

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



MÉMOIRE PRÉPARÉ

En vue

de l'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Option : Mathématiques Financières

Thème :

*Lois de probabilité et algorithme de Panjer dans
la gestion du risque en assurance*

Présenté par :

M. LAZHARI Kamel
M. BOULAKHRAS Akram

Devant le jury composé de :

Présidente :	<i>M^{me}</i> ZIANE Yasmina	M.C.B	U. A/ Mira Béjaïa
Promotrice :	<i>M^{me}</i> BENOUARET Zina	M.C.B	U. A/ Mira Béjaïa
Co-Promotrice :	<i>M^{me}</i> HOCINE Safia	M.A.A	U. A/ Mira Béjaïa
Examineur :	M. DJABRI Rabeh	M.C.B	U. A/ Mira Béjaïa
Examineur :	M. TOUAZI Atik	M.C.B	U.S.T.H.B

Année Universitaire 2018-2019

REMERCIEMENTS

Nous remercions d'abord et avant tout le bon dieu tout puissant de nous avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

Nous désirons remercier nos promotrices D^r. Z.Benouaret et Mme. S.Hocine pour leur disponibilité, son aide précieuse et leurs conseils qui nous ont accompagné tout au long de travail. Nous sommes très reconnaissant d'avoir cru en nos capacités et d'avoir accordé leur confiance, et aussi pour leur qualités scientifiques, pédagogiques et humaine.

Nous remercions l'ensemble des jurys qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Nous remercions aussi nos parents et proches pour leurs aides et encouragements.

Sans oublier nos amis et camarades pour leurs soutiens qu'ils nous ont apportés.

Merci pour tout.

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes très chers parents qui m'ont toujours soutenu tout au long de ma vie et qui m'ont toujours encouragé pour que je réussisse dans mes études.

*A mon cher frère Ibrahim et ma belle sœur,
mes fidèles compagnons dans les moments les plus délicats de cette vie mystérieuse*

A toute ma famille

A tous mes amis Youcef, Mouhammed, Abd el moumen, Said, Billal, Karim et Abdenour...

A mon binôme Boulakhras Akram et tous qui mon aidé de près ou de loin à réaliser ce mémoire.

LAZHARI Kamel

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes très chere parents

A mon frère et mes sœurs

A ma petite mimi

A tous mes amis

A mon binôme

BOULAKHRAS Akram

Table des matières

Liste des tableaux	4
Liste des figures	5
1 Généralités sur le risque en assurance	8
1.1 Introduction	8
1.2 Présentation générale de l'assurance	8
1.2.1 Eléments d'une opération d'assurance	9
1.3 Modèles probabilistes d'assurance	11
1.3.1 Modèles individuel et collectif du risque	11
1.3.2 Modèle du risque classique	12
1.3.3 Modèle de risque multi-branches	14
1.3.4 Probabilités de ruine et autres mesures du risque	14
1.4 Distributions du nombre de réclamations	19
1.4.1 La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$	20
1.4.2 La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	20
1.4.3 la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	20
1.4.4 La loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(r; \beta)$	21
1.4.5 La loi Géométrique $\mathcal{G}(\beta)$	22
1.5 Distributions du montant des réclamations	22
1.5.1 La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	22
1.5.2 La loi Gamma $\mathcal{G}(m, \lambda)$	23
1.5.3 La loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$	23
1.5.4 La loi de Pareto $\mathcal{P}(x_m, k)$	23
1.6 Conclusion	24

2	Distribution du montant cumulé des réclamations	25
2.1	Introduction	25
2.2	Loi de S_N en fonction de la loi de X et de N	26
2.2.1	Distribution composée	26
2.2.2	Le produit de convolution	26
2.2.3	Fonctions de répartition et densité de S_N	27
2.2.4	Fonction génératrice des moments	28
2.3	Méthodes d'approximation de la distribution de S	30
2.3.1	Ajustement des moments	30
2.3.2	Approximation d'Edgeworth	31
2.4	Méthodes récursives pour évaluation du montant de réclamation	32
2.4.1	Méthode de Panjer	32
2.4.2	Méthode de Kornya	32
2.4.3	Méthode de De Pril	33
2.5	Famille des lois de probabilités de Panjer	33
2.5.1	La classe $(a, b, 0)$ des distributions de la fréquence des réclamations N	33
2.5.2	Approximation de la distribution de S_N par la méthode de Panjer	39
2.5.3	Généralisation de l'algorithme de Panjer à des sévérités continues	41
2.6	Conclusion	41
3	Illustration numérique de la méthode de Panjer	42
3.1	Présentation du problème	42
3.1.1	Résolution du problème	42
3.2	Construction de l'algorithme de Panjer	44
3.3	Implémentation de l'algorithme et interprétation des résultats	44
3.3.1	Description du langage de programmation	44
3.3.2	Présentation et interprétation des résultats	44
3.4	Conclusion	51
	Bibliographie	52

Liste des tableaux

3.1	Paramètres des distributions de la famille $(a, b, 0)$	43
3.2	Distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{P}(4)$	45
3.3	Distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{B}(6, 0.6)$	47
3.4	Distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{BN}(10, 0.3)$	49

Table des figures

1.1	Evolution du processus de réserve et de surplus au cours du temps.	13
1.2	La probabilité de ruine ultime ou en temps infini.	15
1.3	La probabilité de ruine avant l'instant T ou en temps finie.	15
1.4	Présentation de l'instant de la ruine.	16
1.5	Présentation de la sévérité de la ruine.	17
1.6	Le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement. . .	18
1.7	Présentation de la sévérité maximale de la ruine.	18
1.8	La sévérité agrégée de la ruine jusqu'au rétablissement.	19
1.9	Le temps total passé en-dessous de zéro	19
2.1	Domaine des variables a et b de la famille de distribution (a,b,0).	34
3.1	Illustration de la distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{P}(4)$	46
3.2	Illustration de la distribution f_{S_N} en cas de $N \sim \mathcal{B}(6, 0.6)$	48
3.3	Illustration de la distribution de f_{S_N} en cas de $N \sim \mathcal{BN}(10, 0.3)$	50

Introduction générale

Le risque de survenance d'un événement monétaire aléatoire et mesurable est une préoccupation constante des assureurs (ou des compagnies d'assurance), un tel événement est impossible à prédire, mais cela affecte beaucoup le mode de fonctionnement des assureurs, à savoir le nombre et le montant des dommages à payer. C'est pour cette raison que, lors de la conclusion des contrats d'assurance entre l'assureur et l'assuré, ils doivent inclure dans le contrat une indemnité financière (prime d'assurance) qui les incite à poursuivre leurs activités et à ne pas ouvrir de faillite. De plus, un tel contrat doit être concurrentiel prix et conditions offertes, afin d'attirer le plus grand nombre de souscripteurs.(cf. [1])

Des modèles mathématiques ont été élaborés et étudiés dans le but de gérer le risque en assurance. L'élaboration de ces modèle n'implique pas que les résultats obtenus coïncident avec ceux observés dans la réalité (ils diffèrent dans le temps) car les assureurs évoluent dans des environnements dynamiques, complexes, incontrôlables et imprévisibles. Cependant, l'émergence de tels modèles sur le risque a contribué à une connaissance plus détaillée du domaine de l'actuariat et de l'assurance. (cf.[8])

La modélisation par un modèle de risque collectif et ces approximation, en particulier par la méthode récursive de Panjer, sont les objectif principaux de ce mémoire a été donnée en 1903 par Lundberg (cf.[18], [17] et cf.[19]), où Lundberg est considéré comme le père fondateur de la théorie mathématique de la ruine. Par la suite, Harald Cramér publie une revue des travaux de Lundberg en 1926 (cf.[11], [26]) et, en 1930, introduit de nouveaux développements à ce sujet (cf. [7], [3]).

La récursivité de Panjer, introduite dans les années 80 du siècle dernier, en est un exemple concret. Le modèle de Panjer est une famille de distributions discrètes imbriquées de manière récursive et apparues pour la première fois. En 1981 (cf. [20]). Cette famille a ensuite été

généralisée par divers auteurs tels que Sundt et Jewell (cf. [33]), Panjer et Willmot (cf. [23]), Schröter (cf. [31]), Sundt (cf. [29]), Hesselager (cf. [15]), Hess et al. (cf. [4]) et Pestana et Velosa (cf. [20]).

La modélisation des pertes susmentionnées sur la base d'un portefeuille pose généralement un problème par rapport au calcul de la distribution d'une somme composée

$$S = \sum_{i=1}^N X_i, \quad (1)$$

où la séquence $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des pertes individuelles de crédit, d'exploitation ou d'assurance, respectivement, est indépendante et identiquement distribuée et indépendant du nombre N de pertes. La distribution de la somme aléatoire S s'appelle alors une distribution composée. Les schémas récursifs tels que la méthode de Panjer offrent une méthode utile pour calculer la distribution des pertes.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres, une conclusion et une bibliographie.

Le premier chapitre est un aperçu général sur l'assurance et les définitions des principaux éléments d'assurance puis, nous présenterons quelques modèles de risque pour la modélisation des réserves des compagnies d'assurance, ainsi que les distributions du nombre et des montants des réclamations.

Le deuxième chapitre comporte trois parties. La première partie constitue un aperçu général sur la loi de S_N . la deuxième partie résume quelques méthodes d'approximations de la distribution de S_N , ainsi que les méthodes récursive pour évaluer le nombre du montant total des réclamations. La troisième partie basée sur la méthode de Panjer et ses classe de distribution.

Le troisième chapitre est consacré à l'illustration numérique de la méthode de panjer qui est obtenus à l'aide de MATLAB.

Ce travail est achevé avec une conclusion générale.

Généralités sur le risque en assurance

1.1 Introduction

Le "risque" est une norme abstraite au contenu mal défini, occupe de plus en plus une place importante dans nos sociétés, en particulier dans les compagnies d'assurance.

Comme toute autre entreprise, les compagnies d'assurance cherchent à réaliser des profits. Puisque les réclamations constituent leur déboursé le plus important, un assureur doit, pour ce faire, déterminer avec autant de précision que possible la distribution de la somme de ces réclamations. On appelle aussi, théorie du risque, le montant total des sinistres. Une fois connue, la distribution de ce montant permet de fixer le niveau des primes à fixer en répartissant le risque entre diverses entités (assuré, assureur et réassureur) afin de minimiser pour chacun l'impact des pertes associées aux sinistres éventuels.

En particulier, nous présentons quelques résultats de la théorie de la ruine qui appartient aux sciences de la gestion des risques en assurance. Il s'agit de l'étude mathématique adaptée aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance de type non-vie d'une compagnie d'assurance.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la présentation de l'activité purement assurance et les modèles probabilistes utilisés dans la gestion du risque lié à cette activité.

1.2 Présentation générale de l'assurance

Le terme « assurance » trouve son origine du latin *Securus*, d'où émane le vocable bas-latin *Assecuratio* (sécurité, garantie, certitude, ... ,assurance). L'ancien français méridional adopta

dès lors le terme assurance, conservant les anciennes consonances retrouvées dans les termes sécurité, sûreté, secours. (cf.[8])

L'assurance est, par définition, un système qui permet de prémunir un individu, une association ou une entreprise contre les conséquences financières et économiques liées à la survenance d'un risque ou d'un danger (événement aléatoire) particulier.

Le moyen mis en œuvre par les organismes d'assurance pour les prémunir contre ce risque est de les associer à une communauté de personnes (les assurés), qui cotise pour être en mesure d'indemniser ceux parmi ses membres qui subiraient des dommages matériels ou corporels en cas de réalisation du risque. Ainsi, dans la mesure où c'est l'ensemble de la communauté des assurés qui prend matériellement en charge les dommages subis par ses membres frappés par la réalisation du risque, l'assurance est un système de gestion des risques basé sur la notion de solidarité.

1.2.1 Éléments d'une opération d'assurance

Nous consacrons cette partie à la présentation des éléments qui composent une opération d'assurance.

●Compagnie d'assurance :

Une compagnie d'assurances est une entreprise financière qui fournit des services d'assurance à des clients qui deviennent des assurés.

●Risque :

Le risque garanti est l'élément fondamental du contrat d'assurance ou l'événement futur est incertain qui, dépend uniquement du hasard, se traduit par des dégâts ou des dommages pouvant affecter soit des biens (meubles ou immeubles), soit des personnes.(cf.[9])

●Sinistre :

Une déclaration de sinistre doit être envoyée par l'assuré à son assureur le plus tôt possible s'il est victime d'un risque ou danger couvert par la compagnie d'assurance.

