

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Abderahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle Mémoire de fin de cycle

En vue d'obtention du diplôme Master en

Recherche Opérationnelle

Option : Modélisation Mathématique et Évaluation des Performances des Réseaux

Thème

Flots et tensions dans les réseaux

Présenté par :

Mr CHABANI CHOUAIB

Mr BOUGUERRI HAMZA

Soutenu le 3 Juillet 2019 devant le jury composé de :

Présidente	<i>M_{me}</i> YOUNSI Leila	Maître Assistante	U.A.Mira Béjaïa.
Encadreur	<i>M^r</i> KABYL Kamal	Maître de Conf.B	U.A.Mira Béjaïa.
Examineur	<i>M^r</i> TAOUINET Smail	Maître Assistant	U.A.Mira Béjaïa.
Examineur	<i>M^r</i> M'HAMDI Mohammed Salah	Maître de Conf.B	U.A.Mira Béjaïa.

Année Universitaire 2018-2019

Remerciements

Au terme de ce travail qui marque la fin du cycle de master de notre formation au sein de l'université Abderahmane Mira de Béjaia, il nous est opportun d'exprimer notre gratitude à tous ceux qui, de loin ou de près, ont matériellement ou moralement contribué à la réalisation de notre modeste travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre considération.

Au Seigneur Dieu, qui nous a donné la vie, qui nous a donné l'intelligence et le courage de réaliser ce travail.

A nos chers parents par leur affection et amour de nous avoir donné la vie et l'éducation. Voilà aujourd'hui nous sommes comptés parmi les hommes intellectuels du monde. Qu'ils se réjouissent du fruit de leur progéniture.

Nous exprimons nos vifs remerciements, notre profonde gratitude et notre reconnaissance à notre encadreur **Mr KABYL Kamal**, qui a dirigé ce travail.

Nous tenons également à remercier les membres de jury d'avoir accepté de juger notre travail.

Enfin, Nous remercions, de tout coeur, tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dedie ce modeste travail tout d'abord à nos très chers parents qui nous ont soutenu tout le long de notre parcours d'études ;

À nos frères et nos sœurs ;

À toute la famille CHABANI ;

À nos amies ;

À toute la famille RO ;

À toute la promotion 2018-2019 ;

Et à mon binôme BOUGUERRI Hamza.

Chouaib

Je dedie ce modeste travail tout d'abord à nos très chers parents qui nous ont soutenu tout le long de notre parcours d'études ;

À nos frères et nos sœurs ;

À toute la famille BOUGUERRI ;

À nos amies ;

À toute la famille RO ;

À toute la promotion 2018-2019 ;

Et à mon binôme CHABANI Chouaib.

Hamza

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iv
Liste des tableaux	vi
Liste des symboles standards	viii
Introduction générale	1
1 Généralités sur les graphes	3
1.1 Quelques définitions et concepts de base	3
1.1.1 Graphe orienté	3
1.1.2 Graphe non orienté	4
1.1.3 Degré d'un sommet	5
1.1.4 L'ensembles des successeurs et prédécesseurs d'un sommet	6
1.2 Définition relatives aux sous structures d'un graphe	8
1.3 Chaîne, Cycle, Chemin et Circuit.	9
1.3.1 Chaînes et cycles	9
1.3.2 Chemins et circuits	10
1.4 La connexité	10
1.5 La forte connexité	11
1.6 Représentation d'un graphe	12
1.6.1 Matrice d'adjacence	12
1.6.2 Matrice d'incidence aux arcs (sommets-arcs)	13

2	Cycles, Cocycles et Arbres	14
2.1	Cycles	14
2.1.1	Vecteur représentatif d'un cycle	14
2.1.2	Cycles dépendants et indépendants	15
2.1.3	Base des cycles	15
2.1.4	Nombre cyclomatique	16
2.2	Cocycles	17
2.2.1	Vecteur représentatif d'un cocycle	18
2.2.2	Cocycles indépendants	20
2.2.3	Base des cocycles	20
2.2.4	Nombre cocyclomatique	20
2.3	Relation de dualité entre cycles et cocycles	21
2.4	Arbres	23
2.4.1	Base des cycles associe à l'arbre	26
2.4.2	Arborescence	27
2.4.3	Coarbre	27
3	Notions des flots et tensions	29
3.1	Flots	29
3.1.1	Flot dans un graphe	29
3.1.2	Flot dans un réseau	30
3.1.3	Opérations sur les flots	31
3.2	Flot compatible	32
3.2.1	Théorème du flot compatible (Hoffman 1960)	32
3.3	Flot complet	33
3.4	Flot maximum	33
3.4.1	Capacité d'une coupe	33
3.4.2	Chaîne améliorante	35
3.4.3	Recherche d'une chaîne améliorante	35
3.5	Tensions	36
3.5.1	Opérations sur les tensions	36
3.5.2	Propriété sur les tensions	36
3.6	Le problème de la tension maximum	38

3.6.1	Théorème de la tension compatible (Ghouila-Houri, 1960)	39
4	Les problèmes des flots maximum	40
4.1	Le problème du flot maximum	40
4.2	L'algorithme pour la recherche d'un flot maximum	40
4.2.1	L'algorithme de Ford et Fulkerson	40
4.2.2	Les étapes de l'algorithme de Ford et Fulkerson	41
4.3	Organigramme de l'algorithme de Ford et Fulkerson	42
4.3.1	Quelques exemples	43
5	Application sur MATLAB	61
5.1	Présentation du logiciel MATLAB	61
5.2	Espace de travail dans MATLAB	61
5.2.1	Fenêtre de commande	62
5.2.2	Editor window	62
5.3	Obtenir de l'aide dans MATLAB	63
5.4	Instructions de contrôle	64
5.5	Commandes et fonctions de MATLAB	64
5.6	Application numérique	65
	Conclusion générale	72
	Bibliographie	72

