Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Université Abderahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du Diplôme de
MASTER en Recherche Opérationnelle
Option : Mathématiques Financières

Thème :

Gestion d'un portefeuille d'actifs financiers

Présenté par : **KHALDI Ayad & RABOUH Ahmed**

Devant le jury composé de :

Président	Melle BOUIBED Karima	M.C.B	Univ. de Béjaïa
Rapporteur	Mme LEKADIR Ouiza	M.C.A	Univ. de Béjaïa
Examinateur	Mr BRAHMI Belkacem	M.C.A	Univ. de Béjaïa
Examinatrice	Melle GUERBANE Rima	Doctorante	Univ. de Béjaïa

Béjaïa, Juillet 2019.

$\mathcal{R}$emerciements

Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir accordé santé, courage et la volonté pour accomplir ce travail.

Nous tenons également à remercier notre encadreur M^{me} OUIZA LEKADIR pour l'aide et l'assistance qu'elle nous a fournit afin de nous permettre de mener à bien et à terme ce mémoire de fin d'études, et qu'il nous soit permis de lui exprimer notre profonde gratitude.

Nous exprimons notre grand respect aux honorables membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Nous tenons tout simplement à exprimer notre profonde gratitude à tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin durant tout notre cursus.

K. AYAD & **R. AHMED**

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

* *A mes chers parents ;*

* *A mes chers grands parents ;*

* *A mes chers frères et soeurs ;*

* *A toute ma famille ;*

* *A tous mes amis.*

⁂ ***Rabouh Ahmed*** ⁂

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

** A la mémoire de ma petite sœur yaya.*

** A mes parents,*

** A mes frères et ma sœur sarah.*

** A tous mes amis(es).*

** A tous ceux que j'aime.*

⁜ ***Khaldi Ayad*** ⁜

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Depuis le milieu du siècle dernier, la gestion de portefeuille a subie une profonde mutation. Il est loin, en effet, le temps où le gestionnaire pouvait se contenter d'appliquer quelques règles de bon sens et de bien connaître les sociétés cotées. Ce sont les travaux de Markowitz au cours des années 1950 qui ont marqué le point de départ des développements théoriques modernes relatifs à la gestion des investissements en actifs financiers et au fonctionnement des marchés financiers. Si la notion de diversification était connue bien avant Markowitz, c'est ce dernier qui l'a conceptualisé et quantifiée, rendant ainsi, possible la détermination des proportions optimales à investir dans les différents actifs financiers pris en considération par l'investisseur ou le gestionnaire de fortune. D'ailleurs, en 1990 Hary Markowitz a eu le prix nobel en économie pour ses travaux sur la gestion de portefeuille [2],[23],[22].

C'est toutefois depuis le milieu des années 1960, avec les travaux de Sharpe, Lintner et Mossin (sur les conditions d'équilibre des marchés financiers) et de Fama (sur l'efficience de ces mêmes marchés), que la littérature relative à la gestion de portefeuille connaît un extraordinaire développement qui semble encore loin d'être à terme [15].

L'objectif de ce mémoire est de mettre en évidence les mécanismes et les fondements théorique du portefeuille, ainsi que les modèles contribuant au choix du bon portefeuille. Parmis ces modèles de gestion de portefeuille, nous nous sommes focalisés sur les deux modèles les plus utilisés en finance, à savoir : le modèle de Markowitz et le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).

Les procédures à suivre par un investisseur, lors de son choix d'un portefeuille financier, peuvent se récapitulées comme suit : En premier lieu, il doit effectuer l'analyse nécessaire du rendement et du risque comme base d'évaluation du rendement du portefeuille. Puis, il doit utiliser les modèles d'évaluation du rendement, qui sont nécessaires lorsqu'il fait partie du portefeuille, i.e., rendement par rapport aux résultats obtenus au taux de rendement du portefeuille de marché et la déclaration de hausse et de baisse avec lui et son rôle dans la sélection du portefeuille d'investissement efficace adopté par l'investisseur.

Le choix et l'objectif de ce mémoire est dû principalement à l'importance d'améliorer le portefeuille financier au quotidien. Le monde actuel témoigne de l'évolution rapide dans le domaine de la finance et par la suite de l'évolution de la capacité à identifier des modèles appropriés pour choisir le meilleur portefeuille pour l'investisseur.

Ce mémoire comprend trois chapitres, une introduction générale, une conclusion générale, et une bibliographie.
Le premier chapitre est consacré aux différentes notions de base nécessaires pour l'optimisation d'un portefeuille financier.
Le deuxième chapitre, quand à lui, il est dédié à la présentation des concepts mathématiques généraux du modèle de Markowitz et ceux du MEDAF.
Dans le troisième chapitre, seront données des exemples de choix de portefeuilles, qui seront traités par la simulation des deux modèles : Markowitz et MEDAF et ce via le logiciel MATLAB. L'étude des résultats obtenus sur ces différents exemples, illustre l'intérêt de ces méthodes et montre leurs différences et les critiques qu'ils ont reçus dans la littérature.

Chapitre 1

Optimisation de portefeuille d'actifs financiers

1.1 Introduction

L'optimisation de portefeuille ou le choix optimal de portefeuille d'actifs financiers est un sujet qui a occupé un intérêt particulier dans la recherche en Mathématiques Financières.

Une ancienne sagesse capture l'optimisation de portefeuille sous-jacente comme idée fondamentale. La sagesse se trouve essentiellement dans la caractéristique de la moyenne des rendements des différents actifs. En effet, un bon portefeuille est celui qui donne un rendement maximum pour un niveau de risque donné ou celui qui donne le risque minimum pour un niveau de rendement donné. Ainsi, un bon portefeuille doit comprendre des actifs différenciés non similaires. Cette sagesse nécessite une modélisation mathématique pour l'optimisation de portefeuille qui a été proposée par le fondateur de la théorie moderne de la finance Harry Markowitz dans leur article [2], par le modèle moyenne-variance. Markowitz modélise la moyenne, comme rendement attendu sur l'investissement, et la variance comme, mesure de risque i.e. cause de probabilité d'existence d'un danger potentiel pour sacrifier trop de rendement attendu à éliminer le rendement extrême bas et haut.

Certains chercheurs ont proposé certains modèles de portefeuille basé sur les risques alternatives tels que le modèle de sécurité d'abord [4], le modèle moyenne semi-variance [3], le modèle de moyenne et d'écart absolu (MAD) [1], le modèle moyenne de semi-écart absolu [5] et le modèle mini-max [6], ...

Dans la pratique, le problème d'optimisation de portefeuille doit prendre en compte des caractéristique réelles telles que les coûts de transaction, la contrainte de cardinalité qui impose une limite sur le nombre d'actifs dans le portefeuille, les contraintes de quantité limitant la proportion de chaque actif dans le portefeuille entre une borne inférieur et une borne supérieur et la transaction des lots minimums. Ce qui ramène à un problème de programmation quadratique qui se classe dans la catégorie des problèmes les plus difficiles (complicité) à résoudre (problème NP-difficile).

Il arrive que, les attentes des investisseurs, au sujet des paramètres financiers qui sont la base sur laquelle ils choisissent leurs portefeuille, soient souvent vaguement précisées, alors les décisions deviennent floue. Dans [19] est introduit ce concept d'ensembles flous. De plus, plusieurs chercheurs ont intégré la théorie floue aux choix de portefeuilles, et d'autres chercheurs ont appliqué les algorithmes génétiques, les algorithmes hybrides pour la résolution du problème d'optimisation du portefeuille floue mono/multi-objective sous contraintes de cardinalité, de coût de transaction et de lots de transaction minimale.

Dans ce chapitre nous allons présenter des concepts de base de la gestion d'un portefeuille d'actifs financiers.

1.2 Éléments de l'optimisation d'un portefeuille

1.2.1 Marchés financiers

Le rôle des marchés financiers est de mettre en rapport des agents en quête de capitaux (l'état, les entreprises, ...) et des agents disposant d'une épargne (les ménages, les investisseurs institutionnels tels que les compagnies d'assurance, les caisses de retraites, les gérants de fonds, ...).

Un agent, en besoin de financement, émet des titres financiers en contre partie de l'argent qu'il reçoit par l'acquéreur du titre. Il doit assurer à ce dernier des bénéfices futurs (flux monétaires, droits, ...) dans des conditions précises.

1.2.2 Actif financier

Un actif est un contrat généralement négociable sur un marché financier, produisant à son propriétaire des revenus ou un gain en capital. Il y en a de très nombreuses sortes d'actifs, des plus simples : (actions, obligations, ...) aux plus complexes : (options, ...).

▶ **Action**

Une action est un titre de propriété sur une fraction du capital qu'une entreprise décide de vendre aux investisseurs. Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. L'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers.

1.2.3 Portefeuille financier

Un portefeuille financier est une combinaison d'un ensemble de titres (actifs) financiers, détenus par un investisseur (actions, obligations, produits dérivés, matières premières, ...). Cette combinaison se fait en des proportions différentes afin d'avoir un portefeuille bien diversifié, permettant ainsi de réaliser un rendement espéré bien déterminé tout en minimisant le risque que peut courir l'investisseur.

Mathématiquement, un portefeuille P est un vecteur de proportions x_i, qui représente la proportion du capital investi dans chaque titre ; avec :

$$x_i = \frac{\text{La part du capital investi en } i}{\text{capital total}}. \tag{1.1}$$

1.2.4 Le rendement

Le rendement d'un actif est une variable aléatoire, et le rendement d'un portefeuille est une combinaison linéaire pondérée des actifs qui le composent. Par conséquent, le rendement d'un portefeuille est également une variable aléatoire et possède une espérance et une variance.

- **Rendement arithmétique :**

  Le rendement arithmétique périodique d'un actif $R_{i,t}$ est donné par l'équation suivante :

$$R_{i,t} = \frac{(P_{i,t} - P_{i,t-1}) + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}; \tag{1.2}$$

  avec :

  ▶ $P_{i,t}$: Prix du titre i à la fin de la période t.

  ▶ $P_{i,t-1}$: prix du titre i au début de la période $(t-1)$.

  ▶ $D_{i,t}$: Dividende(action) ou intérét (obligation) reçu pendant la péeriode t.

- **Rendement géométrique :**

  Le rendement géométrique (logarithmique) périodique d'un actif ; noté $R_{i,t}$ est donné par la relation suivante :

$$R_{i,t} = \ln(\frac{P_{i,t} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}). \tag{1.3}$$

Remarque 1.1.

– La moyenne arithmétique est utilisée pour estimer le rendement espéré d'un titre à l'aide des données historiques et pour calculer la variance et l'écart-type.
– La moyenne géométrique est utilisée pour la mesure de la performance.

1.2.5 Rendement espéré d'un portefeuille

Le rendement espéré d'un portefeuille $E(R_p)$ est égal à la moyenne pondérée des rendements espérés des titres qui le composent, i.e.

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) + ... + x_n E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i), \tag{1.4}$$

avec :
- ▶ x_i : proportion des fonds investis dans le titre i.
- ▶ n : nombre de titres inclus dans le portefeuille .
- ▶ $E(R_i)$: rendement espéré du titre i ,$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

1.3 Mesures de risque

L'utilisation d'outils de mesure du risque est devenu systématique et les professionnels ont développé des instruments très sophistiqués. Néanmoins, il existe bon nombre d'outils constituant la base de la gestion du risque, à la portée de tous les investisseurs et ayant démontré leur efficacité. Nous abordons ici les plus célébres et les plus utilisés d'entre eux :

1.3.1 La variance

Selon la définition classique, la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne. En termes plus mathématique, elle peut être considérée comme une mesure servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon par rapport à la moyenne ; i.e. :

$$\sigma_i^2 = Var(R_i) = E(R_i - E(R_i))^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} R_{i,t}^2 - \overline{R_i}^2, \tag{1.5}$$

avec :

- ▶ $R_{i,t}$:le rendement de l'actif i à période t.
- ▶ $\overline{R_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$: le rendement moyen de l'actif i.

1.3.2 La covariance

Si la variance permet d'étudier les variations d'une variable par rapport à sa moyenne, la covariance permet d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives.
La covariance peut être vue comme le produit des valeurs de deux variables moins le produit des deux moyennes. Mathématiquement, la formule est la suivante :

$$Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \overline{R_i})(R_{j,t} - \overline{R_j}); \tag{1.6}$$

avec :

- ▶ R_i : le rendement de l'actif i à période t.
- ▶ R_j : le rendement de l'actif j à période t.
- ▶ $\overline{R_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$: le rendement moyen de l'actif i.
- ▶ $\overline{R_j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{j,t}$: le rendement moyen de l'actif j.

Remarque 1.2.

- Des résultats obtenus par cette mesure on en déduit que plus la covariance est faible, plus les séries sont indépendantes et inversement plus elle est élevée et plus les séries sont liées.
- Une covariance nulle correspondant à deux variables totalement indépendantes.

