République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderahmane Mira de Bejaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Mathématique Financières

Thème

Modélisation et Simulation du Comportement des Traders dans un Marché Financier sous forme d'un Jeu de Minorité

Présenté par :

M^lle AIT MEKIDECHE Samira ***et*** ***M^lle BEN AMARA Souraya***

Soutenu le 08 Juillet 2019 Devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
Lekadir O.	MCA	Université de Bejaia	**Président**
Khimoum N.	MCB	Université de Bejaia	**Rapporteur**
Bouibed K.	MCB	Université de Bejaia	**Examinatrice**
Ziani S.	MCB	Université de Bejaia	**Examinateur**

2018/2019.

Remerciements

Merci Allah de nous avoir donnée la force, le courage et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous souhaitons adresser nos remerciments les plus sincères au docteur N.Khimoume qui a voulu encadrer tout notre cycle universitaire avec le même dévouement et engagement. On le remercie vivement de nous avoir orienté puis encouragé à réaliser ce thème qui nous a été bénéfique à dévlopper notre champs de connaissance.

Nous tenons égallement à remercier les mombres du jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce mémoire.

En outre, on ne manquerai pas d'éxprimer notre gratitude envers nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patiance.

nous adressons nos plus sincère remerciements à tous nos proches et amis.

Dédicaces

Je dédie ce modeste
travail à ceux que j'ai de plus cher :
mes parents, mes frères Nacer, Ramd-
ane Mourade, toutes mes soeurs à t-
oute ma famille, à mes nièces : A-
sma, Amina et Houda, à ma
binôme souraya, à mon
amie bassma, à
Salim
♡

Samira

Je dédie ce modeste
travail à ceux que j'ai de plus cher :
mes parents, mes frères Fouad et Bilal
ma soeur Samira à toute ma famille,
à mes amies : Bouchra, Hanane,
Lynda et lydia à ma binôm-
e : Samira ainsi toute
sa famille, à
Hakim
♡

Souraya

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Introduction Générale

Un des secteurs de première importance, dans le domaine de l'économie, est celui des marchés financiers. Ils constituent généralement à travers leurs indices un bon indicateur de la santé d'une économie. Dans ces marchés, des personnes se rencontrent pour acheter ou vendre des titres financiers tels que des actions, des obligations ou des produits dérivés. Le prix de ces titres varie de façon aléatoire selon la loi de l'offre et de la demande.

Les dernières crises financières (Crise du rouble russe de 2014, Krach boursier de 2015 en Chine, crise de la livre turque de 2018, etc.) ont montré que les systèmes financiers sont de nature complexe et que la compréhension de ces systèmes n'est pas une tâche facile Artus [1995]. L'un des principaux facteurs qui contribuent à la complexité des systèmes financiers est la présence des traders dans ces systèmes. De plus, l'interaction entre ces négociants humains a pour conséquence que les traders sont influencés par les décisions d'autres traders, ce qui en rajoute de la complexité.

Afin de comprendre le comportement des traders de nombreux modèles de marchés financiers ont été proposés. Certains modèles tentent de simuler le comportement du cours des actions, certains se concentrent sur l'environnement de marché, d'autres sur le comportement des agents, et d'autres encore tentent d'observer l'effet de toutes ces variables sur le comportement du marché. L'étude de tels modèles a permis de mieux comprendre le comportement des marchés financiers et de les prévoir Marsili et al. [2000].

Dans le cadre de ce mémoire, nous considérons la modélisation d'un marché financier via une branche de la théorie des jeux appelée jeux de la minorité, considérée comme une variante du problème du bar El Farol Arthur [1994]. Le problème du bar d'El Farol montre essentiellement comment des agents se comportent collectivement dans une situation idéale tout en rivalisant, par apprentissage, pour obtenir une ressource rare, même sans interaction les uns avec les autres. Le problème du bar d'El Farol, tel que proposé par Arthur [1994], est un problème de théorie des jeux qui décrit le comportement d'agents inductifs (qui prennent leurs décisions uniquement en apprenant des informations à partir d'un historique), et qu'il est possible dans ce cas de faire émerger des dynamiques proches d'un équilibre théorique inconnu des agents. En effet, il est impossible de trouver une stratégie générale optimale pour le visiteur du bar El Farol, car cela impliquerait que tout le monde agirait de la même manière et que le nombre de spectateurs serait nul ou complet.

Notre réflexion s'articulera autour d'une introduction générale et trois Chapitre. Dans le premier chapitre, Nous tenterons une revue littérature et des concepts de base en matière de la simulation statistique, puis, nous présenterons la théorie des jeux et nous introduisons ses notions de base. Dans le second chapitre nous parlerons du marché financier de manière globale à savoir sa définition, ses compositions et ses acteurs. Nous présentons ensuite trois exemples de marché représentatifs des marchés modernes avec son fonctionnement. Nous arrivons à la fin du troisième chapitre qui traite dans la première partie le modèle de base des jeux de minorité qui sont bien adaptés pour représenter certaines situations économique.

Chapitre 1

Rappels et notions de base

Introduction

Avant d'aborder les chapitres suivants portant sur la simulation du comportement des traders dans un marché financier, nous allons commencer par présenter quelques notions de base en matière de la simulation statistique, notamment les principales méthodes de génération des nombres aléatoires et des échantillons suivant différentes lois de probabilité, suivies des principaux outils de la théorie des jeux qui sont indispensables pour pouvoir formuler et modéliser un marché financier.

1.1 Simulation

La simulation est l'un des instruments de la recherche opérationnelle dont le nom soit connu de tous, chacun peut donner un sens à ce mot : le sens commun de ce terme s'identifie d'ailleurs presque à sa signification en modélisation. La simulation est un moyen avec lequel un ordinateur peut analyser les conséquences de certaines hypothèses relatives à l'évolution de l'environnement quand il serait impossible, trop coûteux ou trop long de les analyser à partir de situations réelles. Un modèle de simulation est une représentation du système stochastique permettant de générer un grand nombre d'événements aléatoires et d'en tirer des observations statistiques. En d'autres termes, simuler un système stochastique consiste à imiter son comportement pour estimer sa performance.

1.1.1 Génération de nombres aléatoires

La génération de réalisation des nombres aléatoires uniformes se trouve au cœur de tout programme de simulation stochastique. C'est, en effet, à partir de ces nombres qu'il est possible de générer des réalisations de variables aléatoires, éventuellement multi-variées, et de processus stochastiques obéissant à des lois quelconques

Nombres pseudo-aléatoires et génération récursive

Rappelons qu'une variable aléatoire Z est uniformément distribuée dans $[0,1]$ si sa fonction de densité est donnée par :

$$f_Z(Z) = \begin{cases} 0 & si \quad Z \in [0,1]; \\ 1 & si \quad Z \in [0,1]. \end{cases}$$

Ce qui correspond à la fonction de distribution

$$F_Z(Z) = \begin{cases} 0 & si \quad -\infty < Z < 0; \\ Z & si \quad 0 < Z < 1; \\ 1 & si \quad 1 < Z < \infty. \end{cases}$$

La plupart des générateurs de nombres aléatoires utilisés aujourd'hui sont basés sur la récurrence simple (1.1) ou, en tous les cas, lui sont fortement apparentés. Les nombres ainsi produits sont dits pseudo-aléatoires, vu le caractère clairement déterministe de leur génération. plus précisément, partant d'une valeur initiale $Y_0 \in \{0, \ldots, m-1\}$, les diférents termes de la suite sont obtenus en appliquant successivement la récurrence

$$Y_k = \varphi(Y_{k-1}), \quad k = 1, 2, ... \tag{1.1}$$

où $\varphi : \{0, \ldots, m-1\} \to \{0, \ldots, m-1\}$ est une fonction bien choisie. Cette récurrence produit une suite$\{Y_0, Y_1, Y_2, \ldots\}$ dans $[0,1]$, il suffit de poser.

$$Z_k = \frac{Y_k}{m}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Méthode des congruences

Imaginée par H.R. Lehmmer en (1951), cette méthode demeure de loin la plus répandue. Il s'agit d'une récurrence du type (1.2) où la fonction φ est égale à :

$$\varphi(x) = (ax + c) \bmod m, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Les paramètres de la méthode sont le modulo "m" qui est un entier positif généralement de grande taille, le multiplicateur "a", $0 < a < m$, et l'incrément "c", $0 \leq c < m$.

Partant d'un terme initial $y_0 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, les différents termes de la suite s'obtiennent donc à l'aide de la récurrence

$$Y_k = (aY_{k-1} + c) \bmod m, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Exemple 1.1.1. *On pose $Y_0 = 27$, $a = 17$, $c = 43$, $m = 100$, et*

$$\begin{cases} Y_k = (17Y_{k-1} + 43) mod\ 100; \\ Y_0 = 27. \end{cases}$$

On obtient la suite suivante :

$$Y_1 = (17 * 27 + 43) mod 100 = 2$$

$$Y_2 = (17 * 2 + 43) mod 100 = 77$$

$$Y_3 = (17 * 77 + 43) mod 100 = 52$$

Remarque 1.1.1. *Pour obtenir une suite U_n de nombre pseudo-aléatoire entre 0 et 1 il suffit de prendre $U_n = \frac{x_n}{m}$, $n \geq 0$.*

D'après l'exemple précédent on obtient :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{x_0}{100} = \frac{27}{100} = 0.27 \\ U_1 &= \frac{x_1}{100} = \frac{2}{100} = 0.2 \\ U_2 &= \frac{x_2}{100} = \frac{77}{100} = 0.77 \\ U_3 &= \frac{x_3}{100} = \frac{52}{100} = 0.52 \end{aligned}$$

1.1.2 Génération de variables aléatoires

Nous présentons plusieurs méthodes permettant de générer des variables aléatoires obéissant à une loi donnée. Parmi ces méthodes, certaines s'appliquent à la génération de variables aléatoires de distribution quelconque, alors que d'autres ne s'appliquent qu'aux distributions continues ou discrètes.

Méthode des fonctions inverses

Dans sa version de base, la méthode des fonctions inverses permet de générer des variables aléatoires possédant une fonction de distribution continue. Elle peut cependant être généralisée afin d'être applicable à la généralisation des variables aléatoires de loi quelconque.

Soit u une variable aléatoire de loi $U_{[0,1]}$. Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F_x et supposant F_x^{-1} existe, alors :

$$X = F_x^{-1}(u)$$

Méthode de convolution

Une variable aléatoire peut être exprimer comme une combinaison linéaire de m autre variable aléatoire $y_j, \quad j = \overline{1, n}$ suivant des lois spécifiques (même loi et même paramètre)

$$X = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

Génération de variables aléatoires discrètes

La méthode des fonctions inverses généralisées permet, en particulier, la génération de variables aléatoires discrètes. Considérons une variable aléatoire discrète X pouvant prendre un nombre fini N de valeurs et de loi de probabilité donnée par

$$P[X = k] = P_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.4}$$

La fonction de répartition correspondante à la loi (1.4) s'écrit :

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & si \quad -\infty < x < 1; \\ F_i & si \quad i \leq x < i+1, \quad 1 \leq i < N_i; \\ 1 & si \quad N \leq \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Génération d'échantillons suivant différentes lois de probabilité

Pour ce faire on utilise l'une des méthodes citées précédemment, et ceci suivant la loi sur laquelle se base la génération, dans cette partie nous allons présenter alors les démarches de génération d'échantillons pour quelques principales lois, les plus utilisées en simulation qui sont :

▶ **Loi exponentielle**

Soit $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$,$\lambda > 0$, sa densité $f(x)$ et sa fonction de répartition $F(X)$ sont données par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0; \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{1.6}$$

$$F_X(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0; \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{1.7}$$

On la génère de la manière suivante :

$$X = -\frac{1}{\lambda} \log(U - 1)$$

.

