aux 24 mois de la période d'étude.

5. Le montant des réclamations (indemnisations) des sinistres

Soit $Z_i > 0$ le montant de la $i^{\text{ème}}$ réclamation. La séquence $\{Z_i\}_{i \in N}$ est une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées de même fonction de répartition F_Z . Afin de simplifier le modèle du risque, nous supposons que les variables aléatoires Z_i sont indépendantes entre elles.

La variable aléatoire Z représente le montant des réclamations. Nous avons relevé un échantillon de 102 montants de réclamations.

3.2.2 Ajustement des données

Cette étape consiste à ajuster nos données sur le nombre et le montant des réclamations aussi le nombre et le volume des primes par des lois statistiques connues. L'estimation des paramètres des lois et l'ajustement des données sont effectués à l'aide du logiciel XLSTAT.

Ajustement des données du nombre de réclamations

Nous voulons montrer que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson afin d'obtenir le modèle du risque classique qui représente le modèle le plus facile à étudier.

Considérons le processus aléatoire $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de réclamations sur $]0, t]$ qui prend 24 observations. La démarche consiste à supposer que l'échantillon de $N(t)$ obéisse à la loi de Poisson. L'estimation du paramètre λt de la loi de Poisson a été réalisée par la méthode des moments. Le modèle est validé grâce au test d'ajustement de Khi^2 avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$.

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (3.1),

<i>Loi ajustée</i>	n	λ	Ddl	$d_{n,\alpha}$	<i>Décision</i>
<i>Poisson</i>	24	101.261	42	0.804	<i>Accepter</i>

TABLE 3.1 – Modélisation du nombre de réclamations par la loi de Poisson.

où

- n : Taille de l'échantillon,
- Ddl : Degré de liberté,
- $d_{n,\alpha}$: Quantile tabulé du test de Khi^2 avec un seuil de signification $\alpha = 0.05$
- λ : Nombre moyenne de réclamations par mois.

L'histogramme de l'ajustement de l'échantillon du nombre de réclamations par la loi de Poisson est représenté dans la figure (3.1).

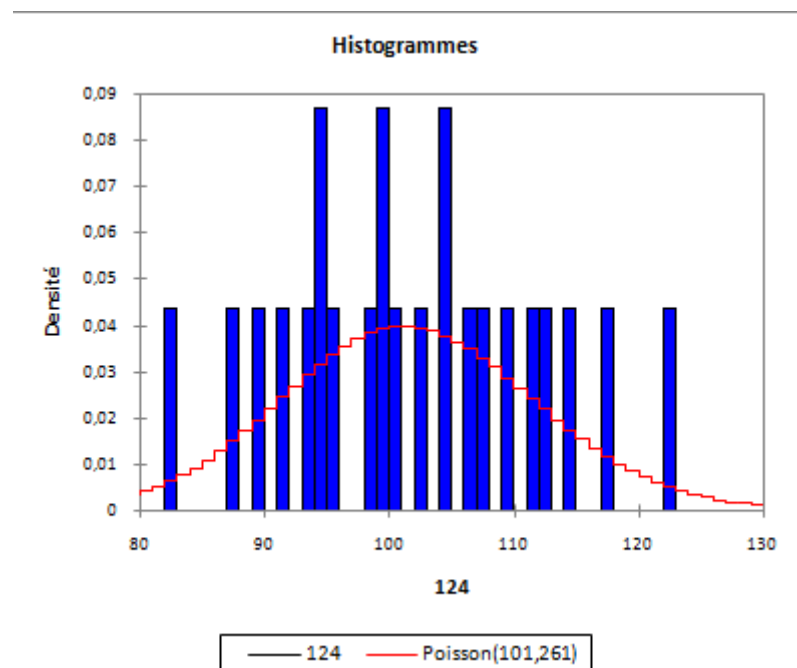


FIGURE 3.1 – Ajustement des données du nombre de réclamations par la loi de Poisson.

Nous avons constaté durant notre stage au niveau de l'agence SAA 3201 que :

- 1 Le nombre de réclamation sur un intervalle de temps dépend de la longueur de cette durée. On remarque que le nombre de réclamations sur l'axe de temps se déroulent presque avec la même fréquence durant toute l'année. Nous pouvons alors supposer que le nombre de réclamations $N(t)$ est homogène dans le temps.
- 2 Pour tout $t \in \{0, 1, 2, \dots, 24\}$, les variables aléatoires $N(t+h) - N(t)$ sont indépendantes. C'est-à-dire, il y a aucune relation entre le nombre de réclamations d'un mois et de l'autre.

D'après les points 1 et 2, nous pouvons conclure que le processus de comptage $\{N(t), t \neq 0\}$ est un processus de Poisson.

Ajustement des données du montant des réclamations

Après l'ajustement des données collecté concernant les montants des réclamation, les distributions retenus par le logiciel XLSTAT sont : la loi exponentielle et la loi de weibull et loi log normal.

1) la loi exponentielle : l'estimation du paramètre δ de la loi exponentielle a été réalisée par la méthode des moments en utilisant le logiciel XLSTAT. Le modèle est validé par le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (3.2),

<i>Loi ajustée</i>	<i>n</i>	<i>δ</i>	<i>D_{ks}</i>	<i>$d_{n,\alpha}$</i>	<i>Décision</i>
<i>Exponentielle</i>	102	5.66×10^{-7}	0.150	0.641	<i>Accepter</i>

TABLE 3.2 – Modélisation du montant des réclamations par la loi exponentielle.

où,

- δ : Paramètre de distribution exponentielle,
- D_{ks} : Statistique empirique du test de Kolmogorov-Smirnov.

L'histogramme de l'ajustement de l'échantillon du montant des réclamations par la loi exponentielle est représenté dans la figure (3.2).

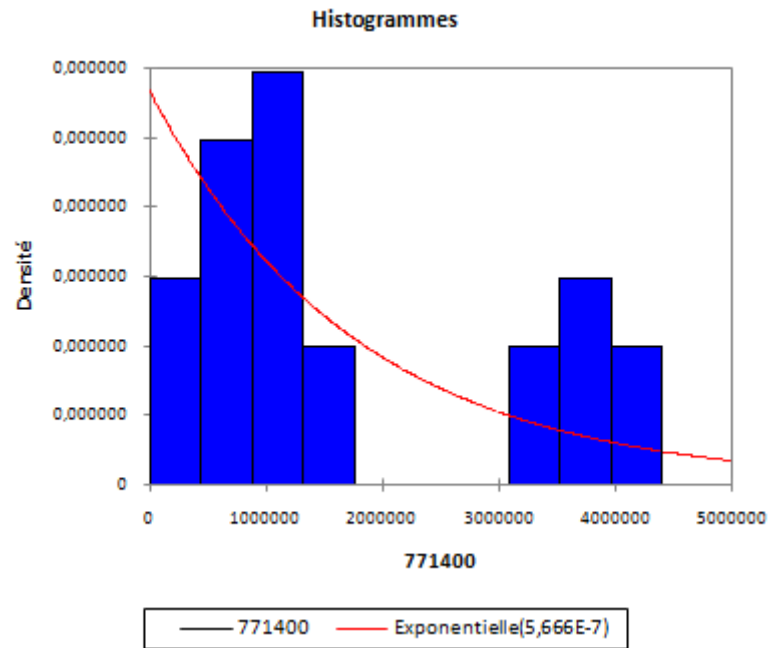


FIGURE 3.2 – Ajustement des données du nombre de réclamations par la loi exponentielle.