Table des figures

1.1	Graphe orienté à 4 sommets et 6 arcs	4
1.2	Graphe non orienté à 5 sommets et 8 arcs	5
1.3	Graphe orienté à 5 sommets et 7 arcs	6
1.4	Graphe orienté G , graphe partiel G' et sous graphe G_A	7
1.5	(a) : 1-graphe, (b) : 2-graphe	8
1.6	Graphe à deux composantes connexes C_1 et C_2	11
1.7	Graphe à deux composantes fortement connexes C_1 et C_2	11
1.8	Graphe orienté de 5 sommets	12
2.1	Graphe orienté de 5 arcs	15
2.2	Graphe à 3 cycles indépendants	17
2.3	Graphe à 5 sommets et 9 arcs	19
2.4	cycle noir et rouge avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens	22
2.5	cocycle noir et vert avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens	23
2.6	Arbre H associé au graphe G	26
2.7	Une arborescence	27
3.1	Capacité et flux d'un arc	31
4.1	Réseau associé à la modélisation	43
4.2	Résultat de la première itération	44
4.3	Résultat de la deuxième itération	45
4.4	Résultat de la troisième itération	46
4.5	Résultat de la quatrième itération	47
4.6	Résultat de la cinquième itération	47

4.7	Résultat de la sixième itération	48
4.8	Résultat de la dernière itération et la coupe minimale	49
4.9	Réseau associé après la modélisation	51
4.10	Réseau obtenu à la première itération	52
4.11	Réseau obtenu à la deuxième itération	52
4.12	Réseau obtenu à la troisième itération	53
4.13	Réseau obtenu à la quatrième itération	53
4.14	Réseau obtenu à la cinquième itération	54
4.15	Réseau obtenu à la sixième itération	54
4.16	Réseau obtenu à la septième itération	55
4.17	Réseau obtenu à la huitième itération	55
4.18	Réseau obtenu à la neuvième itération	56
4.19	Réseau obtenu à la dernière itération	56
4.20	Réseau associé au problème	57
4.21	Réseau obtenu à l'itération numéro 1	57
4.22	Réseau obtenu à l'itération numéro 2	58
4.23	Réseau obtenu à l'itération numéro 3	58
4.24	Réseau obtenu à l'itération numéro 4	59
4.25	Réseau obtenu à l'itération numéro 5	59
4.26	Réseau obtenu à l'itération numéro 6	60
4.27	Réseau obtenu à la dernière itération	60
5.1	Interface de la fenêtre de commande	62
5.2	Interface d'editor window	63
5.3	La carte géographique de l'Algérie	65
5.4	Le lien entre quinze wilayas d'Algérie	66
5.5	Réseau de communication entre les quinze wilayas	67
5.6	Introduire des données (la capacité des arcs (i,j) de la première sommet)	68
5.7	Introduire des données (la capacité des arcs (i,j) de la dernier sommet)	69
5.8	Matrice de capacité	69
5.9	Résultat final qui montre la valeur maximal de flot f	70
5.10	Le graphe associé au résultat	71

Liste des tableaux

1.1	Degré des sommets de la figure 1.3	6
1.2	Les successeurs et prédécesseurs des sommets de la figure 1.3	7
2.1	La base des cycles de la figure 2.2	18
2.2	La base des cocycles de la figure 2.3	21
2.3	La base des cycles associée à l'arbre de la figure 2.6	27

Liste des symboles standards

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{N}	Ensemble des entiers positifs ou nul.
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers positifs, négatifs ou nul.
\emptyset	Ensemble vide (sans éléments).
$ A $	Cardinalité de l'ensemble A .
$a \in A$	a est un élément de l'ensemble A .
$\exists x :$	Il existe x tel que :
$\forall x \in X$	Quel que soit x élément de X
$a \notin A$	a n'est pas un élément de l'ensemble A .
$A \cup B$	A réunion B .
$A \cap B$	A intersection B .
$A - B$	A moins B (éléments de A qui n'appartiennent pas à B).
$A \subset B$	L'ensemble A est une partie de l'ensemble B .
\mathbb{R}^n	Produit cartésien de l'ensemble \mathbb{R} avec lui-même n fois
$(1) \Rightarrow (2)$	La propriété (1) entraîne la propriété (2).
$(1) \Leftrightarrow (2)$	(1) est équivalent (2).
$A.B$	Produit de la matrice A par la matrice B .
aB	Produit d'un scalaire a par la matrice B .

Introduction générale

L'histoire de la théorie des graphes peut être avec les travaux d'Euler au 18^{ème} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.[14]

La théorie des graphes est la discipline mathématique qui étudie les graphes, qui sont des modèles abstraits de dessins de réseaux reliant des objets. Ces modèles sont constitués par la donnée de sommets et d'arcs entre ces sommets.

Le langage des graphes permet de représenter simplement la structure d'un grand nombre de situations, l'exemple le plus classique est la représentation d'un réseau de communication (réseaux de routes, réseaux de chemin de fer, réseaux de téléphone, réseaux électrique ,... etc).

Les Allemands Franz Ernst Neumann et Jacobi, respectivement physicien et mathématicien, fondèrent en 1834 une série de séminaires. Le physicien allemand Gustav Kirchhoff était un des étudiants participant au séminaire entre 1843 et 1846, et il étendit le travail de Georg Ohm pour établir en 1845 les lois de Kirchhoff exprimant la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique. En particulier, sa loi des nœuds stipule que la somme des intensités des courants entrant dans un nœud est égale à celle qui en sort.[12]

Un circuit électrique peut se voir comme un graphe, dans lequel les sommets sont les nœuds du circuit, et les arcs correspondent aux connexions physiques entre ces nœuds. Pour modéliser les courants traversant le circuit, on considère que chaque arc affecte par une capacité . Ceci offre de nombreuses analogies, par exemple à l'écoulement d'un liquide comme l'eau à travers un

réseau de canalisé, ou la circulation dans un réseau routier. Comme stipulé par la loi des noeuds, le flot à un sommet est conservé, ou identique à l'entrée comme à la sortie ; De plus, un arc a une limite de capacité, tout comme un canal peut transporter une certaine quantité maximale d'eau. Si l'on ajoute que le flot démarre à un certain sommet (la source) et qu'il se termine à un autre (le puits), on obtient alors les principes fondamentaux de l'étude des flots dans un graphe.

L'étude des flots dans les réseaux se généralise de plusieurs façons, ici dans le cas du flot, est un problème d'optimisation, qui est la branche des mathématiques consistant à optimiser (i.e. trouver maximum) une fonction sous certaines contraintes. Un flot dans un réseau est soumis à trois contraintes : la limite de capacité sur chaque arc, la création d'un flot non nul entre la source et le puits et l'égalité du flot en entrée/sortie pour tout sommet autre que la source et les puits. Ces contraintes étant linéaires, le problème d'un flot dans un réseau fait partie de l'optimisation linéaire.