Avec U est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$

▶ **Loi uniforme**

Soit une variable aléatoire $X \rightsquigarrow U_{[a,b]}$, dont

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a-b} & si \quad a \leq x \leq b; \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{1.8}$$

Et

$$F_X(X) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0; \\ \frac{x-a}{a-b} & si \quad a \leq x < b; \\ 1 & si \quad x \geq b. \end{cases} \tag{1.9}$$

Pour la simuler il suffit de générer des nombres aléatoires $u_i \in U_{[a,b]}$ et on déduira les réalisation

$$x_i = (b-a)u_i + a$$

.

▶ **Loi Bêta**

X une variable aléatoire suit une loi Bêta de paramètre a et b, si sa densité s'écrit sous la forme :

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x). \tag{1.10}$$

où

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

.

Lorsque $a, b < 1$, on génère une variable aléatoire de cette loi de la manière suivant :

1. Jusqu'à ce que $z + y \leq 1$;
2. Générer u suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, prendre $z = u^{1/a}$;
3. Générer v suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, prendre $y = v^{1/a}$;

4. $x = (z + y)$ suit une loi Bêta de paramètre a et b.

▶ **Loi Weibul**

Soit X une variable aléatoire de Weibul $W(\alpha, \beta)$ avec $\alpha, \beta > 0$ de fonction de répartition

$$F_X(X) = \begin{cases} 1 - e^{-(\beta x)^{\alpha}} & si \quad x \geq 0; \\ 1 & sinon. \end{cases} \tag{1.11}$$

Pour générer une telle variable aléatoire, on utilise :

$$X = \frac{(-\log(U))^{1/\alpha}}{\beta}$$

.

1.2 Généralités sur la théorie des jeux

La théorie des jeux se définit généralement comme l'outil mathématique permettant d'analyser les interactions stratégiques entre les individus Morris [1994]. Elle a été fondée par les mathématiciens notamment Ernest Zermelo (1912), Émile Borel (1921) et John Von Neumann (1928).

La théorie des jeux prend véritablement son essor avec la publication de l'ouvrage de John Von Neumann et l'économiste Oskar Morgenstern en 1944, et se développera ensuite dans les années 1950 avec les travaux de John Nash Nash [1950, 1951], qui donnent une notion de solution pour les jeux à somme nulle, confortent cette fondation Osborne [2000]. Les travaux de J. Nash ont ensuite été prolongés, notamment Reinhard Selten et John Harsanyi. Elle a connu un développement mathématique très important, Nash, Selten et Harsanyi se verront récompensés par le prix Nobel d'économie en 1994. La théorie des jeux comporte aujourd'hui plusieurs branches : jeux coopératifs, jeux stratégiques, jeux à information complète et incomplète, jeux dynamiques, jeux différentielles, etc Osborne [2000].

1.3 Concept de jeu

Un jeu est une situation, où des individus sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance par les règles du jeu. Les résultats de ces choix constituent une issue du jeu à laquelle est associé un gain pour chacun des participants. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur et ne dépendent pas non plus uniquement du hasard, bien que celui-ci puisse intervenir. Les principaux éléments d'un jeu sont :

Définition 1.3.1 (Joueurs). *Ce sont les individus, acteurs ou agents, qui prennent des décisions. Le but de chaque joueur étant de maximiser son utilité par le choix des actions à entreprendre.*

Définition 1.3.2 (Actions). *Une action d'un joueur i, notée a_i, est un choix que ce joueur peut effectuer. L'ensemble des actions $A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, du joueur i, est l'ensemble de toutes les actions qui lui sont permises.*

Définition 1.3.3 (Stratégies). *La stratégie s_i d'un joueur i est une règle qui lui indique quelles actions entreprendre à chaque instant du jeu, étant donné l'ensemble d'informations.*

Définition 1.3.4 (Revenus). *Un revenu du joueur i est le gain attendue que le joueur i devrait recevoir en fonction des stratégies choisies par lui-même et par les autres joueurs.*

Définition 1.3.5 (Issues). *L'issue d'un jeu est l'ensemble d'élément intéressant que le concepteur du jeu prend des valeurs associées aux actions, revenus, et autres variables, une fois le jeu terminé.*

1.4 Classification et types de jeux

La littérature tend à distinguer entre les jeux selon plusieurs éléments, à savoir :

1.4.1 Déroulement du jeu dans le temps

Les choix effectués par les joueurs dans un jeu peuvent être simultanés ou séquentiels. Cette distinction met en évidence deux types de jeux que l'on peut définir comme suit :

Définition 1.4.1. *[Jeu statique]*
On dit qu'un jeu est statique lorsque les joueurs choisissent leurs actions simultanément et reçoivent ensuite leurs gains respectifs. Chaque joueur choisit son plan d'action complet au début du jeu, et au moment de faire son choix, il n'est pas informé des choix des autres joueurs.

Définition 1.4.2. *[Jeu dynamique]*
On dit qu'un jeu est dynamique lorsque les joueurs choisissent leurs actions alternativement, c'est-à-dire que chaque joueur considère son plan d'action non seulement au début du jeu, mais plutôt à chaque fois qu'il doit prendre une décision pendant le déroulement du jeu.

1.4.2 Nature de l'information

L'information dont dispose chaque joueur au moment de jouer est capitale pour décrire un jeu et les stratégies dont disposent chaque joueur.

Définition 1.4.3 (Information parfaite).
Un jeu est dit à information parfaite, si au moment de jouer, chaque joueur est parfaitement informé du choix des autres joueurs. Dans le cas contraire, le jeu est dit à information imparfaite.

Définition 1.4.4 (Information complète).
Un jeu est dit à information complète, lorsque chaque joueur connaît les motivations des autres joueurs, les ensembles des stratégies et les fonctions de gain de tous les autres joueurs. Dans le cas contraire, le jeu est dit à information incomplète.

1.4.3 Type de relations entre les joueurs

Selon le type de relations existant entre les joueurs, on peut distinguer deux grandes familles de jeux : les jeux coopératifs et les jeux non coopératifs.

Définition 1.4.5 (Jeu coopératif).
Un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante. C'est le cas par exemple, si les joueurs s'accordent sur un contrat ou un accord devant une autorité, où il est prévu une sanction légale en cas de non-respect du contrat ou de l'accord. Dans ce cas, on dit que les joueurs forment une coalition dont les membres agissent de concert.

Définition 1.4.6 (Jeu non coopératif).
Un jeu est dit non coopératif lorsque les joueurs n'ont pas la possibilité de former des coalitions. Chaque joueur tente d'optimiser sa propre fonction objectif sur la base des conjectures qu'il fait à propos du comportement des autres joueurs.

1.4.4 Nombre de coups

Un jeu peut être formulé de deux manières différentes :

Forme extensive associée généralement aux jeux dynamiques (définition 1.4.1). Un jeu sous forme extensive est défini par un arbre qui décrit comment le jeu est joué. Chaque sommet de l'arbre spécifie le joueur qui doit choisir une action à ce moment du jeu, ainsi que l'information dont il dispose lors de la prise de décision. Les gains que chaque joueur peut réaliser après avoir suivi un des chemins possibles au sein de l'arbre sont donnés aux sommets terminaux.

Forme normale associée généralement aux jeux statiques (définition 1.4.2). Un jeu sous forme normale est défini comme une collection de stratégies décrivant les actions de chaque joueur dans toutes les situations concevables du jeu, ainsi que les gains que chacun obtient lorsque les stratégies de tous les joueurs sont connues.

Nous nous intéresserons dans ce mémoire aux jeux sous forme normale qu'on peut définir formellement comme suit :

Définition 1.4.7 (Jeu sous forme normale).
Un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme suivante :

$$J_N =< \mathcal{N}, \{X^i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{f^i\}_{i\in\mathcal{N}} >, \tag{1.12}$$

où

1. $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ *est l'ensemble des joueurs. Un joueur quelconque est désigné par l'indice* i, $i \in \mathcal{N}$ *;*
2. $X^i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ *désigne l'ensemble des stratégies du joueur* $i \in \mathcal{N}$, $X = \prod_{i=1}^{N} X^i$ *est l'ensemble des issues du jeu ;*
3. $f^i : X \to \mathbb{R}$ *est la fonction gain du* i^{eme} *joueur ;*
4. *Chaque joueur connaît les ensembles des stratégies et les fonctions de gain de tous les autres joueurs.*

Définition 1.4.8 (Jeu linéaire).
Le jeu défini par la relation (1.12) est appelé jeu linéaire à N *joueurs sous forme normale, lorsque les fonctions gains* f^i, $\forall i \in \mathcal{N}$, *sont des fonctions linéaires.*

1.4.5 Jeux répétés

Un jeu répété consiste en la répétition d'un jeu sous forme normale (1.12), T fois, où les joueurs choisissent simultanément leurs stratégies. un jeu répété au sens strict est un jeu répété stationnaire, c-à-d. c'est le même jeu ordinaire, appelé jeu constituant qui est répété période (étape) par période, Eber [2013]. Les conditions du jeu ne se modifient pas au cours du temps. On garde le même :

- Nombre de joueurs ;
- Ensemble de stratégies ;
- Fonction de gains ;
- Facteur d'actualisation.

Typologie des jeux répétés

Etant donné T, un nombre entier, et σ un réel dans l'intervalle $[0,1]$, appelé facteur d'actualisation. Dans le cas ou T est fini, alors on dit qu'il s'agit d'un jeu répété à horizon fini. Dans le cas contraire, le jeu est appelé jeu répété à horizon infini.

1.4.6 Nombre de stratégies

Définition 1.4.9 (Jeu fini à N joueurs).
Le jeu sous forme normale défini par la relation (1.12) est dit fini, lorsque les ensembles de stratégies X^i, $\forall i \in \mathcal{N}$, sont des ensembles finis ($|X^i| < \infty$, $\forall i \in \mathcal{N}$).

Les jeux finis à deux joueurs occupent une place privilégiée en théorie des jeux, puisque ils permettent une représentation simple et pédagogique des principales questions posées en théorie des jeux.

Définition 1.4.10 (Jeu fini à deux joueurs).
Un jeu fini à deux joueurs est un cas particulier du jeu défini par la relation (1.12), avec $\mathcal{N} = \{1,2\}$. Il est représenté par :

$$J_2 =< \ X^1, X^2, \ f^1, f^2 >, \tag{1.13}$$

où

1. *$X^1 \subset \mathbb{R}^m$ désigne l'ensemble constitué d'un nombre fini m de stratégies du joueur 1 :*
$$X^1 = \{x^1, x^2, \ldots, x^m\};$$
2. *$X^2 \subset \mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble constitué d'un nombre fini n de stratégies du joueur 2 :*
$$X^2 = \{y^1, y^2, \ldots, y^n\};$$
3. *$X = X^1 \times X^2$ est l'ensemble des issues du jeu.*
4. *$f^1 : X^1 \times X^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur 1 ;*
$f^2 : X^1 \times X^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction de gain du joueur 2.

1.4.7 Gains des joueurs

Selon les gains des joueurs, on distingue dans la littérature les jeux à deux joueurs dits à somme générale définis par la relation (1.13), mais aussi les jeux dits à somme nulle comme cas particulier des jeux définis par la relation (1.13) lorsque pour toute situation possible du jeu, la somme des gains des deux joueurs est nulle.

Définition 1.4.11 (Jeu fini à deux joueurs à somme nulle).
Le jeu fini à deux joueurs (1.13) est dit à somme nulle, si dans toute situation du jeu, les valeurs des fonctions de gain des deux joueurs sont diamétralement opposées, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{2} f^i(x,y) = 0, \quad \forall x \in X^1, \ \forall y \in X^2.$$

Il existe une distinction claire entre les jeux à deux joueurs à somme nulle et le reste des jeux. Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, la somme des fonctions des gains des deux joueurs est égale à zéro. En toute situation possible du jeu, si x^1, f^1 désignent respectivement la stratégie et la fonction gain du joueur p(1), et x^2, f^2 respectivement celles du joueur p(2), alors,

$$f^1(x^1,x^2) + f^2(x^1,x^2) = 0, \quad \forall x^1 \in X^1, \ \forall x^2 \in X^2$$

Le jeu à deux joueurs à somme nulle sera noté par :

$$J_2^0 =< X^1, X^2, g >, \tag{1.14}$$

où $g = f^1 = -f^2$ est la fonction que le joueur 1 veut maximiser et que le joueur 2 veut minimiser.