2) la loi de weibull : l'estimation du paramètres γ et β de la loi de weibull a été réalisée par la méthode des moments en utilisant le logiciel XLSTAT. Le modèle est validé par le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (3.3). L'histogramme

<i>Loi ajustée</i>	n	γ	β	D_{ks}	$d_{n,\alpha}$	<i>Décision</i>
<i>Weibull</i>	102	1866207.623	1.192	0.150	0.646	<i>Accepter</i>

TABLE 3.3 – Modélisation du montant des réclamations par la loi de Weibull.

de l'ajustement de l'échantillon du montant des réclamations par la loi de Weibull est représenté dans la figure (3.3).

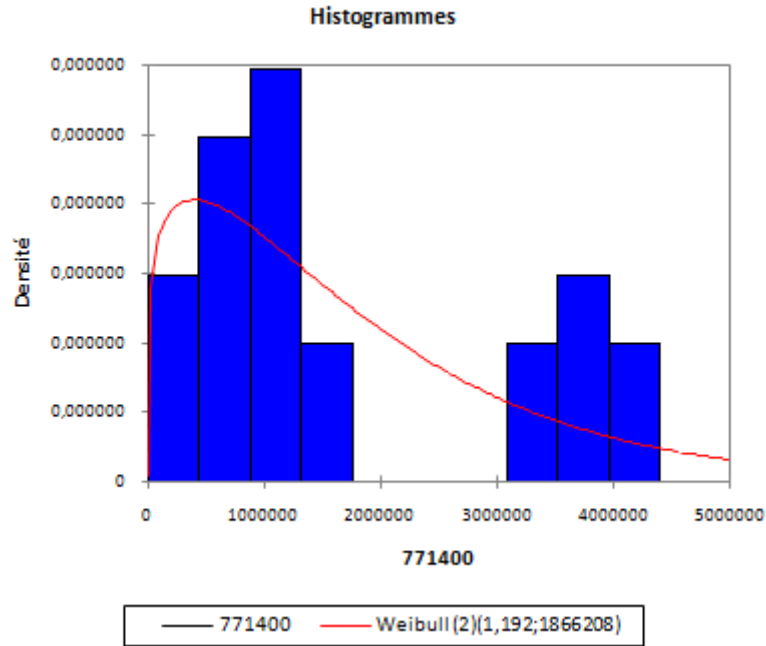


FIGURE 3.3 – Ajustement des données du montant des réclamations par la loi de Weibull.

3) **la loi de log-normale** : l'estimation du paramètres μ et σ de la loi de log-normale a été réalisée par la méthode des moments en utilisant le logiciel XLSTAT. Le modèle est validé par le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (3.4).

<i>Loi ajustée</i>	<i>n</i>	μ	σ	D_{ks}	$d_{n,\alpha}$	<i>Décision</i>
<i>Log – normale</i>	102	13.931	1.244	0.173	0.462	<i>Accepter</i>

TABLE 3.4 – Modélisation du montant des réclamations par la loi de Log-normale.

L'histogramme de l'ajustement de l'échantillon du montant des réclamations par la loi de Log-normale est représenté dans la figure (3.4).

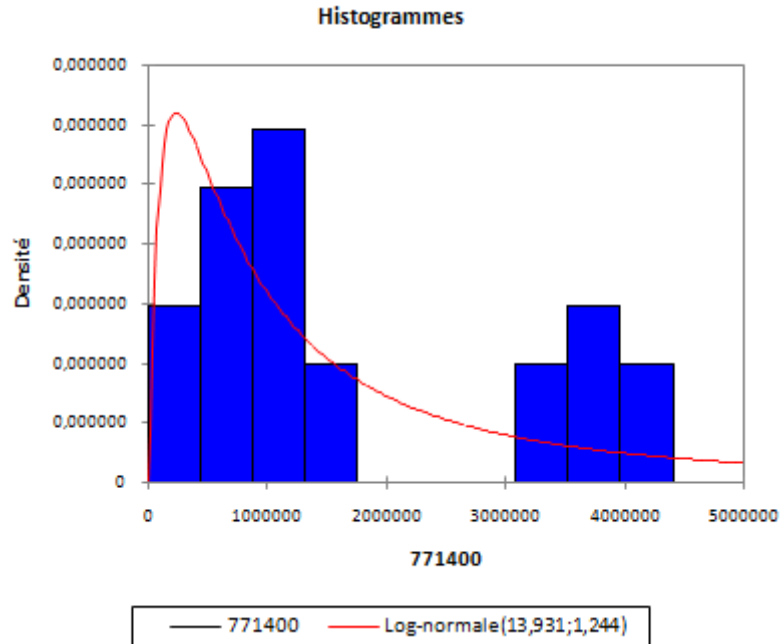


FIGURE 3.4 – Ajustement des données du montant des réclamations par la loi de Log-normale.

Ajustement du nombre de primes reçues

Soit N' la variable aléatoire du nombre de primes reçues, qui comprend 24 valeurs. L'estimation du paramètre $\lambda't$ a été réalisée par la méthode du moments, en utilisant le logiciel XLSTAT. La validation du modèle se fait avec le test d'ajustement de Khi^2 avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (3.5).

Loi ajustée	n	δ	Ddl	$d_{n,\alpha}$	Décision
Poisson	24	460,348	8	< 0.0001	Rejeter

TABLE 3.5 – Ajustement du nombre de primes reçues.

L'histogramme de l'ajustement de l'échantillon du nombre de primes reçues par la loi de Poisson est représenté dans la figure (3.5).

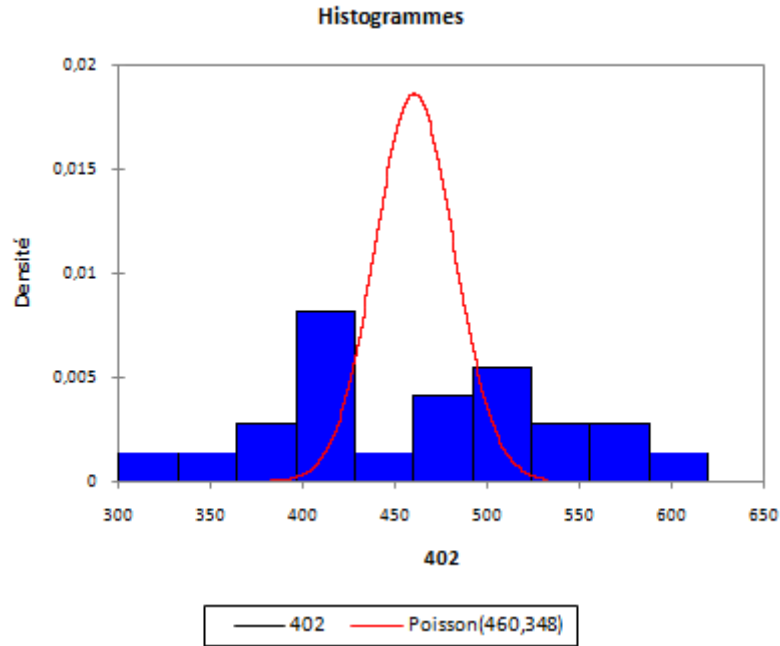


FIGURE 3.5 – Ajustement des données du nombre de primes reçues par la loi de Poisson.