Dans ce mémoire, nous intéressons à résoudre un problème réel en utilisant la théorie des graphes et plus particulièrement l'optimisation dans les réseaux, notre travail est composé de cinq chapitres et une conclusion générale.

Dans le premier chapitre, nous décrivons quelques généralités et notions de base de la théorie des graphes. le deuxième chapitre consiste à la présentation des cycles, cocycles et les arbres ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons les notions des flots et tensions dans les réseaux.

Le chapitre quatre qui concerne la présentation de flot maximum et des exemples.

Le dernier chapitre, sera consacré à l'implémentation d'un cas réel modélisé sous forme d'un problème du flot maximum dans un réseau par logiciel MATLAB.

En guise de ce travail par une conclusion générale.

Généralités sur les graphes

Les graphes permettent de modéliser toute situation dans laquelle il y a des interactions entre les objets. Les techniques utilisées en théorie des graphes permettent de répondre à beaucoup des problèmes algorithmiques posés.

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques définitions de base sur la théorie des graphes qui seront utilisées dans la suite de notre travail.

1.1 Quelques définitions et concepts de base

Le concept de graphe [10]

Un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés Sommets), reliés entre eux par un ensemble des lignes ou des flèches (appelés arêtes ou arcs). Les graphes représentent de manière simple et naturelle des relations entre les objets. Cette méthode de représentation permet de résoudre un problème.

1.1.1 Graphe orienté

Définition 1.1.1. [10]

Un graphe orienté $G = (X, U)$ est défini par les deux ensembles :

- $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ est l'ensemble fini non vide des sommets, $n \geq 1$;
- $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ est l'ensemble fini des arcs ;
- Graphiquement, les sommets représentés par des points ou des nœuds et l'arc $u_k = (i, j)$ sera représenté par une flèche allant de i vers j ;
- Le nombre de sommets n dans le graphe est appelé l'ordre du graphe, et on écrit $n = |X|$;

- Soit $u_k = (i, j)$ un arc de G , i est l'extrémité initiale de u_k et j est l'extrémité terminale de u_k ;
- Si deux arcs possèdent les mêmes extrémités, on dit alors qu'ils sont parallèles;
- Si les deux extrémités d'un arc sont confondues alors cet arc est appelé boucle.

La **figure 1.1** montre un graphe orienté : $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

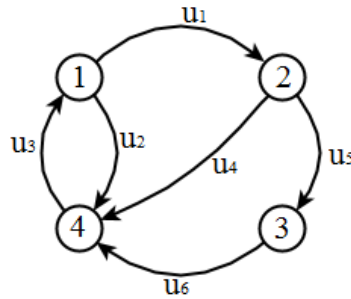


FIGURE 1.1 – Graphe orienté à 4 sommets et 6 arcs

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2. [10]

Pour étudier certaines propriétés (non orienté) d'un graphe $G = (X, E^\circ)$, il peut arriver que la direction des flèches n'importe pas ; seul importe de savoir les paires de points reliées.

La famille (e_1, e_2, \dots, e_m) des m arêtes du graphe G sera notée par E ; si, pour ne pas encombrer inutilement les données, on veut se donner le graphe $G = (X, E)$ sans son orientation.

On appelle tout élément $\{i, j\} \in E$ une arête qui est représentée graphiquement par un segment sans flèche liant les deux nœuds i et j .

La **figure 1.2** montre un graphe non orienté à 5 sommets et 8 arcs :

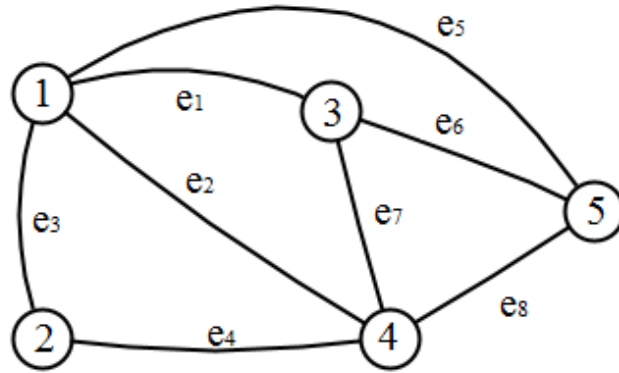


FIGURE 1.2 – Graphe non orienté à 5 sommets et 8 arcs

Définition 1.1.3. [9]

Soit $u_k = (i, j)$ un arc de $G = (X, U)$:

- Un sommet i est dit adjacent à un autre sommet j s’il existe un arc entre i et j ;
- Deux arcs sont adjacents s’ils ont au moins une extrémité commune.

Dans le graphe de la **figure 1.1** :

- Les sommet 1 et 4 sont adjacents car il existe un arc u_2 qui reliant les sommets 1 et 4 ;
- u_5 et u_6 sont deux arcs adjacents car ils ont le sommet 3 en commun.

1.1.3 Degré d’un sommet

Définition 1.1.4. [10]

A tout sommet i du graphe $G = (X, U)$, avec $i = 1, 2, \dots, n$, on associe :

- $d_G^+(i)$ demi-degré extérieur de i : c’est le nombre d’arcs ayant i comme extrémité initiale ;
- $d_G^-(i)$ demi-degré intérieur de i : c’est le nombre d’arcs ayant i comme extrémité terminale ;
- $d_G(i) = d_G^+(i) + d_G^-(i)$ degré de i : c’est le nombre d’arcs ayant i comme extrémité.

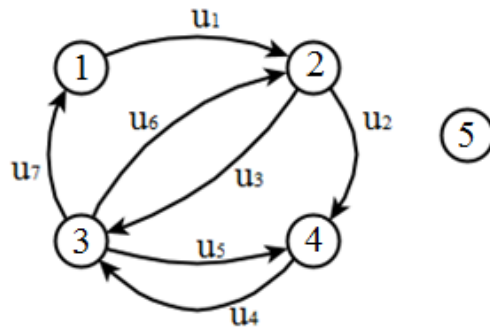


FIGURE 1.3 – Graphe orienté à 5 sommets et 7 arcs

i	$d_G^+(i)$	$d_G^-(i)$	$d_G(i)$
1	1	1	2
2	2	2	4
3	2	3	5
4	1	2	3
5	0	0	0

TABLE 1.1 – Degré des sommets de la figure 1.3

Remarque 1.1.1. [10]

- Si $d_G(i) = 0$ alors i est dit sommet isolé ;
- Le degré 5 égale à 0 \implies sommet isolé.