Remarque 1.4.1. *La particularité des jeux à somme nulle, qui les distingue des autres jeux, est qu'ils n'accordent aucune coopération entre les joueurs, puisque le gain d'un joueur représente la perte de son adversaire.*

Définition 1.4.12 (Jeux finis à deux joueurs à somme constante).
Le jeu fini à deux joueurs défini dans (1.13) est dit à somme constante, si en toute situation

du jeu la somme des valeurs des fonctions des gains des deux joueurs est égale à une constante non nulle, i.e,

$$f^1(x,y)+f^2(x,y)=c^{ste}, \quad \forall (x,y)\in X^1\times X^2.$$

Remarque 1.4.2. *Un jeu fini à deux joueurs à somme constante peut être ramené et traité comme un jeu à deux joueurs à somme nulle sans altérer les particularités du jeu.*

1.5 Concepts des stratégies

Soit P_i la partition d'information du joueur i, et EI_j ses éléments. On insère A^i_j l'ensemble des alternatives du joueur i s'il se trouve sur EI^i_j et $A^i=\bigcup\limits_{j=1} A^i_j$ alors :

1.5.1 Stratégie pure

Une stratégie pure s^i du joueur i est une application PI^i dans A^i tel que : $s^i : PI^i \rightarrow A^i$ Vérifiant

$$s^i(x)\in A^i_j, \forall x\in PI^i_j$$

. où :

PI^i : la partition d'information associée au joueur i est :

L'ensemble de toute les stratégies pure de joueur i notée $S^i=\{s^i, i=\overline{1,n}\}$.

1.5.2 Stratégie mixte

Une stratégie mixte $\alpha^i\in\Delta^i$ est une distribution de probabilité du joueur i sur l'ensemble S^i, vérifiant :

$$\alpha^i\in\Delta^i=\left\{\ \alpha^i=(\alpha^i_1,\alpha^i_2,\ldots,\alpha^i_{|S^i|})\in[0,1]^{|S^i|} : \sum_{j=1}^{|S^i|}\alpha^i_j=1\ \right\}.$$

1.5.3 Stratégie comportementale

Une stratégie de comportement γ^i du joueur i est l'application $\gamma^i : PI^i \to \Delta^i$, tel que :

$$\gamma^i(EI^i_j) \in \Delta^i_j, \forall EI^i_j \in PI^i$$

.

Exemple 1.5.1. *Considérons le jeu (1.1) :*

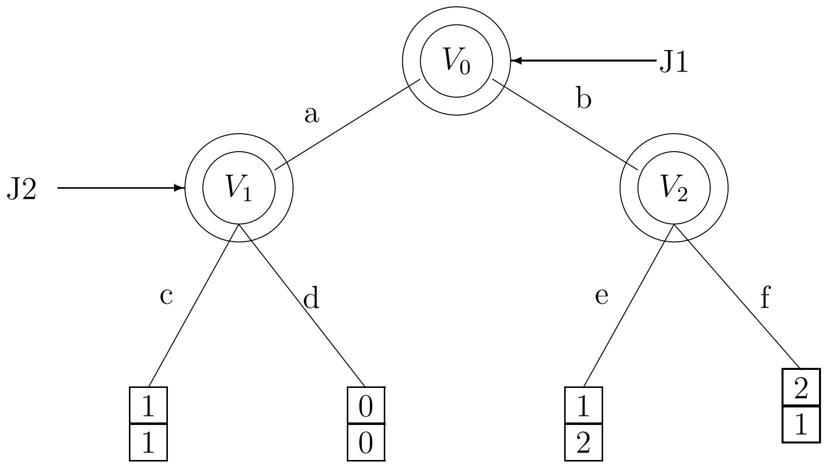

FIG. 1.1: Exemple d'un Jeu à information parfaite

L'ensemble de départ d'une stratégie du joueur i est PI^i.

L'ensemble d'arrivé d'une stratégie du joueur i est A^i.

Alors :

$PI^1 = \{\{V_0\}\}$, $A^1 = \{a, b\}$.

$PI^2 = \{\{V_1\}, \{V_2\}\}$, $A^2 = \{c, d, e, f\}$.

On détermine les stratégies pures, mixtes et de comportements de chacun des joueurs de ce jeu.

Stratégie pure

Pour le joueur 1 $s_1^1(\{V_0\}) = a$, $s_2^1(\{V_0\}) = b$.

L'ensemble de toute les stratégies pures de "joueur 1" est :

$$S^1 = \{s_1^1, s_2^1\}.$$

Pour le joueur 2

$$s_1^2(x) = \begin{cases} c, & si\ x = \{V_1\}\ ; \\ e, & si\ x = \{V_2\}. \end{cases}$$

$$s_2^2(x) = \begin{cases} d, & si\ x = \{V_1\}\ ; \\ f, & si\ x = \{V_2\}. \end{cases}$$

$$s_3^2(x) = \begin{cases} d, & si\ x = \{V_1\}\ ; \\ e, & si\ x = \{V_2\}. \end{cases}$$

$$s_4^2(x) = \begin{cases} c, & si\ x = \{V_1\}\ ; \\ f, & si\ x = \{V_2\}. \end{cases}$$

L'ensemble de toute les stratégies pures de "joueur 2" est :

$$S^2 = \{s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_4^2\}.$$

Stratégie mixte

Pour le joueur 1 :

Notons α_1 *la probabilité que "joueur 1" choisisse* s_1^1.

Notons α_1 *la probabilité que "joueur 1" choisisse* s_2^1.

Alors l'ensemble de la stratégie mixte de "joueur 1" est :

$$\Delta^1 = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2)^t \in [0,1]^2 : \sum_{j=1}^{2} \alpha_j = 1 \right\}.$$

Pour le joueur 2 :

Notons α_j *la probabilité que "joueur 2" choisisse* s_j^1.

Alors l'ensemble de la stratégie mixte de "joueur 2" est :

$$\Delta^2 = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^t \in [0,1]^4 : \sum_{j=1}^{4} \alpha_j = 1 \right\}.$$

Stratégie de comportement

Pour le joueur 1 :

$$\Delta_1^1 = \Delta^1 = \left\{ \sigma \in [0,1]^2 : \sum_{j=1}^{2} \sigma_j = 1 \right\}.$$

σ_1 *: est la probabilité que "joueur 1" choisisse l'action* a.

σ_2 *: est la probabilité que "joueur 1" choisisse l'action* b.

Alors l'ensemble des stratégies de comportement de "joueur 1" est :

$$\left\{ \gamma : PI^1 \to \Delta^1 : \gamma(\{V_0\}) \in \Delta_1^1 \right\}.$$

Pour le joueur 2 :

$$\Delta_1^2 = \left\{ \alpha \in [0,1]^2 : \sum_{j=1}^{2} \alpha_j = 1 \right\}.$$

α_1 *: est la probabilité que "joueur 2" choisisse l'action* c *quand il est sur* V_1.

α_2 *: est la probabilité que "joueur 2" choisisse l'action* d *quand il est sur* V_1.

$$\Delta_2^2 = \left\{ \beta \in [0,1]^2 : \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 1 \right\}.$$

β_1 *: est la probabilité que "joueur 2" choisisse l'action* e *quand il est sur* V_2.

β_2 *: est la probabilité que "joueur 2" choisisse l'action* f *quand il est sur* V_2.

Alors l'ensemble des stratégies de comportement de "joueur 2" est :

$$\left\{ \gamma^2 : PI^2 \to \Delta^2 : \gamma(\{V_1\}) \in \Delta_1^2 et \gamma(\{V_2\}) \in \Delta_2^2 \right\}.$$

1.6 Concepts de solution

On peut définir un concept de solution comme un ensemble de lois aboutissant à des équations mathématiques qui permettent de sélectionner parmi toutes les issues possibles, un sous-ensemble d'issues satisfaisant certaines propriétés jugées désirables, si l'on suppose que les agents possèdent certaines facultés de raisonnement ou de comportement (rationalité, prudence, connaissance, etc).

1.6.1 Stratégies de sécurité

Le concept de sécurité dans un jeu est basé sur le scénario le plus défavorable, où un joueur suppose que tous les autres joueurs choisissent leurs stratégies, en réponse à sa stratégie choisie, avec l'objectif d'atteindre une situation du jeu qui engendre la plus petite valeur de sa fonction de gain. La valeur de la fonction de gain dans une telle situation est appelée niveau de sécurité correspondant à la stratégie du joueur. La stratégie de sécurité pour un joueur est la stratégie qui lui engendre le `meilleur` niveau de sécurité.
Ainsi, deux notions fondamentales sont utilisées dans la définition de la stratégie de sécurité pour un joueur :

(a) La valeur du critère garantie, ou le niveau de sécurité.

(b) La sélection des stratégies qui engendrent le meilleur niveau de sécurité.

Définition 1.6.1 (Stratégie de garantie).
Une stratégie $\bar{x}^i \in X^i$ *est dite* stratégie de garantie *du joueur* $i \in \mathcal{N}$ *dans le jeu (1.12), si*

$$\inf_{x^{-i} \in X^{-i}} f^i(x^i, x^{-i}) \leq \inf_{x^{-i} \in X^{-i}} f^i(\bar{x}^i, x^{-i}), \quad \forall x^i \in X^i, \tag{1.15}$$

où $x^{-i} = (x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^N) \in X^{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X^j.$

La quantité $\underline{V}_i = \sup_{x^i \in X^i} \inf_{x^{-i} \in X^{-i}} f^i(x^i, x^{-i})$*, appelé* niveau de sécurité*, est le gain minimal garanti du joueur* $i \in \mathcal{N}$*.*

Définition 1.6.2 (Rationalité individuelle).
Une situation $\bar{x} \in X$ est dite individuellement rationnelle dans le jeu (1.12), si

$$f^i(\bar{x}^i, \bar{x}^{-i}) \geq \sup_{x^i \in X^i} \inf_{x^{-i} \in X^{-i}} f^i(x^i, x^{-i}) = \underline{V}_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \tag{1.16}$$

1.6.2 Équilibre de Nash

L'équilibre non coopératif, dit aussi équilibre de Nash, est basé sur le principe de rationalité individuelle. Il s'agit d'un état dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier sa stratégie si les autres joueurs maintiennent leurs stratégies d'équilibre Nash [1951].

Définition 1.6.3 (Équilibre de Nash).
Une situation $\bar{x} \in X$ est un équilibre de Nash du jeu (1.12), si pour tout $i \in \mathcal{N}$ et $x^i \in X^i$ on a :

$$f^i(\bar{x}) \geq f^i(x^i, \bar{x}^{-i}). \tag{1.17}$$

La relation (1.17) signifie qu'aucun joueur $i \in \mathcal{N}$ ne peut bénéficier d'une déviation unilatérale, et ce, quelle que soit la stratégie qu'il choisit dans son ensemble X^i.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des notions de base de la théorie des jeux classique. On a défini le jeu, on a donné quelques types du jeu, les classifications d'un jeu et on a présenté quelques concepts de solution.

Il est consacré aussi à la présentation des notions de la simulation. Définition, génération des nombres aléatoires et pseudo-aléatoires avec quelques méthodes permettant de les générer et génération d'échantillonnage suivant des différentes lois de probabilité.

Chapitre 2

Marchés Financiers : Généralités

Introduction

Depuis une vingtaine d'années, les marchés financiers ont évolué de manière spectaculaire. Le marché financier a stimulé par la déréglementation, le décloisonnement et la désintermédiation du système financier a connu un essor spectaculaire de la valeur des produits proposés aux épargnants et aux investisseurs.

Le marché financier est un lieu de financement à long terme, il se caractérise par une composition complexe et par des produits divers et ceci dans le but de s'adapter aux différents motifs de transactions et aux différents choix des acheteurs et vendeurs.

Le marché financier assure plusieurs fonctions, d'ailleurs, il s'agit d'un circuit de financement de l'économie, d'un instrument organisant la liquidité de l'épargne investie à long terme, d'un instrument permettant la cotation des actifs ou valeurs mobilières, un outil de développement de la structure de l'entreprise et un outil de gestion des risques.