Les conditions de processus de poisson n'est pas vérifié dans notre cas.

Ajustement du montant des primes

Puisque le processus de comptage des primes n'est pas un processus de Poisson, nous allons ajuster la prime à un taux mensuel constant. Pour ce faire, nous considérons le montant totale des primes reçues en chaque mois. Soit C la variable aléatoire représentant le total des primes pour chaque mois. Nous obtenons un échantillon de 24 observations en sommant pour chaque mois de la période d'étude, toutes les primes récoltées durant ce mois.

Nous allons tester l'hypothèse que C suive la loi normale des paramètres (μ, σ^2) , l'estimation des paramètres réalisée par la méthode des moments en utilisant le logiciel XLSTAT. Le modèle est validé grâce au test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 5\%$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (3.6).

Loi ajustée	n	Paramètre de la loi	D_{ks}	$d_{n,\alpha}$	Décision
Normale	24	$\mu = 944003.201, \sigma = 258423.108$	0.169	0.491	Accepter

TABLE 3.6 – Ajustement du montant total mensuel des primes reçues.

L'histogramme de l'ajustement de l'échantillon du montant de primes reçues par la loi Normale est représenté dans la figure (3.6).

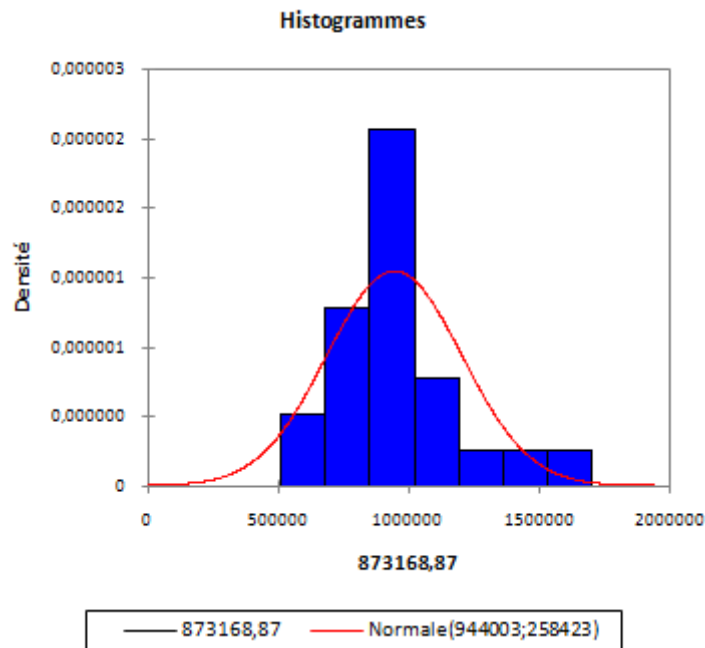


FIGURE 3.6 – Ajustement des données du montant de primes reçues par la loi de Poisson.

3.3 Calcule de la probabilité de ruine de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa

Avant de déterminer la probabilité de ruine de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa, nous devons d'abord vérifier la condition nécessaire sur le chargement de sécurité.

Chargement de sécurité

La condition nécessaire afin d'éviter la ruine certaine de la branche RC automobile est donnée par :

$$\theta = c - \lambda\mu > 0,$$

où :

$c = 944003.201\text{DA}$: taux de prime mensuel,

$\lambda = 101.261$: moyenne du nombre de réclamations par mois,

$\mu = 1764785.736$ DA : moyenne du montant des réclamations.

Alors,

$$\begin{aligned}\theta &= c - \lambda\mu \\ &= 944003.201 - 101.261 * 1764785.736 \\ &= -177759927.1 < 0,\end{aligned}$$

Nous remarquons que $\theta \ll 0$, la condition nécessaire n'est pas vérifiée. A partir d'un certain temps, la branche RC automobile sera ruinée avec une probabilité égale à 1, car la prime reçue est beaucoup plus petite que le montant moyen des réclamations.

$$\Psi(u, T) = 1, u \geq 0, T \geq \tau(u),$$

où $\tau(u)$ est l'instant de la ruine.

Durant notre stage, nous avons remarqué que la branche considérée ne peut pas prendre en charge toutes les pertes. Pour cela, nous varions le taux de la prime c car il n'est pas possible de varier le nombre moyen ou le montant des réclamations parce que ils sont aléatoires.

Afin de vérifier la condition nécessaire sur le chargement de sécurité et que l'activité soit rentable, le taux de prime c doit satisfaire la condition suivante :

$$c > \lambda\mu,$$

donc

$$c > 178703968.413$$

Soit $\tilde{c} = (1 + \tilde{\theta})\lambda\mu$ avec $\tilde{\theta} > 0$ le chargement de sécurité relatif.

Ce résultat est du fait que la prime de cette branche doit être inférieure au coût moyen de réclamation, c'est pour cette raison la condition nécessaire sur le chargement de sécurité n'est pas vérifiée. Les primes encaissées dans cette branche ne suffisent pas à couvrir les réclamations des sinistres malgré le caractère obligatoire de cette branche. Pour éviter le problème de la ruine il faut que le taux de la prime c doit être augmenté d'au moins de $\lambda\mu - c = 177759965.212$ DA. Ce qui n'est pas réalisable d'un point de vue économique. Une autre solution, dit qu'on peut partager le risque sur plusieurs branches d'assurance pour ne pas tomber dans la ruine.

3.4 Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini

Nous proposons dans cette section une approche basée sur la simulation pour calculer la probabilité de ruine à l'horizon fini $\Psi(u, T)$ en variant les primes encaissées.

3.4.1 Construction l'algorithme

Le principe consiste à simuler $n = 100$ répétitions indépendantes du processus de réserve jusqu'à ce que la ruine se produise. Dans chaque répétition nous arrêtons le test à T à moins que la ruine ne se produise avant l'instant T , dans ce cas, nous nous arrêtons à l'instant de ruine. Soit p l'estimateur de $\Psi(u, T)$. Nous prenons le rapport $p = d/n$ où d est le nombre de fois où la ruine s'est produite avant l'instant T , par rapport au nombre total n de simulations. En répétant l'expérience 50 fois (simulation de Monté Carlo) et en prenant la moyenne des p , nous obtenons une estimation de la probabilité de ruine à temps fini $\Psi(u, T)$.

L' algorithme

L'algorithme 1 représente la simulation de la probabilité de ruine à horizon fini par la méthode de Monté Carlo.

Algorithm 1 Algorithme de simulation de la probabilité de ruine à horizon fini.

Etape 1). Introduction des paramètres du modèle ($\lambda, \delta, u, c \in \mathbb{R}^+, T \in \mathbb{N}$).

Etape 2). Générer le nombre de réclamation.

Générer le montant des réclamations.

Etape 3). Calculer la réserve de la compagnie d'assurance X .

Si $X < 0$

la ruine est apparu.

Fin

Afficher les résultats.

3.4.2 Implémentation et interprétation des résultats

Pour 50*100 simulations implémentées sous MATLAB, en prenant les valeurs précédentes de \tilde{c} qui assurent un chargement de sécurité positif pour $c = 944003.201$, $\lambda = 101.261$, $\mu = 1764785.736$ et $u = 9824078.79$.