1.1.4 L'ensembles des successeurs et prédécesseurs d'un sommet

Définition 1.1.5. [10]

Dans un graphe $G = (X, U)$, on définit la fonction Γ de la façon suivant :

- Γ_i^+ désigne l'ensemble des successeurs du sommet i , s'il existe un arc u_k ayant i comme extrémité initiale et j comme extrémité terminale ;
- Γ_i^- désigne l'ensemble des prédécesseurs du sommet i , s'il existe un arc u_k ayant j comme extrémité initiale et i comme extrémité terminale.

i	Γ_i^+	Γ_i^-
1	{2}	{3}
2	{3, 4}	{1, 3}
3	{1, 2, 4}	{2, 4}
4	{3}	{2, 3}
5	{0}	{0}

TABLE 1.2 – Les successeurs et prédécesseurs des sommets de la figure 1.3

Définition 1.1.6. Graphe partiel[3]

Soit $G = (X, U)$ un graphe, le graphe $G' = (X, E)$ est un graphe partiel de G , si $E \subset U$. Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arcs au graphe G .

Définition 1.1.7. Sous graphe[10]

Pour un sous-ensemble des sommets $A \subset X$, le sous graphe de G induit par A est le graphe $G_A = (A, E(A))$ dont l'ensemble des sommets est A et l'ensemble des arcs $E(A)$ est formé de tout les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans A .

La **figure 1.4** montre un graphe G , son graphe partiel G' , son sous graphe G_A

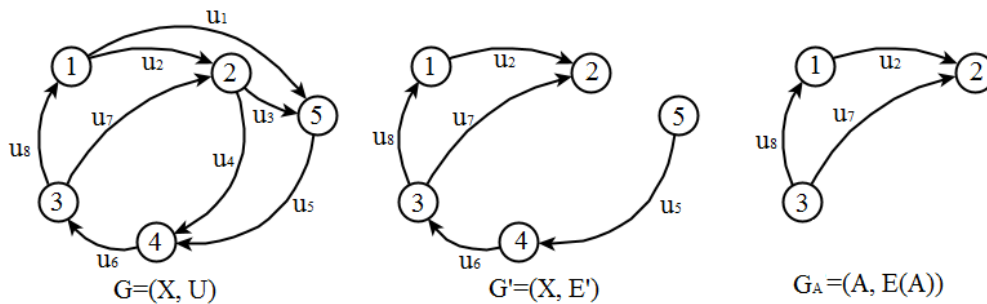


FIGURE 1.4 – Graphe orienté G , graphe partiel G' et sous graphe G_A

Définition 1.1.8. [9]

Dans un graphe $G = (X, U)$, un sous-ensemble S des sommets de X est un stable si ses sommets ne sont pas adjacents entre eux. Un sous-ensemble stable S est maximum si sa cardinalité (nombre des sommets) est maximale.

1.2 Définition relatives aux sous structures d'un graphe

Définition 1.2.1. Graphe simple[5]

Un graphe $G = (X, U)$ est dit simple s'il n'a ni arcs parallèles (même sens) ni boucle.

Définition 1.2.2. p-graphe[2]

Un graphe $G = (X, U)$ est un p-graphe s'il comporte au plus p arcs entre deux sommets ;

Un 1-graphe est un graphe tel qu'il n'existe jamais plus d'un arc entre deux sommets.

La **figure 1.5 (a)** montre un 1-graphe et La **figure 1.5 (b)** montre un 2-graphe :

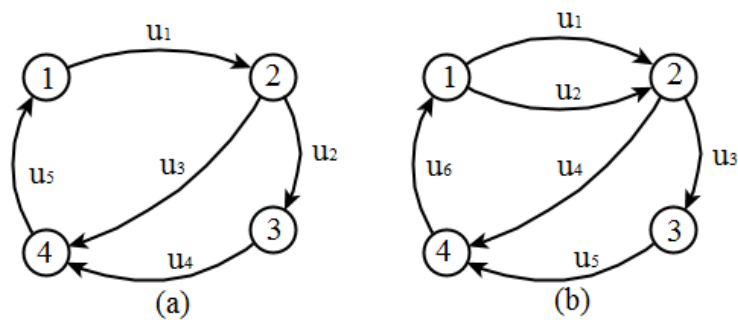


FIGURE 1.5 – (a) : 1-graphe, (b) : 2-graphe

Définition 1.2.3. [9]

Soit $G = (X, U)$ un graphe :

- Le graphe G est symétrique si pour tout arc (i, j) , il existe un arc inverse (j, i) :

$$(i, j) \in U \implies (j, i) \in U;$$

- Le graphe G est antisymétrique si pour tout arc (i, j) , alors il n'existe pas d'arcs de j à i :

$$(i, j) \in U \implies (j, i) \notin U;$$

- Soit i, j et y des sommets quelconques du graphe G . Le graphe G est transitif si et seulement si :

$$(i, j) \in U \quad \text{et} \quad (j, y) \in U \implies (i, y) \in U$$

C'est-à-dire : S'il existe un arc allant de i à j et un arc allant de j à y alors il existe un arc allant de i à y .

Définition 1.2.4. Graphe biparti[10]

Un graphe $G = (X, U)$ est biparti s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets en deux classes disjointes telle que tout arc a son extrémité initiale dans une classe et son extrémité terminal dans l'autre.

Définition 1.2.5. Graphe complet[10]

Un graphe $G = (X, U)$ est complet si chaque sommet du graphe est relié par des arcs à tous les autres sommets.

Définition 1.2.6. Graphe complémentaire[10]

Soit $G = (X, U)$ un graphe simple, on peut définir un graphe complémentaire $\bar{G} = (X, \bar{U})$ comme suit : $u_k \in \bar{U} \iff u_k \notin U$;

C'est-à-dire : un arc appartient au graphe complémentaire \bar{G} si il n'appartient pas au graphe initiale G .