Dans ce chapitre, on va traiter les caractéristiques générales d'un marché financier.

2.1 Qu'est-ce qu'un marché financier ?

Au cours des cinquante dernières années, les marchés financiers n'ont cessé de grossir, jusqu'à devenir de véritable poids lourds dans l'économie mondiale Béchu [2007].

Définition 2.1.1 (Marché Financier). *Le marché financier constitue un circuit de financement spécialisé : c'est un lieu de rencontre entre une offre et une demande des capitaux à long terme dont le support est une valeur mobilière.*

Lorsqu'on parle de marché financiers on pense en premier lieu à des organisations spécifiques, " les Bourses de valeurs ", qui est le marché le plus médiatisé. Où s'échangent les valeurs mobilières (actions et obligations). Ce marché comporte deux compartiments : le marché primaire, qui est le marché "du neuf", où sont émis les nouveaux titres, et le marché secondaire, celui de "l'occasion", où s'échangent les titres émis précédemment.

2.1.1 Marché primaire

Un marché (marché du neuf) est le marché des émissions des valeurs mobilières, le marché primaire met en présence d'une part les agents économiques disposant d'un excédent d'épargne et souhaitant le placer, et d'autre part les opérateurs qui ont des besoins de financement, et qui créent à ce titre des différentes valeurs mobilières. Il s'agit des titres de financement qui correspond dans le bilan de l'entreprise a son passif. Donc on distingue trois groupes, les capitaux propres (actions), les dettes ou bien les emprunts bancaires (obligations) et les options Champagnant [2018].

Définition 2.1.2 (Actions). *Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une entreprise et donnant à son porteur le droit de vote aux assemblées, le droit à l'information et aux bénéfices.*

Définition 2.1.3 (Obligation). *Une obligation est un titre financier qui matérialise l'engagement d'un emprunteur envers un préteur qui, en contrepartie, met des fonds à sa disposition.*

Définition 2.1.4 (Option). *Un option est un contrat d'achat ou de vente, qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une quantité définie d'un actif (action) à un prix d'exercice à une date fixée.*

2.1.2 Marché secondaire

Un marché secondaire est le marché sur lequel sont échangées des valeurs mobilières déjà émises (sur le marché primaire). Sur ce marché, les investisseurs ayant déjà acheté des titres doivent pouvoir liquider rapidement leurs positions, dans des conditions de sécurités optimales Lardic and Mignon [2006]. Le marché secondaire peut être décomposé en :

Bourses reconnues (cote de la bourse) C'est le marché sur lesquelles se négocient les titres inscrits à la cote. L'inscription à la cote de bourse permet aux sociétés d'accroître la liquidité pour leurs titres, leur degré de visibilité dans l'économie, leur prestige et leur notoriété.

Marché hors cote (hors bourse) C'est le marché sur lequel se négocient tous les titres non-inscrits à la cote d'une bourse.

Investisseurs

Les investisseurs s'agissent de toutes personnes physiques ou morales qui souhaitent acheter ou vendre des instruments financiers. On retrouve les trois catégories suivantes : les particuliers, les entreprises et les investisseurs institutionnels.

Emetteur

Ces émetteurs sont des demandeurs de capitaux qui font appel aux épargnants pour obtenir des fonds. Ils sont soumis à des règles strictes en matière d'information des investisseurs, d'animation de leurs titres ou de leurs procédures. De manière directe. Un émetteur, c'est-à-dire une société, un Etat ou un établissement financier représentant ou non ses clients, peut se présenter sur le marché pour emmètre soit des titres de capital, soit des titres monétaires ou obligataires, et les rachète parfois. Investisseurs, d'animation de leurs titres ou de leurs procédures.

Intermédiaires

Les intermédiaires financiers sont des personnes physiques ou morales qui interviennent sur le marché financier soit pour leur propre compte, soit pour le compte de leurs clients ?.

2.1.3 Marché réel (physique)

Un marché réel est le marché où se traitent les transactions sur les marchandises. Sur ce marché, l'acheteur et le vendeur entrent en négociation directe (voir figure 2.1).Ils se mettent d'accord sur les spécifications techniques du produit, la quantité, le prix, le lieu et la période de livraison de la marchandise. De cette négociation, il peut résulter un contrat à livraison immédiate, en fonction des termes négociés.

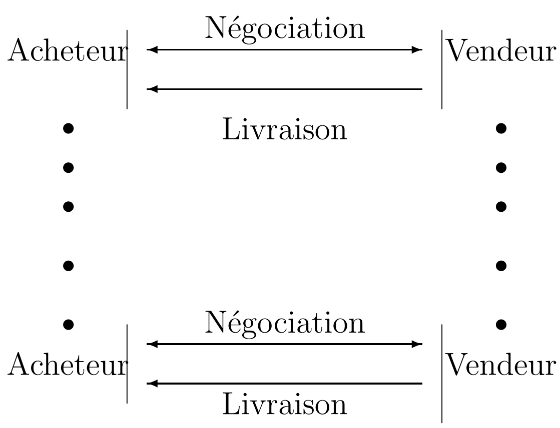

FIG. 2.1: Marché Physique

Un contrat à livraison déféré offre une grande flexibilité à l'acheteur et au vendeur, leur permettant d'organiser une transaction selon leurs besoins précis. Cependant un contrat à livraison déférée comporte un inconvénient potentiel qui est le risque de la contrepartie (l'acheteur et le vendeur) fasse défaut. En terme plus simple au moment de la livraison, l'acheteur où le vendeur peut ne pas avoir les moyens financiers d'honorer ses engagements, il tombe alors dans une situation appelée défaut, dans ce cas l'autre partie sera aussi pénalisée.

2.1.4 Marché à terme

Un marché à terme évolue en parallèle, et en complément à un marché physique qui lui sert des sous-jacent et de référence. Il peut être assimilé, dans un certain sens, aux compagnies d'assurance qui délivrent des engagements c-à-d un contrat en papier et non pas une marchandise physique Delande [1992].

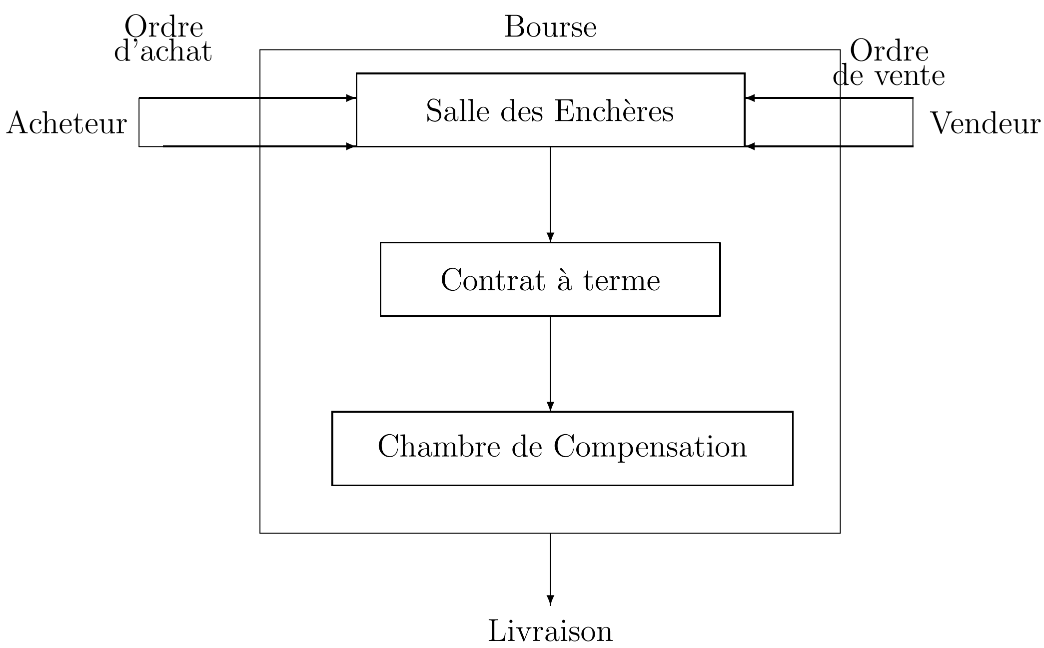

FIG. 2.2: Marché à terme

Dans ce cas les acheteurs envoient des ordres à la bourse pour acheter un ou plusieurs contrats à terme, d'autre part, les vendeurs envoient des ordres de vente de contrats à terme. S'il est possible de coupler un ordre d'achat avec un ordre de vente, alors un contrat à terme serai engendré. Ce dernier sera enregistré dans la chambre de compensation de la bourse. Sur le marché à terme, on trouve essentiellement deux catégories d'intervenants (traders) sont les hedgers et les spéculateurs.

Les hedgers

Les hedgers sont les traders ayant un intérêt dans la matière première (sous-jacente au contrat à terme) soit qu'ils désirent livrer ou prendre livraison. Leur objectif est de se couvrir contre des variations brutales des prix en utilisant le marché à terme Teweles and Jones [1999].

Les catégories hegers peut être subdivisée en deux sous-classes : les producteurs (les vendeurs) et les consommateurs (les acheteurs) de la matière première sous-jacente. Les producteurs cherchent à maximiser leurs prix de vent, alors que les consommateurs essayent de minimiser leurs prix d'achat.

Les spéculateurs

La seconde classe majeure d'investisseurs boursiers est celle des spéculateurs. Ces derniers n'ont aucun intérêt dans la matière première sous-jacente. Leur objectif principal est de tirer profits des variations des prix.

Un spéculateur tente d'acheter un contrat à terme lorsque son prix est bas, puis le revend lorsque le marché monte, ou inversement, le spéculateur vend le contrat à terme lorsque ce dernier a atteint son plus haut niveau de prix pour le racheter ultérieurement lorsqu'il aura perdu de la valeur.

2.2 Exemples réels de marchés financiers

Quand on parle de marchés financiers, on distingue trois marchés plus important sont : Euronext, qui est issu de la fusion des grandes places de marché européennes, le NYSE, le plus grand marché mondial et le Nasdaq.

2.2.1 Euronext, un marché dirigé par les ordres

Euronext est l'une des grandes bourses de valeurs mondiale, elle est le produit de la fusion des bourses de Paris, Amsterdam, Bruxelles, Lisbonne, Porto et du LIFFE (London International Financial Futures and options Exchange) qui a eu lieu entre 2000 et 2002. (Euronext. Paris est la place de marché française).

Euronext est un marché dirigé par les ordres, c'est à dire que les acteurs du marché confrontent directement leurs désirs de réaliser des échanges à travers la structure d'échange, sans passer par un intermédiaire.

Pour confronter leur souhait à ceux des autres acteurs, ils émettent un ordre composé d'une direction (acheter ou vendre), quelques fois d'un prix (l'ordre peut parfois être "à tout prix" ou "au prix du marché"), d'une durée de validité et d'une quantité.

Cet ordre peut également être assorti de mentions comme "tout ou rien", c'est à dire que la validité de l'ordre est conditionnée à la disponibilité des titres demandés ou à d'autres conditions portant sur le prix.

2.2.2 Nasdaq, un marché dirigé par les prix

Le Nasdaq est le second marché mondial le plus actif après le NYSE. Il était l'un des derniers marchés entièrement dirigé par les prix jusqu'en 2002 où il a été transformé en marché hybride comme le NYSE.

Contrairement à Euronext, qui est comme nous l'avons vu, un marché dirigé par les ordres, le Nasdaq (National Association of Securities Dealers Automated Quotations) est un marché dirigé par les prix.

Sur un marché dirigé par les prix, les traders ne se rencontrent pas directement au travers du marché mais doivent passer par un intermédiaire soit le teneur de marché ou market maker.