Pour différentes valeurs de T exprimée en mois, nous avons dans les tableaux (3.7), (3.8) et (3.9) les résultats de la simulation de la probabilité de ruine à horizon fini $\Psi(u, T)$ pour les augmentations précédentes du taux de prime c , avec les réclamations suivent une loi de weibull, la loi exponentielle et la loi log-normale respectivement.

Les figures (3.7),(3.9) représente les probabilités du ruine simulé par la loi weibull et la loi exponentielle respectivement et les figures (3.8) et (3.10) représenté les erreurs entre les valeurs de la probabilité simulé et la probabilité calculé loi weibull et loi exponentielle respectivement.

a) Montant des réclamations de loi de weibull

θ	\tilde{c}	$\Psi(u, 12)$	$\Psi(u, 18)$	$\Psi(u, 24)$	$\Psi(u, 30)$	$\Psi(u, 36)$	$\Psi(u, 40)$
0	944003.201	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{100000}$	178705755.45	0.781	0.772	0.796	0.808	0.832	0.840
$\frac{1}{50000}$	178707542.49	0.736	0.778	0.798	0.819	0.834	0.842
$\frac{1}{10000}$	178721838.81	0.727	0.782	0.801	0.826	0.828	0.833
$\frac{1}{5000}$	178739709.20	0.743	0.786	0.805	0.823	0.834	0.831
$\frac{1}{1000}$	178882672.38	0.747	0.768	0.800	0.817	0.821	0.824
$\frac{1}{500}$	179061376.35	0.723	0.751	0.791	0.806	0.820	0.819
$\frac{1}{100}$	180491008.09	0.665	0.750	0.726	0.738	0.734	0.753
$\frac{1}{50}$	182278047.78	0.596	0.631	0.651	0.643	0.650	0.665
$\frac{1}{40}$	183171567.62	0.563	0.577	0.610	0.603	0.614	0.608
$\frac{1}{30}$	184660767.63	0.495	0.531	0.540	0.544	0.551	0.545
$\frac{1}{20}$	187639166.83	0.404	0.418	0.401	0.404	0.417	0.399
$\frac{1}{10}$	196574365.25	0.173	0.180	0.176	0.138	0.185	0.181

TABLE 3.7 – Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini pour différentes valeurs de \tilde{c} où le montant des réclamations de loi de weibull.

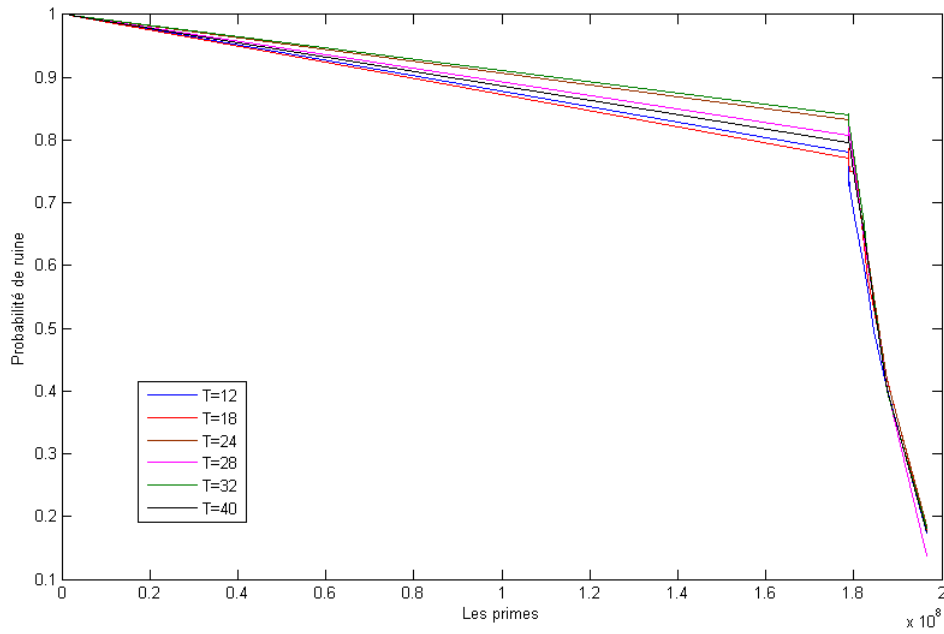


FIGURE 3.7 – La probabilité de ruine à horizon fini (le montant des réclamation de loi weibull).

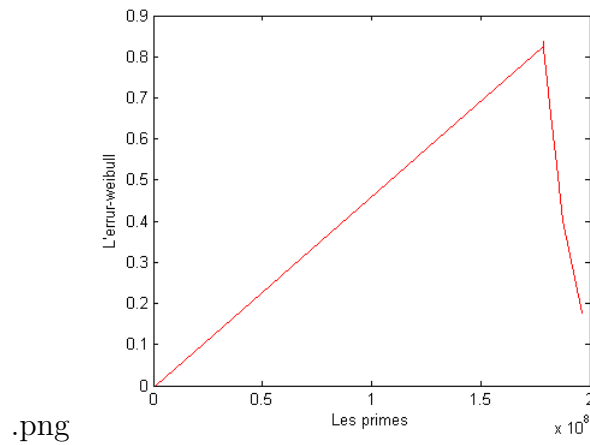


FIGURE 3.8 – La probabilité de ruine à horizon fini (le montant des réclamation de loi weibull).

b) Montant des réclamations de loi exponentielle

θ	\tilde{c}	$\Psi(u, 12)$	$\Psi(u, 18)$	$\Psi(u, 24)$	$\Psi(u, 30)$	$\Psi(u, 36)$	$\Psi(u, 40)$
0	944003.201	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{100000}$	178705755.45	0.761	0.806	0.818	0.842	0.863	0.869
$\frac{1}{50000}$	178707542.49	0.766	0.806	0.830	0.851	0.858	0.861
$\frac{1}{10000}$	178721838.81	0.759	0.789	0.836	0.844	0.864	0.870
$\frac{1}{5000}$	178739709.20	0.775	0.804	0.831	0.834	0.865	0.873
$\frac{1}{1000}$	178882672.38	0.766	0.796	0.818	0.835	0.855	0.857
$\frac{1}{500}$	179061376.35	0.748	0.794	0.820	0.847	0.848	0.854
$\frac{1}{100}$	180491008.09	0.698	0.740	0.767	0.762	0.786	0.796
$\frac{1}{50}$	182278047.78	0.645	0.668	0.682	0.699	0.704	0.713
$\frac{1}{40}$	183171567.62	0.602	0.643	0.641	0.651	0.651	0.666
$\frac{1}{30}$	184660767.63	0.533	0.583	0.573	0.587	0.610	0.604
$\frac{1}{20}$	187639166.83	0.451	0.467	0.465	0.471	0.482	0.480
$\frac{1}{10}$	196574365.25	0.236	0.233	0.219	0.227	0.230	0.225

TABLE 3.8 – Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini pour différentes valeurs de \tilde{c} où le montant des réclamation de loi exponentielle.