Définition 1.2.7. Graphe value[13]

Un graphe valué $G = (X, U, C)$ est un graphe où :

- X : est l'ensemble des sommets ;
- U : est l'ensemble des arcs ;
- $C : U \rightarrow C$: est une fonction qui associé à tout arc u_k une capacité $c(i, j) \in C$ tel que C peut être (poids, longueur, temps, couleur, ... etc).

1.3 Chaîne, Cycle, Chemin et Circuit.

1.3.1 Chaînes et cycles

Définition 1.3.1. Chaîne[9]

Soit $G=(X,U)$ un graphe.

Une chaîne joignant deux sommets x et y dans un graphe G est une suite des sommets reliés par des arcs tels que, deux sommets successifs ont un arc commune. On la note : $(1, 2, \dots, j)$, avec $1 = x, j = y$.

- ▶ Une chaîne est dit simple si on passe une seule fois par ses arcs.
- ▶ On appelle cycle dans d'un graphe G , une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.
- ▶ Une chaîne(cycle) est dit élémentaire si on passe une seule fois par ses sommets.

1.3.2 Chemins et circuits

Définition 1.3.2. Chemin[10]

Soit $G = (X, U)$ un graphe.

Un chemin du sommet x à y dans un graphe G , est une suite des sommets reliés successivement par des arcs orientés dans le même sens. On la note $:(1, 2, \dots, j)$, avec $1 = x, j = y$.

- ▶ Un chemin est dit simple si on passe une seule fois par ses arcs.
- ▶ Un circuit est un chemin dont les deux extrémités sont confondues.
- ▶ Une chemin(circuit) est dit élémentaire si on passe une seule fois par ses sommets.

Remarque 1.3.1. [10]

La notion de chaîne et de cycle ne respecte pas l'orientation des arcs, par contre celle de chemin et de circuit la respecte.

1.4 La connexité

Définition 1.4.1. [5]

On définit la connexité dans un graphe, par la relation entre deux sommets de la manière suivante :

Deux sommets i et j ont une relation de connexité \iff il existe une chaîne entre i et j .

Définition 1.4.2. [5]

Une composante connexe est un sous ensemble des sommets deux à deux reliés par une chaîne (relation de connexité).

Définition 1.4.3. [5]

Un graphe $G = (X, U)$ est dit connexe si tous ses sommets ont deux à deux la relation de connexité. Autrement dit : si G contient une seule composante connexe.

Un graphe est connexe \iff il possède une seule composante connexe.

Le graphe de la **figure 1.6** contient deux composantes connexes

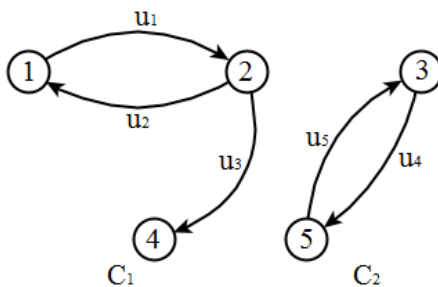


FIGURE 1.6 – Graphe à deux composantes connexes C_1 et C_2

1.5 La forte connexité

Définition 1.5.1. [5]

On définit la forte connexité dans un graphe orienté par une relation entre deux sommets de la manière suivante : deux sommets i et j ont une relation de forte connexité \iff il existe un chemin de i à j et un chemin de j à i .

Définition 1.5.2. [5]

On appelle composante fortement connexe un ensemble des sommets, qui ont deux à deux la relation de forte connexité.

Définition 1.5.3. [5]

Un graphe $G = (X, U)$ est dit fortement connexe si tous ses sommets ont deux à deux la relation de forte connexité. Autrement dit si G contient une seule composante fortement connexe.

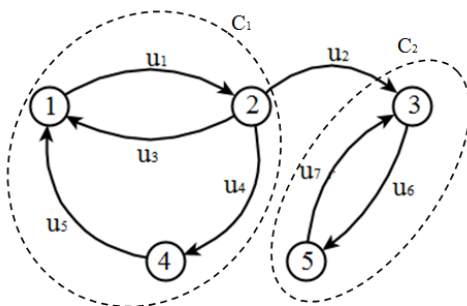


FIGURE 1.7 – Graphe à deux composantes fortement connexes C_1 et C_2

1.6 Représentation d'un graphe

1.6.1 Matrice d'adjacence

Définition 1.6.1. [10]

La matrice d'adjacence du graphe $G = (X, U)$ est une matrice C de type n^2 , chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet du graphe. Ainsi chaque élément c_{ij} de la matrice indique la relation qui existe entre deux sommets :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in U, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.6.1.

Soit $G = (X, U)$ le graphe de la **figure 1.8** :

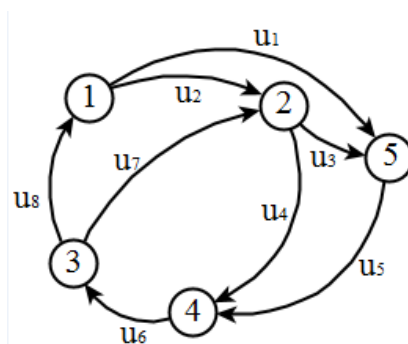


FIGURE 1.8 – Graphe orienté de 5 sommets

La matrice d'adjacence associée à G est :

$$C = \begin{array}{c|ccccc} & i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

1.6.2 Matrice d'incidence aux arcs (sommets-arcs)

Définition 1.6.2. [10]

La matrice d'incidence A aux arcs d'un graphe $G = (X, U)$ est une matrice $n.m$, ses éléments prennent les valeurs 1, 0 ou -1 . Chaque ligne de la matrice est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Chaque élément a_{ij} de la matrice indique la relation entre un sommet et un arc comme suit :

$$a_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{si } i \text{ est l'extrémité initiale de } u_k, \\ -1 & \text{si } i \text{ est l'extrémité terminale de } u_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.6.1.

Dans la matrice d'incidence on a :

- Le nombre des valeurs égales à $+1$ d'une ligne donne le degré extérieur du sommet correspondant ;
- Le nombre des valeurs égales à -1 d'une ligne donne le degré intérieur du sommet correspondant ;
- Cette matrice ne convient pas pour les graphes avec boucles.