● **Contrat d'assurance :**

Il s'agit d'un contrat entre un assureur et un preneur d'assurance. En échange du versement d'une prime unique ou de plusieurs primes, l'assureur fournit une prestation donnée lorsque le risque couvert contractuellement se produit. La valeur précise de cette prestation dépend du type de contrat.

● **Prime :**

La prime est la contribution que verse l'assuré à l'assureur en échange de la garantie qui lui est accordée. Nous distinguons trois types de primes :(cf. [10])

- **Prime pure :**

Elle est appelée aussi prime de risque, qui est strictement nécessaire à la compensation des risques au sein de la mutualité (réserve). Cette prime tient compte, d'une part de la probabilité de survenance du sinistre et d'autre part, de l'intensité du sinistre probable. Elle permet à l'assureur de régler les sinistres qui frappent la mutualité des assurés. Mathématiquement, la prime pure est égale à l'espérance des pertes.

- **Prime nette (prime commerciale) :**

Cette prime est égale à l'addition de la prime pure et des chargements permettant de couvrir les frais d'acquisition et de gestion des contrats.

- **Prime totale :**

Elle est égale à l'addition de la prime nette, des frais accessoires et des taxes qui est payée par l'assuré.

● **Réserve :**

La réserve d'une compagnie d'assurance permet d'enregistrer les mouvements sur les obligations qui détient la compagnie, ceci pour garantir de procéder au remboursement d'éventuels sinistres. notamment ca peut y'avoir des changements d'une année à une autre selon les bénéfices réalisées aussi en cas de baisse de taux.

● **Bénéfice :**

C'est un résultat comptable dégagé par une compagnie d'assurance. Lorsque la différence entre le montant des dommages garantis et les primes versées par chacun des membres est

positive, son résultat net affiche un bénéfice. Quand cette différence est négative, on parle de déficit ou de perte.

1.3 Modèles probabilistes d'assurance

En se basant sur la théorie des probabilités, nous présentons le modèle du risque qui décrit l'évolution de la réserve d'une compagnie d'assurance et quelques mesures de risque les plus étudiées.

1.3.1 Modèles individuel et collectif du risque

Dans cette partie, nous présentons sur une période fixée, deux concepts de modélisation de l'activité purement assurance. En un temps fini ou sur une période d'observation fixée, les premiers modèles probabilistes développés sont les modèles individuels et collectifs :

- **Le modèle individuel**

Le modèle individuel consiste à prendre chacun des risques d'un portefeuille séparément et d'attribuer une variable aléatoire pour représenter le montant des réclamations X étant associé. La somme de ces variables aléatoires représente le montant total des sinistres. En d'autres termes,

$$S^{Ind} = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad (1.1)$$

où X_i est le montant des réclamations du i^{me} risque, n représente le nombre de risques dans le portefeuille et S^{Ind} est le montant total des réclamations.

Plusieurs travaux ont été réalisés sur l'étude des modèles du risque individuel, en particulier sur (l'approximation) l'évaluation de la distribution S^{Ind} .

- **Modèle Collectif**

Le modèle collectif ne considère plus les polices (contrats) individuellement mais le portefeuille dans son ensemble. La charge globale des sinistres est exprimée en fonction du montant de chaque sinistre et non plus en fonction du montant total (éventuellement nul) des sinistres générés par chaque police. Ainsi notons N le nombre de sinistres touchant le portefeuille sur la période d'observation. En d'autre terme :

$$S^{Coll} = X_1 + X_2 + \dots + X_N, \quad (1.2)$$

où X_i représente le montant de la i^{me} réclamation, N est la variable aléatoire du nombre de réclamations durant période fixée et S^{coll} le montant total des réclamations.

Une description plus détaillée du modèle est présentée dans (cf.[5], [27], [21]).

Remarque 1.1.

• *Comparativement au modèle collectif, l'évaluation exacte de la distribution du montant total des réclamations du modèle individuel exige de très longs calculs. Par conséquent des approximations de la fonction de répartition de S^{Ind} ont été proposées pour pallier au long calcul dans le modèle individuel.*

Approximation du modèle individuel par le modèle collectif

L'approximation du modèle individuel par le modèle collectif. Elle permet d'estimer la distribution du montant total des réclamations et consiste à ajuster la distribution de fréquence et de la sévérité des sinistres du modèle collectif en fonction du portefeuille du modèle individuel.(cf.[26])

1.3.2 Modèle du risque classique

Le modèle de risque classique est un cas particulier du modèle collectif qui considère le portefeuille comme un tout, au lieu de considérer les contrats individuellement. Le risque globale associé au portefeuille est caractérisé par le nombre des sinistres ainsi que les montants de leurs réclamations.

Le processus stochastique $\{Z(t), t \geq 0\}$ avec $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ représente le montant cumulé des sinistres, avec la convention $Z(t) = 0$ si $N(t) = 0$ et Z_i est une variable aléatoire non négative qui modélise le montant du i^{me} sinistre.

Le nombre des réclamations $N(t)$ survenus jusqu'au temps $t \geq 0$ est représenté par un processus de poisson de paramètre $\lambda > 0$. $\{Z_i\}, i \in \mathbb{N}^*$ est une suite de variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées et indépendante du processus de poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, de fonction de répartition F et de moyenne μ supposée finie.

par conséquent, le modèle de risque classique est entièrement décrit par le processus suivant,

$$X(t) = u + ct - Z(t), \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

Définition 1.1. (Modèle de Lundberg)

En assurance, on utilise le système (1.3) appelé le modèle de Cramer-Lundberg pour modéliser les paiements d'une compagnie d'assurance. (cf. [2])

On note $\{X(t), t \geq 0\}$ le processus des réserves, et $u = X(0)$ la réserve initiale. Sous hypothèses suivantes :

- $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées des temps inter-arrivées des sinistres,
- $\theta_n = \sum_{i=1}^n T_i$ est l'instant d'occurrence du i^{me} sinistre,
- $\{N(t), t \geq 0\}$ processus du nombre de réclamation avec

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}, \theta_n \leq t\} = \max\{n \in \mathbb{N}, \theta_{n+1} > t\}$$

- "c" est le taux de prime constant par unité de temps.

On définit le processus de surplus $\{R(t), t \geq 0\}$ par :

$$R(t) = u - X(t), t \geq 0.$$

En peut présenté l'évolution du processus de réserve et processus inverse au FIGURE(1.1)

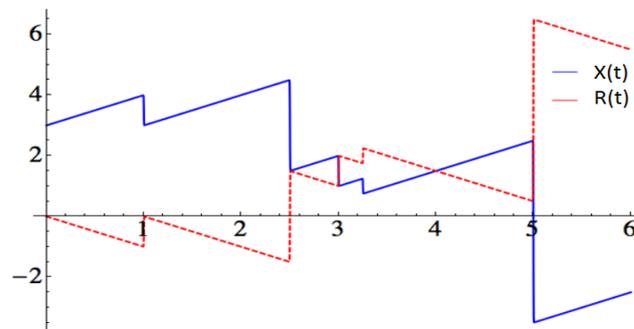


FIGURE 1.1 – Evolution du processus de réserve et de surplus au cours du temps.

Définition 1.2. (Modèle de Sparre Andersen)

Le modèle de Cramér-Lundberg a rapidement été généralisé par Andersen (1957) en considérant des processus de renouvellement pour $\{N(t), t \geq 0\}$, appelé modèle de Sparre Andersen. Autrement dit, les temps d'inter-occurrence des réclamations ne sont plus nécessairement de loi exponentielle mais simplement indépendants et identiquement distribués. (cf.[9])

1.3.3 Modèle de risque multi-branches

L'évolution conjointe d'activités est décrite par l'arrivée déterministe du vecteur des primes et par le vecteur des montants total des réclamations de chaque activité (branche) qui est équivalente à la sommation de toutes les richesses. Ces branches peuvent représenter des secteurs d'activité différents (assurance santé, habitation, automobile) ou des activités identiques dans différents continents, pays ou régions. cf. [6]

Généralement le nombre d'événements de réclamation jusqu'au temps t est modélisé par un processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, sachant qu'un seul événement peut produire jusqu'à p types de réclamations.

Nous pouvons écrire le modèle de risque multi-branches par le processus suivant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + c_1 t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^1 \\ u_2 + c_2 t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^2 \\ \vdots \\ u_p + c_p t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^p \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

u_j : la réserve initiale de la j^{me} branche,

c_j : le taux de prime constant de la j^{me} branche,

Z_i^j : le montant de la réclamation de type j produite par le i^{me} événement.

1.3.4 Probabilités de ruine et autres mesures du risque

La " Ruine " en assurance est entraînée par une perte qui dépasse les réserves disponibles et rend l'assureur insolvable au sens de la réglementation qui lui est imposée. Autrement dit, la ruine est le risque d'insolvabilité d'une compagnie d'assurance.

La théorie de la ruine est une branche des sciences de la gestion des risques et des mathématiques appliquées à l'assurance.

Afin de gérer le risque en assurance, plusieurs mesures ont été définies en se basant sur le modèle stochastique des réserves : (cf. [19])

On considère le modèle de risque classique $\{X(t), t \geq 0\}$ définie par la formule (1.3).

•Probabilités de ruine :

–La probabilité de ruine ultime ou en temps infini, notée ψ est une fonction de la réserve initiale u , définie par :

$$\psi(u) = \mathbf{P}(\inf_{t \geq 0} X(t) < 0 / X(0) = u), \quad (1.4)$$

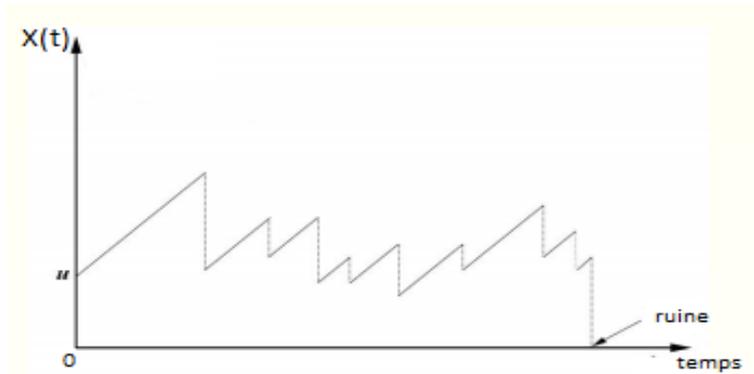


FIGURE 1.2 – La probabilité de ruine ultime ou en temps infini.

Remarque 1.2. *La probabilité de ruine est la mesure du risque la plus étudiée. Malheureusement, elle ne possède pas des formules explicitées dans la plupart des modèles du risque.*

–La probabilité de ruine avant l’instant T ou en temps fini est définie par :

$$\psi(u, T) = \mathbf{P}(\inf_{0 \leq t \leq T} X(t) < 0 / X(0) = u). \quad (1.5)$$

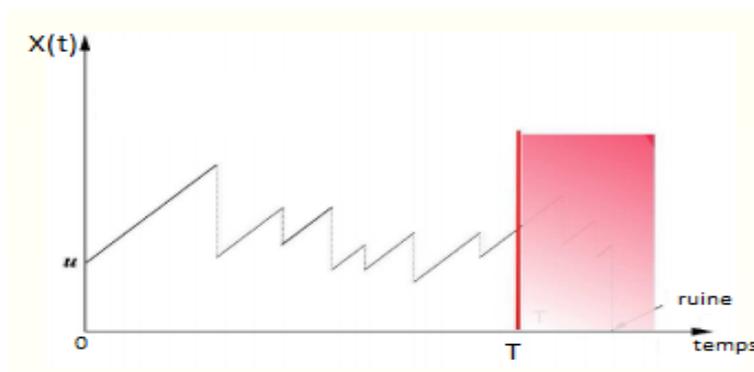


FIGURE 1.3 – La probabilité de ruine avant l’instant T ou en temps finie.

•**Probabilité de non-ruine :**

–Les probabilités complémentaires ou probabilités de non ruine en temps fini et infini sont définies respectivement par

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \text{ et } \phi(u, T) = 1 - \psi(u, T).$$

•**L’instant de la ruine :**

–L’instant de la ruine noté T_u^* associé à une réserve initiale u est défini par :

$$T_u^* = \inf\{t \geq 0, X(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0, R(t) > u\}. \tag{1.6}$$

où $R(t) = u - X(t), t \geq 0$.