1.3.3 La volatilité

La volatilité est par définition une mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier. En effet, plus la volatilité d'un actif est élevée et plus l'investissement dans ce portefeuille sera considéré comme risqué et par conséquent plus l'espérance de gain (ou risque de perte) sera important. A l'inverse un portefeuille, sans risque ou très peu risqué, aura une volatilité très faible.
La notion de volatilité concerne tous les horizons (court , moyen et long terme) et ne se soucis pas du sens du mouvement (seule l'amplitude des mouvements est pris en compte).

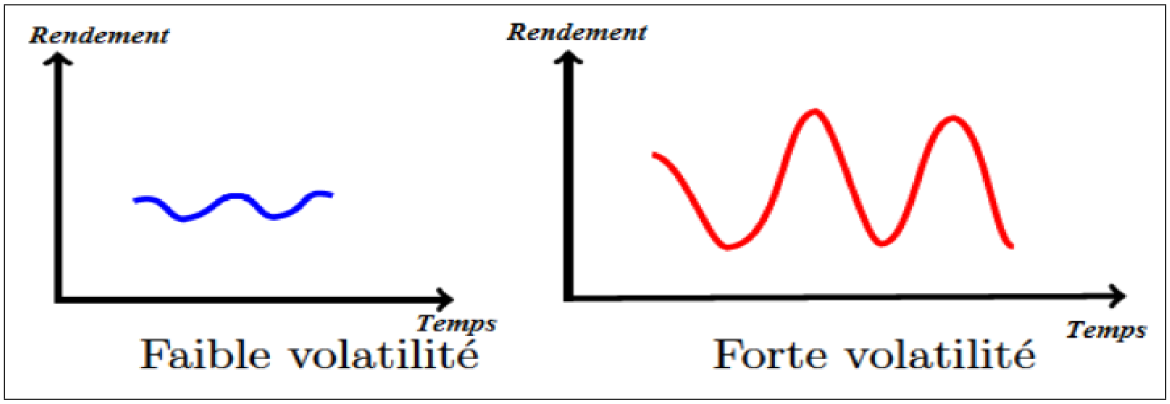

FIGURE 1.1 – **Forte et faible volatilité.**

Alors que cette notion tient aujourd'hui une place primordiale dans l'étude des marchés, elle est également énormément utilisée pour diversifier les portefeuilles, gérer le risque et calculer les prix des options.
Les périodes de forte volatilité se traduisent souvent par des cours relativement bas, ce qui permet aux investisseurs d'anticiper une rentabilité plus élevée.

1.3.4 L'écart type

Utilisé pour calculer la volatilité, l'écart type est relativement simple à comprendre et à appliquer. Il s'obtient en calculant la racine carré de la variance.Mathématiquement, l'écart type du rendement du titre i est donné par la formmule suivante :

$$\sigma_i = \sqrt{Var(x_i)} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \overline{R_i})^2} \tag{1.7}$$

où :

- $R_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}}{T}$, est la moyenne des rendements du titre i ;
- $R_{i,t}$: variation du cours à du titre i à période t ;

1.3.5 Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation $\rho(R_i, R_j)$ permet de mesurer l'ampleur de la dépendance entre les rendements de deux titres i et j. Ce coefficient varie entre -1 et +1, ainsi lorsque :

- il existe une liaison positive parfaite entre les mouvements des taux de rendements des titres i et j, alors : $\rho(R_i, R_j) = +1$.

– il existe une liaison négative parfaite entre les mouvements des taux de rendements des titres i et j, alors : $\rho(R_i, R_j) = -1$.
– les mouvements des taux de rendements des titres i et j sont indépendants, alors : $\rho(R_i, R_j) = 0$.

Le coefficient de corrélation est donné par :

$$\rho(R_i, Rj) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}. \tag{1.8}$$

1.3.6 La variance d'un portefeuille

Le risque d'un portefeuille est calculé en fonction de sa volatilié, cette volatilité étant définie comme étant la variance ou l'écart-type des rentabilités des actifs financiers, alors pour calculer le risque d'un portefeuille [8], on doit tenir compte de :

- la variabilité du rendement de chaque titre : la variance $Var(R_i)$;
- le degré de dépandance existant entre les rendements des différents titres : la matrice de variance-covariance, notée Σ.

a) Risque d'un portefeuille composé de deux titres

La variance (risque) du taux de rendement d'un portefeuille P composé de deux titres i et j est égale à :

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = x_i^2 Var(R_i) + x_j^2 Var(R_j) + 2x_i x_j Cov(R_i, R_j); \tag{1.9}$$

$$= x_i^2 \sigma_i^2 + x_j^2 \sigma_j^2 + 2x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}. \tag{1.10}$$

b) Risque d'un portefeuille composé de n titres

La variance (risque) du taux de rendement d'un portefeuille composé de deux titres i et j est égale :

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov(R_i, R_j); \tag{1.11}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i \neq j}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}. \tag{1.12}$$

La variance d'un portefeuille de n titres est composée de :

- n termes de variances pondérées ;
- $n(n-1)$ termes de covariances pondérées ;

Donc la forme matricielle du risque s'écrit sous forme :

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = x' \Sigma x; \tag{1.13}$$

où Σ est la matrice variance-covariance des rendements des différents titres, avec :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

1.4 La théorie modèrne du portefeuille

La théorie moderne du portefeuille est une théorie financière développée en 1952 par Harry Markowitz. Elle expose comment des investisseurs rationnels utilisent la diversification afin d'optimiser leur portefeuille, et quel devrait être le prix d'un actif étant donné son risque par rapport au risque moyen du marché. Cette théorie fait appel aux concepts de frontière efficiente, coefficient bêta, droite de marché des capitaux et droite de marché des titres.

1.4.1 Principe du modèle de Markowitz

En comparant deux portefeuilles par leurs rendements (supposés aléatoires), on retient :
- risque identique, celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée (gain maximal) ;
- à espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible (aversion au risque).

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres. La courbe qui relie l'ensemble des portefeuilles efficients s'appelle la frontière efficiente. Tous les portefeuilles rejetés sont dits dominés. Il est possible de diminuer le risque prévisionnel en diversifiant son portefeuille, si les actifs sont parfaitement corrélés, en supposant un grand nombre d'actifs financiers et toutes les combinaisons possibles, il est donc possible de calculer l'espérance et la variance du rendement prévisionnel d'un très grand nombre de portefeuilles. Chaque portefeuille aura donc des caractéristiques d'espérance et de variance différentes, en fonction du choix des actifs, des pondérations et des corrélations entre les actifs.

1.4.2 Critères du choix d'un portefeuille optimal

▶ **Structuration du modèle de gestion du portefeuille :** La structure fondamentale du modèle de gestion du portefeuille se différencie de la forme idéale de résolution d'un problème de décision dans l'incertitude par :

- Les événements qui peuvent influencés la distribution de probabilité de rendement de chacun des actifs financiers sur le marché (l'état de l'économie, du marché. . . etc).
- La ligne d'action c'est-à-dire le budget d'investissement prédéterminé à allouer entre les différents actifs financiers négociables $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Si x_i est la part du budget consacrée à l'achat de l'actif i $(i = 1, 2, ..., n)$ Chaque ligne d'action peut être caractérisée par un vecteur x_i répondant aux conditions suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

1.4.3 Hypothèses du modèle

♦ **Les hypothèses relatives aux actifs financiers**

▶**Hypothése 1 :**

Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque ; le rendement d'un actif financier pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, dont on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale. C'est-à-dire une distribution symétrique stable entièrement définie par les deux paramètres :

- $E(R_i) = \mu_i$: espérance mathématique de rendement ;
- $\sigma(R_i) = \sigma_i$: l'écart-type de la distribution de probabilité du rendement.

▶**Hypothése 2 :**

Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendemment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles".

♦ **Les hypothèses relatives au comportement des investisseurs**

▶**Hypothése 1 :**

Le comportement de tous les investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de probabilité du rendement.

▶**Hypothése 2 :**

Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence à celle-ci, des choix strictement transitifs.

▶**Hypothése 3 :**

Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période.

1.4.4 Frontière efficiente

La frontière qui caractérise le polygone ou la courbe des contraintes s'appelle dans cette situation la "frontière efficiente de Markowitz" et dans le polygone/courbe se situent tous les portefeuilles à rejeter dits "portefeuilles dominés". Une autre manière de formuler ceci consiste à dire que les combinaisons (rendement, risque) de cette frontiére forment un ensemble d'optimas de Pareto,c'est-à-dire que si l'un des éléments augmente, l'autre doit augmenter aussi. Chaque point sur la courbe bleue à partir du point rouge "Portefeuille

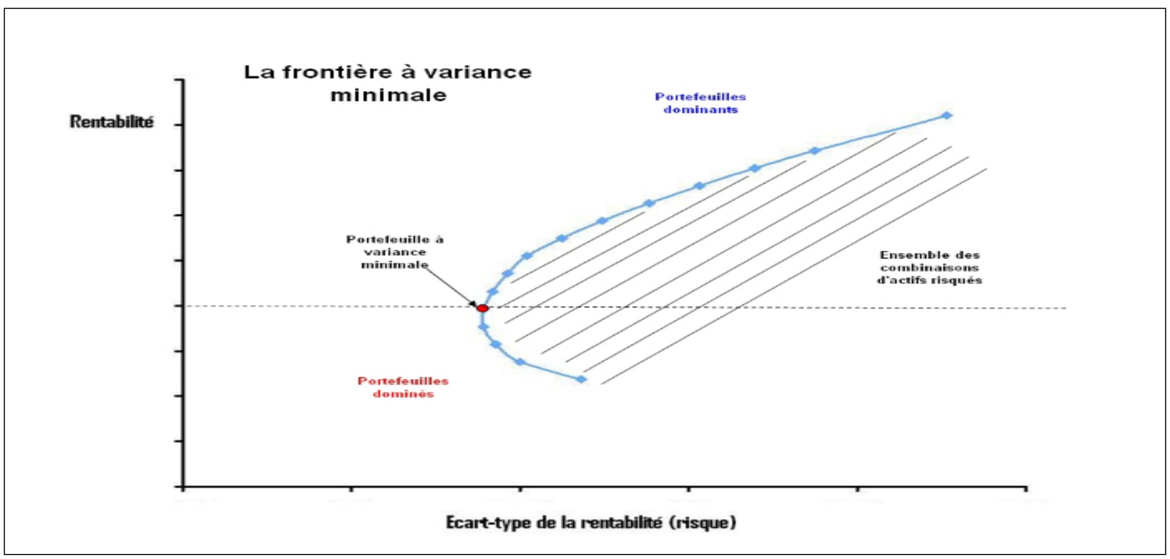

FIGURE 1.2 – **Frontière efficiente.**

à variance minimale" correspond à un portefeuille efficient ; c'est ce que l'on appelle la frontière d'efficience ou frontière de Markowitz. Si un portefeuille se trouve dans la zone hachurée, il n'est pas efficient car il existe :

1. un autre portefeuille apportant ce même niveau de rendement mais avec un risque plus faible,
2. un autre portefeuille apportant un rendement supérieur pour le niveau de risque considèré.

Chaque investisseur peut ensuite choisir n'importe quel portefeuille sur la demi-courbe bleue, en fonction du niveau de risque qu'il est prêt à supporter ou bien du rendement qu'il espère (maximisation de l'utilité de l'investisseur).

1.4.5 Coefficient bêta

Le Bêta est un outil de mesure du risque d'un actif notamment utilisé dans le modèle Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF). On l'utilisera entre autres pour mettre en place des stratégies de limitation des risques.
Le principe de cet outil est de comparer les mouvements effectués par un actif par rapport à son marché de référence, ce qui permet de déterminer son niveau de risque par rapport aux autres actifs de référence. La mesure est effectuée en comparant la rentabilité de l'actif à celle du marché.

Mathématiquement, le Bêta de l'actif financier se définit comme le rapport de la covariance de la rentabilité de l'actif avec celle du marché à la variance de la rentabilité du marché.

▶ **Calcul de Beta**

La manière la plus simple de calculer un Bêta est la méthode historique. On comparera donc les données de rentabilité historique de l'actif à celles du marché.

$$\beta = \frac{Cov(R_p, R_M)}{Var(R_M)}; \tag{1.14}$$

avec :
- R_p : rentabilité de l'actif ;
- R_M : rentabilité du marché.

1.5 L'indice de Treynor

Treynor a introduit en 1965 un modèle de mesure de la performance des portefeuilles basé sur la séparation entre les risques réguliers et irréguliers sont similaires à ce modèle Le modèle Sharp est différent en ce sens qu'il dépend du coefficient bêta du portefeuille en tant que mesure du risque et pas sur l'écart-type, et examine donc la performance du portefeuille en termes de capacité et l'efficacité de la gestion pour diversifier les investissements de manière à éliminer les risques et alloue des rendements de portefeuille supplémentaires (taux de rendement du portefeuille - moyenne rendement sans risque) sur un coefficient bêta et exprimé dans l'équation suivante :

$$T_n = \frac{\mu_p - \mu_f}{\beta_p}, \tag{1.15}$$

avec :

- T_n :le ratio de Treynor,
- μ_p :Taux de rendement du portefeuille,
- μ_f :le taux sans risque,
- β_p :le beta du portefeuille P,

où le rendement supplémentaire gagné par le portefeuille augmente pour chaque unité Risque régulier La performance du portefeuille est meilleure [10].