Remarque 2.2.1 (market marker). *Sur un marché dirigé par les prix, les teneurs de marché sont tenus d'afficher en permanence deux informations : un prix auquel ils sont prêts à acheter des titres pour une quantité fixée et un prix auquel ils sont prêts à vendre des titres pour une quantité fixée. Si un acteur du marché se porte acquéreur ou vendeur de titres aux prix affichés, le market maker est dans l'obligation d'exécuter son ordre.*

Le risque principal pour un market maker est de se retrouver dans une position dont il ne pourra pas se défaire. Si un trader lui revend par exemple une grande quantité des titres au prix qu'il affiche, il est tenu de les acheter et se retrouve donc dans une position délicate : il faut, pour rétablir la balance, qu'un autre trader lui achète autant de titres.

2.2.3 NYSE, un marché hybride

Nous avons opposé précédemment les marchés dirigés par les prix aux marchés dirigés par les ordres. Cependant, ces deux types de marché présentent des inconvénients.

Les marchés dirigés par les prix manquent de transparence et amènent une fragmentation du flux des ordres, alors que les marchés dirigés par les ordres ne permettent pas d'obtenir une liquidité suffisante pour les ordres de grande taille.

Les marchés hybrides ont été développés pour pallier ces deux inconvénients. Sur ces marchés, les ordres de petite taille (concernant des quantités faibles) sont dirigés automatiquement vers un carnet d'ordres en vue d'une exécution automatique (comme sur Euronext) tandis que les ordres de grande taille sont dirigés vers un courtier humain qui se charge de trouver et de produire de la liquidité, comme sur un marché dirigé par les prix.

New-York Stock Exchange une des plus grandes bourses mondiale, est la plus active de liquidité.

2.3 Volatilité

Avant de réaliser des placements financiers, il est nécessaire de bien comprendre que le cours des actifs financiers varie constamment et peut, par conséquent, évoluer à la hausse comme à la baisse. Il y'a donc un risque sur les investissements financiers et sur le rendement. Ce risque est mesuré et quantifié grâce à la volatilité. Voyons maintenant plus en détail la notion de volatilité :

Définition 2.3.1 (Volatilité). *La volatilité représente la variation de la valeur d'un produit financier et traduit, par conséquent, le risque qu'un actif financier perd de la valeur (en cas de baisse des cours). La volatilité est dite "forte" lorsque le cours de l'actif financier fluctue fortement. Inversement, la volatilité est dite "faible" lorsque le cours de l'actif financier est relativement stable.*

Parmi les formes de volatilité d'un titre on peut distinguer la volatilité historique inconditionnelle et la volatilité implicite.

Définition 2.3.2 (Volatilité historique inconditionnelle). *La volatilité historique inconditionnelle est une mesure de la volatilité d'un titre qui prend en considération les mouvements de prix que ce titre a connu sur une période de temps bien déterminée. La limite de cette méthode c'est qu'il est difficile de se baser sur des données historiques pour prédire les variations futures.*

Définition 2.3.3 (Volatilité implicite). *La volatilité implicite reliée essentiellement au domaine de l'évaluation des options, elle constitue une moyenne de volatilité du prix de l'actif support à différents moments de la vie de l'option. Dans cette optique, la volatilité du rendement futur de l'actif support à l'option est mesurée par l'écart type*

2.3.1 Calcul de la volatilité

La volatilité, exprimée en pourcentage, permet de mesurer le risque et l'incertitude liés au placement financier. Pour déterminer la volatilité d'un actif financier, il possible de se baser sur les performances passées et l'évolution des cours.

$$\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j}^{n}(c_j - \overline{c})^2},$$

où $\overline{c}$ et c_j sont respectivement la moyenne des cours passés et le cours observé sur le nombre de périodes n.

2.4 Comment fonctionnent les marchés financiers ?

Un marché est essentiellement conçu pour échanger des marchandises à des prix équitables sur les marchés financiers, les biens sont par exemple des actions d'un actif. Une des conditions pour obtenir des prix équitables est que plusieurs personnes souhaitent vendre un bien donné en même temps que plusieurs autres souhaitent acheter le même bien.

En fait, les agents (vendeurs ou acheteurs) placent des enchères ou des ordres sur un livre, appelé carnet d'ordres Damien [2000].

Les agents sont libres de modifier leurs commandes à tout moment. Chaque fois que des vendeurs et des acheteurs s'accordent sur un prix, une quantité donnée d'actions appelé volume est échangé à ce prix.

2.4.1 Prévisibles

Un problème majeur concernant les marchés financiers est leur prévisibilité. En effet, si les marchés financiers sont prévisibles, comment peuvent-ils rester prévisibles, tant de personnes intelligentes tentent de gagner de l'argent en prévoyant les fluctuations de prix futures ?

À l'inverse, si les marchés financiers ne sont pas prévisibles, comment tant de personnes peuvent-elles gagner de l'argent ?

L'histoire a commencé avec Bachelier dans les années 1900, pour lui, les cours des actions suivent une marche au hasard, les marchés financiers sont donc des jeux à somme nulle, c'est-à-dire que le gain d'un spéculateur est nul [6]. Plus tard, cette théorie a été développée et est connue sous le nom d'Hypothèse de marché efficace (EMH) [7]

Définition 2.4.1 (Marché efficace (efficient)). *Un marché est efficace si les prix dans celui-ci constituent des signaux fiables pour ses acteurs pour prendre leurs décisions (d'achat, de vente, ou de maintien)*

Un marché est efficace si trois conditions sont remplies :

- Tous les agents sont rationnels et maximisent leur gain. Ils savent également que tous les autres agents sont rationnels et gagnent au maximum. Cette condition est très courante en économie. Si cela est vrai, tous les outils et concepts sophistiqués de la théorie des jeux peuvent être appliqués. Cependant, il est de plus en plus discuté (voir Simon [1997]).
- L'information est facilement et immédiatement disponible. Le terme "information" n'est pas défini précisément, il existe de nombreux types d'informations.
- Il n'y a pas de coûts de transaction.

De sorte que l'EMH se trouve souvent sous trois formes :

Faible Toute les informations publiques sur les prix et les volumes passés est reflétée sur le prix actuel à tout moment. est souvent considérée comme vraie par de nombreux économiste Zhang [1999].

Intermédiaire Toutes les informations publiques de toute nature sont incluses dans le prix à tout moment. Cette forme est en discussion entre économistes et praticiens.

Fort Toutes sortes d'informations, y compris les informations secrètes, sont pleinement respectées sur le prix à tout moment. Cette forme est trop forte et incorrecte ce n'est plus très bien défini (voir Zhang [1999]).

2.4.2 Fluctuations

Les fluctuations des prix constituent une autre quantité très importante sur les marchés financiers.

On sait que les fluctuations sont regroupées dans le temps, c'est-à-dire que si un cours boursier a de grandes fluctuations à un moment donné, il est très probable que ces fluctuations importantes dureront un certain temps avant de diminuer.

Les fluctuations sont des synonymes de risque pour les investisseurs, car elles sont liées à l'incertitude d'un prix.

2.4.3 Rationalité et Induction

L'hypothèse la plus importante de l'EMH est que tous les agents maximisent le gain rationnel. Cela suppose qu'ils aient accès à toutes les informations dont ils ont besoin pour déduire quelle est la meilleure décision à prendre.

Premièrement, l'accès instantané à toutes les informations précieuses peut ne pas être obtenu dans la plupart des cas, même à l'aide d'ordinateurs, ce qui oblige souvent à traiter des informations incertaines.

Néanmoins, supposons que cette information ne soit pas un problème. Le problème majeur est l'hypothèse de rationalité et de déduction. En pratique, l'homme ne peut pas gérer trop d'informations (complètes ou non) il y a une rationalité limitée Simon [1997].

Supposons néanmoins qu'une personne ne dispose que d'un don pour déduction. Il ne peut jamais prendre de décision rationnelle, car les autres personnes ne se comportent pas de manière rationnelle.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par représenter la notion de marché financiers. Nous avons vu qu'un marché est un ensemble des règles permettant à des agents économiques de confronter leurs désirs d'investissement. Nous avons ensuite montré au travers de trois exemples de marchés financiers, la forme que ces règles peuvent prendre dans la réalité. Cette présentation nous a permis de comprendre leur fonctionnement.

Chapitre 3

Jeux de Minorité

Introduction

El Farol est un bar situé dans la ville de Sante Fe au Nouveau Mexique où les gens se rendent tous les jeudis pour prendre un verre et passer un moment agréable. 100 personnes décident indépendamment d'aller au bar ou non. Toutefois, si le bar compte plus de 60 personnes, il est encombré et donc peu agréable. Les personnes décideraient indépendamment d'aller au bar ou non, sans interaction les uns avec les autres. La seule information dont ils disposent est la présence des visiteurs au bar au cours des M dernières semaines. Sur la base de ces informations, qui ne sont pas des informations complètes sur l'environnement et donc une rationalité limitée, ils décideraient si le bar sera agréable ou encombré. Le problème posé se caractérise par le fait que la rationalité des personnes est limitée et que les gagnants doivent se trouver dans la minorité.

3.1 Jeu de Minorité

L'origine des jeux de minorité se situe dans le problème du Bar d'El Farol posé par Arthur [1994]. Cependant, c'est à Challet and Zhang [1997] que l'on doit véritablement les premières applications des jeux de minorité.

3.1.1 Description

Considérons $N = 2K + 1$, joueurs dotés d'une rationalité limité qui doivent prendre à plusieurs reprises une décision binaire. Nous représentons cette hypothèse en supposant que chaque agent $i \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$, peut effectuer à l'instant t, l'action $a_i(t) \in \{+1, -1\}$. A chaque étape t, les joueurs qui ont pris la décision de la minorité l'emportent. Le jeu constituant est répété plusieurs fois, et chaque agent utilise un ensemble de stratégies pour décider de son prochain mouvement et renforce les stratégies qui auraient permis de prédire le groupe gagnant. Le jeu constituant qui est répété de période en période, pour construire le jeu de minorité est défini de la manière suivante :

Définition 3.1.1 (Jeu constituant). *Le jeu constituant un jeu de minorité à N joueurs, qui se déroule sur T étapes est donné par :*

$$< \mathcal{N}, S_i, g_i >_{i \in \mathcal{N}}, \tag{3.1}$$

où

- $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ *représente l'ensemble des joueurs.*
- S_i *est l'ensemble des stratégies du joueur $i \in \mathcal{N}$.*
- g_i *la fonction de gain du joueur $i \in \mathcal{N}$.*

On définit la présence des N joueurs comme étant le mouvement global de l'ensemble des joueurs à l'instant t, chacun d'eux prenant une décision $a_i(t) \in \{-1, +1\}$.

Définition 3.1.2. *La présence $A(t)$ est la somme des actions de tous les joueurs à l'étape t, définie par :*

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t). \tag{3.2}$$

Le gain du joueur i à l'étape t est donné par :

$$g_i(t) = \begin{cases} a_i(t), & si \ \mathrm{A(t)} < 0\,; \\ -a_i(t), & si \ \mathrm{A(t)} > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Rappelons que l'équilibre de Nash défini précédemment pour un jeu sous forme normale, prend la forme suivante dans le contexte des jeux de minorité.

Définition 3.1.3. *Un profil d'actions* $(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{2K+1}(t))$ *est un équilibre de Nash dans le jeu (3.1), si l'égalité suivante est vérifiée*

$$|A(t)| = 1 \tag{3.4}$$

3.1.2 Histoire du Jeu et Stratégies

Les stratégies peuvent être visualisées sous la forme de tables où chaque table contient une colonne "histoire" et une colonne "prédiction". Chaque ligne de la colonne histoire est une chaîne de M bits représentant l'historique des M actions gagnantes des étapes précédentes, également appelée information. L'histoire évolue avec le temps et est généralement désignée par $\mu(t)$. Pour chacune des 2^M chaînes possibles $\mu(t)$ d'une table, est attribuée l'action $a_{i,s_j(t)}^{\mu(t)}$, que l'agent i prend, s'il choisit la stratégie s_j à l'étape t.

Exemple 3.1.1. *Un exemple d'une stratégie avec* $M = 2$ *est illustrée dans la table 3.1.*

Histoire	Prédiction
-1 -1	1
-1 1	-1
1 -1	1
1 1	-1

TAB. 3.1: Exemple d'une stratégie avec $M = 2$

Comme le montre la stratégie de la table 3.1, un historique "1 -1" correspond au cas où les deux dernières actions gagnantes sont "1" et "-1", et la prédiction correspondante au choix gagnant pour la prochaine étape est : "1".