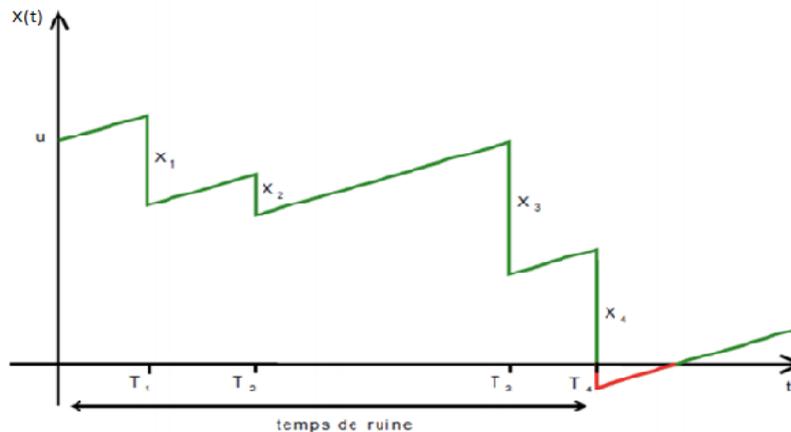


FIGURE 1.4 – Présentation de l’instant de la ruine.

Sur la figure (1.4), l’instant de la ruine est égal à T_4 .

•**Le maximum du surplus :**

–Le maximum du surplus en temps fini et en temps infini, respectivement noté M_T et M , sont définis par :

$$M = \sup_{t \geq 0} R(t)$$

et

$$M_T = \sup_{0 \leq t \leq T} R(t)$$

On obtient les relations suivantes :

$$\psi(u) = \mathbf{P}(T_u^* < \infty) = \mathbf{P}(M > u), \tag{1.7}$$

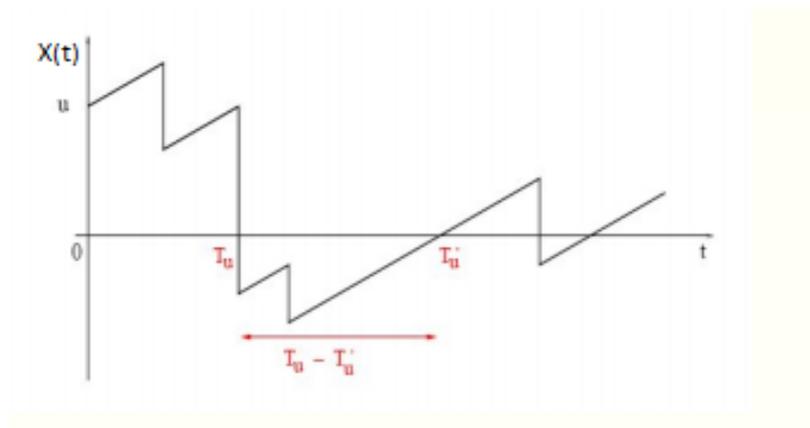


FIGURE 1.6 – Le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement.

–la sévérité maximale de la ruine est définie comme suite :

$$\inf_{t>0}[X(t)]. \tag{1.11}$$

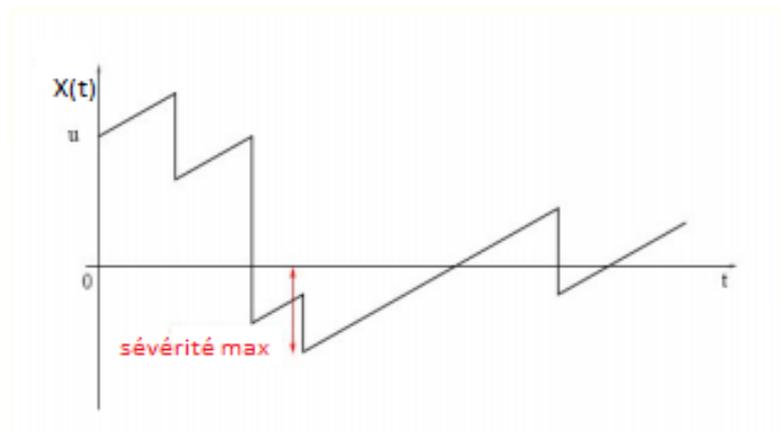


FIGURE 1.7 – Présentation de la sévérité maximale de la ruine.

–La sévérité agrégée de la ruine jusqu’au rétablissement :

$$J(u) = \int_{T_u}^{T'_u} |X(t)|dt. \tag{1.12}$$

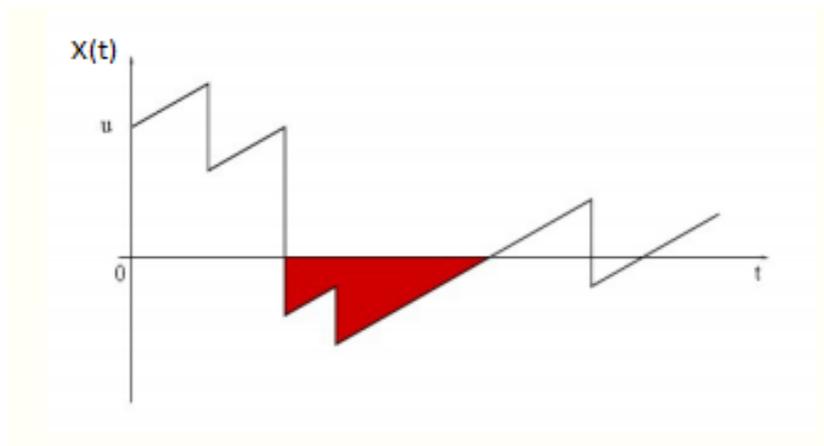


FIGURE 1.8 – La sévérité agrégée de la ruine jusqu’au rétablissement.

Enfin, Dos Reis a étudié le temps total passé en-dessous de zéro : (1993) (cf.[24])

$$\tau(u) = \int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{X(t) < 0} dt. \tag{1.13}$$

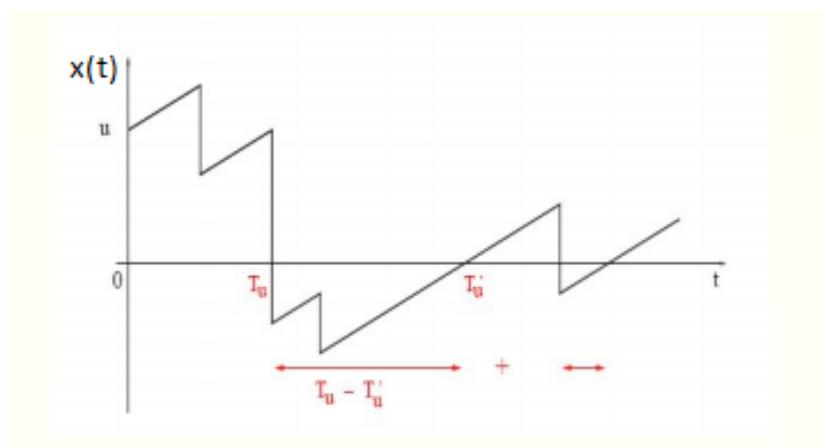


FIGURE 1.9 – Le temps total passé en-dessous de zéro .

1.4 Distributions du nombre de réclamations

Dans cette section, nous nous intéressons aux lois de probabilité discrètes les plus couramment utilisées en assurance pour modéliser le nombre de sinistres ou de réclamation.

1.4.1 La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$

La loi de Poisson, dite loi des probabilité événements rares, est utilisée pour décrire les phénomènes où la probabilité de survenue de l'évènement qui nous intéresse est faible. Cette probabilité doit être constante tout le long de l'expérience.

Une variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ constante positive) si :

$$\mathbf{P}(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \quad (1.14)$$

On a alors $\mathbb{E}[N] = \text{Var}[N] = \lambda$.

Propriété 1.1. Si N_1, N_2, \dots, N_n sont des variables indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre respectivement $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ alors

$X = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ est aussi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

1.4.2 La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

On s'intéresse ici à la réalisation ou non d'un événement. Autrement dit, on n'étudie que les expériences aléatoires qui n'ont que deux issues possibles (par exemple : un client signe le contrat ou non). Considérons une expérience aléatoire de ce type, dite une épreuve de Bernoulli. Elle se conclut par un succès si l'évènement auquel on s'intéresse est réalisé ou un échec sinon. On associe à cette épreuve une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si l'évènement est réalisé et la valeur 0 sinon. Cette variable aléatoire ne prend donc que deux valeurs (0 et 1) et sa loi probabilité est donnée par :

$$\mathbf{P}[N = 1] = p, \quad \mathbf{P}[N = 0] = q = 1 - p. \quad (1.15)$$

On a alors

$$\mathbb{E}[N] = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p,$$

$$\text{Var}[N] = p(1 - p).$$

1.4.3 la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Soit N la variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves de Bernoulli. Alors on dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , notée $\mathcal{B}(n, p)$. Cette

loi est donnée par :

$$P(N = n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, \quad \text{pour tout } 0 \leq n \leq m, \quad (1.16)$$

où $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

On a alors

$$\mathbb{E}[N] = mp,$$

et

$$\text{Var}[N] = mp(1-p).$$

Remarque 1.3.

• Associons à chaque épreuve de Bernoulli une variable aléatoire X_i ($1 \leq i \leq n$) qui vaut 1 si on observe un succès au i -ème essai et 0 sinon. Alors le nombre de succès, noté X , vérifie

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Autrement dit, une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$ est une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

• Les n épreuves sont indépendantes : la probabilité d'un succès ne varie pas, elle ne dépend pas des informations sur les résultats des autres épreuves.

1.4.4 La loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(r; \beta)$

On dit que la variable aléatoire N suit une loi binomiale négative si :

$$P(N = k) = \binom{r+k-1}{k} \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^r \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}. \quad (1.17)$$

On a

$$\mathbb{E}[N] = r\beta,$$

$$\text{Var}[N] = r\beta(1+\beta).$$

Remarque 1.4. La loi binomiale négative modélise la situation suivante : on compte le nombre d'échecs nécessaires pour avoir r succès en répétant de façon successive une expérience où la probabilité d'avoir un succès est $p = \frac{1}{\beta+1}$.

1.4.5 La loi Géométrique $\mathcal{G}(\beta)$

La variable aléatoire N suit une loi géométrique si :

$$\mathbf{P}(N = k) = \left(\frac{1}{\beta + 1}\right) \left(\frac{\beta}{\beta + 1}\right)^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

On a :

$$\mathbb{E}[N] = \beta,$$

$$\text{Var}[N] = \beta(1 + \beta).$$

Remarque 1.5. *La loi géométrique modélise la situation suivante : on itère une expérience jusqu'à obtenir un succès et on compte le nombre d'essais nécessaires.*

Pour plus de détails sur les lois de probabilité du nombre de réclamations, et leurs applications, nous nous proposons de consulter (cf. [16], [30]).

1.5 Distributions du montant des réclamations

Différents lois de probabilité sont utilisés pour modéliser le montant des réclamations généré à l'intérieur d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance.

1.5.1 La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Une variable aléatoire N est dite de loi exponentielle de paramètre λ si sa densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

La variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ ne prend que des valeurs positives avec λ un réel strictement positif.

On a alors :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{\lambda},$$

et

$$\text{Var}[N] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

1.5.2 La loi Gamma $\mathcal{G}(m, \lambda)$

La loi $\mathcal{G}(m, \lambda)$ décrit l'intervalle de temps entre le premier et le dernier évènement d'une suite de $(m + 1)$ évènements successifs. On peut la considérer comme une généralisation de la loi exponentielle où $\mathcal{G}(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$.

La fonction de densité d'une loi Gamma de paramètre m et λ est définie par :

$$f(x) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad (1.20)$$

La fonction gamma $\Gamma(\cdot)$, est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On a alors

$$\mathbb{E}[N] = \frac{m}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}[N] = \frac{m}{\lambda^2}.$$

1.5.3 La loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$

La loi normale est paramétrée par la moyenne μ et l'écart-type σ , on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$. Sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

On a alors

$$\mathbb{E}[N] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}[N] = \sigma^2$$

Proposition 1.1. *La variable aléatoire X est centrée si elle est de moyenne nulle, et réduite si elle est de variance 1. De plus, si X est centré réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $(-X)$ l'est aussi et sa densité f est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{x^2}{2})}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

1.5.4 La loi de Pareto $\mathcal{P}(x_m, k)$

Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Pareto de paramètres (x_m, k) , avec k un réel positif, alors sa distribution de probabilité est caractérisée par :

$$\mathbb{P}(X = x) = \left(\frac{x}{x_m}\right)^k \quad \text{avec } x \geq x_m. \quad (1.23)$$

On a alors :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{kx}{k-1}, \quad \text{finie si } k \leq 1,$$

$$\text{Var}[X] = \left(\frac{x}{k-1}\right)^2 \frac{k}{k-2}, \quad \text{finie si } k \leq 2.$$

Remarque 1.6. *Il existe différentes lois de probabilité qui peuvent servir à modéliser le montant des réclamations. Généralement, nous classifions ces distributions en deux groupes : distributions à queue légère et à queue lourde.*

Parmi les distributions à queue légère, les plus utilisées pour la modélisation du montant des réclamations, nous avons : la distribution exponentielle, Gamma, hyperexponentielle, Phase-type et à support borné.