1.6 L'indice de Jensen

Jensen a proposé un modèle en 1968 pour mesurer la performance des portefeuilles d'investissement appelés alpha Estime Ainsi le rendement attendu du portefeuille de l'investisseur peut être supérieur à celui prévu par le Modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF), qui repose sur la recherche de la différence entre les deux rendements du premier rendement représentant la différence entre le rendement moyen du portefeuille et le rendement moyen d'un investissement sans risque,Ce montant est appelé rendement incrémental. Le second est la somme du coefficient bêta multiplié par la différence entre le rendement moyen du marché et le rendement moyen d'un investissement sans risque, appelée prime de risque du marché [10] et exprimé dans l'équation suivante :

$$\alpha_p = \overline{R_p} - [R_f + \beta_p(\overline{R_M} - R_f)], \tag{1.16}$$

avec :

- α_p :l'alpha de Jensen,

- $\overline{R_p}$:la rentabilité espérée du portefeuille,
- R_f :le taux sans risque,
- β_p :le Beta du portefeuille,
- $\overline{R_M}$:la rentabilité espérée du marché, de l'actif.

Si l'alpha de Jensen est supérieur à 0, cela signifie que le portefeuille bat son marché de référence. S'il est inférieur à 0, le portefeuille fait moins bien que ce qui est prévu dans le modèle du MEDAF.

1.7 Approche de SHARPE (1963-1964)

1.7.1 Modèle à indice simple de Sharpe

Sharpe [7] a été le premier qui a tenté de simplifier le modèle de Markowitz en développant les modèles à indice qui se base sur la simplification de la matrice de variances-covariances afin de réduire la charge de calcul.
Sharpe a proposé une diagonalisation de cette matrice en se basant sur le modèle à un seul indice en supposant que les fluctuations des rendements des actions peuvent être exprimés à l'aide d'une régression simple.
Autrement dit :

$$r_i = a_i + b_i R_i + \varepsilon_i \text{ pour i=1,\dots,n;} \tag{1.17}$$

où :

- R_i : est le rendement de l'indice i
- ε_i :est une variable aléatoire appelée bruit blanc qui vérifié les hypothése suivant :

$$\begin{aligned}
&E[\varepsilon_i] = 0 \quad et \quad \sigma^2_{\varepsilon_i} \neq 0 \quad pour \qquad i = 1, \dots, n;\\
&\sigma_{\varepsilon_i,\varepsilon_j} = cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \qquad \forall i \neq j;\\
&\sigma_{\varepsilon_i,i} = cov(\varepsilon_i, R_i) = 0, \qquad pour \qquad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Le rendement de portefeuille devient :

$$R(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i R_i = \sum_{i=0}^{n} x_i a_i + R_i(\sum_{i=0}^{n} x_i \varepsilon_i) + \sum_{i=0}^{n} x_i \varepsilon_i.$$

Soit $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} x_i b_i$ il en résulte :

$$R(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i a_i + x_{n+1} R_i + \sum_{i=0}^{n} x_i \varepsilon_i.$$

Le rendement espéré est donné par :

$$E[R(x)] = \sum_{i=0}^{n} x_i a_i + x_{i+1} E[R_i].$$

La varaince du rendement est :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon_i^2}^2 + x_{n+1}^2 \sigma_i^2.$$

Donc on abesion que de $(n+1)$ termes à estimer au lieu de $\frac{n(n+1)}{2}$ variance et covariance pour l'approche de markowitz.
Le concept de l'approche de markowitz est basé sur la diversification qui permet de réduire davantage le risque du portefeuille. Malheureusement on ne peut réduire complétement le risque en augmentant indéfiniment la taille de portefeuille.
Sharpe a montré que le risque d'un portefeuille quelconque peut étre décomposé en deux parties : le risque diversifiable ou risque non systématique et le risque non diversifiable ou risque de marché.

1.7.2 Modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF)

Suite à ses travaux concernant l'applicabilité de la matrice variancescovariances, Sharpe [8] a développé un nouveau modèle appelé le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) qui consiste à mesurer le degré de sensibilité du rendement d'un actif par rapport à celui du marché.

Définition

Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) est un modèle qui permet d'établir une relation entre le rendement espéré d'un titre et son risque systématique (le bêta). Il s'agit d'un modèle à un facteur, c'est-à-dire que les variations du rendement espéré sont uniquement expliquées par un seul facteur. Le modèle est principalement basée sur les hypothèses selon lesquelles les investisseurs sont averses au risque et ont des préférences moye1me-variance, il n'y a pas d'imperfections de marché (taxes, coûts de transactions), l'achat et la vente à découvert sont permis, et tous les actifs peuvent être échangés sur

le marché. Nous précisons que dans notre étude, il s'agit de la version inconditionnelle du MEDAF [17].
Le modéle d'équilibre des actifs financiers se base sur plusieurs hypothéses :

- Le marché est supposé parfait :
    1. pas de coût de transaction
    2. les dividendes et les gains de capitaux ne sont pas taxés
    3. pas d'influance sur les prix par les acheteurs et les vendeurs qui interviennent sur le marché.
    4. L'emprunt et le prét des investisseurs se fait avec un taux pur sansinfluence de son niveau et le taux d'emprunt est égale au taux de prét.
- Tous les investisseurs font le choix de portefeuille selon le critère de moyenne-variance.
- Tous les investisseurs ont la même période de l'investissement.
- Tous les investisseurs prennent leurs décisions en même temps.
- Tous les investisseurs détiennent leurs actifs pendant la même période.
- Tous les investisseurs ont la même vision vis à vis les anticipations des performances futures des actifs.

Étant donné un portefeuille constitué de n actions de rendements $R_1, R_2, \ldots,$ et R_n et un actif sans risque de rendement R_0.
Le rendement espéré de ce portefeuille est donné par :

$$\overline{R_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i; \tag{1.18}$$

où x_i représente la proportion investie dans l'action A_i pour $i = 1, \ldots, n$.
La relation qui caractérise le modèle d'équilibre des actifs financiers MEDAF est donnée par :

$$\overline{R_i} = R_0 + \beta(\overline{R_M} - R_0); \tag{1.19}$$

où :

- $\overline{R_i}$: est le rendement espéré de l'action A_i
- $\overline{R_M}$: le rendement de portefeuille de marché
- σ_M^2 : est le risque de portefeuille de marché
- $\beta = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$
- $\sigma_{iM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_{i,j}$

1.8 Comparaison entre les Modèles

Tous les modèles ci-dessus sont conçus pour mesurer la performance du portefeuille, c'est-à-dire la différence entre le rendement du portefeuille et le rendement sans risque, et la comparer avec le Risques d'investissement, mais la différence entre eux consiste à estimer le risque. Certains modèles se limiter aux risques réguliers mesurés par bêta et d'autres prennent des risques. (Régulier et irrégulier), qui est mesuré par un écart-type et représente un écart entre les rendements du portefeuille et sa moyenne pendant une période.

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait un rappels sur éléments de l'optimisation du portefeuille et les Mesures de risque,La théorie modèrne du portefeuille,Modéle de Treynor, Modèle de Jensen, Approche de SHARPE et enfin nous avons vu la Comparaison entre les Modèles,

Chapitre 2

Aspect mathématique des modèles : Markowitz et MEDAF

2.1 Introduction

Optimisation mathématique, est un outil mathématique qui nécessite d'utiliser des méthodes ou approches qui permettent d'opérer plusieurs choix, afin de trouver le meilleur résultat souhaité.
Dans ce chapitre, nous parlerons de la présentation mathématique des modèles (Markowitz, Sharpe et MEDAF)

2.2 Modèle de Markowitz

Soit R_p le rendement du portefeuille composé de n actifs caractérisés par leurs rendements respectifs $R_1, R_2, ...R_n$. On suppose, en outre, que chaque actif i entre pour une proportion X_i dans la composition du portefeuille P donné par la formule suivante.

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i. \tag{2.1}$$

En d'autres termes :

$$E(R_p) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\Big) \tag{2.2}$$

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j cov(R_i, R_j). \tag{2.3}$$

Sélectionner un portefeuille revient à choisir celui qui :

- ▶ Maximise $E(R_p)$.
- ▶ Minimise $V(R_p)$.
- ▶ Sous la contrainte que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Il s'agit donc d'un problème de maximisation d'une fonction économique sous contrainte. Soit Z cette fonction économique :

$$Z = \Phi E(R_p) - V(R_p); \tag{2.4}$$

qui doit être maximisée sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1;$$

où Φ est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs.

En d'autres termes, il s'agit du taux marginal de substitution du rendement et du risque qui exprime dans quelle mesure l'investisseur est d'accord pour supporter un risque accru en contrepartie d'un accroissement de son espérance de rendement.

En utilisant le Lagrangien de l'expression précédente, le problème de maximisation sous contrainte consiste à déterminer le maximum de la fonction Z définie par :

$$Z = \Phi \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j cov(R_i, R_j) + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i). \tag{2.5}$$

Cette fonction de $n+1$ variables $(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)$ est maximisée si sa dérivée partielle par rapport à chacune de ces variables est nulle, ce qui revient à poser le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x_1} = & \Phi E(R_1) - 2X_1 cov(R_1, R_1) - \ldots - 2X_n cov(R_1, R_n) - \lambda = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial x_2} = & \Phi E(R_2) - 2X_1 cov(R_2, R_1) - \ldots - 2X_n cov(R_2, R_n) - \lambda = 0; \\ \vdots & \\ \frac{\partial Z}{\partial x_n} = & \Phi E(R_n) - 2X_1 cov(R_n, R_1) - ... - 2X_n cov(R_n, R_n) - \lambda = 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = & 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = 0. \end{cases}$$

Soit $cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$, donc le système précédent devient :

$$\begin{cases} 2X_1\sigma_{11} + 2X_2\sigma_{12} + ... + 2X_n\sigma_{1n} + \lambda = \Phi\mu_1; \\ 2X_2\sigma_{21} + 2X_2\sigma_{22} + ... + 2X_n\sigma_{2n} + \lambda = \Phi\mu_2; \\ \vdots \\ 2X_n\sigma_{n1} + 2X_2\sigma_{n2} + ... + 2X_n\sigma_{nn} + \lambda = \Phi\mu_n; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1. \end{cases}$$

L'écriture matricielle sera alors :

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi\mu_1 \\ \Phi\mu_2 \\ \vdots \\ \Phi\mu_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\text{A=} \begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_1 & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{B=} \begin{pmatrix} \Phi\mu_1 \\ \Phi\mu_2 \\ \vdots \\ \Phi\mu_n \\ 1 \end{pmatrix} \text{X=} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système d'équations à résoudre peut se résumer sous la forme $AX = B$. Par conséquent : $X = A^{-1}B$ [12].
La détermination du poids de chacun des n actifs susceptibles d'entrer dans la composition d'un portefeuille passe donc par l'inversion d'une matrice carrée de $n + 1$ lignes et $n + 1$ colonnes.

2.3 Modèle de SHARPE

A la suite des traveaux de Markowitz,puis Sharpe, le modèle linéaire vient de pénétrer par effraction dans la finance moderne,on liant l'indice de marché à celui de portefeuille, à savoir un portefeuille dont le rendement R_p est défini par :

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Le rendement Ri de chaque actif i est lié linéairement à un indice du marché noté I. En d'autres termes :

$$R_i = \alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i; \tag{2.6}$$

où :

- ▶ I :le rendement d'un indice économique donné (indice boursier, indice du produit national brut,...).

- ε_i :une variable aléatoire supposée caractérisée par une espérance nulle, une variance égale à une constante et covariance nulle.
- α_i :coefficient alpha.
- β_i :le bêta du portefeuille risqué i.

De ce fait là il est possible de construire un modèle simplifié de l'algorithme de Markowitz, donc soit :

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i + \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i I.$$

soit : $I = \alpha_{i+1} + \upsilon_{i+1}$ où υ_{i+1} est une variable aléatoire telle que :

$$E(\upsilon_{i+1}) = 0 \qquad et \qquad V(\upsilon_{i+1}) = \text{constante}.$$

Dès lors :

$$E(R_p) = E\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i+\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i I\Big] = \sum_{i=1}^{n} x_i E(\alpha_i)+\sum_{i=1}^{n} x_i E(\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i E(\alpha_{i+1}+\upsilon_{i+1}).$$

Soit :

$$x_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i.$$

Dans ce cas, comme $E(\varepsilon_i) = 0$, si les rendements sont explicitement donnés et donc connus, l'espérance se calculera avec :

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big[\alpha_i + 0 + x_{i+1} E(\alpha_{i+1} + \upsilon_{i+1})\Big] = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i + x_{i+1}\alpha_{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \alpha_i.$$

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \alpha_i. \tag{2.7}$$

Comme le client va souvent chercher à maximiser l'espérance tout en minimisant la variance (le risque), il nous reste à déterminer cette dernière.