Chaque stratégie peut être représentée par un vecteur $\vec{a}_{i,s}$, de dimension P, qui enregistrent les $P = 2^M$ prédictions, où toutes les composantes sont "-1" ou "1". Dans ce cas, l'espace de toutes stratégies possible sera de cardinalité 2^{2^M}. L'espace des stratégies de l'exemple 3.1.1, est donné dans la table suivante : Avant le début du jeu, chaque agent tire S stratégies

Histoire	Espace des Stratégies															
-1 -1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1
-1 1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
1 -1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1 1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1

TAB. 3.2: Espace des stratégies pour $M = 2$

de l'espace total des stratégies qui l'aideront à prendre des décisions tout au long du jeu. La table 3.3 est un exemple d'un sous ensemble de 3 stratégies choisies par l'agent i, dans l'exemple 3.1.1.

μ	$s_{i,1}$	$s_{i,2}$	$s_{i,3}$
-1 -1	1	1	-1
-1 1	1	-1	1
1 -1	1	1	-1
1 1	-1	1	1

TAB. 3.3: Ex. Sous ensemble de stratégies $S = \{s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3}\}$ choisies par un agent i

Supposons que l'information publique disponible pour les agents sur les 8 stratégies gagnantes des 8 dernières semaines est :

-1	1	-1	-1	1	1	1	-1

TAB. 3.4: Exemple d'une information donner commun

Dans ce cas, pour une mémoire $M = 2$, ce qui signifie que les agents ne prennent en compte que les deux dernières stratégies gagnantes, l'information μ sera les deux dernières cases du tableau 3.4 (colorées en bleu), c'est-à-dire, $\mu(t) = (1, -1)$.

3.1.3 Prédiction des stratégies

Face à une histoire $\mu(t)$ du jeu, chaque agent doit choisir une action à utiliser dans la période suivante, et des points sont attribués aux stratégies qui donnent des prévisions correctes. Dans l'exemple 3.1.1, en supposant qu'un joueur i ait choisit la stratégie $s_{i,2} \in S$, de la table 3.3. La réponse du joueur i face à l'histoire $\mu = (1, -1)$ est la stratégie située l'intersection de la deuxième colonne et de la troisième ligne de la table 3.5. L'action prédite du joueur i est ainsi $a^{\mu(t)}_{i,s_{i,2}(t)} = 1$.

Histoire	Stratégies															
-1 -1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
-1 1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
1 -1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1 1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1

TAB. 3.5: Prédiction d'une stratégie

3.1.4 Mise à jour des gains virtuels des stratégies

Chaque agent conserve un gain virtuel accumulé $U_{i,s}(t)$ pour chaque stratégie, qui reflète les performances passées de ce choix stratégique. Le gain virtuel de chaque stratégie est mis à jour après chaque période, selon que la stratégie ait été utilisée ou non. Lorsqu'une stratégie aurait donné une prévision correcte, son gain virtuel est augmenté du gain que l'agent aurait gagné, sinon elle est diminuée de la même quantité.

Ces gains virtuels prennent la valeur zéro au début du jeu. À chaque étape, les agents prennent chacun une décision en fonction de la meilleure stratégie.

Définition 3.1.4. *La meilleure stratégie à l'étape t, du joueur i, notée $s_i(t)$, est la stratégie* *dont le gain virtuel est le plus élevé.*

$$s_i(t) \in \arg\max_s U_{i,s(t)} \tag{3.5}$$

Les agents qui prennent les décisions gagnantes sont également récompensés par des points, que l'on appelle les gains réels des agents (à distinguer des gains virtuels des stratégies).

Définition 3.1.5. *La prédiction de la stratégie s de l'agent i sous l'information $\mu(t)$ à l'étape t est donnée par*

$$a_i(t) = a^{\mu(t)}_{i,s_i(t)}, \tag{3.6}$$

où $s_i(t)$ est la meilleure stratégie de l'agent i à l'étape t, et $a^{\mu(t)}_{i,s_i(t)}$ est l'action réelle de l'agent i.

En vertu de la relation (3.6), la présence $A(t)$ à l'étape t, sous l'information $\mu(t)$ est :

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N} a^{\mu(t)}_{i,s_i(t)}. \tag{3.7}$$

Le gain virtuel du joueur i pour la stratégie $s_i \in S_i$ à l'étape t est mis à jour selon la règle de la minorité suivante :

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a^{\mu(t)}_{i,s_i(t)} A^{\mu(t)}(t). \tag{3.8}$$

Pour illustrer la mise à jour des gains virtuels des stratégies, nous allons considérer $N = 3$ agents dans l'exemple 3.1.1, ayant chacun 2 stratégies. On note S_i, $i = 1, \ldots, 3$, l'ensemble des stratégies de l'agent i. Soient les ensembles de stratégies de la table 3.6, tirés aléatoirement au début du jeu.

Supposons que les agents 1, 2 et 3 ont pris aléatoirement une stratégie chacun de leurs ensembles de stratégies. Soient $s_{1,1}$, $s_{2,1}$ et $s_{3,1}$ les stratégies prises respectivement par les agents 1, 2 et 3. Sous l'information $\mu(t) = (1, -1)$, leurs actions prédites seront respectivement $a^{\mu}_{1,s_{1,1}} = 1$, $a^{\mu}_{2,s_{2,1}} = -1$ et $a^{\mu}_{3,s_{3,1}} = 1$. La stratégie gagnante est ainsi $a^{\mu}_{2,s_{2,1}} = -1$, et par conséquent, la présence $A^{\mu}(t) = +1$. Le gain virtuel de la stratégie $s_{2,1}$

μ	$s_{1,1}$	$s_{1,2}$
-1 -1	1	1
-1 1	1	-1
1 -1	1	1
1 1	-1	1

μ	$s_{2,1}$	$s_{2,2}$
-1 -1	-1	1
-1 1	1	1
1 -1	-1	-1
1 1	-1	1

μ	$s_{3,1}$	$s_{3,2}$
-1 -1	-1	-1
-1 1	-1	-1
1 -1	1	-1
1 1	1	1

TAB. 3.6: Stratégies de l'agent 1 Stratégies de l'agent 2 Stratégies de l'agent 3

sera alors déterminé par :

$$\begin{aligned} U_{2,s_{2,1}}(t+1) &= U_{2,s_{2,1}}(t) - a^{\mu(t)}_{2,s_{2,1}(t)} A^{\mu}(t) \\ &= 0 - (-1)(+1) = 1. \end{aligned}$$

Les gains virtuels des stratégies perdantes $s_{1,1}$ et $s_{3,1}$ des agents 1 et 3 respectivement sont :

$$\begin{aligned} U_{1,s_{1,1}}(t+1) &= U_{1,s_{1,1}}(t) - a^{\mu(t)}_{1,s_{1,1}(t)} A^{\mu}(t) \\ &= 0 - (1)(1) = -1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_{3,s_{3,1}}(t+1) &= U_{3,s_{3,1}}(t) - a^{\mu(t)}_{3,s_{3,1}(t)} A^{\mu}(t) \\ &= 0 - (1)(1) = -1. \end{aligned}$$

3.2 Schèma d'algorithme

Etape 1

1. Fixer le nombre de joueurs $N = 2k + 1$, k un nombre entier et l'horizon T.
2. Chaque agent $i \in \{1, \ldots, \text{N}\}$ prend à l'étape t une action $a_i(t) \in \{-1, +1\}$.
3. Calculer la presence $A(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)$.
4. Calculer le gain $g_i(t)$ de chaque joueur selon la formule

$$g_i(t) = \begin{cases} a_i(t), & si \text{ A(t)} < 0\,; \\ -a_i(t), & si \text{ A(t)} > 0\ . \end{cases}$$

5. Determiner les stratégies gagnantes selon qu'elle prédit correctement ou non le choix de la minorité.

Etape 2

1. Conclure l'information $\mu(t)$.
2. Calculer les $P = 2^M$ histoires et les $S_P = 2^P$ stratégies possibles.
3. Chaque joueur choisit aléatoirement k stratégies parmi les S_P stratégies.
4. Initialiser le gain virtuel $U_{i,s}$ de chaque stratégie à zéro.

Etape 3

1. Chaque agent i, choisit aléatoirement une stratégie de son ensemble S_i, selon la définition 3.5.
2. Déterminer la prédiction $a_{i,s_i(t)}^{\mu(t)}$, pour chaque agent i, (voir la section 3.1.3).
3. Indiquer la stratégie gagnante $a_{s_{i,j}(t)}^{\mu(t)}$ et la présence $A(t)$.
4. Mettre à jour μ.
5. Mettre à jour les gains virtuels des stratégies selon la règle de la minorité 3.8.

Etape 4

1. Si le nombre d'itérations T est atteint, alors arrêter l'algorithme, sinon aller à l'étape 3.

Exemple 3.2.1. *L'exemple suivant est une illustration d'une itération du déroulement du jeu pour le cas où $N = 5$ agents, sur un horizon de 5 semaines. L'histoire du jeu est illustré dans la table 3.7.*

Agent i	Semaine 1	Semaine 2	Semaine 3	Semaine 4	Semaine 5
1	-1	1	-1	-1	-1
2	-1	1	1	-1	-1
3	1	-1	-1	1	1
4	-1	-1	-1	1	1
5	1	-1	1	-1	1
A(t)	-1	-1	-1	-1	1
H-G	1	1	1	1	-1

TAB. 3.7: Exemple d'une histoire d'un jeu pour $N = 5$ agents, pendant 5 semaines

La dernière ligne indique les différentes valeurs de $H - G = \{1, 1, 1, 1, -1\}$*, qui représente les 5 dernières stratégies gagnantes. Admettons que les agents ne se souviennent que des* $M = 2$ *stratégies récentes. Dans ce cas,* $\mu = (1, -1)$*, les* $P = 2^M = 4$ *histoires et les* $S = 2^P = 2^{2^M} = 16$ *stratégies possibles sont résumées dans la table 3.8.*

Histoire	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16
1 1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
-1 1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1 -1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
-1 -1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 3.8: Histoire et stratégies possibles pour $M = 2$.

Supposons que chaque agent choisit de façon aléatoire $k = 2$ *stratégies parmi les 16 stratégies possibles. La table suivante 3.9, représente les 2 stratégies choisies par chacun des* $N = 5$ *agent. Ensuite, chacun d'eux choisira à chaque étape* t*, une stratégie parmi les stratégies qui lui sont disponibles.*

Agents	Stratégies choisies
1	s_{11}, s_6
2	s_6 , s_4
3	s_{15} , s_5
4	s_3 , s_6
5	s_{12} , s_{11}

TAB. 3.9: Génération aléatoire de 2 stratégies pour chaque agent.

Itération 1

Les stratégies données dans la table 3.10, représentent le choix aléatoire des 5 agents au début de jeu.

Agent	1	2	3	4	5
Stratégie Choisie	s_6	s_6	s_{15}	s_6	s_{12}

TAB. 3.10: L'agent 1 a choisi la stratégie s_6, ..., l'agent 5 a choisi la stratégie s_{12}.

Les prédictions des stratégies pour l'étape $t+1$, suivant la définition 3.1.5, sont dictées pour chaque agent comme étant l'intersection de la ligne correspondante à $\mu = (1, -1)$ ($3^{\text{ème}}$ ligne) de la table 3.8 et les colonnes correspondantes aux stratégies s_6, s_6, s_{15}, s_6 et s_{12}. Les stratégies prédites pour l'étape $t+1$, sont illustrés dans la table 3.11.

Stratégies	s_6	s_6	s_{15}	s_6	s_{12}	H-G	A(t)
Prédiction	1	1	1	1	-1	-1	3

TAB. 3.11: Prédiction des stratégies pour l'étape $t+1$.