Dans le groupe des distributions à queue lourde, nous avons : la distribution de Weibull, Lognormal, Pareto, Loggamma et la classe des distributions subexponentielles.

Chacune de ces distributions possède des caractéristiques qui peuvent la rendre plus ou moins appropriée selon la situation. Pour plus de détails sur les distributions à queue légère et lourde, voir(cf. [16], [30]).

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés quelques éléments théoriques et concepts fondamentaux sur la modélisation probabiliste de l'activité assurance, qui seront utilisés dans les autres chapitres. Par la suite, nous avons cité quelques distributions de probabilité qui modélisent la fréquence et la sévérité des réclamations.

Distribution du montant cumulé des réclamations

2.1 Introduction

En 1981, Harry Panjer(cf. [21], [22], [24],[30]) a présenté une formule récursive qui permet d'évaluer la distribution du montant total des réclamations dans le modèle collectif du risque.

Dans ce chapitre nous généralisons la récursion de panjer a été réalisée pour évaluer la distribution composé d'une situation multivariée où chaque événement (réclamation) génère un vecteur aléatoire des pertes.

Généralement, le nombre de sinistre sur une période de temps donnée est supposé distribué selon une loi de Poisson, une loi Binomiale ou une loi Binomiale négative. Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons la famille de loi de probabilité dite panjer et nous démontrons l'appartenance des distributions citées ci-dessus à cette famille. Les lois de panjer sont caractérisée par l'existence d'une relation de récurrence particulière entre leur masses de probabilité. Dans la deuxième partie nous présenterons la formule récursive de Panjer pour calculer la distribution composée S lorsque les sinistres sont à valeur dans N .

2.2 Loi de S_N en fonction de la loi de X et de N

2.2.1 Distribution composée

On dit qu'une variable aléatoire S suit une distribution composée si elle est de la forme :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

où

- N est une variable aléatoire de comptage de loi de probabilité $p_n = \mathbf{P}(N = n), n \in \mathbb{N}$;
- $(X_i)_{i \geq 0}$ suite des variables positives indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F_X . et indépendante de N .
- $S = 0$ si $N = 0$ par convention.

Dans le modèle de risque collectif, cette variable aléatoire représente la charge totale engendrée par des sinistres.

2.2.2 Le produit de convolution

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f_X . Alors la densité de $X_1 + X_2$ est la convolution :(cf. [12],[15]).

$$f_X^{*2}(x) = f_X * f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_X(x - y) dy, \quad (2.1)$$

• Démonstration :

Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes identiquement distribuée de densité f_X , alors la fonction de répartition de $X_1 + X_2$ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 + X_2 \leq x) &= \int \int_{y+z \leq x} f_{(X_1, X_2)}(y, z) dy dz, \\ &= \int \int_{y+z \leq x} f_X(y) f_X(z) dy dz, \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_X(y) \left(\int_{-\infty}^{x-y} f_X(z) dz \right) dy, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) F_X(x - y) dy. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x , on obtient la densité de probabilité $X_1 + X_2$:

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y)f_X(x-y)dy = f_X * f_X(x) = f_X^{*2}(x).$$

On remarque que si X_1 et X_2 sont des variables positives, la fonction de répartition de $X_1 + X_2$ vérifie

$$F_{X_1+X_2}(x) = \int_0^x f_X(y)F_X(x-y)dy. \tag{2.2}$$

2.2.3 Fonctions de répartition et densité de S_N

Soit F_X une fonction de répartition d'une loi à densité f_X à support sur \mathbb{R}^+ . On considère X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi F_X . (cf. [15])

On note $F_X^{*2}(x) = \int_0^x f_X(y)F_X(x-y)dy$ la fonction de répartition de $S_2 = X_1 + X_2$.

Par itération, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition de $S_n = X_1 + \dots + X_n$, notée F_X^{*n} , vérifie :

$$F_X^{*n}(x) = \int_0^x f_X(y)F_X^{*(n-1)}(x-y)dy.$$

avec :

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

De même pour $n \geq 1$, on note $f_X^{*n}(x)$ est la fonction f_X convoluée n fois avec elle même et f^{*0} est définie comme suite :

$$f^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0; \end{cases}$$

Exemple 2.1.

On considère deux temps d'attente X_1 et X_2 indépendants de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, par exemple X_i représente le temps d'attente au guichet i . Alors la somme des temps d'attente $X_1 + X_2$ admet pour densité, pour $x \geq 0$.

$$f_X^{*2}(x) = \int_0^x f_X(y)f_X(x-y)dy = \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x},$$

qui est la densité de probabilité d'une loi Gamma $(2, \lambda)$.

Remarque 2.1. Quand la loi des X_i est discrète le raisonnement est exactement le même, sauf qu'à la place d'avoir des intégrales on a des sommes : $S_n = X_1 + \dots + X_n$ où X_i sont des variables positives indépendantes identiquement distribuées de loi discrète $f_X(y) = \mathbf{P}(X = y)$ a pour fonction de répartition :

$$F_{S_n}(x) = F_X^{*n}(x) = \sum_{y=0}^x F_X^{*(n-1)}(x-y)f_X(y), \quad \text{pour } x = 0, 1, \dots$$

et pour loi de probabilité

$$\mathbf{P}(S_n = x) = f_X^{*n}(x) = \sum_{y=0}^x f_X^{*(n-1)}(x-y)f_X(y).$$

Proposition 2.1. On considère le modèle des pertes agrégées $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ où les X_i sont indépendantes identiquement distribuées de loi F_X et indépendantes de N .

Alors la fonction de répartition de S_N est :

$$F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) \quad \text{avec } p_n = \mathbf{P}(N = n). \quad (2.3)$$

sa densité est donnée par l'équation suivante :

$$f_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x). \quad (2.4)$$

•**Démonstration :**

On a :

$$\begin{aligned} F_{S_N}(x) &= \mathbf{P}(S_N \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \leq x, N = n), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \leq x) \mathbf{P}(N = n) \quad \text{par indépendance entre les } X_i \text{ et } N, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x). \end{aligned}$$

2.2.4 Fonction génératrice des moments

soient X une variable aléatoire de fonction de répartition F , alors la fonction génératrice des moments est donnée par : (cf. [15])

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x). \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 M_{S_N}(t) &= \mathbb{E}(e^{tS_N}), \\
 &= \mathbb{E}(e^{tx_1+\dots+tx_N}), \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{tx_1+\dots+tx_N} \mathbb{I}_{N=x}), \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{tx_1+\dots+tx_N}) \mathbb{P}(N=x), \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} (\mathbb{E}(e^{tx})^{\mathbb{P}}(N=x)) \text{ par indépendances entre } x_i, \\
 &= M_N(\ln(M_X(t))),
 \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments de S_N est définie par :

$$M_{S_N}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_N}) \quad (2.6)$$

Proposition 2.2.

L'espérance et la variance du montant cumulé des réclamations $S_N = \sum_{i=0}^N X_i$ sont donnée par les relation suivantes :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X), \quad (2.7)$$

et

$$Var(S_N) = \mathbb{E}(N)Var(X) + \mathbb{E}(X)^2Var(N). \quad (2.8)$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_N] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right]\right], \\
 &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i \mid N]\right], \\
 &= \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X),
 \end{aligned}$$

Pour la variance :

$$var(S(t)) = \mathbb{E}(S^2).(\mathbb{E}(S))^2$$

On conditionnant par rapport au nombre de réclamation, on obtien :

$$\begin{aligned}
 \text{var}(S_N) &= \mathbb{E}[\text{var}(S_N \mid N)] + \text{var}(\mathbb{E}[S_N \mid N]), \\
 &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \text{var}(X_i \mid N)\right] + \text{var}\left(\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i \mid N]\right), \text{ par indépendance entre } N, \\
 &= \mathbb{E}[N\text{var}(X)] + \text{var}(N\mathbb{E}[X]), \text{ car les } X_i \text{ sont de mme loi et indépendants de } N, \\
 &= \mathbb{E}[N]\text{var}(X) + \text{var}(N)\mathbb{E}[X]^2.
 \end{aligned}$$

2.3 Méthodes d'approximation de la distribution de S

Dans cette section, nous nous intéressons à quelques approches d'évaluation de la distribution du montant total des réclamations S du modèle collectif.

Généralement, il est difficile d'obtenir une information complète sur la fréquence et la sévérité des réclamations. Par conséquent, plusieurs méthodes d'approximation de la distribution du montant total des réclamations ont été développées. (cf. [26])

2.3.1 Ajustement des moments

Un moyen simple pour estimer la distribution de S consiste à choisir une loi de probabilité qui possède des caractéristiques semblables à celles de la distribution du montant total des sinistres. On ajuste les paramètres de la loi de probabilité choisie de sorte que les moments calculés soient équivalents pour les deux distributions.

Approximation Normal :

L'approximation normale exige un grand portefeuille de risque, ce qui signifie un nombre de risques très élevé pour le modèle individuel et un nombre moyen de réclamations très élevé pour le modèle collectif.

Pour un grand portefeuille de risque, la fonction de répartition du montant total des réclamations s'estime à l'aide du théorème central limite, soit

$$F_S(s) \simeq \Phi\left(\frac{s - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\text{var}[S]}}\right), \quad (2.9)$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale définie dans l'équation (1.22) et $\mathbb{E}[S]$ et $\text{Var}[S]$ sont respectivement calculés comme suite :

$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ et $var[S] = \sum_{i=1}^n var[X_i]$ pour le modèle individuel, et à l'aide des relations (2.7) et (2.8) pour le modèle collectif.

Remarque 2.2. *Pour un portefeuille trop grand, l'approximation normale peut donner des résultats insatisfaisants car la distribution du montant total des sinistres est généralement asymétrique, par contre la distribution d'une loi normale est symétrique. (cf. [26])*

Approximation Gamma :

La loi gamma donnée par la formule (1.21) est une autre loi de probabilité souvent utilisée pour estimer la distribution du montant total des réclamations.

Pour ajuster les paramètres adéquatement, il suffit d'isoler m et λ dans le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S] = \frac{m}{\lambda} \\ var[S] = \frac{m}{\lambda^2} \end{cases}$$

où $\mathbb{E}[S]$ et $Var[S]$ sont calculés selon le modèle considéré. Ainsi, on estime la variable aléatoire S par une loi gamma de paramètres $m = \frac{\mathbb{E}^2[S]}{var[S]}$ et $\lambda = \frac{\mathbb{E}[S]}{var[S]}$.

Remarque 2.3. *Il existe aussi d'autres approximations basées sur d'autres lois de probabilité comme la loi lognormal. (cf. [26])*

2.3.2 Approximation d'Edgeworth

La méthode d'approximation d'Edgeworth utilise le développement en série de Taylor pour estimer la distribution du montant total des sinistres d'un portefeuille de risques.

Cette méthode d'approximation fournit de bons résultats pour des points choisis autour de l'espérance mais insatisfaisants pour les queues de distributions.

Remarque 2.4. *L'approximation d'Esscher est une extension de la méthode d'Edgeworth. Elle utilise la transformée d'Esscher pour rapprocher l'espérance de la fonction à estimer des valeurs qu'on désire évaluer et obtenir un meilleur résultat de l'approximation d'Edgeworth.*

pour plus de détail consulter (cf. [26], [32]).

2.4 Méthodes récursives pour évaluation du montant de réclamation

Dans cette partie, nous donnerons un aperçu sur trois méthodes récursives pour évaluer la distribution du montant total des réclamations dans les modèles individuel et collectif. La méthode de Panjer a été créée pour convenir aux hypothèses du modèle du risque collectif tandis que les deux autres, celles de Kornya et De Pril, conviennent aux hypothèses du modèle du risque individuel .(cf.[26])

2.4.1 Méthode de Panjer

Panjer a développé une méthode récursive efficace pour calculer la distribution du montant total des réclamations dans le modèle du risque collectif basé sur les trois lois de probabilité Poisson, Binomial et Binomial Négative qui font partie de la famille de Panjer. Cette méthode permet de réduire considérablement le nombre d'opération comparativement à l'approche des convolutions.