Étant donné que maintenant sont supposés explicitement connus les rendements des actifs financiers du portefeuille et les rendements du portefeuille (indice) du marché nous avons alors :

$$V = V\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i + \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \beta_i^2 V(\alpha_{i+1} + \upsilon_{i+1}).$$

Or, la variance d'une constante (comme α_i) est égale à 0. En outre, notons $Q_i = V(\varepsilon_i)$, de plus on sait que :$Q_{i+1} = V(\varepsilon_{i+1})$, alors :

$$V(Rp) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 Q_i + X_{n+1}^2 Q_{n+1};$$

Car :

$$V(\alpha_i) = V(constante) = 0.$$

Finalement on obtient :

$$V(Rp) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 Q_i.$$

Ici on peut déduire que le risque d'un portefeuille bien diversifié est constitué donc uniquement du risque du marché.

Dans ce contexte la maximisation de la fonction économique Z revient à déterminer :

$$MaxZ = max\Phi E(R_p - V(R_p)) = max\Big[\Phi \sum_{i=1}^{n+1} X_i\alpha_i - \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 Q_i + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{n+1} X_i)\Big];$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1.$$

Le calcul de chacune des dérivées partielles s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x_1} & = \Phi\alpha_1 - 2X_1Q_1 - \lambda = & 0; \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} & = \Phi\alpha_2 - 2X_2Q_2 - \lambda = & 0; \\ \vdots & & \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} & = \Phi\alpha_n - 2X_nQ_n - \lambda = & 0; \\ \frac{\partial z}{\partial x_{n+1}} & = \Phi\alpha_{n+1} - 2X_{n+1}Q_{n+1} - \lambda = & 0; \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} & = 1 - X_1 - ... - X_n = 0. & \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2Q_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2Q_2 & \dots 0 & 1 & \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2Q_{n+1} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n+1} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi\alpha_1 \\ \Phi\alpha_2 \\ \vdots \\ \Phi\alpha_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.1 Ration de Sharpe

Le ratio de Sharpe est la seule mesure qui fait référence à la droite du marché des capitaux. Parmi les trois mesures traditionnelles développées dans le cadre du MEDAF, il utilise une mesure de risque total au dénominateur. Cette mesure est définie par le ratio qui lie la surperformance du portefeuille par rapport au taux sans risque et l'écart-type des rendements du portefeuille [13]. Pour rappel, le ratio de Sharpe s'écrit.

$$S_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p};$$

où :

- ▶ S_p :ratio de Sharpe du portefeuille risqué P.
- ▶ R_p :rendement du portefeuille risqué P.
- ▶ R_f :aux sans risque.
- ▶ σ_p :volatilité du portefeuille risqué P.

L'avantage majeur de ce ratio est le fait qu'il ne soit pas conditionné par une variable. Plus précisément, le ratio est véritablement fiable pour le cas de détention d'un seul actif risqué couplé à un prêt ou un emprunt au taux sans risque. Il reste potentiellement impropre pour le cas plus courant de détention de plusieurs actifs risqués. Ainsi :

- Si le ratio est compris entre 0 et 1, le rendement obtenu est supérieur à celui d'un placement sans risque, mais il reste insuffisant.
- Si le ratio est supérieur à 1, tout va bien. La performance dégagée est meilleure que celle du taux du placement sans risque.
- Si le ratio est négatif, le portefeuille a moins de performance que le référentiel et la situation est très mauvaise.

2.4 Modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF)

2.4.1 Risque spécifique et risque systématique

Lorsqu'un investisseur procède à l'achat d'un titre financier, celui ci s'attend à recevoir, dans un horizon futur, une certaine valeur (le rendement espéré). Ainsi, lorsqu'on parle de risque, on fait allusion de façon générale à l'incertitude qui règne sur le rendement attendu par l'investisseur. On distingue cependant deux types de risques, le risque spécifique et le risque systématique.

▶ **Risque spécifique :**

C'est le risque qui est propre au titre (le risque qui affecte un titre bien précis) et qui peut être réduit avec une diversification de portefeuille. Au niveau des facteurs propres à une entreprise qui ont une influence sur ce type de risque, on distingue entre autre la gestion de l'entreprise, ses activités, sa technologie, $\cdots$, etc [9].

▶ **Risque systématique :**

Le risque systématique ou risque du marché correspond au risque incompressible attribué à la volatilité du marché dans sa globalité. Contrairement au risque spécifique, le risque systématique n'est pas diversifiable par une optimisation d'un portefeuille de titres et il est par conséquent rémunéré par les investisseurs sur le marché. Le risque systématique décliné à l'échelle d'une action est calculé par la multiplication du risque du marché dans sa globalité par la sensibilité des rendements de l'action par rapport au marché. cette sensibilité est mesurée par le coefficient bêta. Le risque systématique intervient dans le calcul du coût des capitaux propres ou dans les taux de rendement requis des actionnaires [16].

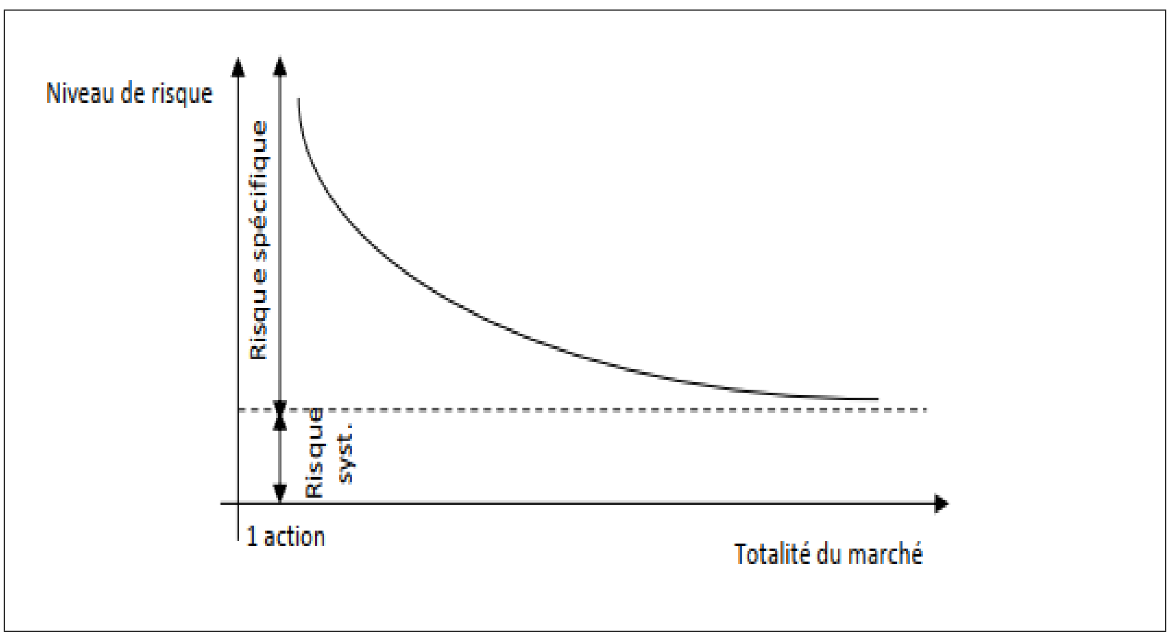

FIGURE 2.1 – **Diversification, risque systématique et risque spécifique.**

2.4.2 Expression mathématique du MEDAF

Dans un marché en équilibre et pour tout portefeuille ou actif quelconque q, le MEDAF dans sa version traditionnelle (celle de Sharpe) est caractérisée par la relation qui suit :

$$E(R_q) = R_f + \beta_{qM}(E(R_M) - R_f); \tag{2.8}$$

où :

- $E(R_q)$: le rendement espéré du portefeuille q.
- R_f : le rendement sans risque.
- β_{qM} :$\frac{Cov(R_q,R_M)}{V(R_M)}$ est le bêta du portefeuille q par rapport au marché.
- $E(R_M)$: le rendement espéré du portefeuille du marché.

La condition pour que le marché soit en équilibre (c'est-à-dire pour que l'offre de prêts égale à la demande d'emprunts), c'est que le rendement sans risque doit être inférieur au rendement du portefeuille à variance minimale (portefeuille avec le plus petit niveau de risque spécifique).
L'expression (2.8) nous montre une relation linéaire entre le rendement espéré du portefeuille q et son risque systématique.

Étant donné que le rendement espéré du portefeuille q, qui est "$E(R_M) - R_f > 0$", va dépendre positivement du bêta du marché du portefeuille q, alors la relation entre le rendement espéré et le risque systématique est linéaire positive.

2.4.3 MEDAF zéro-bêta

Black (1972) a proposé une version plus générale du MEDAF, qui ne nécessite pas d'actif sans risque. L'excès de rendement anticipé de l'actif i par rapport au rendement du portefeuille zéro-bêta dépend linéairement de son bêta [14], ce qui transforme la relation (2.8), en :

$$E(R_q) = R_{zc(M)} + \beta_{qM}(E(R_M) - R_{zc(M)});$$

avec : $R_{zc(m)}$: le rendement du portefeuille de zéro-covariance.

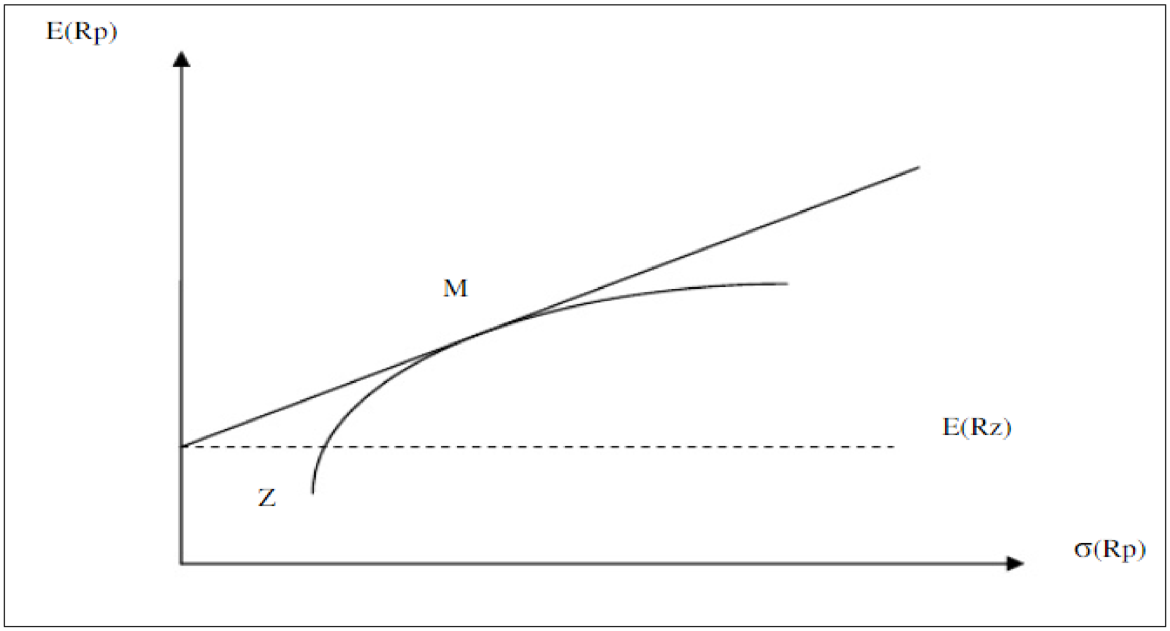

FIGURE 2.2 – **Portefeuille du marché et portefeuille de beta nul.**

D'après ce graphique on observe deux portefeuilles sur la frontière efficiente : le portefeuille du marché M et le portefeuille de bêta nul, désigné par Z, dont la variance est minimale.

Il faut combiner ces deux portefeuilles pour avoir la frontière efficiente complète. Pour s'y faire, il est supposé qu'on investit x dans le portefeuille Z et $(1-x)$ dans le portefeuille M.