A la fin de cette étape, les agents procèdent à la mise à jour des gains virtuels de leurs stratégies selon la règle 3.8. La stratégie ayant donné une prévision correcte est récompen-

sée par un point, dans le cas contraire, elle se voit diminuée de cette même quantité. Les gains virtuels de chaque stratégie pour chaque agent sont résumés dans la table 3.12.

Agent i	1		2		3		4		5	
Stratégies	s_{11}	s_6	s_6	s_4	s_{15}	s_5	s_3	s_6	s_{12}	s_{11}
Gain	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	1	0

TAB. 3.12: Les gains virtuels des stratégies

Remarque 3.2.1. *A la première étape, le choix d'une stratégie par chacun des agents s'est fait de façon aléatoire vu que les gains virtuels sont initialisés à zéro au début du jeu. Dans cette deuxième étape, le choix se fera selon la règle 3.5, qui stipule que l'agent i, prendra comme stratégie, celle qui possède le gain virtuel le plus important.*

Itération 2

Dans cette étape, les meilleures stratégies pour chaque agent i sont données dans la table 3.13 :

Agent	1	2	3	4	5
Stratégie Choisie	s_{11}	s_4	s_5	s_3	s_{12}

TAB. 3.13: Les meilleures stratégies.

Les deux dernières stratégies gagnantes seront alors le composé de la dernière composante de $\mu = (1, -1)$ et de la stratégie gagnante à l'étape précédente, c'est-à-dire -1. Dans ce cas, on aura $\mu = (-1, -1)$. Le jeu est poursuivi conformément à l'étape précédente, jusqu'à une étape T, fixée au début du jeu.

3.3 Expérimentation numérique

Nous expérimentons ce modèle sur un marché financier, où les traders sont les joueurs, qui doivent prendre à l'instant t, une décision binaire ≪acheter≫ ou ≪vendre≫ une *action*. Nous représentons cette hypothèse en supposant que chaque agent $i \in \{1, \ldots, N\}$, peut effectuer à l'instant t, l'action $a_i(t)$, définie comme suit :

$$a_i(t) = \begin{cases} +1, & \text{si l'agent } i \text{ décide d'acheter ;} \\ -1, & \text{si l'agent } i \text{ décide de vendre.} \end{cases} \tag{3.9}$$

L'action gagnante est de +1 (acheter) si la plupart des agents ont choisi -1 (vendre) et inversement. Les joueurs se font ainsi concurrence à chaque étape du jeu pour tenter d'être dans la minorité, et tous les gagnants sont récompensés.

En effet, si la présence est positive, le prix augmente (loi de l'offre et de la demande) et ceux qui ont décidé de vendre, c'est-à-dire les traders qui ont opté pour l'action $a_i(t) = -1$, peuvent être récompensés, car ils obtiennent un meilleur prix. Contrairement aux acheteurs, $a_i(t) = +1$, qui subissent une perte, car ils ont dépensé plus d'argent. Inversement, la participation négative récompense les acheteurs et punit les vendeurs.

3.3.1 Simulation

Pour comprendre le fonctionnement d'un marché financier, d'analyser et de prévoir le comportement traders, nous avons implémenté en Langage Matlab un simulateur qui prend en entrée les données relatives au marché pour simuler le comportement des traders.

Nous avons simulé le modèle avec différents paramètres et nous commencerons par la figure suivante qui décrit le comportement de $N = 301$ traders ayant une mémoire $M = 2$. Chaque trader i, à chaque itération choisit une stratégie de façon aléatoire de son ensemble de stratégies S_i.

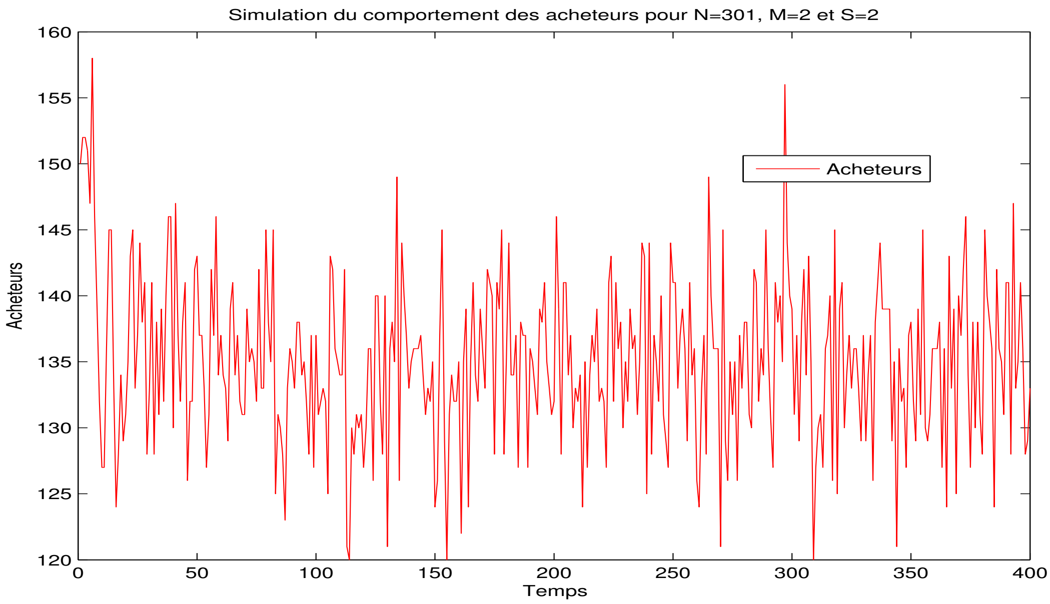

FIG. 3.1: *Evolution de la présence des acheteurs pour* $N = 301$*,* $M = 2$ *et* $S = 2$ *et les stratégies sont générées de façon aléatoire.*

La première remarque que nous pouvons faire en simulant le comportement des traders est l'efficacité du modèle qui réside dans le fait que même avec une rationalité limitée (M=2), sans coordination entre les agents, la présence des acheteurs évolue vers la valeur optimale (autour de 135.08), comme le montre la figure 3.1.

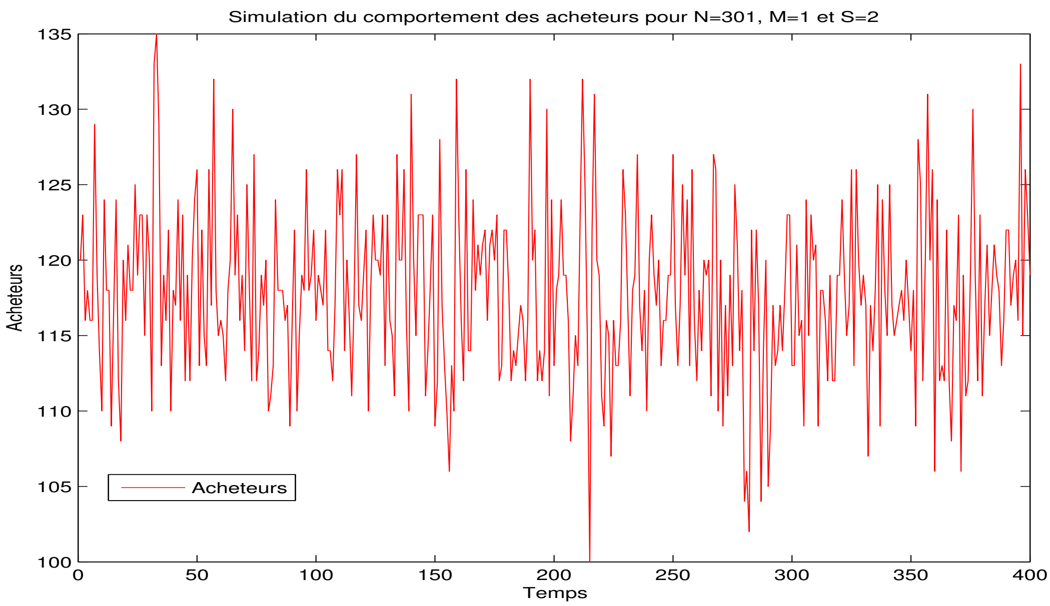

FIG. 3.2: *Evolution de la présence des acheteurs pour* $N = 301$*,* $M = 1$ *et* $S = 2$ *et les stratégies sont générées de façon aléatoire.*

La situation devient moins prévisible quand les agents ne se souviennent que de la dernière stratégie gagnante, comme le montre la figure 3.2. Comparée au scénario précédent le nombre moyen d'acheteurs est autour de 117,74.

Analyse de la volatilité

Bien que presque n'importe quel ensemble de stratégies permette d'atteindre l'équilibre, les fluctuations nécessitent une modélisation plus élaborée. Différents paramètres, tels que la longueur M de la mémoire, de la stratégie du joueur et le nombre de stratégies accessibles au joueur, sont utilisés pour caractériser σ^2. La figure suivante montre une simulation d'un marché pour $N = 301$, $M = 2$ et $S = 2$.

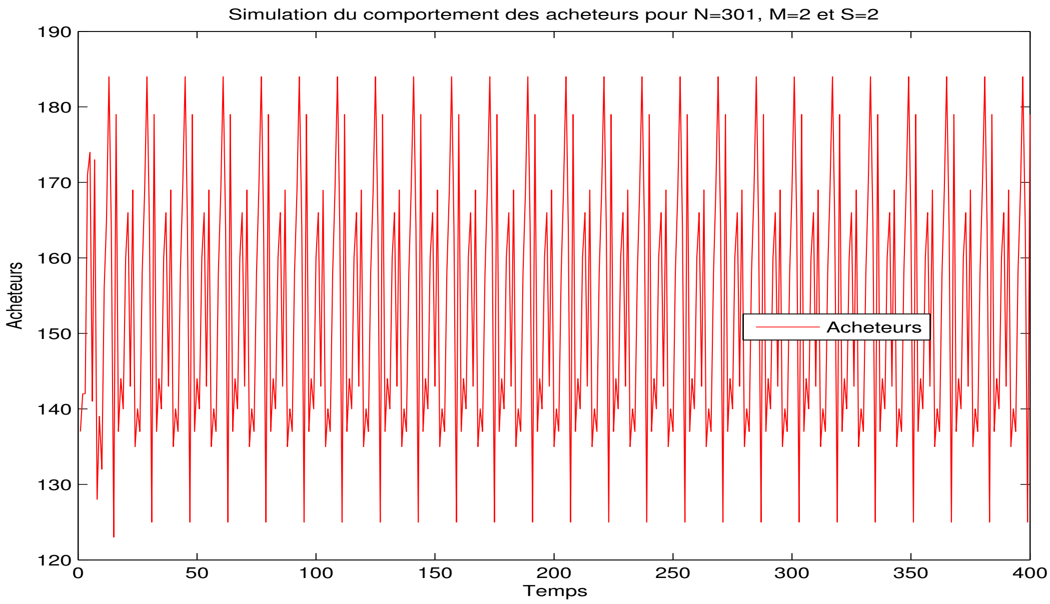

FIG. 3.3: Evolution de la présence des acheteurs pour $N = 301$, $M = 2$ et $S = 2$.

Nous pouvons remarquer au travers de cette simulation de fortes perturbations dans la présence des acheteurs à la hausse comme à la baisse, avec une volatilité $\sigma^2 = 294.54$ et le nombre moyen d'acheteurs est autour de 153.12.

Un trader avec une longue mémoire pourrait mieux prédire le résultat s'il était lancé contre un groupe de tels traders. Comparée à la courbe de la figure 3.3, la première est moins *prévisible* et les amplitudes de fluctuations varient beaucoup entre les deux situations. La figure suivante 3.4, illustre cette situation pour le cas où la mémoire est de longueur $M = 4$. Le nombre moyen d'acheteurs est 150.03, pour une variance $\sigma^2 = 67.43$.