Conclusion

Dans ce chapitre, on s'intéresse à quelques notions de la théorie des graphes en donnant quelques définitions et concepts de base sur les graphes qu'on va utiliser dans le chapitre suivant.

Cycles, Cocycles et Arbres

La première partie de ce chapitre introduit les notions des cycles et cocycles en insistant sur leurs vecteurs représentatifs ainsi que la base des cycles et la base des cocycles, puis la deuxième partie sera consacrée aux notions des arbres ainsi que leurs principales propriétés.

2.1 Cycles

Définition 2.1.1.

Un cycle Γ est une chaîne d'arcs tous distincts telle que les deux extrémités de la chaîne soient confondues.

2.1.1 Vecteur représentatif d'un cycle

On désigne par Γ^+ (respectivement Γ^-) l'ensemble des arcs du cycle Γ orientés dans le sens de parcours (respectivement dans sens inverse de parcours).[9]

A un cycle Γ du graphe $G = (X, U)$, on associe le vecteur $\vec{\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$ dit vecteur représentatif de Γ définit par :

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{si } u_k \in \Gamma^+, \\ -1 & \text{si } u_k \in \Gamma^-, \\ 0 & \text{si } u_k \notin \Gamma, \end{cases} \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, m.$$

Le vecteur représentatif de ce cycle $\Gamma = (u_1, u_2, u_4)$ du graphe de la **figure 2.1** est :
 $\vec{\Gamma} = (1, -1, 0, -1, 0).$

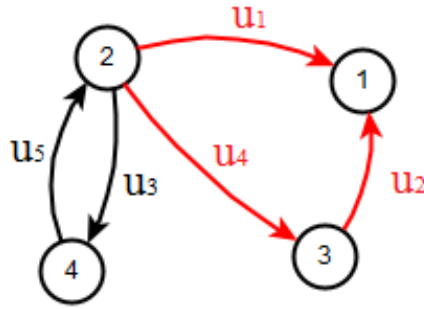


FIGURE 2.1 – Graphe orienté de 5 arcs

Remarque 2.1.1.

- Un cycle est dit minimal s'il ne contient pas un autre cycle. Autrement dit, on ne peut pas déduire un autre cycle par suppression des arcs.
- Un cycle est dit circuit si tout les arcs sont orientés dans le même sens.

Propriété 2.1.1. [3]

Un cycle est élémentaire si et seulement si c'est un cycle minimal.

Propriété 2.1.2. [3]

Tout cycle Γ est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs.

2.1.2 Cycles dépendants et indépendants

Définition 2.1.2. [8]

On dit que les cycles $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \dots, \Gamma^k$ sont dépendants si leurs vecteurs associés vérifient :

$$\lambda_1 \vec{\Gamma}^1 + \lambda_2 \vec{\Gamma}^2 + \lambda_3 \vec{\Gamma}^3 + \dots + \lambda_k \vec{\Gamma}^k = \vec{0},$$

λ_i non tous nuls, avec $i = 1, 2, \dots, k$.

Lorsque au contraire, les cycles $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \dots, \Gamma^k$ sont indépendants si :

$$\lambda_1 \vec{\Gamma}^1 + \lambda_2 \vec{\Gamma}^2 + \lambda_3 \vec{\Gamma}^3 + \dots + \lambda_k \vec{\Gamma}^k = \vec{0} \implies \lambda_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

2.1.3 Base des cycles

Définition 2.1.3. [8]

On peut donc définir une base des cycles comme étant un ensemble minimal des cycles

indépendants et génératrice (tout cycle Γ peut s'écrire comme combinaison linéaire des cycles de la famille) :

$$\vec{\Gamma} = \lambda_1 \vec{\Gamma}^1 + \lambda_2 \vec{\Gamma}^2 + \lambda_3 \vec{\Gamma}^3 + \dots + \lambda_k \vec{\Gamma}^k, i = 1, 2, \dots, k.$$

2.1.4 Nombre cyclomatique

Théorème 2.1.1.

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté d'ordre n , ayant m arcs et p composantes connexes. La dimension de la base de cycle, appelée nombre cyclomatique est :

$$\mu(G) = m - n + p,$$

- Si G est connexe alors : $\mu(G) = m - n + 1$.

Démonstration 2.1.1.

Considérer la séquence des graphes partiels G_0, \dots, G_m où :

- G_0 est constitué de n sommets isolés, $U = \emptyset$;
- Le graphe partiel G_k est obtenu à partir de G_{k-1} par ajout d'un arc u_k de G_{k-1} ;
- $G_m = G$.

-On désigne par $\mu(G_k)$ le nombre de cycles élémentaires indépendants de G_k .

On raisonnera par récurrence :

Nous avons bien $\mu(G_0) = 0$ car G_0 est sans cycle et on a : $\mu(G_0) = m_0 - n + p_0 = 0 - n + n$;

Supposons que cette relation est vraie on a :

$\mu(G_k) = m_k - n + p_k$ avec $k = 1, 2, \dots, m$ et montrons que $\mu(G_{k+1}) = m_{k+1} - n + p_{k+1}$

En ajoutant un arc u_{k+1} à G_k on obtient G_{k+1} ;

Deux cas se présentent :

1. L'ajout de arc u_{k+1} crée un nouveau cycle on a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \mu(G_{k+1}) = \mu(G_k) + 1 \\ m_{k+1} = m_k + 1 \\ p_{k+1} = p_k \end{array} \right\} \implies \mu(G_{k+1}) = m_k - n + p_k + 1 = m_{k+1} - 1 - n + p_{k+1} + 1 = m_{k+1} - n + p_{k+1}.$$

2. L'ajout de u_{k+1} ne crée pas de cycle. Dans ce cas les extrémités de cet arc sont dans deux composantes connexes différentes et le nombre de composantes connexes de G diminue.

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \mu(G_{k+1}) = \mu(G_k) \\ m_{k+1} = m_k + 1 \\ p_{k+1} = p_k - 1 \end{array} \right\} \implies \mu(G_{k+1}) = m_k - n + p_k = m_{k+1} - 1 - n + p_{k+1} + 1 = m_{k+1} - n + p_{k+1}.$$

Donc $\mu(G) = m - n + p$.

On a donc $\mu(G)$ cycles indépendants : $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \dots, \Gamma^{\mu(G)}$ car chaque cycle contient un arc que les autres ne contiennent pas.