Cette formule récursive ne peut être utilisée que dans les situations où la distribution de la fréquence des réclamation appartient à la famille des distributions $(a, b, 0)$. Dans la section ci-dessus, on décrit cette formule ainsi que quelques extensions conçues pour étendre le domaine des distributions de fréquence utilisables.

Dans ce travail, nous nous détaillons la méthode de Panjer pour évaluer f_S avec une illustration numérique.

2.4.2 Méthode de Kornya

En 1983, P. S. Kornya a présenté un algorithme récursif pour évaluer la distribution du montant total des sinistres pour le modèle du risque individuel. En se basant sur les caractéristiques de la fonction génératrice des probabilités, cette méthode offre une plus grande rapidité de calcul que la formule de convolution standard donnée par (2.7).

La méthode de Kornya consiste à évaluer les coefficients de la fonction génératrice des probabilités de S , pour ensuite en passant à la somme on obtient la fonction de répartition de S , soit

$$F_S(y) = \sum_{x=0}^y f_S(x).$$

2.4.3 Méthode de De Pril

De Pril a développée est une autre méthode souvent utilisée pour évaluer la distribution du montant total des réclamations dans le modèle du risque individuel . Cette méthode est l'analogie de la formule récursive de Panjer pour le modèle individuel qui permet de procurer une évaluation exacte de la distribution de S ce qui n'est pas le cas pour la méthode de Koryna.

2.5 Famille des lois de probabilités de Panjer

Sur une période d'observation on modélise le nombre de sinistres enregistrés par une compagnie d'assurance par une variable aléatoire discrète N .

La famille de Panjer, également appelée classe de distributions $(a, b, 0)$, où a et b sont des constantes, est caractérisée par l'égalité récursive suivante : (cf.[28])

$$\exists a < 1, \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(N = n) = p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1}. \quad (2.10)$$

2.5.1 La classe $(a, b, 0)$ des distributions de la fréquence des réclamations N

La classe $(a, b, 0)$ est une classe de distributions qui dépend de deux paramètres a et b présenté par la figure(2.1). Cette classe comprend les distributions Binomiales, Poisson et Binomiales Négatif.(cf.[18],[18])

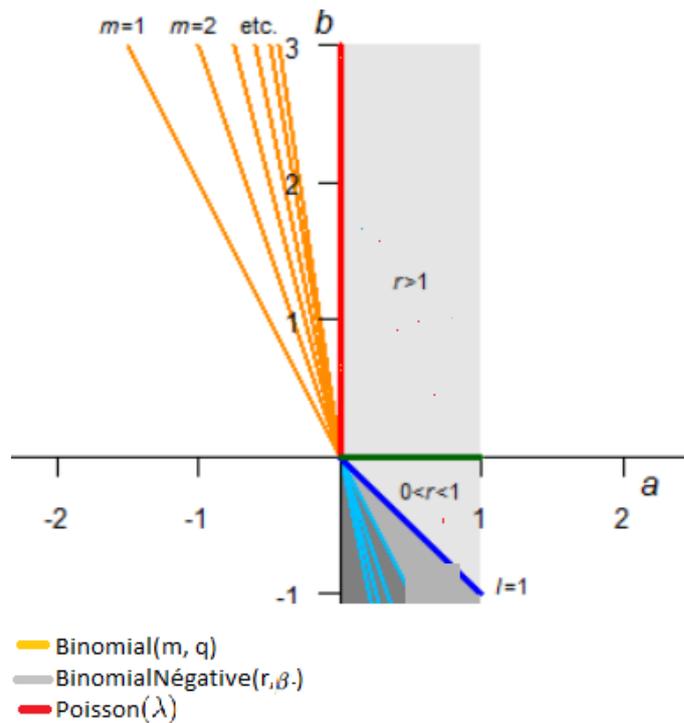


FIGURE 2.1 – Domaine des variables a et b de la famille de distribution (a,b,0).

On analyse l'ensemble des possibilités par rapport au domaine des variables a et b.

• 1^{er} cas : $a+b < 0$.

Pour $n = 1$, d'après l'équation (2.10), on a : $p_1 < 0$.

Alors $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut correspondre à aucune distribution de probabilité.

• 2^{ème} Cas : $a+b=0$

Pour $n = 1$, d'après l'équation (2.10), on a : $p_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ et p_0 est la seule variable qui peut être différente de zéro, alors $p_0 = 1$.

• 3^{ème} Cas : $a=0, b > 0$.

L'équation (2.10) peut être réécrite comme suite :

$$p_n = p_{n-1} \binom{b}{n},$$

En remplaçant p_{n-1} par son équivalent, on obtient

$$p_n = \left[p_{n-2} \binom{b}{n-1} \right] \binom{b}{n},$$

De même pour p_{n-2} , on a

$$p_n = \left[\left[p_{n-3} \left(\frac{b}{n-2} \right) \right] \left(\frac{b}{n-1} \right) \right] \left(\frac{b}{n} \right)$$

En répétant cette opération jusqu'à p_0 , on obtient :

$$p_n = p_0 \frac{b^n}{n!}.$$

Dans ce cas, p_n est toujours positif.

En utilisant le développement en série de la fonction exponentielle $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_0 \frac{b^n}{n!}, \\ &= p_0 e^b. \end{aligned}$$

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors $p_0 = e^{-b}$.

On retrouve la fonction de densité de probabilité de la loi de Poisson de paramètre b ,

$$p_n = \frac{b^n}{n!} e^{-b}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

• 4^{ème} Cas : $a+b > 0$ et $0 < a < 1$.

on réécrit p_n en fonction de p_0 et en remplaçant $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_0$ par sont équivalent, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} p_n &= p_0 \left(a + \frac{b}{1} \right) \left(a + \frac{b}{2} \right) \left(a + \frac{b}{3} \right) \dots \left(a + \frac{b}{n} \right), \\ &= a^n p_0 \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(1 + \frac{b}{2a} \right) \left(1 + \frac{b}{3a} \right) \dots \left(1 + \frac{b}{na} \right), \quad (2.11) \\ p_n &= a^n p_0 \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{2 + \frac{b}{a}}{2} \right) \left(\frac{3 + \frac{b}{a}}{3} \right) \dots \left(\frac{n + \frac{b}{a}}{n} \right). \end{aligned}$$

On pose $\alpha = 1 + \frac{b}{a}$ d'où,

$$p_n = a^n p_0 \alpha \left(\frac{\alpha + 1}{2} \right) \left(\frac{\alpha + 2}{3} \right) \dots \left(\frac{\alpha + n - 1}{n} \right),$$

avec

$$p_n = a^n p_0 \binom{\alpha + n - 1}{n}.$$

Pour que p_n soit positif ($\forall n \in \mathbb{N}$), on doit évaluer la somme des valeurs p_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n p_0 \binom{\alpha + n - 1}{n}.$$

D'après le binôme de Newton, on a

$$(x + y)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i}.$$

En posant $x = 1$, $y = -a$ et $k = -\alpha$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 (1 - a)^{-\alpha}.$$

On a $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, alors $p_0 = (1 - a)^\alpha$. Pour $a=q$, on obtient la fonction de densité de probabilité de la loi binomiale négative,

$$p_n = \binom{\alpha + n - 1}{n} q^n (1 - q)^\alpha.$$

• 5^{ème} Cas : $a+b > 0$ et $a < 0$.

Pour $n = 1$, on observe que $p_1 > 0$,

pour $n \geq 2$, on a $p_n < 0$ lorsque $b < -an$:

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} \left(a + \frac{b}{n} \right), \\ &< p_{n-1} \left(a + \frac{(-an)}{n} \right) < 0. \end{aligned}$$

Pour éviter les valeurs négatives, on considère uniquement les droites de la forme $b = -(m+1)a$ pour $m = 1, 2, \dots$. Ainsi, la variable p_{m+1} est nulle, ce qui rend les probabilités successives également nulles.

$$\begin{aligned} p_{m+1} &= p_m \left(a + \frac{b}{m+1} \right), \\ &= p_{m-1} \left(a - \frac{(m+1)a}{m+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.11) développée dans le 4^{me} cas, on a :

$$p_n = a^n p_0 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{2a}\right) \left(1 + \frac{b}{3a}\right) \dots \left(1 + \frac{b}{na}\right),$$

En remplaçant b par $-(m+1)a$, on décrit

$$\begin{aligned} p_n &= a^n p_0 (-m) \left(\frac{-m+1}{2}\right) \left(\frac{-m+2}{3}\right) \dots \left(\frac{-m+n-1}{n}\right), \\ &= (-a)^n p_0 (m) \left(\frac{m-1}{2}\right) \left(\frac{m-2}{3}\right) \dots \left(\frac{m-n+1}{n}\right). \end{aligned}$$

où,

$$p_n = \binom{m}{n} p_0 (-a)^n. \quad (2.12)$$

On doit calculer la somme des probabilités p_n , $n = \overline{0, m}$ car pour $n > m$, $p_n = 0$. On obtient

$$\sum_{n=0}^m p_n = p_0 \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-a)^n,$$

En utilisant le binôme de Newton avec $x = -a$, $y = 1$ et $k = m$, on déduit

$$\sum_{n=0}^m p_n = p_0 (1 - a)^m.$$

On a $\sum_{n=0}^m p_n = 1$, alors $p_0 = (1 + a)^{-m}$ ainsi, on peut réécrire l'équation (2.17) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} p_n &= \binom{m}{n} p_0 (-a)^n, \\ &= \binom{m}{n} (-a)^n (1)^{m-n} (1 + a)^{-m}, \\ &= \binom{m}{n} \left(\frac{-a}{1+a}\right)^n \left(\frac{1}{1+a}\right)^{m-n} (1 + a)^m (1 + a)^{-m}, \\ &= \binom{m}{n} \left(\frac{-a}{1+a}\right)^n \left(\frac{1}{1+a}\right)^{m-n}, \end{aligned}$$

En posant $q = \frac{-a}{1+a}$, on retrouve la fonction de densité de probabilité de la loi binomiale :

$$p_n = \binom{m}{n} q^n (1 - q)^{m-n}.$$

- 6^{ème} Cas : $a + b > 0$ et $a \geq 1$.

A partir de l'équation (2.10), on peut déduire pour ce cas l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} p_n &> p_{n-1} \left(a - \frac{a}{n}\right), \\ &= p_{n-1} a \left(\frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

Puisque $a \geq 1$, on obtient

$$p_n > p_{n-1} \left(\frac{n-1}{n} \right). \quad (2.13)$$

Dans ce cas, les variables p_n , $n \in \mathbb{N}$ sont positives et leurs somme peut être obtenue en réécrivant chacune de celles-ci en fonction de p_1 à l'aide d'une application successive de l'équation (2.13) :c'est à dire,

$$\begin{aligned} p_2 &> \frac{p_1}{2}, \\ p_3 &> \frac{2p_2}{3} > \frac{p_1}{3}, \\ p_4 &> \frac{3p_3}{4} > \frac{p_1}{4}, \end{aligned}$$

et à l'ordre n , on a donc

$$p_n > \frac{p_1}{n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= p_1 + p_2 + p_3 + \dots \\ &= p_1 \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right], \\ &= p_1[\infty]. \end{aligned}$$

Puisque la somme des p_n , $n \in \mathbb{N}^*$ diverge, alors $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut correspondre à aucune distribution de probabilité.

La classe $(a, b, 1)$ des distributions de la fréquence des réclamatins N

Bien que la classe des distributions $(a, b, 0)$ est très vaste, il y a des échantillons de données pour lesquels elle est inadéquate. La classe de lois $(a, b, 1)$ permet souvent de pallier à ce problème, particulièrement lorsque la probabilité d'observer un très petit nombre de réclamations est importante.(cf.[19])

La probabilité de ne recevoir aucune réclamation comporte un intérêt tout particulier pour un assureur. Il y a des applications dans le domaine de l'assurance où la probabilité d'avoir une réclamation est faible et où la probabilité qu'il n'y en ait aucune est donc grande. Il est important de bien modéliser cette probabilité. Considérons par exemple un portefeuille canadien de contrats d'assurance habitation. Dans un tel cas, il est évident que le nombre de réclamations générées par des tremblements de terre sera très petit, étant donné la faible activité sismique

dans ce pays. Les distributions de la classe $(a, b, 1)$ seraient vraisemblablement plus appropriées que celles de la classe $(a, b, 0)$ dans cette situation.