▶ **Démonstration :**

Soit P un portefeuille qui combine le portefeuille du marché et un portefeuille de bêta nul, donc :

$$\begin{aligned} E(R_p) &= xE(R_M) + (1-x)E(R_z); \\ E(R_p) - E(R_z) &= x(E(R_M - E(R_z); \\ \sigma^2(R_p) &= x^2\sigma^2 E(R_M) + (1-x)^2\sigma^2(E(R_z)) + 2x(1-x)Cov(R_z, R_M). \end{aligned}$$

Sachant que le coefficient de corrélation est donné par :

$$\rho = \frac{Cov(R_z, R_M)}{\sigma_z \times \sigma_M};$$

alors, la relation de la variance devient :

$$\sigma^2(R_p) = x^2\sigma^2 E(R_M) + (1-x)^2\sigma^2(E(R_z)) + 2x(1-x)\rho\sigma_z.\sigma_M;$$

puisque Z est un portefeuille de bêta nul, c'est-à-dire non corrélé avec le portefeuille du marché, son coefficient d'autocorrélation avec le marché est nul ($\rho(z, M) = 0$), ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_p) &= x^2\sigma^2 E(R_M) + (1-x)^2\sigma^2(E(R_z)); \\ \sigma(R_p) &= \sqrt{x^2\sigma^2 E(R_M) + (1-x)^2\sigma^2(E(R_z))}. \end{aligned}$$

Il faut chercher la pente de la tangente au point M coupant l'axe des ordonnées au point $E(R_z)$. Cette pente est donnée par :

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma(R_p)} = \frac{\partial E(R_p)/\partial x}{\partial \sigma(R_p)/\partial x};$$

on calcule les dérivées partielles de l'espérance de rendement et du risque du portefeuille, i.e. :

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial x} = E(R_z) - E(R_M);$$

et

$$\frac{\partial \sigma(R_p)}{\partial x} = \frac{2x\sigma_z^2 - 2(1-x)\sigma_M^2}{2\sigma(R_p)};$$

au point M, $x = 0$, $\sigma(R_p) = \sigma_M$, donc :

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma(R_p)} = \frac{E(R_M) - E(R_z)}{\sigma_M}.$$

Cette droite coupe l'axe des ordonnées au point $E(R_z)$. Son équation s'écrit finalement :

$$E(R_p) = E(R_z) + \Big(\frac{E(R_M) - E(R_z)}{\sigma_M}\Big)\sigma(R_p).$$

Il est fondamental de préciser que l'équation, ainsi établie, est semblable dans sa forme à celle de la droite du marché (Capital Market Line(CML)) du modèle de base. C'est comme si la rentabilité de l'actif sans risque est remplacée par la rentabilité espérée du portefeuille de bêta nul.

Amenc et Le sourd notent, qu'il est maintenant possible de montrer que la rentabilité de tout actif risqué peut s'écrire à partir de la rentabilité du portefeuille zéro bêta et de la rentabilité du portefeuille du marché. On procède pour cela de la même façon que pour

établir le MEDAF en présence d'un actif sans risque.
On sait que la pente de la frontière efficiente est de :

$$\frac{(E(R_i) - E(R_M))\sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}.$$

Cette pente doit être égale à la pente de notre nouvelle droite du marché, soit :

$$\frac{E(R_M) - E(R_z)}{\sigma_M};$$

d'où :

$$\frac{E(R_i) - E(R_M)\sigma_M}{\sigma_{i,M}} = \frac{E(R_M) - E(R_z)}{\sigma_M}.$$

Ce qui donne :

$$E(R_i) = E(R_z) + \frac{\sigma_{pM}}{\sigma_M^2}\Big(E(R_M) - E(R_z)\Big).$$

Sachant que :

$$\beta_i = \frac{Cov(i, M)}{Var(M)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2};$$

alors :

$$E(R_i) = E(R_z) + \beta_i\Big(E(R_M) - E(R_z)\Big).$$

Il devient clair que même dans l'absence d'un actif sans risque la forme du MEDAF est conservée. Ce modèle est qualifié du modèle à deux facteurs.

2.4.4 Les modèles utilisés pour tester le MEDAF

Au cours des années qui ont suivi l'introduction du MEDAF, différents tests empiriques ont été effectués dans l'objectif d'analyser sa validation empirique. Ainsi, il existe différents modèles économétriques qui ont été utilités dans ce sens, tels que le modèle de Blume et Friend (1970), le modèle de Black, Jensen et Scholes (1972), et le modèle de Fama et MacBeth (1973).

▶ Modèle de Fama et Macbeth (1973) :

La régression de Fama–MacBeth est une méthode utilisée pour estimer les paramètres du modèle d'évaluation d'actifs (MEDAF), La méthode estime les bêtas et les primes de risque pour tout facteur de risque susceptible de déterminer le prix des actifs. La méthode fonctionne avec plusieurs actifs dans le temps (données de panel). Les paramètres sont estimés en deux étapes :

1. Commencez par régresser chaque actif par rapport aux facteurs de risque proposés afin de déterminer le bêta de cet actif pour ce facteur de risque.
2. Régressez ensuite tous les rendements des actifs pendant une période déterminée par rapport aux bêtas estimés pour déterminer la prime de risque de chaque facteur.

Les régressions Fama-MacBeth fournissent les types des erreurs corrigées uniquement pour la corrélation transversale. Les erreurs standards de cette méthode ne corrigent pas l'autocorrélation des séries chronologiques.

▶ Modèle de Black, Jensen et Scholes (1972) :

C'est un modèle de régression linéaire avec séries chronologiques. L'expression qui caractérise ce modèle est la suivante :

$$R_{jt} = a_j + \beta_j R_{Mt} + E_{jt};$$

où :

- ▶ t est la période et j le portefeuille ;
- ▶ R_{jt} : risque du titre.
- ▶ R_{Mt} : risque du marché.
- ▶ β_j bêta du marché du portefeuille j.
- ▶ a_j constante.

Le principal but de ce modèle est d'estimer les paramètres a_j et β_j. Pour tester la validité du MEDAF, on teste l'hypothèse nulle selon laquelle la constante a_j est égale à zéro. Si cette hypothèse nulle est rejetée, cela signifie que le modèle ne parvient pas à expliquer correctement la prime de risque du titre (car ce dernier ne dépend pas uniquement de la prime de risque du marché) : ce qui mène à invalider le modèle. Cependant si l'hypothèse nulle n'est pas rejetée, cela implique que le modèle capte parfaitement les variations de la prime de risque du titre : le modèle est ainsi validé. Notons cependant qu'il pourrait avoir un biais au niveau de l'estimation de a_j, dans le cas où des variables non-corrélées avec R_{Mt} auraient été omises [15].

▶ Modèle de Blume et Friend (1970) :

C'est un modèle de régression transversale, c'est-à-dire qu'il est basé sur des données d'une période précise. Il est basé sur l'hypothèse selon laquelle les erreurs sont normales et homoscédastiques. Ce modèle consiste à effectuer une régression du rendement espéré (une moyenne échantillonnale) sur les estimations du bêta et du bêta élevé au carré. La particularité de ce modèle c'est qu'il permet notamment de tester l'hypothèse de linéarité entre le rendement et le risque soutenue par le MEDAF [15].

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a donné les principes mathématiques sur lesquels sont fondés les deux modèles de gestion de portefeuille qu'on a traité à savoir le modèle de Markowitz et MEDAF. C'est en utilisant ces ces principes mathématiques que nous allons appliquer ces deux modèles sur des exemples numériques dans le chapitre qui va suivre.

Chapitre 3

Application des modèles de gestion de portefeuilles : (Modèle de Markowitz et modèle MEDAF)

3.1 Introduction

C'est, depuis le début des années 1952 ,à la suite des travaux pionniers d'Harry Markowitz, qui a fondé son célèbre modèle moyenne variance($Moyenne - variance$).L'argumentation de ce modèle se fonde principalement sur le fait qu'une règle d'espérance actualisée des rendements ne permet pas à un investisseur rationnel ayant l'aversion pour le risque de préférer un portefeuille plus diversifié à un qui ne l'est pas. Markowitz introduit alors une règle basée sur un critère ($Moyenne - variance$). Selon ce principe, il est possible d'identifier un portefeuille avec une variance minimale pour une espérance donnée ou inversement, avec une espérance maximale pour une variance donnée. L'ensemble de toutes ces combinaisons ($Moyenne - variance$) est appelée la frontière efficiente.
Au cours des années qui succéde les traveux de Markowitz (modèle de Markowitz), les praticiens ont reconnu les limites de ce modèle et ils ont développé, ainsi, d'autres pouvant modéliser le mieux possible la relation (Risque/Rentabilité).
Actuellement,des algorithmes rapides ont été développé pour mettre en pratique cette frontière ; avec un système fini d'égalité linéaire ou contraintes d'inégalités.La version de l'algorithme de la ligne critique développé par Markowitz était le coup de pouce de ce dernier.Les entrées de ces algorithmes sont outre que les paramètres des contraintes ; les moyennes et les variances des titres.

Le MEDAF est l'un des résultats centraux de la théorie financière moderne, il constitue l'un des paradigmes dominants de la finance moderne depuis sa validation empirique par Black, Jensen et Scholes (1972) et par Famad et Macbeth (1973). Ce modèle est incontestablement le modèle d'évaluation le plus connu et utilisé menant à une conclusion facilement compréhensive, à savoir : "la rentabilité moyenne d'un actif financier est d'autant plus importante que le bêta est élevé".
Le MEDAF est un Modèle qui explique les taux de rentabilité des différents actifs, en fonction de leur risque.
comme le Modèle de MEDAF est un complémentaire du modèle Markowitz, alors la mise en oeuvre du MEDAF passe inévitablement par la mise en oeuvre du modèle de Markowitz.

3.2 Mise en oeuvre des deux modèles (Markowitz & MEDAF)

Pour mettre en œuvre les deux modèles de gestion de portefeuille sur deux exemples numériques, l'un deux pris du travail réalisé dans [7], le second nous l'avons construit nous même pour faire apparaître la sensitivité du modèle par rapport au ratio bêta.
La mise en oeuvre des deux modèles Markowitz & MEDAF requiert d'abord le calcul des rentabilités R_i des différents titres i, ainsi que la rentabilité R_M du portefeuille du marché. On utilise des données historiques concernant les prix et les dividendes et on calcule les rentabilités passées.
La principale difficulté de cette mise en œuvre des deux modèles est l'estimation préalable des paramètres : les n rentabilités espérées μ_i, les n variances σ_i^2 et les $n(n-1)/2$ covariances $\sigma_{i,j}$. Par exemple, pour 500 titres, le nombre total de paramètres nécessaires est de 125 750, dont 124 750 covariances. Quantitativement, c'est à l'évidence le nombre des covariances qui pose le principal problème. Qualitativement, c'est le vecteur des n espérances de rentabilité qui est le plus difficile à estimer.

3.3 Le language de programmation MATLAB

MATLAB(matrix laboratory) est un logiciel du calcul numérique,développé à la fin des années 70, conçu pour permettre de travailler à partir d'un outil de programmation de haut niveau.
La programmation sous MATLAB est très particulière : soit on écrit directement sur l'espace d'exécution (espace de commande) ou bien on programme sur l'éditeur de

développement de MATLAB, à savoir que la sauvegarde se fait avec l'extension ".m". Cette façon de sauvegarder permet d'utiliser ces fonctions comme des fonctions MATLAB dans l'espace d'exécution.

3.4 Algorithme de simulation

Pour la mise en œvre des deux modèles Markowitz & MEDAF, nous avons établie l'algorithme (qu'on a nommé Algorithme "MARKOWITZ-MEDAF", son programme est donné dans l'annexe) suivant, bien sûr cet algorithme fait appel à des fonctions prédéfinies dans la bibliothèque de MATLAB pour générer la frontière efficiente avec un actif sans risque :

Algorithme "MARKOWITZ-MEDAF" :

Début :
lire(Donner le nombre de titres) ;
lire(Donner les rendements de chaque titre) ;
lire(Donner la matrice variance covariance) ;
lire(Donner les taux de rendement sans risque) ;
lire(Donner le nombre de portefeuille) ; Faire appel à la fonction prédéfinie :

$$[riskport, rendport, poidsport] = portopt()$$

Afficher la frontière efficiente de Markowitz ;
Tant que $i \leq$ au nombre de portefeuilles, faire appel à la fonction prédéfinie suivante :

$$[riskyrisk, riskyrend, poidsrisky, riskfraction, riskglobal, rendglobal] = portalloc();$$

fin.
L'affichage graphique des résultats
Fin.

Remarques 3.1. Les fonctions prédéfinies auxquelles on a fait appel dans notre algorithme sont : *portopt*(), *portalloc*(). Leurs utilités sont explicitées dans les deux premières remarques suivantes :

- ► L'appel de *portopt*(), tout en spécifiant les arguments de sortie, retourne les tableaux représentant le risque, le rendement et le poids de chacun des portefeuille le long de la frontière efficiente et les vecteurs correspondants utilisés comme les trois premiers arguments de la fonction *portalloc*() d'entrée.

- ▶ L'appel de *portalloc*() tout en spécifiant les arguments de sortie : la variance (*riskyrisk*), le rendement attendu (*riskyrend*) et les poids (*poidsrisky*) alloués au portefeuille risqué optimal. Elle retourne également la fraction (*riskfraction*) du portefeuille complet attribué au portefeuille risqué, la variance (*riskglobal*) et le rendement attendu (*rendglobal*) de l'ensemble du portefeuille optimal.
- ▶ L'ensemble du portefeuille combine des investissement dans l'actif sans risque et du portefeuille risqué.