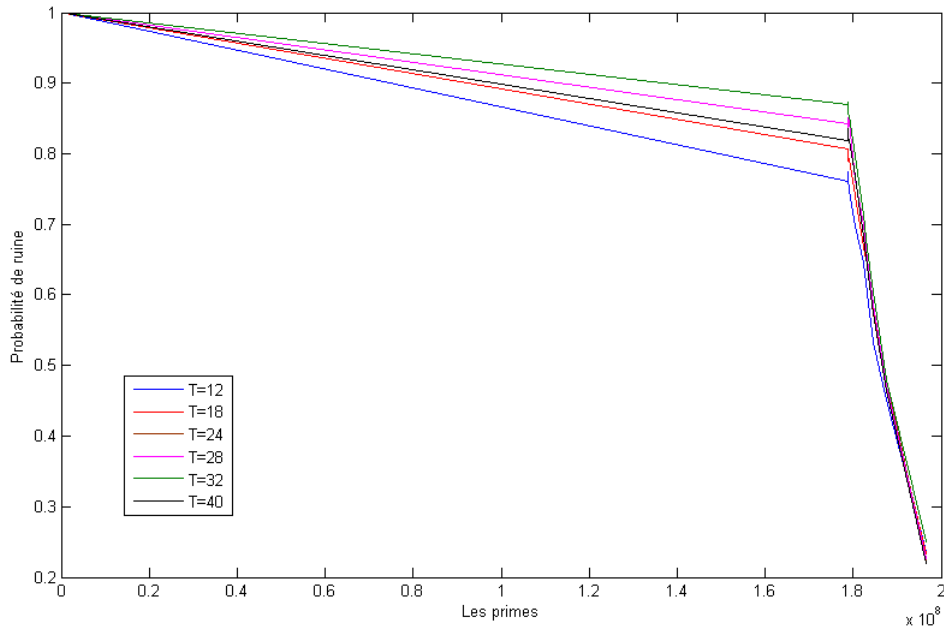


FIGURE 3.9 – La probabilité de ruine à horizon fini avec le montant des réclamation de loi exponentielle.

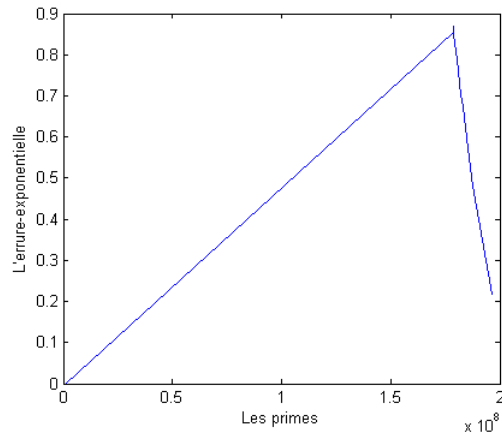


FIGURE 3.10 – Erreur entre les deux probabilités de ruine pour le montant exponentielle.

Montant des réclamations de loi log-normal

Le tableau suivant représente les résultat de l'exaction de notre algorithme pour la distribution log-normal et pour un $T = 36$. Dans ce tableau on a pas présent les résultat pour toutes les période car on obtenu les même résultat quelque soit la valeur de T .

θ	\tilde{c}	$\Psi(u, 36)$
0	944003.201	1
$\frac{1}{100000}$	178705755.45	1
$\frac{1}{50000}$	178707542.49	1
$\frac{1}{10000}$	178721838.81	1
$\frac{1}{5000}$	178739709.20	1
$\frac{1}{1000}$	178882672.38	1
$\frac{1}{500}$	179061376.35	1
$\frac{1}{100}$	180491008.09	1
$\frac{1}{50}$	182278047.78	1
$\frac{1}{40}$	183171567.62	1
$\frac{1}{30}$	184660767.63	1
$\frac{1}{20}$	187639166.83	1
$\frac{1}{10}$	196574365.25	1

TABLE 3.9 – Simulation de la probabilité de ruine à horizon fini pour différentes valeurs de \tilde{c} où le montant des réclamation de loi log-normal.

3.4.3 Interprétation des résultats

D'après le calculer de la probabilité de ruine de branche RC automobile de l'agence SAA 3201, en utilisant les données réelles, on constate que la probabilité de ruine de cette branche d'assurance est égale à 1. Nous pouvons alors déduire que cette branche d'assurance est insolvable.

D'après les tableaux (3.7),(3.8) et les figures (3.7),(3.9) on remarque que, en utilisant les données réelles collectées au sein de la compagnie d'assurance la probabilité de

ruine est égale à 1.

En augmentant les primes, on remarque une diminution de la probabilité de ruine. Autrement dit, les primes et la probabilité sont inversement proportionnelles quelque soit la valeur de T .

En comparant les résultats obtenus avec les deux distributions des montants des réclamations (weibull et exponentielle) on remarque l'approche des deux résultats avec une légère différence. On explique cette approche du fait que la loi de weibull est avec la valeur de son paramètre de la forme $B\acute{e}ta = 1$ sachant que une distribution de weibull de paramètres α et $\beta = 1$ est une exponentielle de paramètre α .

Les figures (3.10), (3.8) montrent qu'on départ $erreur = 0$ dans les deux cas, ce résultat est dû à l'égalité des deux probabilités de ruine, c'est à dire que avec les données réelles on obtient des probabilités certaines dans les deux cas ($\Psi(u) = 1$). En variant la prime, l'erreur diminue, mais les deux probabilités (calculé, simulé) ne sont pas vraiment proches ce résultat est dû à l'erreur de simulation.

On remarque dans le tableau (log) que la probabilité de ruine est égale à 1 quelque soit la variation de la prime. On peut expliquer ce résultat du fait que la distribution log-normal est une distribution à queue lourde, utilisée pour la modélisation des réclamations larges.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode de Monte Carlo, pour calculer la probabilité de ruine de la branche RC automobile SAA 3201, en se basant sur des données réelles.

Pour éviter la ruine certaine de cette branche nous avons essayé d'augmenter le taux de prime c , on propose aussi une autre solution consiste l'utilisation des techniques de partage de risque avec les autres branches pour un équilibre économique de la compagnie d'assurance.

A la fin pour des résultats exactes nous utilisons les algorithmes de la probabilité de la ruine à l'horizon fini.

CONCLUSION GÉNÉRALE

La notion de la probabilité de ruine est une partie essentielle de la théorie de gestion du risque en assurance, pour permettre à la compagnie d'assurance SAA de faire face à ses engagements envers ses assurés, nous nous sommes intéressés au calcul de la probabilité de ruine de la branche RC automobile. En se basant sur le calcul de la mesure du risque probabilité de ruine de branche Responsabilité Civil Automobile (RC) de la compagnie SAA agence code 3201 Bejaia.

D'abord, nous avons introduit les concepts que le système d'assurance se base sur le pilier de mutualisation des risques, pour appliquer notre idée nous avons commencé par comprendre les méthodes pratiques utilisées au niveau de la compagnie d'assurance.

Cette recherche nous a conduit à découvrir beaucoup d'aspects liés à la théorie du risque. La deuxième étape, nous avons modélisé l'activité d'assurance, pour modéliser la réserve avec réserve initial, la prime, le nombre et montant des réclamations des sinistres, nous avons pu atteindre les principaux résultats sur la modélisation stochastique du risque en assurance. Pour la théorie de ruine, le modèle de risque classique est toujours important.