On peut facilement généraliser la classe des distributions $(a, b, 0)$ pour ajuster la probabilité d'observer la valeur zéro. De façon plus spécifique, la classe $(a, b, 1)$ englobe toutes les fonctions de probabilité p_n satisfaisant à la condition suivante :

il existe des constantes a et b telles que :

$$\exists a < 1, \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}, \quad (2.14)$$

La seule différence entre les deux classes $(a, b, 1)$ et $(a, b, 0)$ est le première terme de la formule récurrente qui est p_1 au lieu de p_0 .

L'ensemble des classe (a, b, m)

Les classes $(a, b, 0)$ et (a, b, m) peuvent être incluses dans une ensemble plus générale qui sera désignée par la classe (a, b, m) , $m \in \mathbb{N}$ étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, on dit que la distribution d'un variable aléatoire non dégénéré fait partie de la classe des distributions (a, b, m) si pour toutes les valeurs entières $n \geq m + 1$.(cf.[14])

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}.$$

2.5.2 Approximation de la distribution de S_N par la méthode de Panjer

On suppose que le nombre de réclamation N appartient à la famille $(a, b, 0)$ où $p_n = \mathbf{P}(N = n)$ vérifie la propriété (2.11) et $X_i, i = \overline{1, N}$ sont des variables aléatoires positives discrètes de densité f_X .(cf. [13])

Nous allons montrer qu'on a alors une formule récursive pour calculer f_{S_N} .

On a la loi de S_N est définie comme la somme pondérée des convolées de la loi de X .

$$f_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x) \quad \text{avec} \quad f_X^{*n}(x) = \sum_{y=0}^x f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x-y).$$

Faisons d'abord deux remarques :

$$\mathbb{E}[X_1 / \sum_{i=1}^n X_i = x] = \frac{x}{n},$$

et

$$\mathbf{P}(X_1 = y / \sum_{i=1}^n X_i = x) = \frac{f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x-y)}{f_X^{*n}(x)} \quad \text{pour } y \in \{0, 1, \dots, x\}.$$

En effet,

$$n\mathbb{E}[X_1 / \sum_{i=1}^n X_i = x] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i / \sum_{i=1}^n X_i = x] = x \quad \text{car les } X_i \text{ sont de mme distribution,}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = y / \sum_{i=1}^n X_i = x) &= \frac{\mathbf{P}(X_1 = y, \sum_{i=2}^n X_i = x-y)}{\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n X_i = x)}, \\ &= \frac{\mathbf{P}(X_1 = y) \mathbf{P}(\sum_{i=2}^n X_i = x-y)}{\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n X_i = x)} \quad \text{par indépendance entre les } X_i, \\ &= \frac{f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x-y)}{f_X^{*n}(x)}. \end{aligned}$$

On obtient par conséquent, pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} f_{S_N}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a + \frac{b}{n}) p_{n-1} f_X^{*n}(x) \quad \text{car pour } x \geq 1, f_X^{*0}(x) = 0, \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_X^{*n}(x) + b \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\frac{X_1}{x} / \sum_{i=1}^n X_i = x \right] p_{n-1} f_X^{*n}(x), \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} \sum_{y=0}^x f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x-y) + b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=0}^x \frac{y}{x} \frac{f_X(y) f_X^{*(n-1)}(x-y)}{f_X^{*n}(x)} p_{n-1} f_X^{*n}(x), \\ &= a \sum_{y=0}^x f_X(y) \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_X^{*(n-1)}(x-y) + b \sum_{y=0}^x \frac{y}{x} f_X(y) \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} f_X^{*(n-1)}(x-y), \\ &= a \sum_{y=0}^x f_X(y) f_{S_N}(x-y) + b \sum_{y=0}^x \frac{y}{x} f_X(y) f_{S_N}(x-y), \\ &= a f_X(0) f_{S_N}(x) + \sum_{y=1}^x \left[a + b \frac{y}{x} \right] f_X(y) f_{S_N}(x-y). \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *Si N appartient à la famille $(a, b, 0)$ et si X est à valeurs discrètes, alors pour tout $x \geq 1$:*

$$f_{S_N}(x) = \frac{1}{1 - a f_X(0)} \sum_{y=1}^x \left[a + b \frac{y}{x} \right] f_X(y) f_{S_N}(x-y). \quad (2.15)$$

On peut donc calculer $f_{S_N}(x)$ pour $x \geq 1$ d'une manière récursive :

$$\begin{aligned}
 f_{S_N}(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (f_X(0))^n, \\
 f_{S_N}(1) &= \frac{1}{1 - af_X(0)} (a + b) f_{S_N}(0) f_X(1), \\
 f_{S_N}(2) &= \frac{1}{1 - af_X(0)} \left[\left(a + \frac{b}{2}\right) f_{S_N}(1) f_X(1) + (a + b) f_{S_N}(0) f_X(2) \right], \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned}$$

2.5.3 Généralisation de l'algorithme de Panjer à des sévérités continues

Dans le cas où la distribution du montant d'une réclamation est continue et définie sur les entiers positifs, il est possible de calculer la distribution de S par la formule continue suivante :

$$f_{S_N}(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x \left[a + b \frac{y}{x} \right] f_X(y) f_{S_N}(x - y) dy. \quad (2.16)$$

Cette formule est beaucoup moins exploitable que dans le cas discret pour évaluer la distribution du montant total des réclamations d'un grand portefeuille de risque.

Pour trouver une approximation de la solution de ce type d'équation on applique la formule de panjer après la discrétisation de lois continue de X par une des méthodes numériques telle que la méthode des arrondis et méthode des moments.(cf. [15])

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons citer différentes méthode d'approximation de la distribution du montant total des réclamation. En particulier, nous avons présenté la méthode de panjer, ces classe de distribution et la formule récursive dans le cas des réclamations discrètes et continues.

Illustration numérique de la méthode de Panjer

Dans ce chapitre nous illustrons numériquement la méthode de Panjer pour différentes distributions des montants des réclamations en prenant en considération trois cas, il s'agit de trois distributions de nombre de réclamation qui font partie de la famille de Panjer.

3.1 Présentation du problème

Le montant totale de réclamation est donnée par :

$$S = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i. \quad (3.1)$$

où X_i et $N(t)$ deux variables aléatoires indépendantes telles que :

- X_i représente le montant de chaque réclamation,
- $N(t)$ est le processus du nombre de réclamation sur une période de temps.

3.1.1 Résolution du problème

On peut appliquer la formule récursive de Panjer pour évaluer la distribution du montant total des réclamations en cas de N appartient à la famille de Panjer $(a, b, 0)$, où

$$\exists a < 1, \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(N = n) = p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}. \quad (3.2)$$

La distribution des montants cumulés f_{S_N} est donnée par l'équation suivante :

$$f_{S_N}(x) = \frac{1}{1 - af_X(0)} \sum_{y=1}^x \left[a + b \frac{y}{x} \right] f_X(y) f_{S_N}(x - y). \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) est la forme la plus connue des résultat de Panjer. Cette dernière est beaucoup plus efficace pour évaluer la distribution du montant total des réclamations d'un grand portefeuille de risque.

Le tableau 3.1 présente les parametres a , b et p_0 associés à chacune des distributions de la famille $(a, b, 0)$:

Distribution de N	a	b	p_0
Poisson(λ)	0	λ	$e^{-\lambda}$
binomiale (n, p)	$\frac{-p}{1-p}$	$\frac{(n+1)p}{1-p}$	$(1-p)^n$
binomiale négative (r, p)	$(1-p)$	$(r-1)(1-p)$	p^r

TABLE 3.1 – Paramètres des distributions de la famille $(a, b, 0)$

Exemple 3.1. On considère le modèle du risque collectif $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. La formule recursive (3.3) de Panjer pour $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ est donnée par

$$f_{S_N}(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{y=1}^x y f_x(y) f_{S_N}(x-y) \quad (3.4)$$

Suposons que la distribution N est de Poisson de paramètre $\lambda = 4$. Et cette distribution des montants des réclamation est donnée par $\mathbf{P}[X = 1, 2, 3] = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Dans ce cas, la formule (3.4) peut-être simplifiée comme suit :

$$\mathbb{P}(S_N = x) = f_{S_N}(x) = \frac{1}{x} [f_{S_N}(x-1) + 4f_{S_N}(x-2) + 3f_{S_N}(x-3)], \quad x = 1, 2, 3, 4, \dots$$

La valeur initial est : $f_{S_N}(0) = e^{-4}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} f_{S_N}(1) &= f_{S_N}(0) = e^{-4}, \\ f_{S_N}(2) &= \frac{1}{2} [f_{S_N}(1) + 4f_{S_N}(0)] = \frac{5}{2} e^{-4}, \\ f_{S_N}(3) &= \frac{1}{3} [f_{S_N}(2) + 4f_{S_N}(1) + 3f(0)] = \frac{19}{6} e^{-4}, \\ f_{S_N}(4) &= \frac{1}{4} [f_{S_N}(3) + 4f_{S_N}(2) + 3f(1)] = \frac{85}{24} e^{-4}. \end{aligned}$$

3.2 Construction de l'algorithme de Panjer

Les étapes de l'application de la méthode de Panjer sont les suivantes :

Algorithme de Panjer :

Étape 1 : Introduction du paramètre de la fréquence des réclamations : (loi de N, a, b),

Étape 2 : Générer un vecteur de probabilité suivant une loi de X ,

Étape 3 : Calculer la distribution initiale $f_{S_N}(0)$,

Étape 4 : Calculer $f_{S_N}(x) = \frac{1}{1-af_X(0)} \sum_{y=1}^x \left[a + b\frac{y}{x} \right] f_X(y) f_{S_N}(x-y)$,

Étape 5 : Afficher les résultats.

3.3 Implémentation de l'algorithme et interprétation des résultats

On considère un portefeuille du modèle collectif composé de N réclamations où N est une variable aléatoire qui appartient à la famille de Panjer $(a, b, 0)$.

Les données qui représentent les montants des réclamations sont extraites de plusieurs lois discrètes à avoir (Binomial, Uniform, Géométrique, Poisson), en utilisant le MATLAB. En introduisant ces paramètres dans l'algorithme cité ci-dessus on obtient la distribution des montants cumulés f_{S_N} .

3.3.1 Description du langage de programmation

MATLAB (MATrix LABoratory) est un logiciel de calcul numérique, développé à la fin des années 70, il est conçu pour permettre de travailler à partir d'un outil de programmation de haut niveau. Le MATLAB est très utilisé dans l'analyse des données, le calcul scientifique et le traitement de signal, il permet également de manipuler directement les données matricielles. De plus, il est doté d'un ensemble considérable de fonctions prédéfinies.

3.3.2 Présentation et interprétation des résultats

L'implémentation de l'algorithme de Panjer sous l'environnement MATLAB (version 7.5(R2007b)) permet de calculer la distribution du montant total des réclamations, en prenant en considéra-

tion trois distributions de nombre de réclamation qui font partie de la famille de Panjer (a,b,0), il s'agit de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et la loi Binomiale négative $\mathcal{BN}(n, p)$.

Pour chacune des distributions du nombre des réclamations, on a choisi quatre distributions (Géométrique, Binomiale, Uniforme et Poisson) pour générer les pertes.