3.5 Premier exemple d'application

On considère un univers de titres constitué de 4 titres risqués, pris du livre [7], dont les rendements nets et les volatilités sont respectivement les suivants :

$$E_1 = 0.05, \qquad E_2 = 0.06, \qquad E_3 = 0.08, \qquad E_4 = 0.11;$$

Titre/Titre	1	2	3	4
1	0.0300	0.0162	-0.0071	0.0123
2	0.0162	0.0350	0.0135	0.0089
3	-0.0071	0.0135	0.0420	0.0048
4	0.0123	0.0089	0.0048	0.0560

avec un taux sans risque de 5%.

3.6 Deuxième exemple d'application

Considérons un deuxième exemple d'application pris du site web [20], comprenant trois titres composants un portefeuille dont les rendements et les volatilités sont respectivement, les suivants :

Titre	t_1	t_2	t_3
μ_i	0.116	0.226	0.252
σ_i^2	0.21728	0.00253	0.22247

$C_{i,j}$	t_1	t_2	t_3
t_1	0.2173	-0.0034	-0.0034
t_2	-0.0034	0.0025	0.0085
t_3	-0.0535	0.0085	0.2225

avec un taux sans risque égal 0.22.

3.7 Troisième exemple d'application

Ayant constaté dans les deux exemples précédents que le l'influence du ratio Sharpe n'apparaît pas dans nos résultats et ce est dû d'après notre analyse à la valeur de l'actif sans risque considéré dans ces exemples. En effet, les valeurs des actifs considérées sont relativement grandes ce qui a donné lieu à des rendements négligeables. C'est pour cette raison qu'on a préféré prendre un troisième exemple avec des actif sans risque ayant des valeurs très petites pour faire agrandir les rendements et faire apparaître l'influence du ratio de Sharpe sur le bêta qui illustre la sensibilité du portefeuille par rapport au marché.

Donc, on considère un portefeuille financier composé de 10 titres de la bourse française de l'indice CAC 40. Les données sont prise du mémoire [24], et les auteurs de ce mémoire ont obtenus à leurs tour ces données du site yahoo finance qui représentent les prix journaliers des ces titres. Ces données s'étalent sur une période de 5 ans (17/06/2013-17/06/2018).
A partir des données de ce troisième exemple, les rendements espérés et la variance de chaque titre sont présentés sont obtenus et résumés dans les figures des tableaux suivantes :

	AC.PA	ACA.PA	AI.PA	AIR.PA	ATO.PA	BN.PA	BNP.PA	CAP.PA	DG.PA	EN.PA
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
μ_i	0,000519264	0,000642838	0,00028146	0,000825181	-0,00248227	0,000174769	0,000337639	0,000994321	0,000687885	0,000677513
σ_i^2	0,000253204	0,000359886	0,000158644	0,00029116	0,003352011	0,000138016	0,000299592	0,000235087	0,000170413	0,000274839

FIGURE 3.1 – **Rendement espéré et la variance de chaque titre.**

Avec la matrice variance covariance entre les différents titres, donnée par :

$\Sigma =$

	AC.PA	ACA.PA	AI.PA	AIR.PA	ATO.PA	BN.PA	BNP.PA	CAP.PA	DG.PA	EN.PA
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
A1	0,0002532	0,000147	0,0000973	0,000131	0,0000975	0,0000826	0,000146	0,000125	0,000103	0,000103
A2	0,000147	0,00035989	0,000116	0,000151	0,0000941	0,0000773	0,00025893	0,000127	0,000121	0,00014
A3	0,0000973	0,000116	0,00015864	0,000115	0,0000697	0,0000865	0,000124	0,000102	0,0000935	0,0000956
A4	0,000131	0,000151	0,000115	0,00029116	0,0000994	0,0000956	0,000157	0,000125	0,000117	0,000118
A5	0,0000975	0,0000941	0,0000697	0,0000994	0,00335201	0,0000589	0,000111	0,000102	0,0000992	0,000101
A6	0,0000826	0,0000773	0,0000865	0,0000956	0,0000589	0,00013802	0,000091	0,0000893	0,0000842	0,0000703
A7	0,000146	0,00025893	0,000124	0,000157	0,000111	0,000091	0,00029959	0,000134	0,000125	0,000138
A8	0,000125	0,000127	0,000102	0,000125	0,000102	0,0000893	0,000134	0,00023509	0,000106	0,000105
A9	0,000103	0,000121	0,0000935	0,000117	0,0000992	0,0000842	0,000125	0,000106	0,00017041	0,000115
A10	0,000103	0,00014	0,0000956	0,000118	0,000101	0,0000703	0,000138	0,000105	0,000115	0,00027484

FIGURE 3.2 – **Rendement espéré et la variance de chaque titre.**

où :

- **ACA :** crédit agricol.
- **AIR :**Airbus.
- **AI :**Air Liquide S.A.
- **CA :**Carrfour.
- **DG :**VINCI S.A.
- **EI :**Essilor International Société Anonyme.
- **EN :** Bouyues S.A.
- **ML :**Compagnie Générale des établissement.
- **OR :**L'réal S.A.
- **ORA :** Orange S.A.

Pour ce troisième l'exemple en va considérer deux petites valeurs différentes pour le l'actif, et ce pour illustrer, comme on l'a déjà dit, l'influence du ratio de Sharpe sur le bêta qui et qui à son tour illustrera la sensibilité du portefeuille par rapport au marché.
Deuxième cas : le taux sans risque égal la valeur 0.0006

A présent qu'on a considéré les différents éléments dont nous avons besoin, nous avons pu procéder à l'application de notre algorithme pour générer la frontière efficiente du portefeuille.

Dans la section suivante seront donnés les résultats obtenus à partir des trois exemples considérés, ainsi que leurs interprétations.

3.8 Résultats et interprétations

Premier exemple :
Les résultats de l'algorithme de Markowitz sont présenté dans le tableau et le graphe suivant :

riskport	rendport	poidsport	x_1	x_2	x_3	x_4
0.1164	0.0677	P_1	0.5060	0	0.3971	0.0968
0.1243	0.0783	P_2	0.3285	0	0.3998	0.2716
0.1455	0.0889	P_3	0.1510	0	0.4025	0.4464
0.1758	0.0994	P_4	0	0	0.3523	0.6477
0.2366	0.1100	P_5	0	0	0	1

.

A partir de ces résultats, on remarque que plus le niveau du rendement espéré est élevé, plus le risque est grand. Par exemple, pour une espérance égale à 17.58%, on a une variance équivalente à 9.94%. Par contre, en augmentant le taux de rendement espéré à une valeur 23.66%, le risque accroît également pour atteindre une valeur de 11% et la figure 3.8 de la frontière efficiente de Markowitz montre la croissance du rendement en fonction du risque.

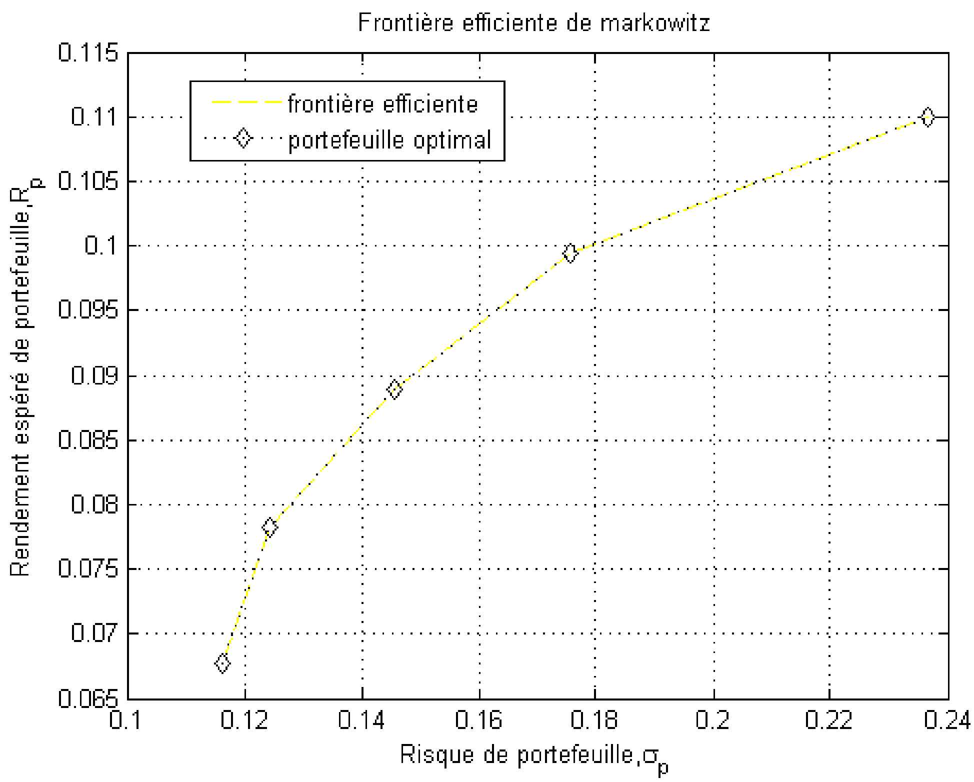

FIGURE 3.3 – **Frontière efficiente de Markowitz du premier exemple.**

Par ailleurs, notre algorithme nous a donné le rendement global *rendglobal* de chaque portefeuille à l'équilibre selon le MEDAF (on se situe sur la droite du marché) grace à la relation suivante :

$$E[R_p] = R_f + (E[R_m] - R_f) \times \beta_p;$$

où

- R_f : est taux de rendement du titre sans risque ;
- $E[R_m]$: est le rendement du marché ;
- $\beta_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$:ratio de Sharpe.

Donc pour le portefeuille P_1 on a :

- ▶ $R_f = 0.05$;
- ▶ $E[R_m] = 0.0982$: est le rendement du marché ;
- ▶ $\beta_{P_1} = \frac{\sigma_{P_1}}{\sigma_m} = \frac{0.2751}{0.1712} = 1.6068$:ratio de Sharpe ;

d'où :
$E[R_{p_1}] = 0.1275$ est le rendement global du portefeuille P_1. Avec la même formule pour les autres portefeuilles, on obtient :

$$E[R_{p_2}] = 0.0639, \quad E[R_{p_3}] = 0.0525, \quad E[R_{p_4}] = 0.0504 \quad \text{et} \quad E[R_{p_5}] = 0.0501;$$

avec :

$$\beta_{P_1} = 1.6068, \quad \beta_{P_2} = 0.2873, \quad \beta_{P_3} = 0.5140, \quad \beta_{P_4} = 0.0935 \quad \text{et} \quad \beta_{P_5} = 0.0152.$$

On déduit que le rendement global du portefeuille est proportionnel à sont bêta et d'après la méthode MEDF, le portefeuille optimal est celui qui maximise le ratio de Sharpe comme le montre la figure 3.8 de la frontière efficiente avec la droite de marché.

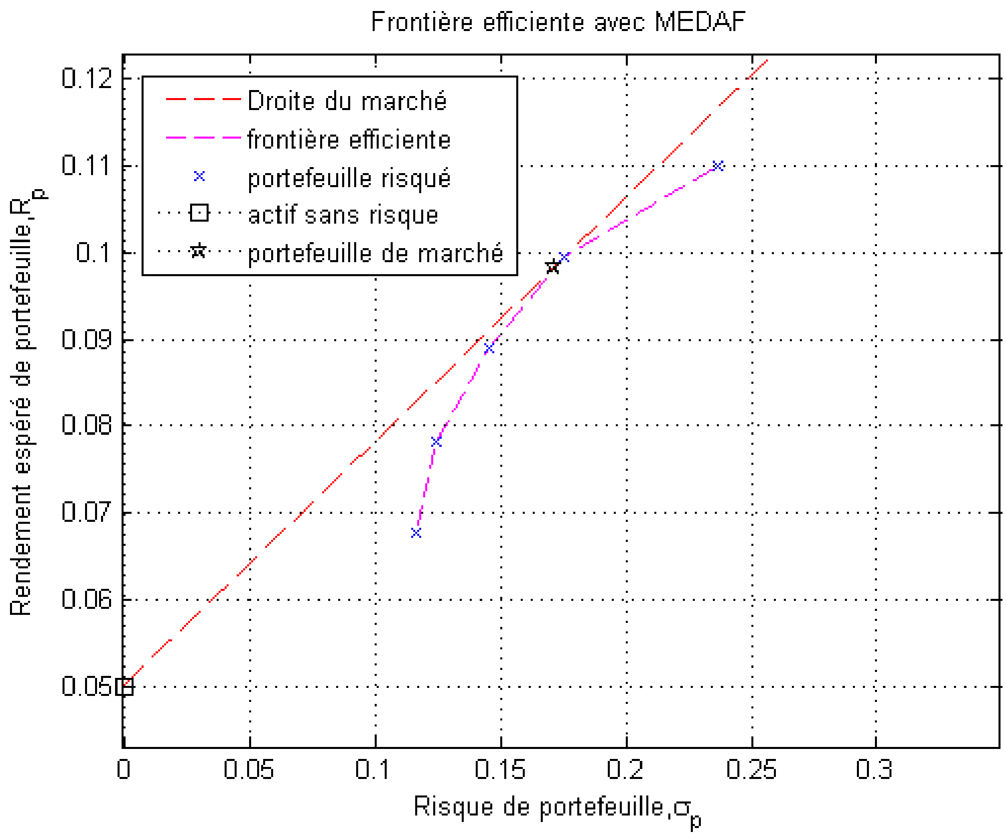

FIGURE 3.4 – **Frontière efficiente du modèle MEDF associé au premier exemple.**

Deuxième exemple :
les résultats de la méthode de Markowitz sont présentés dans les tableaux suivants :

σ_p	μ_p	poidsport	x_1	x_2	x_3
0.0487	0.2231	P_1	0.0261	0.9739	0
0.1402	0.2328	P_2	0	0.7402	0.2598
0.3042	0.2424	P_3	0	0.3701	0.6299
0.4717	0.2520	P_4	0	0	1

Par ailleurs, les résultats de la méthode de MEDAF sont les suivants :

- $R_f = 0.22$;
- $E[R_m] = 0.2283$: est le rendement du marché ;
- $\beta_{P_1} = \frac{\sigma_{P_1}}{\sigma_m} = \frac{0.0958}{0.08453} = 1.1333$: ratio de Sharpe.