Remarque 2.1.2.

La démonstration sert de méthode pour construire une base des cycles.

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté contenant n sommets et m arcs.

On commence par le graphe $G_0 = (X, \emptyset)$, où : $m_0 = 0, p_0 = n, \mu(G_0) = 0$, auquel on ajoute les arcs de G dans un ordre quelconque pour chaque arc ajouté :

- ▶ On crée un cycle linéairement indépendant avec les précédents et la base des cycles augmente d'une unité ;
- ▶ Ou bien, on ne crée pas de cycle et $\mu(G)$ ne change pas. La procédure s'arrête lorsqu'il n'y a plus d'arcs à ajouter.

Le nombre cyclomatique de graphe de la **figure 2.2** est : $\mu(G) = m - n + p = 7 - 5 + 1 = 3$ et les cycles $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$ sont donnés par le tableau ci-dessous :

La base des cycles est l'ensemble $\{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3\}$.

2.2 Cocycles

Définition 2.2.1. [9]

Soit $G = (X, U)$ un graphe et $Y \subset X, Y \neq \emptyset$. Considérons les sous ensembles d'arcs suivants :

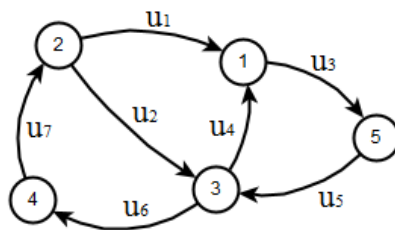


FIGURE 2.2 – Graphe à 3 cycles indépendants

Arc ajoutée	Cycle créée	Nombre de cycle créée
u_1	0
u_2	0
u_3	0
u_4	$\Gamma^1 = (u_4, u_1, u_2)$	1
u_5	$\Gamma^2 = (u_5, u_2, u_1, u_3)$	2
u_6	2
u_7	$\Gamma^3 = (u_7, u_1, u_3, u_5, u_6)$	3

TABLE 2.1 – La base des cycles de la figure 2.2

- ▶ $\omega^+(Y)$ l'ensemble des arcs ayant leurs extrémités initiales dans Y et leurs extrémités terminales dans $X \setminus Y$, c'est-à-dire : $\omega^+(Y) = \{u_k \in U / I(u_k) \in Y \text{ et } T(u_k) \notin Y\}$;
- ▶ $\omega^-(Y)$ l'ensemble des arcs ayant leurs extrémités terminales dans Y et leurs extrémités initiales dans $X \setminus Y$, c'est-à-dire : $\omega^-(Y) = \{u_k \in U / I(u_k) \notin Y \text{ et } T(u_k) \in Y\}$;
- ▶ L'ensemble $W(Y) = \omega^+(Y) \cup \omega^-(Y)$ est appelé cocycle relatif à Y .

2.2.1 Vecteur représentatif d'un cocycle

Le vecteur représentatif d'un cocycle $\vec{W} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$ est défini comme suit : [8]

$$\omega_k = \begin{cases} 1 & \text{si } u_k \in \omega^+, \\ -1 & \text{si } u_k \in \omega^-, \\ 0 & \text{si } u_k \notin W. \end{cases}$$

Le vecteur représentatif de cocycle $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ dans le graphe de la **figure 2.3** est donné par : $\vec{W} = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, -1, -1)$, car $\omega^+(Y) = \{u_3, u_6\}$, $\omega^-(Y) = \{u_8, u_9\}$.

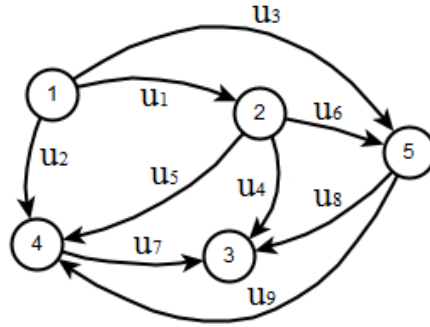


FIGURE 2.3 – Graphe à 5 sommets et 9 arcs

Remarque 2.2.1. [8]

Un cocycle est dit cocircuit si tout les arcs sont orientés dans le même sens, c'est-à-dire :
 $\omega^+(Y) = \emptyset$ ou $\omega^-(Y) = \emptyset$.

Définition 2.2.2. [8]

Un cocycle est dit élémentaire s'il est formé d'arcs reliant deux sous graphes connexes G_{Y_1} , G_{Y_2} de G avec :

- (a) $Y_1 \neq \emptyset$;
- (b) $Y_2 \neq \emptyset$;
- (c) $Y_1 \cup Y_2$ est une composante connexe de G .

En d'autre terme, un cocycle est dit élémentaire s'il est minimal, c'est-à-dire : s'il ne contient pas un ensemble d'arcs qu'est un cocycle.

Dans le graphe $G = (X, U)$ de la **figure 2.3** :

$Y = \{1, 3\}$, $W(Y) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_7, u_8\}$, avec $\omega^+(Y) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\omega^-(Y) = \{u_4, u_7, u_8\}$

$W(Y)$ n'est pas élémentaire car il contient deux ensembles d'arcs qu'est un cocycle :

- $Y_1 = \{1\}$, $W(Y_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$, avec $\omega^+(Y_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\omega^-(Y_1) = \emptyset$;
- $Y_2 = \{3\}$, $W(Y_2) = \{u_4, u_7, u_8\}$, avec $\omega^+(Y_2) = \emptyset$, $\omega^-(Y_2) = \{u_4, u_7, u_8\}$;
- Y_1 et Y_2 est un cocircuit.

2.2.2 Cocycles indépendants

Définition 2.2.3.

Les cocycles $W^1, W^2, W^3, \dots, W^k$ sont indépendants si leurs vecteurs associés vérifient :

$$\alpha_1 \vec{W}^1 + \alpha_2 \vec{W}^2 + \alpha_3 \vec{W}^3 + \dots + \alpha_k \vec{W}^k = \vec{0} \implies \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

2.2.3 Base des cocycles

Définition 2.2.4.

On peut donc définir une base des cocycles comme étant un ensemble des cocycles élémentaires indépendants $\{W^1, W^2, W^3, \dots, W^k\}$ tel que tout cocycle W peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{W} = \alpha_1 \vec{W}^1 + \alpha_2 \vec{W}^2 + \alpha_3 \vec{W}^3 + \dots + \alpha_k \vec{W}^k, i = 1, 2, \dots, k.$$

2.2.4 Nombre cocyclomatique

Théorème 2.2.1.