À la fin, nous avons posé des possibilités pour éviter la ruine de la branche RC automobile, la première solution à ce problème serait d'augmenter la prime, ou bien de partager le risque sur plusieurs branches d'assurance pour ne pas tomber dans la ruine.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Adékambi. Les sommes de renouvellement escomptées avec taux d'intérêt général, PhD thesis. Université de Laval, 2011.
- [2] M. ALBERT et N. OGOREK. Processus de Poisson homogènes Application à des données génomiques. Mémoire master Université de Toulouse, France, 2016.
- [3] H. Allaoua et L. Tlilane. Calcul de la probabilité de ruine : Cas de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaïa. Mémoire d'Ingénieur d'Etat en Recherche Opérationnelle. Université de Béjaïa, 2010.
- [4] T. Amrouche, M. Ghernouti and D. Salama. Actuariat et assurance : Environnement et Méthodologies de travail de l'actuaire. Première Journée d'Actuariat USTHB, Alger, 2006.
- [5] E. S. Andersen. On the collective theory of risk in case of cotag in between claims, Transaction of the 15th International Congress of Actuaries, New York, 1957.
- [6] S. Asmussen. Ruin probabilities. World Scientific, Singapoure, 2000
- [7] F. Avram. Processus de Markov, de Levy, files d'attente, Actuariat et Fiabilité. Université de Pau, France, 2010.
- [8] B. Benilles. L'évolution du secteur Algérien des assurances. Université de Setif, 2011.
- [9] Z. Benouaret. Stabilité dans les modèles de risque. Thèse de Doctorat en mathématiques Appliquées. Université de Bejaia, 2012.
- [10] L. Berdjoudj. Statistique Inférentielle. Polycopié de cours. Université de Béjaïa. 2013/2014.

-
- [11] P. Bertail et S. Loisel. Théorie de la ruine. Université de Lyon, France , 2010.
- [12] K. Bouchebah. Techniques de Simulation et Applications. Notes de cours, 1ème année Master Mathématiques Financiers. Université de Béjaïa, 2018.
- [13] H. Bouziane. Calcul et estimation d'une probabilité de ruine. Mémoire de Magister en mathématique. Université de Tizi Ouzou, 2011.
- [14] S. Chaouch. Z. Chouch. Approches Numériques pour l'Analyse de l'Incertitude Paramétrique : Modèles de Risques Classiques. Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle. Université de Béjaïa. 2014.
- [15] B. Cheikh. L'histoire de l'assurance en Algérie. page (3 – 4) . Alger, 2013.
- [16] Compagnie Centrale de Réassurance. La Solvabilité des société d'assurance : finalité règle le cas Algérien. Workshop Solvency. CCR Alger, 2015.
- [17] B. Desgraupes. Cours Méthodes Statistiques. Université Paris. 2014
- [18] M. Djallil, K. Kirouani. Clasifications inductives et transductives pour la tarification en RC Autoumobile. Mémoire d'Ingénieur d'Etat en Recherche Opérationnelle. Université de Béjaïa, 2009.
- [19] Droit des assurances. Ministère des finances. Alger, 1995.
- [20] N. Derradji, L. Khalfi. Les méthodes Monte Carlo, Quasi Monte Carlo et leurs applications. Mémoire Master en Statistique et Analyse décisionnelle. Université de Béjaïa, 2013.
- [21] J. Grandell. Aspect of Risque Theory. Springer-Verlage. New york, 1991.
- [22] O. Gaudoin. Cours Principes et Méthodes Statistiques. Grenoble INP Ensimg. France, 2017
- [23] P. O. Goffard. Introduction à la théorie de la ruine. Institut de mathématiques de Luminy et Axa France, 2014.
- [24] A. Guyader. Méthodes Monte-Carlo. Cours Université Sorbonne, 2018.
- [25] S. Hocine. Processus Régénératifs dans les Modèles de Risque. Mémoire Magister en Mathématiques. Univzrsité de Tizi Ouzou, 2011
- [26] D. Hocine et I. Zoubir. Etude de la sensibilité de la probabilité de ruine via une copule. Mémoire Master en Recherche opérationnelle. Université M'hamed Bougara Boumerdes, 2017.

-
- [27] A. Khali. Analyse de sensibilité dans le modèle du risque classique. Mémoire Mester en Recherche opérationnelle. Université de Béjaia, 2018.
- [28] N. Khouchane et A. Tounes. La place de l'assurance dans la gestion des risques liés aux opérations du commerce extérieur. Mémoire Master en Sciences Commerciales. Université de Béjaia. 2017.
- [29] S. A. Klugman, H. H. Panjer, and G. E. Willmot. Loss Models : From Data to Decisions. Wiley, New York, 1998.
- [30] S. Loisel. Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine. Cours en ISFA 3ème année, Université de Lyon 1, 2006
- [31] F. Medouakh. Méthodes de Monte-Carlo. Mémoire Master Mathématiques. Université Abou Bakr Belkaid, Tlemcen, 2017
- [32] Règles de gestion techniques et financières. Société Nationale d'Assurance, Alger, 2010.
- [33] S. Rubenthaler. Cours Méthodes de Monte-Carlo. Université Nice Sophia Antipolis, 2018.
- [34]
- [35] F. Rousse, P. Pudlo, R. Leblois, C. Merle. Resampling : an improvement of Importance Sampling in varying population size models. Université Montpellier, Page (70 – 87), 2016
- [36] N. Sadi et M. Seba, Le secteur des assurances en Algérie et sa contribution à l'économie nationale. Mémoires de Master en Économie Appliquée et Ingénierie Financière. Université de Béjaia, 2017.
- [37] G. Saporta. Probabilités, Analyse des données et Statistique. Imprimé en France par EUROPE MEDIA DUPLICATION SAS. 53110 Lassay-les-Chateaux N°15585 - Dépôt légal : 2006.
- [38] K. I. Sato. "Lévy processus and infinitely divisible distributions". Cambridge Universite Press, 1999.
- [39] V. Schmidt, T. Rolski, J. Teugels. and H Schmidli. Stochastic Processus for Insurance and Finance, Wiley, 1999.
- [40] J. I. Schiff. The Laplace transform : Theory and applications. Springer-Verlag. NewYork, Inc, 1999.

- [41] B. Silvermann. "Density estimation for statistic and data analysis". Chapman and Hall. london, 1986.
- [42] J. L. Teugels and N. Veraverbeke. Cramèr-type estimates for the probability of ruin. Core Discussion page 7316. 1973.
- [43] E. Therond. Le modèle collectif. Institut de Science Financière et d'Assurances. Lyon. page (5 – 7), 2004.
- [44] Tout connaître sur l'assurance automobile. Dépôt légal. Bibliothèque et Archives nationales du Québec, Canada, 2011.
- [45] H. L. Yang and L. H. Zhang. On the distribution of surplus immediately before ruin under interest force. *Statistics and Probability Letters*, 55, 3, 329 – 338 , 2001.
- [46] F. Zarrouk. Cours statistiques à distance. ISSEP Ksar-Said, Tunisie, 2011.

ANNEXE A

DISTRIBUTIONS DU NOMBRE ET DU MONTANT DES RÉCLAMATION

On a une liste des lois discrètes les plus utilisées en actuariat pour modéliser le nombres de réclamations. Ces information sont extraites de l'annexe de Khugmant et al. (cf.[29])

On note P_N la fonction génératrice de N .