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux Table 3.2, Table 3.3 et Table 3.4 et illustrés dans les figures Figure 3.1, Figure 3.2 et Figure 3.3

• 1^{er} cas : Nombre des réclamations de loi de Poisson : $N \sim \mathcal{P}(4)$

	$f_X(y)$				$f_{S_N}(x)$			
x	$\mathcal{G}(0.5)$	$\mathcal{P}(0.5)$	$\mathcal{B}(10, 0.5)$	$\mathcal{U}(10)$	$\mathcal{G}(0.5)$	$\mathcal{P}(0.5)$	$\mathcal{B}(10, 0.5)$	$\mathcal{U}(10)$
0	0.2500	0.0333	0.0098	0.0909	0.0183	0.0183	0.0183	0.0183
1	0.1250	0.0758	0.0439	0.0909	0.0183	0.0222	0.0007	0.0067
2	0.0625	0.0126	0.1172	0.0909	.0183	0.0190	0.0032	0.0079
3	0.0313	0.0016	0.2051	0.0909	0.0145	0.0131	0.0087	0.0092
4	0.0156	0.0002	0.2461	0.0909	0.0120	0.0078	0.0156	0.0107
5	0.0078	0.0000	0.2051	0.0909	0.0196	0.0041	0.0201	0.0124
6	0.0039	0.0000	0.1172	0.0909	0.0174	0.0021	0.0205	0.0143
7	0.0020	0.0000	0.0439	0.0909	0.0066	0.0009	0.0197	0.0164
8	0.0010	0.0000	0.0098	0.0909	0.0042	0.0004	0.0218	0.0187
9	0.0005	0.0000	0.0010	0.0909	0.0031	0.0002	0.0267	0.0213
10	0.0002	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	0.0001	0.0314	0.0241

TABLE 3.2 – Distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{P}(4)$

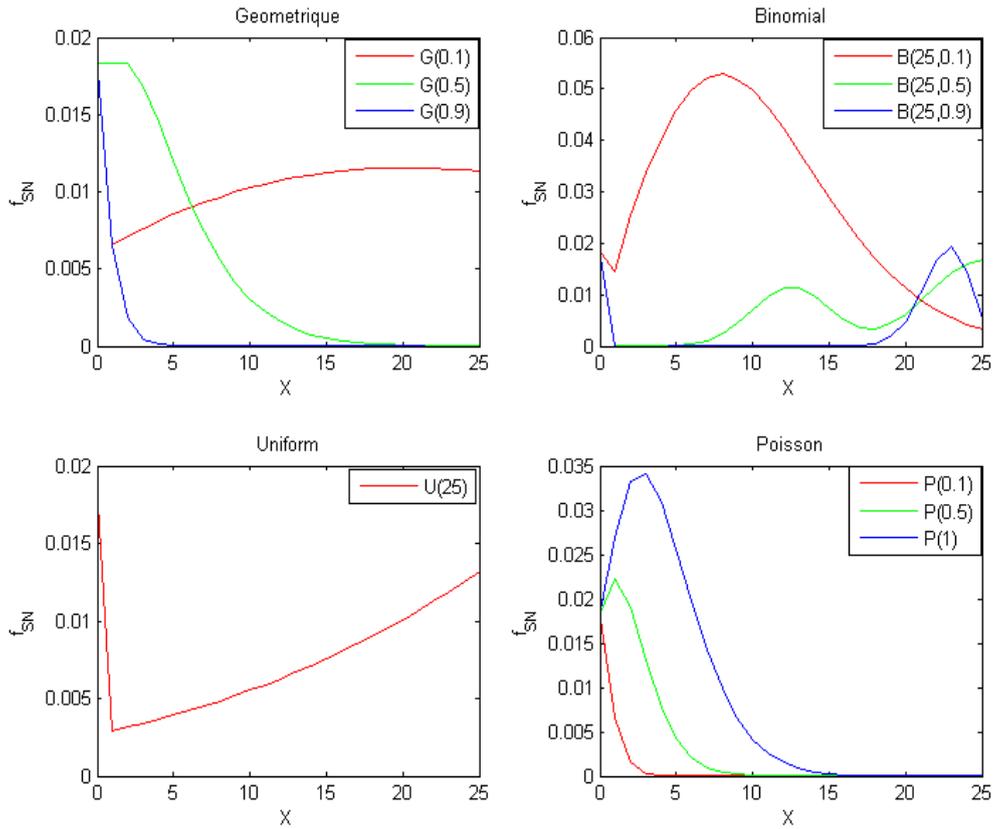


FIGURE 3.1 – Illustration de la distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{P}(4)$

Pour ce cas, nous considérons une distribution de Poisson de la famille $(a, b, 0)$, où nous présentons quatres graphes qui illustrent les changements de la distribution du montant total des réclamations f_{S_N} selon les lois appliquée pour générer le montant des réclamations f_X

Le premier graphe est obtenu dans le cas où f_X est de loi Géométrique. Nous remarquons que quand le paramettre de la loi est égale à 0.1 il ya une croissance de f_{S_N} , avec le changement du paramettre à 0.5 ça donne une stabélité de f_{S_N} puis diminution jusqu'à atteindre le zéro et pour le paramètre de la lois géometrique de 0.9, dès le début ou constate qu'une décroissance de f_{S_N} .

Le deuxième graphe représente la variation de la distribution du montant total des réclamations f_{S_N} où nous avons genérer les valeurs de f_X avec la lois Binomial pour differents paramettres. Lorsque $X \sim \mathcal{B}(0.1)$, il ya une lèrge chute suivie d'une croissance jusqu'à atteindre une vage puis une decroissance. Par contre pour p égale 0.5, on remarque que les valeurs de f_{S_N} sont à zero puis une perturbation, et en prenant p égale 0.9, nous avons une décroissance puis une stabilité. Pour les trois valeurs fixées pour les paramètres p de la loi Binomial, on constate

que au voisinage d'un montant de valeur 20, les distributions de f_{S_N} prennent des valeurs très proches l'une de l'autre.

Dans le troisième graphe, nous avons généré les valeurs de la distribution du montant de réclamation f_X avec la lois Uniform pour le paramètre (25). telle que au debut nous remarquons une décroissance de f_{S_N} puis une croissance.

Le quatrième graphe illustre les changements des valeurs de f_{S_N} dans le cas où nous avons appliqué la lois Poisson pour f_X . Lorsque le paramètre est fixé à 0.1, nous remarquons une décroissance de la distribution du montant total et pour les deux autres valeurs du paramètre 0.5 et 1, nous avons une croissance jusqu'à atteindre une certaine vague telle que cette dernière arrive à un niveau plus haut dans le cas du paramètre (1) après il ya une décroissance de f_{S_N} .

• 2^{me} cas : Nombre de réclamation de loi de Binomial : $N \sim \mathcal{B}(6, 0.6)$

	$f_X(y)$				$f_{S_N}(x)$			
	$\mathcal{G}(0.5)$	$\mathcal{P}(0.5)$	$\mathcal{B}(10, 0.5)$	$\mathcal{U}(10)$	$\mathcal{G}(0.5)$	$\mathcal{P}(0.5)$	$\mathcal{B}(10, 0.5)$	$\mathcal{U}(10)$
0	0.2500	0.0333	0.0098	0.0909	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041
1	0.1250	0.0758	0.0439	0.0909	0.0092	0.0112	0.0004	0.0034
2	0.0625	0.0126	0.1172	0.0909	.0132	0.0155	0.0016	0.0045
3	0.0313	0.0016	0.2051	0.0909	0.0153	0.0145	0.0044	0.0058
4	0.0156	0.0002	0.2461	0.0909	0.0153	0.0103	0.0081	0.0074
5	0.0078	0.0000	0.2051	0.0909	0.0140	0.0059	0.0111	0.0093
6	0.0039	0.0000	0.1172	0.0909	0.0119	0.0029	0.0127	0.0114
7	0.0020	0.0000	0.0439	0.0909	0.0086	0.0012	0.0150	0.0138
8	0.0010	0.0000	0.0098	0.0909	0.0074	0.0004	0.0196	0.0165
9	0.0005	0.0000	0.0010	0.0909	0.0055	0.0001	0.0261	0.0196
10	0.0002	0.0000	0.0000	0.0909	0.0039	0.0000	0.0322	0.0230

TABLE 3.3 – Distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{B}(6, 0.6)$

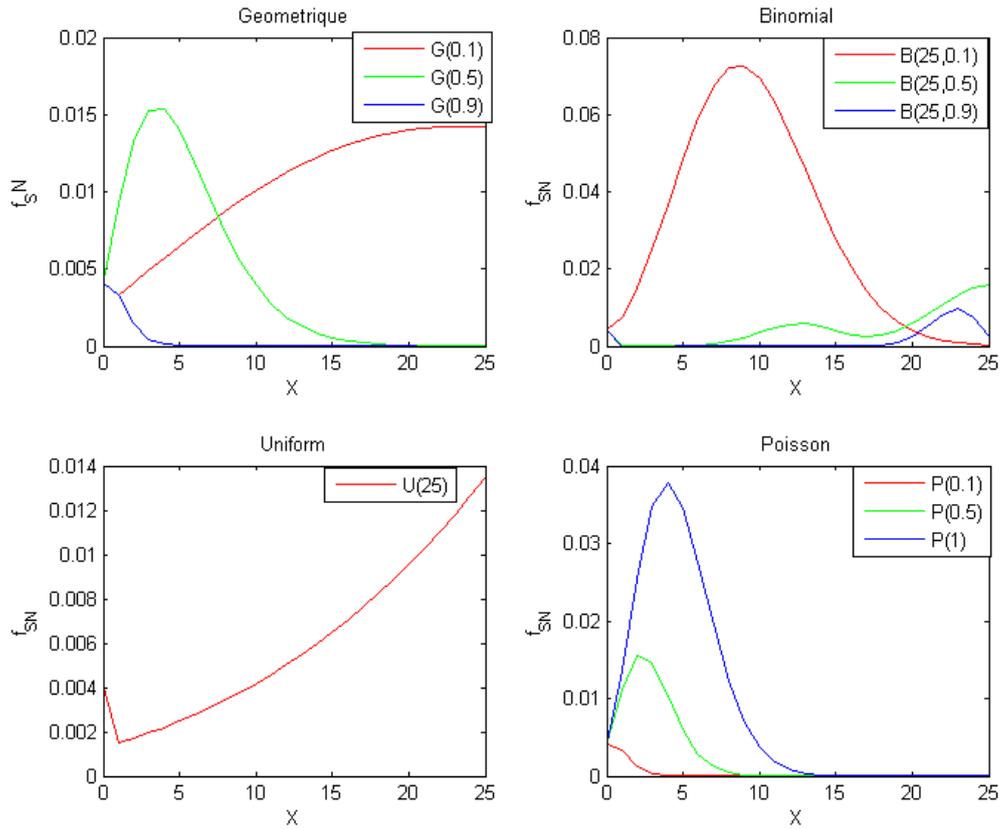


FIGURE 3.2 – Illustration de la distribution f_{S_N} en cas de $N \sim \mathcal{B}(6, 0.6)$.

Dans ce cas, nous allons aborder la distribution Binomial de la famille $(a, b, 0)$, où nous avons suivi le même principe du cas précédent. Les résultats sont présentés à l'aide des graphes : le premier présente la variation des valeurs de la distribution du montant total des réclamations f_{S_N} en fonction des variations du montant de réclamation X selon la loi géométrique de différents paramètres.

Le premier graphique est obtenu pour une valeur du paramètre égale à 0.1. Nous avons une croissance continue de f_{S_N} et pour la valeur 0.5 du paramètre, nous remarquons au début une croissance jusqu'à atteindre une vague puis une décroissance. Par contre en changeant le paramètre de la loi à 0.9, nous avons dès le début une décroissance jusqu'à ce que ça sera stable au niveau zéro.

Le deuxième graphique illustre les résultats dans le cas de la loi Binomial. Lorsque p est égal à 0.1, les valeurs de f_{S_N} sont en croissance, après une certaine variable de X nous remarquons une vague puis y'aura une décroissance. Dans les cas de p égal à 0.5 et p égal à 0.9, au début les valeurs de f_{S_N} connaissent une légère chute puis des perturbations à chaque changement des

valeurs de X .

Le troisième graphe représente les résultats dans le cas où nous avons généré les valeurs de la distribution du montant de réclamation f_X avec la loi Uniform de paramètre 25, où nous remarquons au début une décroissance de f_{S_N} puis une croissance.

Le quatrième graphe illustre les résultats dans le cas de la loi Poisson de paramètre 0.1, nous remarquons une décroissance des valeurs de f_{S_N} . Pour la valeur 0.5 du paramètre, nous avons une croissance jusqu'à atteindre une certaine vague puis une décroissance. De même pour la valeur 1 du paramètre où la vague à un niveau plus haut.