D'où : $E[R_{p_1}] = 0.2294$ est le rendement global du portefeuille P_1; avec la même formule pour les autres portefeuilles on a obtenu :

$$E[R_{p_2}] = 0.2209, E[R_{p_3}] = 0.0.2201, E[R_{p_4}] = 0.2200013;$$

avec :

$$\beta_{P_1} = 1.6068, \beta_{P_2} = 0.114, \beta_{P_3} = 0.011, \beta_{P_4} = 0.0011.$$

Le portefeuille de rendement maximal est le portefeuille $P_1 = 0.2294$, avec un risque de 0.0958. Par contre dans la méthode de Markowitz P_1 est le portefeuille de rendement maximal mais avec un risque plus grand et le portefeuille de variance minimale est le portefeuille P_4 avec un risque moins minimal comme le montre les deux figures (celle de la frontière efficiente de Markowitz et celle du marché MEDAF) :

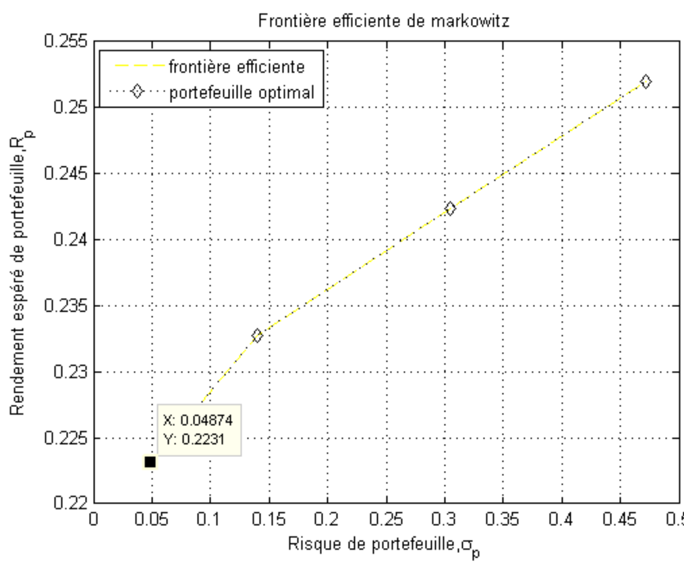

FIGURE 3.5 – **Frontière efficiente du modèle de Markowitz associé au deuxième exemple.**

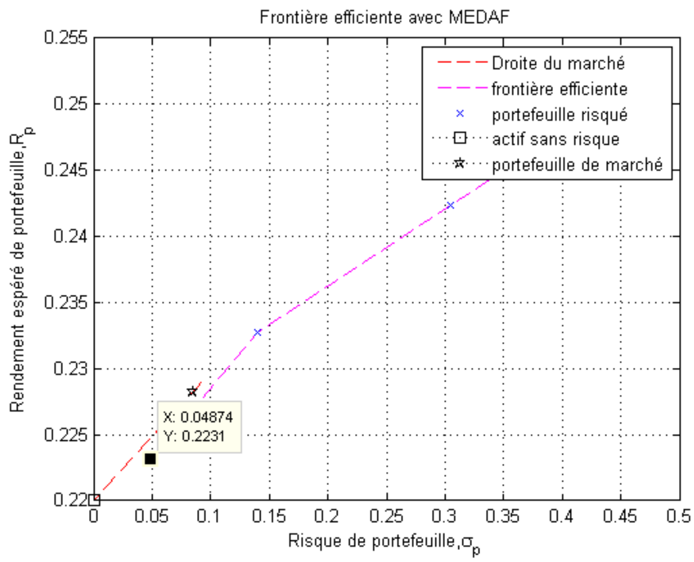

FIGURE 3.6 – **Frontière efficiente du modèle MEDAF associé au deuxième exemple.**

Troisième exemple :

Cas de l'actif sans risque égal à la valeur 0.0005 :

les résultats de la méthode de Markowitz sont présentés dans le tableau et dans le graphe de la frontière efficiente suivants :

port	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_8	P_{10}	P_{11}
σ_p	0.0097	0.0098	0.0099	0.0102	0.0105	0.0108	0.0113	0.0118	0.0124	0.0135	0.0153
$\mu_p 10^{-3}$	0.3409	0.4062	0.4716	0.5369	0.6023	0.6676	0.7329	0.7983	0.8636	0.9290	0.9943

et les proportions des portefeuilles sont les suivantes :

P_1	0.0323	0	0.0034	0	0.0065	0.6449	0	0	0.0013	0.3117
P_2	0.0302	0	0.0021	0	0.0027	0.5612	0	0.0581	0.0560	0.2897
P_3	0.0266	0	0.0008	0.0022	0	0.4784	0	0.1188	0.1066	0.2667
P_4	0.0192	0	0	0.0271	0	0.3929	0	0.1718	0.1493	0.2397
P_5	0.0118	0	0	0.0519	0	0.3069	0	0.2249	0.1922	0.2123
P_6	0.0043	0	0	0.0767	0	0.2209	0	0.2780	0.2350	0.1850
P_7	0	0	0	0.1012	0	0.1335	0	0.3306	0.2777	0.1569
P_8	0	0	0	0.1252	0	0.0442	0	0.3826	0.3201	0.1279
P_9	0	0	0	0.1497	0	0	0	0.5092	0.2594	0.0817
P_{10}	0	0	0	0.1747	0	0	0	0.7091	0.0974	0.0188
P_{11}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

et les résultats de la mèthode de MEDAF sont présenter dans le tableau suivant :

port	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_8	P_{10}	P_{11}
renglobal	0.0047	0.0024	0.0012	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0	0	0	0
riskglobal	0.0678	0.0341	0.0171	0.0086	0.0043	0.0022	0.0011	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001
beta	5.3895	2.710	1.3593	0.6836	0.3418	0.17488	0.08744	0.0397	0.02384	0.0079	
S_p	0.06924	0.07023	0.06988	0.06918	0.0686	0.08863	0.08636	-0.01	-0.0166	-0.05	-0.05

avec S_p est le ratio de Sharpe :

$$S_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}.$$

On remarque que le rendement de tout les portefeuilles est supérieur à celui de l'actif sans risque sauf pour les portefeuille (8,9,10,11) ce qui est dû au fait que le bêta est suffisamment petit dans ces quatre cas ce qui signifie que le rendement est minimal. On remarque aussi que les portefeuilles (6,7) sont plus performants que le portefeuille (1) malgré que le rendement de ce dernier est plus élevé à cause de la grandeur de son risque.
Les deux graphes de la frontière efficiente, associés aux deux modèles (Markowitz et MEDAF), sont les suivants :

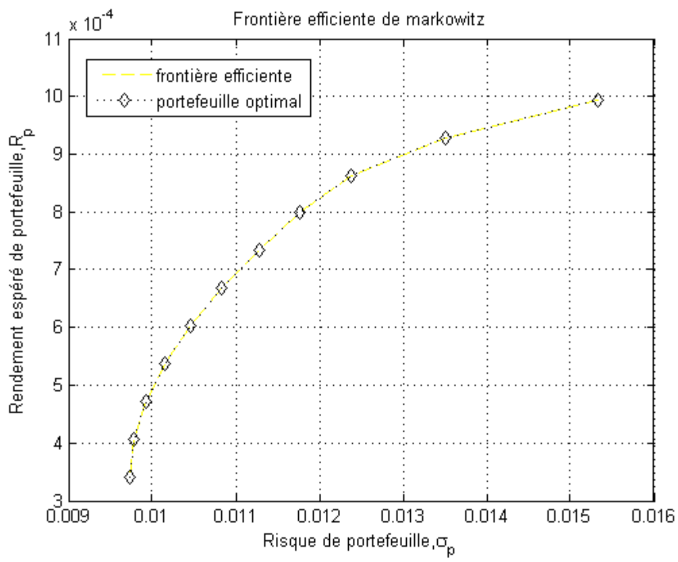

FIGURE 3.7 – **Frontière efficiente du modèle de Markowitz associé au troisième exemple.**

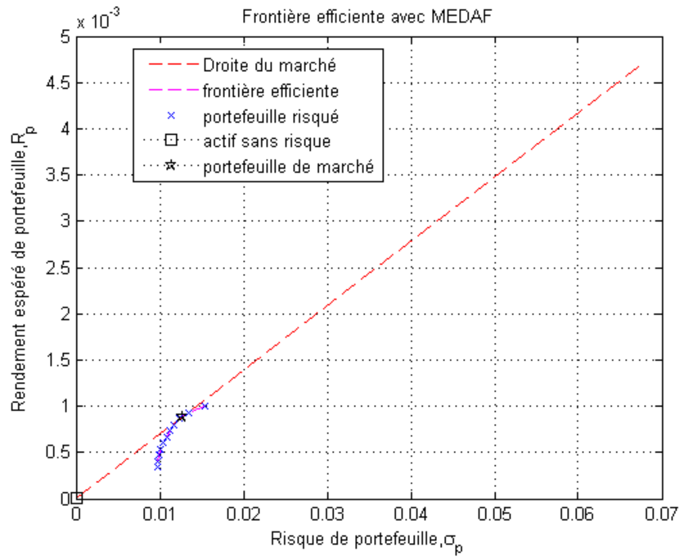

FIGURE 3.8 – **Frontière efficiente du modèle MEDAF associé au troisième exemple.**

Cas de l'actif sans risque égal à la valeur 0.0006 :

Pour la méthode de Markowitz les résultats sont les mêmes que ceux obtenus dans le cas de l'actif sans risque ayant la valeur 0.0005, mais la différence qu'on a enregistrée c'est au niveau de la méthode MEDAF, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

Les résultats de la méthode de MEDAF sont présentés dans le tableau suivant :

port	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_8	P_{10}	P_{11}
renglobal	0.0015	0.0010	0.0008	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
riskglobal	0.0316	0.0159	0.0080	0.0040	0.0020	0.0010	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001	0.00001
beta	2.1395	1.1710	1.0593	0.5401	0.1750	0.10488	0.06752	0.00397	0.00067	0.00067	0.00067
S_p	0.0316	0.03144	0.0375	0.025	0	0	0	0	0	0	0

Donc d'après ces résultats obtenus par la méthode MEDAF, si le rendement minimal des portefeuilles est inférieur ou égal au taux sans risque l'investisseur a l'intérêt à investir dans l'actif sans risque. C'est le modèle de MEDAF qui nous a permis d'avoir cet conclusion et grace au fait que ce modèle fait apparaître la relation entre les portefeuilles risqués (marché) et l'actif sans risque, puisqu'il peut augmenter le risque global de portefeuille, par le biais du facteur du risque bêta.

3.8.1 Interprétation graphique des résultats des trois exemples

Pour un niveau de risque donné l'investisseur, cherchant à obtenir la rentabilité espérée comme la plus élevée possible, doit chercher la droite ayant une grande pente combinant l'actif sans risque et un portefeuille appartenant à la frontière efficiente des actifs risqués.

Cette pente correspond au ratio de Sharpe bêta, cette recherche nous donne le portefeuille du marché.
Dans nos deux premiers exemples :

- La croissance de la partie supérieure de la frontière implique que l'on peut augmenter le rendement espéré des portefeuilles efficients, mais au prix d'un risque croissant.
- La concavité de la courbe implique que l'augmentation de variance a de moins en moins d'effet favorable.

alors que dans notre troisième exemple :

- On remarque qu'à l'équilibre de marché, les portefeuilles risqués sont presque confondue avec la droite de marché ; dans ce cas le coefficient bêta n'est pas assez significatif.
- Les indices utilisés (CAC40) ne reflètent pas le portefeuille de marché théorique (qui devait englober tous les actifs risqués).
- Le graphe de la frontière efficiente montre l'évolution de la rentabilité espérée du portefeuille $E[R_p]$ selon ces risques associés.
- La droite du marché représente les portefeuilles dont la rentabilité espérée est la plus élevée pour une volatilité donnée.
- La frontier efficiente représente les portefeuilles composés uniquement des actifs risqués.