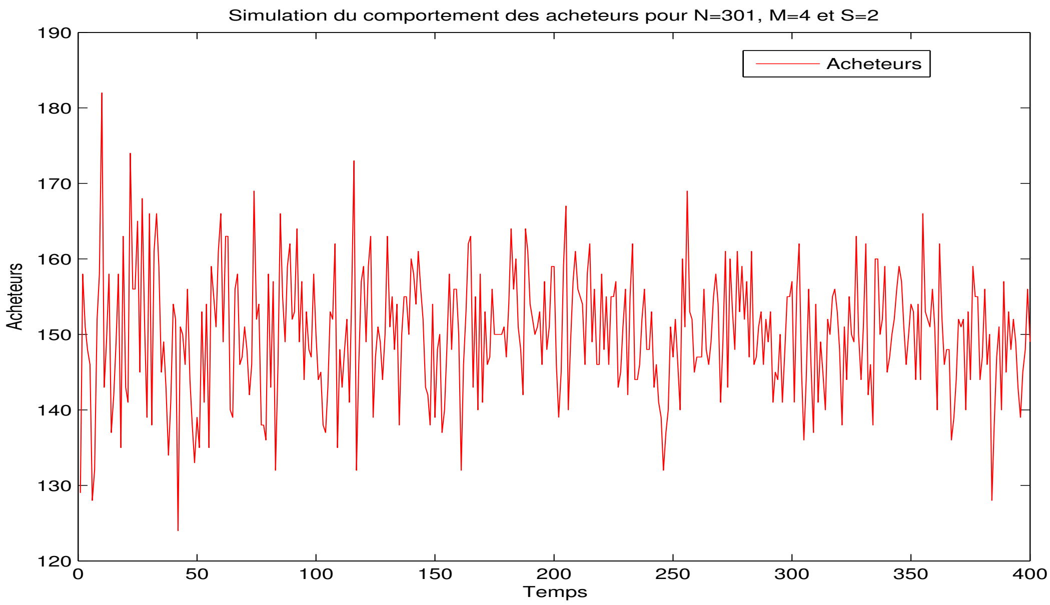

FIG. 3.4: Evolution de la présence des acheteurs pour $N = 301$, $M = 4$ et $S = 2$.

Dans le cas où chaque trader possède $S = 4$ stratégies, nous obtenons la figure suivante :

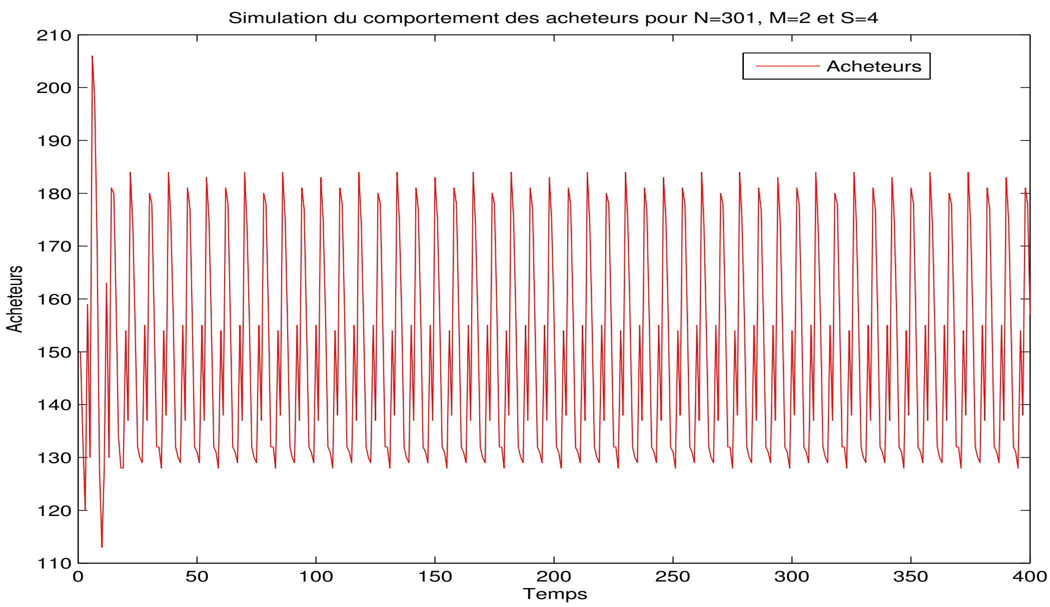

FIG. 3.5: Evolution de la présence des acheteurs pour $N = 301$, $M = 2$ et $S = 4$.

La figure (3.5) montre que si l'on augmente la taille des ensembles de stratégies à $S = 4$, pour $M = 2$ les perturbations sont peu réduites $\sigma^2 = 403.14$ par rapport au cas où $M = 2$ et $S = 2$. Ceci s'explique par les différences plus importantes qui sont attribuées aux gains virtuels des stratégies. Cependant, si $S = 4$ et $M = 4$, on obtient un nombre moyen d'acheteurs similaire au cas précédent (figure 3.6), avec une diminution de la volatilité $\sigma^2 = 150.19$.

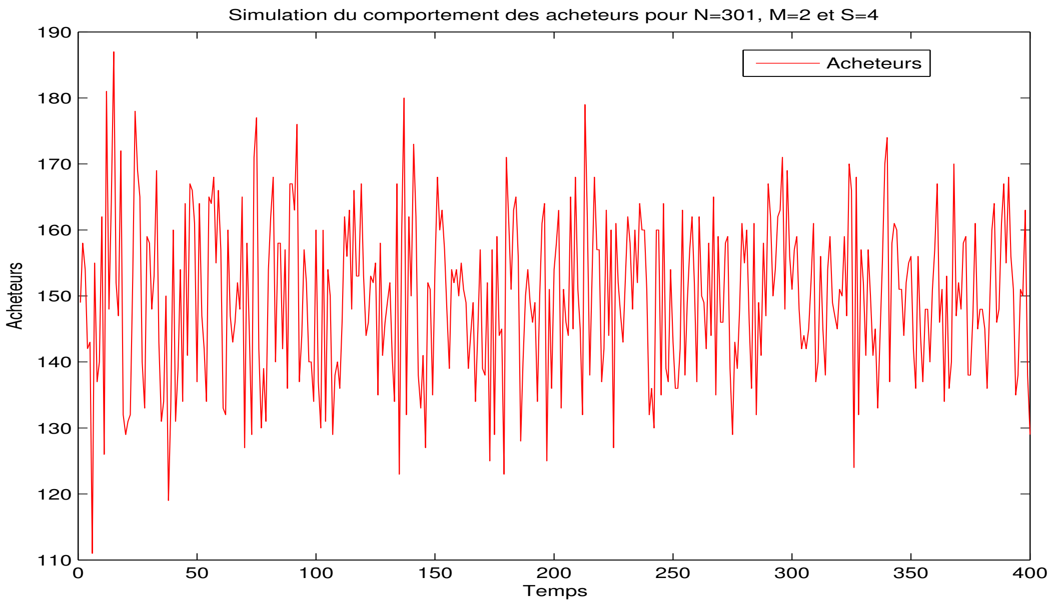

FIG. 3.6: Evolution de la présence des acheteurs pour $N = 301$, $M = 4$ et $S = 4$.

Dans la simulation (3.6), les perturbations sont considérées relativement stables. Les piques périodique de présence sont moindres pour des valeurs de M plus élevées.

3.4 Conclusion

La simulation a montré que par rapport à une même valeur du nombre de stratégies S, la volatilité σ^2 décroit lorsque la longueur de la mémoire M croit. Ce qui signifie que les agents apprennent de l'histoire du jeu. Le jeu des minorités montre que les importantes fluctuations sont dues à l'absence d'informations.

Conclusion Générale

La capacité de prédire le mouvement d'un marché financier est un domaine très prisé et qui fait l'objet de nombreuses recherches en raison des importants avantages financiers offerts. Dans le présent mémoire, nous nous sommes basé sur l'analyse de la volatilité qui indique dans quelle amplitude le nombre d'acheteurs ou de vendeurs peut varier, à la hausse comme à la baisse, par rapport au nombre moyen, sur une période de temps donnée.

La volatilité du nombre d'acheteurs ou de vendeurs sera d'autant plus forte que les cours des marchés sont instables. Même si les fluctuations sont aléatoires, elles cachent des informations importantes sur l'efficacité des marchés, la nature des interactions entre des traders ayant des objectifs commerciaux différents, et si et pourquoi la volatilité σ^2 est excessive.

La valeur de σ^2 indique la taille du groupe gagnant et du groupe perdant. Un σ^2 grand implique qu'il y a un petit nombre de gagnants et vice versa. Par conséquent, il est essentiel d'analyser le comportement de σ.

Nous avons constaté au travers la simulation du système que σ^2 décroit lorsque la longueur de la mémoire M croit. Ce qui signifie que les agents apprennent de l'histoire du jeu et que les importantes fluctuations sont dues à l'absence d'informations.

Bibliographie

Arthur, W. B. (1994). Inductive reasoning and bounded rationaliy. *Am. Econ. Rev.*, 84(2) :406–411.

Artus, P. (1995). *Anomalies sur les marchés financiers.* Economica.

Barache, F. (2007). Sur la théorie des jeux evolutionnaires et ses applications en économie. Mémoire de magistère, Université Abderrahmane Mira de Bejaia.

Béchu, T. (2007). *Économie et marchés financiers : Perspectives 2010-2020.* Éditions Eyrolles, Paris.

Bonzon, A. (2007). Modélisation des interactions entre agents rationnels : les jeux booléens. thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.

Challet, D., Marsili, M., and Zhang, Y. C. (2004). *Minority Games : Interacting Agents in Financial Markets.* Oxford : Oxford University Press.

Challet, D. and Zhang, Y.-C. (1997). *Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game.* Physica A, 246 :407.

Champagnant, N. (2017-2018). *Introduction à la finance quantitative.* école des Mines de Nancy.

Damien, C. (2000). Modelling markets dynamics : Minority games and beyond. Thèse de doctorat, Université de Fribourg.

Delande, M. (1992). *Marché à terme, incertitude, information, equilbre.* Economica, Paris.

Dutta, P. (1999). *Strategies and Games : Theory And Practice.* Cambridge, Mass : MIT Press.

Eber, N. (2013). *Théorie des Jeux.* Dunod, 3e édition, Paris.

Horny, G. (2012). *La bourse pour les nuls.* First.

Lardic, S. and Mignon, V. (2006). *L'efficience informationnelle des marchés financiers.* Éditions La Découverte, Paris.

Luce, R. D. and Raiffa, H. (1965). *Games and Decisions : Introduction and Critical survey.* John Wiley and Sons, New York.

Marsili, M., Challet, D., and Zecchina, R. (2000). Exact solution of a modified el farol's bar problem : Efficiency and the role of market impact. *Physica A 280.*, pages 522–533.

Morris, P. (1994). *Introduction to Game Theory.* Springer Verlag, Berlin.

Nash, J. F. (1950). *Equilibrium Points in n-Person Games.* Proceedings of the National Academy of Sciences 36, 48-49.

Nash, J. F. (1951). *Noncooperative Games.* Annals of Mathematics 54, 286–295.

Osborne, M. J. (2000). *An introduction to game theory.* Oxford University, Press.

Radjef, M. S. (2009). *Théorie des jeux et optimisation multicritère.* Cours en post-graduation, Université de A/Mira de Béjaia.

Rasmusen, E. (2000). *Games and Information : An Introduction to Game Theory.* Kelley School of Business, Indiana University.

Schalk, A. (2003). *The Theory of Games and Game Models.* Department of Computer Science, University of Manchester.

Scott, B. H. and Fernandez, L. (1998). *Game Theory with Economic Applications.* Reading : Addison-Wesley, Boston.

Simon, H. (1997). *Models of Bounded Rationality.* MIT, Press, Cambridge.

Straffin, D. P. (1993). *Game Theory and Strategy.* The Mathematical Association of America, New Mathematical Library.

Taratynava, N. (2009). Modélisation par la théorie des jeux des échanges de prévisions dans un réseau d'entreprises. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieur des Mines, Saint-Etienne, France.

Teweles, R. and Jones, F. (1999). *The futures game : who wins ? who loses ? and why ?* McGraw-Hill, New York.

Webb, J. N. (2007). *Game theory decisions, interaction and evolution*. Springer, New York.

Zhang, Y.-C. (1999). *Toward a theory of marginally efficient markets.* Physica A 269.