• 3^{me} cas : Nombre de réclamation de loi de Binomial Négatif : $N \sim \mathcal{BN}(10, 0.3)$

	$f_X(y)$				$f_{S_N}(x)$			
	$\mathcal{G}(0.5)$	$\mathcal{P}(0.5)$	$\mathcal{B}(10, 0.5)$	$\mathcal{U}(10)$	$\mathcal{G}(0.5)$	$\mathcal{P}(0.5)$	$\mathcal{B}(10, 0.5)$	$\mathcal{U}(10)$
0	0.2500	0.0333	0.0098	0.0909	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
1	0.1250	0.0758	0.0439	0.0909	0.0012	0.0015	0.0000	0.0004
2	0.0625	0.0126	0.1172	0.0909	.0014	0.0016	0.0002	0.0006
3	0.0313	0.0016	0.2051	0.0909	0.0016	0.0014	0.0006	0.0007
4	0.0156	0.0002	0.2461	0.0909	0.0016	0.0011	0.0011	0.0008
5	0.0078	0.0000	0.2051	0.0909	0.0015	0.0008	0.0014	0.0010
6	0.0039	0.0000	0.1172	0.0909	0.0014	0.0005	0.0015	0.0012
7	0.0020	0.0000	0.0439	0.0909	0.0013	0.0003	0.0016	0.0015
8	0.0010	0.0000	0.0098	0.0909	0.0011	0.0002	0.0020	0.0018
9	0.0005	0.0000	0.0010	0.0909	0.0010	0.0001	0.0026	0.0021
10	0.0002	0.0000	0.0000	0.0909	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TABLE 3.4 – Distribution du montant total des réclamations pour $N \sim \mathcal{BN}(10, 0.3)$

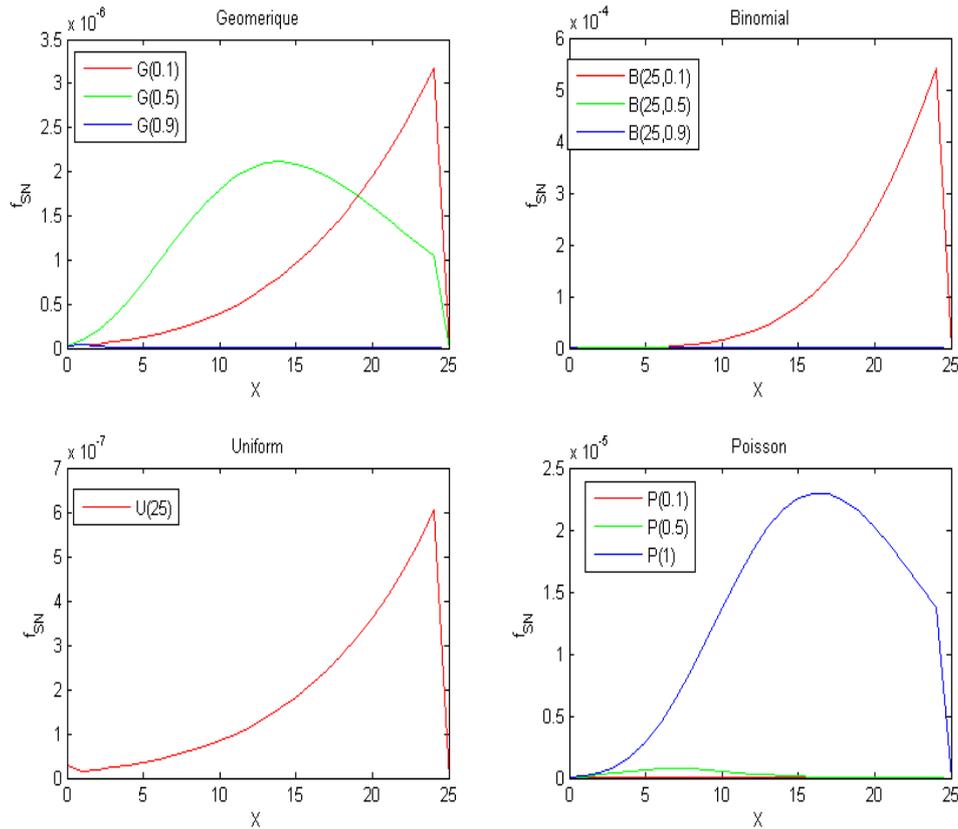


FIGURE 3.3 – Illustration de la distribution de f_{S_N} en cas de $N \sim \mathcal{BN}(10, 0.3)$.

Avec le même principe suivi précédemment, nous avons utiliser la distribution Binomial Négatif de la famille $(a, b, 0)$ pour la fréquence des réclamation et les quatre lois de probabilités considérées précédement avec différentes valeurs des paramètres. Pour chaque cas, nous avons obtenu les variation et la sensibilité du montant total des réclamations.

Le premiers graphe montre les résultats correspondants à la loi géométrique pour différents valeurs attribués à son paramètre, telle que pour la valeur 0.1, nous avons une croissance de f_{S_N} suivie d'une chute remarquable, par contre pour un paramètre de 0.5, nous remarquons une croissance jusqu'à un certain niveau puis une décroissance et une légère chute vers la fin. Pour le paramètre 0.9, le graphe montre presque une stabilité des valeurs de f_{S_N} tout au long de l'exécution.

Le deuxième graphe représente les résultats de l'exécution de l'algorithme de Panjer dans le cas d'une loi Binomial de différents paramètres, pour un paramètre de 0.1, nous remarquons que les valeurs de f_{S_N} sont en croissance jusqu'à aboutir à une vague puis il ya une chute du montant total. En changeant la valeur du paramètre à 0.5 et 0.9, l'exécution donne des valeurs

de f_{S_N} stable a zéro avec des légères perturbations non remarquables.

Le troisième graphe dont lequel les résultats sont obtenus avec la loi Uniforme de paramètre 25, on constate une croissance de f_{S_N} en fonction du changement des valeurs de X puis une chute vers la fin.

Le quatrième graphe est obtenu dans le cas d'une loi de Poisson, de paramètre 0.1 et 0.5, la distribution du montant total connaît une stabilité au niveau zéro avec quelques perturbations de bas niveau. Par contre pour une valeur 1 du paramètre, le changement est clair, une croissance de f_{S_N} jusqu'à arriver à une certaine vague puis nous remarquons sa décroissance vers la fin.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons implémenté l'algorithme de Panjer pour différentes distributions du nombre des réclamations appartenant à la famille de Panjer $(a, b, 0)$. Nous avons déterminé par la suite la distribution du montant total des réclamation en considérant plusieurs lois de probabilités du montant des réclamations. A partir des résultats obtenues, nous pouvons remarquer que la distribution du montant total des réclamation ne dépend pas seulement de la loi du montant des pertes mais également du paramètre de la loi.

Conclusion générale

Dans le domaine de la gestion du risque en assurance, l'évaluation de la distribution du montant total des pertes dans les modèles du risque collectif et individuel représente un axe de recherche très développé où plusieurs approches ont été élaborées.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la méthode de Panjer qui est très utilisée dans l'estimation des lois de probabilité de montant total des réclamations dans le modèle du risque collectif.

D'abord, nous avons détaillé les résultats de la méthode qui sont basées sur l'utilisation de la forme récursive des lois de probabilité Panjer et ses classes.

Afin d'illustrer numériquement la méthode, un algorithme a été implémenté, en choisissant plusieurs distributions avec différents paramètres.

À partir des résultats obtenus, nous pouvons constater que la distribution du montant des pertes est très sensible à la variation des paramètres des lois de probabilité considérées pour le montant des réclamations. D'où, l'importance de passer par les méthodes d'évaluations paramétriques.

Bibliographie

- [1] A. H. BASTIDA, G. D., AND PEREZ-SANCHEZ, J. M. Bayesian robustness of the compound poisson distribution under bidimensional prior : an application to the collective risk model. *Journal of Applied Statistics*, 36, 853-869 (2009).
- [2] ALBIRECHER, H., AND THONHAUSER, S. Optimality results for dividend problems in insurance.
- [3] ALVES, M. I. F. Introduction à la théorie du risque.
- [4] ANDERSEN, E. S. On the collective theory of risk in case of cotagion between claims. *transaction of the 15th International congress of Actuaries, New York*. (1957).
- [5] BENOUARET, Z. Stabilité forte dans les modèles de risque. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb.* (2012).
- [6] BLOM, G., AND 1893-1985, H. C. The annals of statistics.
- [7] BOUDJLLAL, M. Les assurances dans un système islamique. *L'économie Islamique, Université de Bamako*. (2004).
- [8] BOWERS, N. L., AND GERBER, H. E. Actuariel mathematics. *society of Actuaries, Schaumberg, IL* (1997).
- [9] BRAHMI, B., AND M'SILI., S. Application de la méthode cart (classification and regression tree) pour une nouvelle classification de tarification en assurance rc automobile. *Mémoire d'ingéniorat en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira de Béjaïa*. (2002).
- [10] CRAMER, H. Litteratur anmälningar. *candinavian Actuarial Journal*, 223-251.
- [11] CRAMER, H. On the mathematical theory of risk. *Försäkringsaktiebolaget Skandia 1855-1930. Part 2, 7-84, Stockholm*. (1930).

- [12] FELLER, W. An introduction to probability theory and its applications. *John Wiley Sons, Inc., New York.* (1971).
- [13] GUERIN, H. Act3251 théorie du risque. *Université de Montréal Département de Mathématiques et Statistique.* (2012).
- [14] HESSELAGER, O. A recursive procedure for calculation of some compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 24, 19-32. 50 (1994), 433–441.
- [15] K. T. HESS, A. L., AND SCHMIDT, K. D. An extension of panjer’s recursion. *ASTIN Bulletin*, 32, 283-297. (2002).
- [16] KLUGMAN, S. A. Loss models : From data to decision. *Wiley, New York.* (1998).
- [17] LEBLANC, R. étude de l’effet de de la dépendance dans le modèle collectif de risque. *Département de mathématique et de statistique, Université Laval, Québec* (2000).
- [18] LUNDBERG, F. Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen, Återförsäkring af kollektivrisker. Tech. rep., Lab. of Actuarial Math, 1903.
- [19] MARTIN-LOF, A., AND CRAMER, H. Insurance mathematics. applied stochastic models data analysis.
- [20] MASIELLO, E. Théorie de la ruine. *Institut de Science Financière et d’Assurances, université Lyon 1* (2010).
- [21] PANJER, H. H. Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin* (1981).
- [22] PANJER, H. H. Operational risk : Modeling analytics. *1st ed, John Wiley Sons, Inc, Hoboken, New Jersey* (2006).
- [23] PANJER, H. H., AND WILLMOT, G. E. Recursions for compound distributions. *ASTIN Bulletin* (1982).
- [24] PANJER, H. H., AND WILLMOT, G. E. Insurance risk models. *Society of Actuaries, Schaumburg, IL* (1992).
- [25] PESTANA, D. D., AND VELOSA, S. F. Extensions of katz-panjer families of discrete distributions. *REVSTAT - Statistical Journal* (2004).
- [26] REIS, A. E. D. how long is the surplus below zero insurance. *Mathematics and Economics* (1993).
- [27] S. A. KLUGMAN, H. H. P., AND WILLMOT, G. E. Loss models : From data to decisions. 4th ed. *John Wiley Sons, Inc., Hoboken, New Jersey* (2012).

- [28] SCHROTER, K. J. *On a Family of Counting Distributions and Recursions for Related Compound Distributions*. Scandinavian Actuarial Journal, 1990.
- [29] SUNDT, B. On some extensions of panjer's class of counting distributions. *ASTIN Bulletin*, 22, 61-80 (1992).
- [30] SUNDT, B. On multivariate panjer recursions. *ASTIN Bulletin* 29(1) (1999).
- [31] SUNDT, B., AND JEWELL, W. S. Further results on recursive evaluation of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12, 27-39 (1981).
- [32] TAOUSSI, C. Systeme de modification de la prime de risque a posteriori. *université mouloud mammeri. Tizi-Ouzou* (2002).
- [33] THIBAUT, L. Méthodes d'évaluation de la distribution du montant total des réclamations. *Université Laval Québec* (1997).

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier une méthode très utilisée dans l'évaluation du montant total des réclamations du modèle du risque collectif.

Notre travail consiste à aborder la méthode de Panjer qui comporte plusieurs lois de probabilité présentant la famille de Panjer. Ainsi de présenter la formule récursive de cette dernière en de cas continue et discrète. Nous finissons par une illustration numérique de la méthode, après l'exécution de l'algorithme de Panjer sous MATLAB.

Après les résultats obtenus nous pu réalisé une évaluation du montant total à l'aide de la méthode de Panjer.

Mots clés: Modèle de risque, Probabilité de ruine, Algorithme de Panjer.

Abstract

The main objective of this thesis is to study a method very used in the evaluation of the total amount of claims of the collective risk model. Our work consists in following the Panjer method, which includes several probability laws presenting the Panjer family. Thus to present the recursive formula of the latter in continuous case and discretion. We finish with a numerical illustration of the method, after the execution of the Panjer algorithm under MATLAB.

After the results obtained we could make an evaluation of the total amount using the Panjer method.

Keywords Risk Model, Probability of Ruin, Panjer Algorithm.