A.1 Distributions du nombre de réclamations

Poisson

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad \lambda > 0, n = 0, 1, \dots \\ E(N) = \lambda \\ \text{Var}(N) = \lambda \\ P_N(t) = e^{-\lambda(t-1)} \end{array} \right.$$

Binomiale (m, p)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, \quad n = 0, 1, \dots, m \\ E(N) = mp, \text{Var}(N) = mp(1-p) \\ P_N(t) = \{1 + (1-p)(t-1)\}^m \end{array} \right.$$

Binomiale négative (r, p)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = \binom{n+r-1}{r-1} p^r (1-p)^n, \quad n=0,1,\dots, \\ E(N) = \frac{rp}{(1-p)}, \text{Var}(N) = \frac{rp}{(1-p)^2} \\ P_N(t) = \left\{1 + \frac{(1-p)}{p}(t-1)\right\}^r \end{array} \right.$$

Géométrique (p)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = p(1-p)^n, \quad n=0,1,\dots, \\ E(N) = \frac{(1-p)}{p}, \text{Var}(N) = \frac{(1-p)^2}{p} \\ P_N(t) = 1 + \frac{(1-p)}{p}(t-1) \end{array} \right.$$

Poisson Inverse Gaussienne (μ, β)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=0) = e^{-\mu(\sqrt{1+2\beta-1}/\beta)} \\ P(N=n) = p_0 \frac{\mu^n}{n!} \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1+m)}{(n-1-m)!m!} \left(\frac{\beta}{2\mu}\right) (1+2\beta) \right\} \\ E(N) = \frac{\alpha}{\beta}, \text{Var}(N) = \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta^2} \\ P_N(t) = e^{-\mu[\{1+2\beta(1-t)\}^{1/2}-1]/\beta} \end{array} \right.$$

Poisson Zéro tronquée (λ)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = \frac{\lambda^n}{k!(e^\lambda - 1)}, \quad n=1,2,\dots \\ E(N) = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \\ \text{Var}(N) = \frac{\lambda\{1 - (\lambda+1)e^{-\lambda}\}}{(1-e^{-\lambda})^2} \\ P_N(t) = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^\lambda - 1} \end{array} \right.$$

Géométrique Zéro tronquée (λ)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n=1,2,\dots \\ E(N) = \frac{1}{p}, \text{Var}(N) = \frac{(1-p)}{p^2} \\ P_N(t) = \frac{\{1 + (1-p)(t-1)/p\}^{-1} - p}{1-p} \end{array} \right.$$

Binomiale Zéro tronquée (m, p)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = \frac{\binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}}{1 - (1-p)^m}, \quad n=1, \dots, m \\ E(N) = \frac{mp}{\{1 - (1-p)^m\}} \\ \text{Var}(N) = \frac{mp(1-p)(1-p+mp)(1-p)^{m-2}}{\{1 - (1-p)^m\}} \\ P_N(t) = \frac{\{1 + p(t-1)^m - (1-p)^m\}}{1 - (1-p)^m} \end{array} \right.$$

Distribution	a	b	p_0
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$
Binomiale	$\frac{-q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Binomiale négative	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1-\beta)^{-r}$
Géométrique	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1-\beta)^{-r}$

FIGURE A.1 – Les distributions membres de la classe $(a, b, 0)$

Distribution	p_0	a	b	Espace des paramètres
Poisson	$e^{-\lambda}$	0	λ	$\lambda > 0$
Poisson ZT	0	0	λ	$\lambda > 0$
Poisson ZM	arbitraire	0	λ	$\lambda > 0$
Binomiale	$(1-p)^n$	$-\frac{p}{1-p}$	$(m+1)\frac{p}{1-p}$	$0 < p < 1$
Binomiale ZT	0	$-\frac{p}{1-p}$	$(m+1)\frac{p}{1-p}$	$0 < p < 1$
Binomiale ZM	arbitraire	$-\frac{p}{1-p}$	$(m+1)\frac{p}{1-p}$	$0 < p < 1$
Binomiale négative	p^r	$(1-p)$	$(r-1)(1-p)$	$0 < p < 1, r > 0$
ETNB	0	$(1-p)$	$(r-1)(1-p)$	$0 < p < 1, r > -1$
ETNB ZM	arbitraire	$(1-p)$	$(r-1)(1-p)$	$0 < p < 1, r > -1$
Géométrique	p	$(1-p)$	0	$0 < p < 1$
Géométrique ZT	0	$(1-p)$	0	$0 < p < 1$
Géométrique ZM	arbitraire	$(1-p)$	0	$0 < p < 1$
Logarithmique	0	$(1-p)$	$-(1-p)$	$0 < p < 1$
Logarithmique ZM	arbitraire	$(1-p)$	$-(1-p)$	$0 < p < 1$

FIGURE A.2 – Les distributions membres de la classe $(a, b, 1)$

avec *ZT* : zéro tronqué et *ZM* : zéro modifié.

Binomiale négative Zéro tronquée (r, p)

$$\left\{ \begin{array}{l} P(N=n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots, m \\ E(N) = \frac{r(1-p)}{p}, \quad Var(N) = \frac{r(1-p)}{p^2} \\ P_N(t) = \frac{\{1 + p(t-1)^m - (1-p)^m\}}{1 - (1-p)^m} \end{array} \right.$$

A.2 Distributions du montant des réclamations

On présentons dans cette partie, une liste des lois les plus utilisées en actuariat pour modéliser le montant d'une réclamation généré à l'intérieur d'un portefeuille. Ces information sont extraites de l'annexe de klugman et al. (cf.[33])

On note M_x la fonction génératrice et ϕ_x la fonction caractéristique de X .

Exponentielle (λ)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \\ F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \\ E(X) = \frac{1}{\lambda} \\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad s > \lambda \\ \phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad s < \lambda \end{array} \right.$$

Gamma (α, β)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad 0 \leq x < \infty, \alpha, \beta > 0 \\ F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \\ E(X) = \alpha\beta \\ Var(X) = \alpha\beta^2 \\ M_X(t) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^\alpha, \quad t < \frac{1}{\beta} \\ \phi_X(t) = \left(\frac{1}{1-\beta it}\right)^\alpha, \quad t < \frac{1}{\beta} \end{array} \right.$$

Log-normale (μ, σ)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right\}^2}, \quad x \geq 0 \\ F_X = \Phi\left\{\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right\}, \quad x \geq 0 \\ E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ \text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2} \end{array} \right.$$

Pareto (α, β)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad x > \beta \\ F_X(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, \quad x > 0 \\ E(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)} \\ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{array} \right.$$

Weibull (δ, β)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \delta e^{\delta-1} e^{-x^\delta/\beta}, \quad x \geq 0 \\ F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^\delta}{\beta}}, \quad x > 0 \\ E(X) = \beta^{\frac{1}{\delta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \\ \text{Var}(X) = \beta^{\frac{2}{\delta}} \{\Gamma(1 + 2/\delta) - \Gamma^2(1 + 1/\delta)\} \end{array} \right.$$

Invers gaussienne (μ, β)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x) = \mu(2\Pi\beta x^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\beta x)} \\ F_X(x) = \Phi\{(x-\mu)/\sqrt{\beta x}\} + e^{2\mu\beta^{-1}} \Phi\{-(x-\mu)/\sqrt{\beta x}\}, \quad x > 0 \\ E(X) = \mu \\ \text{Var}(X) = \mu^3\beta \\ M_X(t) = \frac{e(\mu/\beta)}{e\left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} - \frac{2\mu^2 it}{\beta}}\right)}, \quad t < \lambda \\ \phi_X(t) = \frac{e(\mu/\beta)}{e\left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} - \frac{2\mu^2 it}{\beta}}\right)}, \quad s < \lambda \end{array} \right.$$

ANNEXE B

TRANSFORMATION DE LAPLACE

B.1 Définitions

Convolution

La convolution permet de calculer la distribution de la somme $X + Y$ de deux variables aléatoires indépendantes X et Y de fonctions de répartition respectives F et G respectivement.