3.9 Conclusion

A l'équilibré du marche, tous les titres risqués, combinés avec un actif sans risque, offre un portefeuille d'équilibre selon le modèle d'évaluation des actifs financier choisi. Si un investisseur demande d'optimiser sont profil, il doit choisir le portefeuille qui coincide avec le portefeuille qui a une droite ayant la plus grande pente par rapport à celles des autres portefeuilles.
La droite de marché formée par l'ensemble des portefeuilles composés de l'actif sans risque d'une part et du portefeuille de marché d'autre part, par construction, associe à chaque niveau de risque la rentabilité la plus élevée.
Les critiques adressées aux deux modèles étudiés : Depuis son apparition, le modèle de Markowitz a pris une place très importante dans l'évolution de la finance moderne et il a réalisé beaucoup de succès avec son apport en matière de gestion de portefeuille. Mais avec les ajustements récents, ced deux modèles se sont trouvés plusieurs critiques soulevées par plusieurs praticiens de la théorie financière. Parmi ces critiques, on note :

- ▶ Le modèle de Markowitz est comme pour tout modèle, les critiques qu'il a reçu sont généralement focalisées au tour de ces hypothèses, ainsi que sur l'estimation de ces paramètres.
- ▶ Le modèle de Markowitz suppose également la normalité de la distribution des rentabilités, chose qui n'est pas toujours vérifiable dans la réalité.
- ▶ Le modèle de Markowitz ne s'est pas intéressé à la décomposition du risque global du marché, mais il s'est limité à l'analyse et à l'évaluation du risque individuel ou spécifique ;

Ces critiques apportées au modèle de Markowitz ont donné lieu à l'apparition d'un nouveau modèle d'évaluation des actifs financiers dit (MEDAF). Cependant, même ce dernier a eu sa part de critiques, à savoir :

- ▶ Le modèle MEDAF pose des hypothèses trop simples (possibilité d'investir et d'emprunter au taux sans risque ; pas de coûts de transaction...) ce qui est loin de la réalité de la finance ;
- ▶ Il est difficile, voire impossible, de déterminer le «vrai» portefeuille de marché, i.e. celui qui contient tous les actifs risqués (actions, obligations, matières premières, immobilier, capital humain, ..., etc.).

Conclusion générale

En gestion de portefeuille, un investisseur dispose d'un capital (ou richesse initiale) qu'il peut répartir en général entre plusieurs actifs financiers risqués et/ou non risqué. Il se demande quelle part de richesse il doit investir dans chacun de ces actifs. Cette problématique communément appelée choix du portefeuille par les économistes, simple en apparence, a donné naissance à plusieurs modèles et méthode de gestion de portefeuille. Ces modèles se différencient les uns des autres par de nombreux critères.

Dans ce mémoire, nous avons pu toucher les différents aspects de la gestion de portefeuille : les notions de base pour l'optimisation d'un portefeuille financier, les différents modèles de gestion de portefeuille ainsi que les concepts mathématiques de ces modèles.

Dans un premier lieu, nous nous somme intéressés à deux de ces modèles. Le premier est celui du fondateur de la théorie moderne de la finance "**H. Makowitz"**, qui suppose que les investisseurs sont rationnels et averses aux risques et que le marché est efficient. Ainsi, les seuls éléments à prendre en compte, dans ce modèle, sont le risque et le rendement des titres, car les investisseurs achèteront toujours l'actif qui présente un rendement optimal par rapport à son niveau de risque. Aucun investisseur purement rationnel n'achèterait en effet un actif (A) plus risqué qu'un actif (B) mais offrant un rendement inférieur.
Le second modèle considéré est le modèle de MEDAF qui est une extension du premier modèle dont la nouveauté réside dans la prise en compte d'un facteur dit bêta qui mesure la sensibilité du portefeuille ou d'un titre par rapport au marché. Ce modèle a succédé après une dizaine d'années aux travaux de Markowitz, en effet, sur les bases de ces travaux que Sharpe, Lintner et Mossin ont développé ce nouveau modèle (MEDAF) qui aboutit, sous certaines hypothèses, à la rentabilité espérée d'équilibre d'un titre quelconque.

En second lieu, on a simulé et appliqué ces deux modèles sur des exemples, ce qui nous a permis de choisir les bons portefeuilles selon ces modèles. Par ailleurs ceci nous a permis de donner les avantages et les inconvénients de chacun de ces modèles.

En résumé, après cette étude on est arrivé conclure indépendamment des critiques qu'on peut trouver dans la littérature sur ces deux modèles, que MEDAF permet de déterminer la rentabilité des titres financiers en fonction de leurs niveaux de risque associés au marché, ou risque systématique, ce qui est une aide importante pour que l'investisseur puisse prendre ses décisions. c'est cet avantage qui a fait que ce modèle reste une référence en économie financière et en finance appliquée.

Annexe

Programme de l'algorithme établi

```
clear all
clc
n=input('donner le nombre de titre')
RN=input('donner les rendements de chaque titre  ')
U=input('la matrice variance covariance')
Tr=input('donner le taux de rendement sans risque')
nbrports=input ('donner le nombre de portefeuille')
      %générer la frontière efficiente avec un actif sans risque
[riskport,rendport,poidsport]=portopt(RN,U,nbrports)
[riskopt,rendopt,poidsopt]=portopt(RN,U,nbrports)
%%%%% présentation de la frontiere efficiente de markowitz
figure
plot(riskport,rendport, 'y--',riskopt, rendopt, 'k:diamond')
xlabel('Risque de portefeuille,\sigma_{p}');
ylabel('Rendement espéré de portefeuille,R_{p}');
title('Frontière efficiente de markowitz');
legend('frontière efficiente','portefeuille optimal')
set(gcf,'color','white')
grid on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Temp=Tr;
poidsglobal=ones(nbrports,1);riskAversionMin = .01;riskAversionMax = 3;
i=1;
riskAversion = logspace(riskAversionMin,riskAversionMax,nbrports);
[riskyReturn,riskyFraction,overallRisk,overallReturn] =
deal(ones(nbrports,1));
while (i<=nbrports)
[riskyrisk,riskyrend(i),poidsrisky,riskfraction(i),riskglobal(i),rendglobal
(i)]=portalloc(riskport,rendport,poidsport,Tr,Temp,riskAversion(i));

poidsglobal=poidsrisky;
i=i+1;
end
riskglobal
rendglobal
          %affichage graphique des resultats de la MEDAF
figure
plot(riskglobal,rendglobal,'r--'),hold on
plot(riskport,rendport, 'm--',riskopt, rendopt, 'x',0,Tr,
'k:square',riskyrisk,riskyrend, 'k:pentagram')
xlabel('Risque de portefeuille,\sigma_{p}');
ylabel('Rendement espéré de portefeuille,R_{p}');
title('Frontière efficiente avec MEDAF');
legend('Droite du marché ','frontière efficiente','portefeuille
risqué','actif sans risque','portefeuille de marché')
set(gcf,'color','white')
grid on
```

Bibliographie

[1] *Modèle de diversification efficiente de sharpe*. http ://gestion.coursgratuits.net/economie/modele-de-diversification-efficiente-de-sharpe.php.

[2] Y. Abouabdellah. Analyse et mesure de la performance des OPCVM actions au Maroc. *IOSR Journal of Economics and Finance*, 7 :49–56, 2016.

[3] A.Djamila and K.Yasmina. *Méthodes Mathématiques de la Gestion de Stocks Entreprise CeVital*. Mémoire de Master en Mathématiques Option Statistique et Analyse Décisionnelle, Université de Béjaïa, 2016.

[4] A.S.Tawfiq. *Building Investment Portfolios Using Stocks Performance Evaluation Modules A Comparative Applied Analytical Study On The Stocks Of Companies Listed On Palestinian Exchange*. Mémoire de fin de cycle, Université islamique–Gaza, 2015.

[5] H. Bidiasse. *Cours de Gestion de Portefeuilles*. 2014.

[6] B. Brahmi. *Méthodes primales et duales pour la programmation quadratique : extention et applications*. Thèse de Doctorat en mathématiques appliquées, Université de Béjaïa, 2012.

[7] B. Brahmi. *Cours d'optimisation d'un portefeuille financier, Master 1 mathématiques financiéres*. Université de Bejaia, 2018.

[8] C. Broquet, R. Cobraut, R. Gillet, and A. Van Den Berg. *Gestion de portefeuille*. Ed.DE BOECK, 1997.

[9] R. Cobbaut and R. Gillet. *La gestion de portefeuille instruments, stratégie et performance*. National Library, Paris and Royal Library of Belgium, 2015.

[10] Site de mazars. *Risque Systématique*. www.mazars.fr/Accueil/Expertises/Financial-Advisory-Services/Glossaire-Definition/Q-R/Risque-systematique, 2019.

[11] E.Jondeau. *Finance empirique*. Ecole des HEC, Université de Lausanne, 2011.

[12] A.Lounis et B.Souhaib. *Méthodes directe de support pour l'optimisation multi-objectifs d'un portefeuille financier*. Mémoire de Master en mathématiques financier, Université de Béjaïa, 2018.

[13] H. Konno H. and H. Yamazaki. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to tokyo stock market". *Management Science*, 37(5) :293–303, 1991.

[14] M. Kabori. *Problématique de la gestion des stocks dans les secteurs hôteliers. Cas de l'hôtel Lac Kivu Lodge de 2009 à 2011.* Université Libre des Pays des Grands Lacs, 2012.

[15] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1) :77–91, 1952.

[16] H. M. Markowitz. *Portfolio selection : efficient diversification in investistments.* 1959.

[17] A. Maxim Nanou. *Application empirique du modèle de l'évaluation des actifs financiers (MEDAF).* Mémoire de fin de cycle, Université du Quebec à Montreal, 2012.

[18] W. Ogryczak and A. Ruszczynski. From stochastic dominance to mean-risk models : Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research*, 116(1) :35–50, doi : 10.1016/S0377–2217(98)00167–2, 1999.

[19] A. D. Roy. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, 20(3) :431–449, doi : 10.2307/1907413, 1952.

[20] W. F. Sharpe. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9 :277–293, 1963.

[21] W. F. Sharpe. A linear programming approximation for the general portfolio selection problem. *J. Financial Quantitative Anal.*, 6 :1263–1275, 1971.

[22] M. G. Speranza, R. Mansini, and W. Ogryczak. *Linear and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization.* New York : Springer International Publishing, 1993.

[23] M. R. Young. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management Science*, 44(5) :673–683, doi : 10.1287/mnsc.44.5.673, 1998.

[24] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3) :338–353 doi : 10.1016/S0019–9958(65)90241–X., 1965.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté les modèles d'équilibre (ou d'évaluation) des actifs financiers (Modèle de MAKOWITZ & le modèle MEDAF) développés, respectivement par Hary MArkowitz (1952) et par les universitaires W. Sharpe (1964), J.Lintner (1965) et I. Mossi (1966). ces modèles ont radicalement modifié le mode de pensée en finance de marché. Le message central de ces deux modèles est que, pour tout actif financier, la relation entre risque et rentabilité espérée est croissante linéairement.

Le concept de l'approche de Markowitz est basé sur la diversification qui permet de réduire davantage le risque du portefeuille. Le MEDAF est une amélioration du modèle de Markowitz, en effet, ce modèle permet en plus de mesurer la sensibilité du rendement d'un actif par rapport à celui du marché. Ces modèles ont connu depuis de nombreuses applications, ont été soumis à d'innombrables tests empiriques sur pratiquement tous les marchés financiers du monde. Ils restent à ce jour des paradigmes dominants malgré des attaques continuelles de nature tant théorique qu'empirique. Dans ce travail en a essayé d'appliquer ces deux modèles sur des exemples numériques de portefeuilles financiers afin de choisir le bon portefeuille en fonction de son aversion au risque et pour illustrer la différence entre les deux modèles étudiés.

Mots clé : Gestion de portefeuille, Modèle de Markowitz, MEDAF, Risque, frontière efficiente.

Abstract

In this work, we presented the models of equilibrium (or valuation) of financial assets (MAKOWITZ model and the CAPM model) developed respectively by Hary MArkowitz (1952) and academics W. Sharpe (1964), J. Lintner (1965) and I. Mossi (1966). These models have radically changed the way of thinking in market finance. The central message of these two models is that for any financial asset, the relationship between risk and expected profitability is growing linearly.

The concept of the Markowitz approach is based on diversification that further reduces portfolio risk. The CAPM is an improvement on the Markowitz model, as this model also measures the sensitivity of an asset's return relative to that of the market. These models have been used for many applications and have been subjected to countless empirical tests on virtually every financial market in the world. They remain to this day dominant paradigms despite continual attacks of both theoretical and empirical nature. In this work, we tried to apply these two models to numerical examples of financial portfolios in order to choose the right portfolio based on its risk aversion and to illustrate the difference between the two models studied.

Keywords : Portfolio Management, Markowitz Model, CAPM, Risk, Efficient Frontier.