La convolution $F * G$ de deux fonctions de répartition F et G est définie par

$$F_{X+Y}(x) = F * G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-u)dG(u), x \in \mathbb{R}.$$

Si X et Y ont des densités f et g . respectivement, alors la densité de $X + Y$ est donnée par la convolution

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)dg(u), x \in \mathbb{R}.$$

La $n^{\text{ème}}$ convolution de F , notée F^{*n} est définie par :

$$F^{*n}(x) = \begin{cases} \delta_0(x), & \text{si } n=0 \\ F^{*(n-1)} * F = F * \dots * F (n \text{ fois}), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

où :

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La queue de la distribution F^{*n} est définie par $\overline{F^{*n}}(x) = 1 - F^{*n}(x)$.

La convolution possède les propriétés suivantes :

- $f * g = g * f$ (commutative),

- $c(f * g) = cg * f = cf * g$, ou c est une constante,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$ (associative),
- $f * (g * h) = (f * g) + (f * h)$ (distributive).

Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète non négatives. La fonction génératrice de X est définie par

$$f(z) = E \left[e^{zX} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k$$

où $p_k = P(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$ et z est une variable complexe. On vérifie immédiatement que $f(z)$ est définie au moins pour $|z| \leq 1$ et que $f(0) = p_0$ et $f(1) = 1$. La loi de probabilité $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ est caractérisée de façon unique par la fonction génératrice associée $f(z)$, et on a :

$$p_k = f^{(k)}(0)/k!, k = 0, 1, 2, \dots$$

où :

$$f^{(k)}(0) = \left[\frac{d^k}{dz^k} f(z) \right]_{z=0}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes discrètes non négatives, la fonction génératrice de $X + Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et de Y . (cf. [44])

Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X , associée une densité de probabilité continue $f(x)$, est définie comme l'espérance de e^{tx} , à savoir :

$$\hat{m}_X(t) = E \left[e^{tX} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx .$$

Cette fonction, comme son nom l'indique, permet de générer les moments associés à distribution de probabilités de la variable aléatoire X . En effet, en introduisant dans cette équation le développement limité de l'exponentielle, cette expression est équivalente à :

$$\hat{m}_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \dots) f(x) dx = 1 + t\mu^{(1)} + \frac{t^2 \mu^{(2)}}{2!} + \dots$$

où $\mu^{(i)}$ est le i ème moment de X tel que

$$m^{(i)} = \int_{\mathbb{R}} x^i f(x) dx .$$

B.2 Transformée de Laplace

La transformation de Laplace est une généralisation des fonction génératrices.

En effet, soit f une fonction d'une variable réelle positive X . La transformée de Laplace \hat{f} est définie par

$$\hat{L}_f(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx, k \in \mathbb{N}^* .$$

Transformée de Laplace inverse

Si \bar{f} est transformée de Laplace de f , c'est-à-dire $\hat{L}_f = \bar{f}$, alors f est appelée transformée de Laplace inverse de \bar{f} .

En pratique, Il s'agit de trouve la fonction f en applique la transformation inverse sur \hat{L}_f . Cette opération se révéle parfois difficile sauf dans le cas ou \hat{L}_f est une somme de transformées de Laplace classiques figurant dans un tableau.

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n U(t), n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha U(t), \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{at}U(t)$	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(at)U(t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)U(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\text{sh}(at)U(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\text{ch}(at)U(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
propriétés	
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{F(p)}{p}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{k-1} f^{(n-k)}(0^+)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} f(u)du$
f de période T	$\frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$
$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$	$F(p)G(p)$
Si $\lim_{t \rightarrow 0 \text{ ou } +\infty} f(t)$ existe \Rightarrow	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} pF(p)$ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} pF(p)$

FIGURE B.1 – Tableau de transformé de Laplace
(cf.[28])

Transformée de Laplace de Laplace-Stieljes

Soit X une variable aléatoire non négative de fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$ cette transformation $\hat{f}(s)$ est définie comme suit :

$$\hat{l}_F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), s \geq 0.$$

Dans le cas où f est continue et $f(x) = F'(x)$ on a :

$$\hat{l}_F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx.$$

Nous retrouvons la formule ordinaire de la transformée de Laplace $\hat{L}_f = \bar{f}$ de la fonction densité. En effet, la transformée de Laplace-Stieljes de la fonction de répar-

tition F de X coïncide avec la transformée de Laplace de la densité de X si cette dernière existe.

Propriétés

- 1 $\hat{L}_{af+bg} = a\hat{L}_f + b\hat{L}_g$ (linéarité).
- 2 $\hat{L}_f = \hat{g} \Rightarrow f = g$ (injectivité).
- 3 $f \hat{*} g = b\hat{L}_f * b\hat{L}_g$ (convolution).
- 4 $\hat{L}_{\int_a^1 f(\tau)d\tau}(s) = \frac{1}{s}\hat{L}_f(s) + \frac{1}{s}\int_a^0 f(\tau)d\tau$ (intégration).
- 5 $\hat{L}_{f^n}(s) = s^n\hat{L}_f(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{n-1}(0)$ (dérivation).

Résumé

Dans ce travail, l'activité provient du côté purement assurance automobile. Si pour cela la balance entre les réserves des sinistres tenant compte d'un capital initial et les primes d'assurance, modèle de risque, unidimensionnel, composé d'une seule branche d'assurance, est un modèle utilisé pour décrire ce mécanisme d'arrivée des sinistres et des montants des réclamations. Le modèle concerne les assurances dommages par opposition aux assurances vie qui présentent d'autres problèmes et relèvent d'une autre modélisation.

De ce travail, nous avons dégagé plusieurs perspectives de recherche, à savoir l'étude et la comparaison de la méthode de Monte-Carlo avec une autre approche numérique.

Mots clés : Modèle de risque, Probabilité de ruine, Simulation, Monte-Carlo, Agence SAA 3201 de Béjaïa, Assurance Automobile, Garantie Responsabilité Civile, Échantillonnage préférentiel.

Abstract

In this work, activity comes from the purely insurance side. If for that the balance between the reserves of claims taking into account a capital initial and insurance premiums, The one-dimensional risk model, consisting of an insurance industry, is a model used to describe this mechanism of arrival of claims and claims amounts. The model concerns non-life insurance as opposed to life insurance, which presents other problems and falls under another model. From this work, we have identified several research perspectives, namely the study and comparison of the Monte Carlo method with another numerical approach.

Keywords : Risk model, Probability of ruin, Simulation, Monte Carlo, BEA 3201 SAA Agency, Automobile Insurance, Civil Liability Guarantee, Preferential Sampling.