Soit $G = (X, U)$ un graphe d'ordre n , ayant m arcs et p composantes connexes. La dimension de la base des cocycles, appelée nombre cocyclomatique est :

$$\lambda(G) = n - p,$$

Si G est connexe alors : $\lambda(G) = n - 1$.

Démonstration 2.2.1.

Supposons que le graphe orienté connexe ($p = 1$) et formons les $n - 1$ cocycles élémentaires indépendants :

- On prend le sommet 1 et posons $X_1 = 1$. Le cocycle $W(X_1)$ contient un cocycle élémentaire et soit $(1, 2)$ un arc de ce cocycle avec $1 \in X_1$ et $2 \notin X_1$;
- On pose $X_2 = X_1 \cup 2$, le cocycle $W(X_2)$ contient un cocycle élémentaire et soit $(i, 3)$ un arc de ce cocycle avec $i \in X_2$ et $3 \notin X_2$, avec $i = 1, 2$;
- On pose $X_3 = X_2 \cup 3$, et on recommence ;
- A la fin on aurait construit $\lambda(G) = (n - 1)$ cocycles élémentaires $W^1, W^2, W^3, \dots, W^{n-1}$, linéairement indépendants car chacun contient un arc que les autres ne contiennent pas.

Y_i	Cocycle crée	Nombre de cocycle crée
$Y_1 = \{1\}$	$W^1 = W(Y_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$	1
$Y_2 = \{1, 2\}$	$W^2 = W(Y_2) = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$	2
$Y_3 = \{1, 2, 3\}$	$W^3 = W(Y_3) = \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8\}$	3
$Y_4 = \{1, 2, 3, 4\}$	$W^4 = W(Y_4) = \{u_3, u_6, u_8, u_9\}$	4

TABLE 2.2 – La base des cocycles de la figure 2.3

- Si le graphe n'est pas connexe, soient C_1, C_2, \dots, C_p ses composantes connexes, la composante connexe C_i est un graphe connexe, alors : $\lambda(C_i) = n_i - 1$, avec $i = 1, 2, \dots, p$.

Donc :

$$\lambda(G) = \sum_{i=1}^p n_i - 1 = n - p.$$

Remarque 2.2.2.

La démonstration sert de méthode pour construire une base des cocycles.

Dans le graphe $G = (X, U)$ de la figure 2.3 on a :

$\lambda(G) = n - p = 5 - 1 = 4$, et W^1, W^2, W^3, W^4 . La base des cocycles est l'ensemble $\{W^1, W^2, W^3, W^4\}$.

Théorème 2.2.2. [3]

Tout cocycle est une somme de cocycles élémentaires sans arcs communs.

2.3 Relation de dualité entre cycles et cocycles

Théorème 2.3.1. Lemme des arcs colorés (Minty)

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, les arcs sont numérotés de u_1 à u_m et sont colorés soit en rouge, soit en vert, soit en noir. L'arc u_1 est supposé être coloré en noir. Alors une (et une seule) des propositions suivantes est vérifiée :

1. *Il passe par l'arc u_1 un cycle élémentaire uniquement rouge et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens ;*
2. *Il passe par l'arc u_1 un cocycle élémentaire uniquement vert et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens.*

Démonstration 2.3.1.

On pose $u_1 = (i_1, j_1)$ et on marque les sommets itérativement de proche en proche. On marque d'abord le sommet j_1 . Itérativement, si i est un sommet marqué alors on marque j (non marqué) dans un des deux cas suivants :

- ◆ S'il existe un arc noir $(i, j) \neq u_1$ allant du sommet i vers le sommet j ;
- ◆ S'il existe un arc rouge allant de i vers j , ou de j vers i .

On continue cette procédure de marquage jusqu'à ce qu'on ne puisse plus marquer de sommet. On se trouve alors face à deux cas possibles :

1. Si on a marqué le sommet i_1 , alors il existe une chaîne élémentaire entre j_1 et i_1 empruntant des arcs noirs et rouges avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens . Il ne peut pas exister un cocycle noir et vert, contenant l'arc u_1 , avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens. En ajoutant l'arc u_1 à cette chaîne, on obtient un cycle conforme au (1) du lemme ;
2. Si on n'a pas marqué le sommet i_1 , alors les sommets utilisés de proche en proche pour marquer constituent un ensemble A avec $A \subset X$, tel que le cocycle $W(A)$ ne contienne que des arcs noirs orientés vers A et des arcs verts . Il ne peut pas exister un cycle noir et rouge, contenant l'arc u_1 , avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens. Le cocycle $W(A)$ est alors conforme au (2) du lemme.

Exemple 2.3.1.

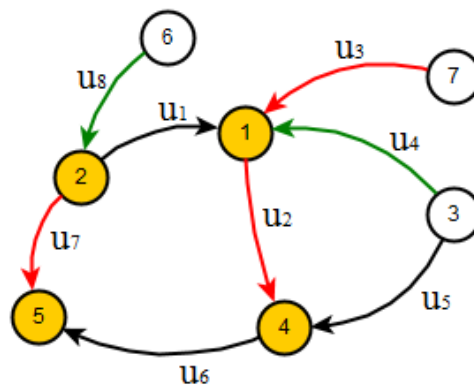


FIGURE 2.4 – cycle noir et rouge avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens

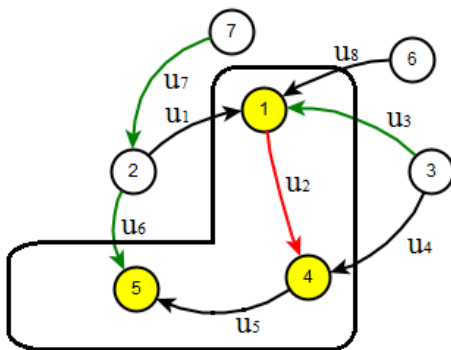


FIGURE 2.5 – cocycle noir et vert avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens

2.4 Arbres

Propriété 2.4.1.

Soit $n = |X|$ le nombre des sommets d'un graphe $G = (X, U)$, et $m = |U|$ le nombre de ses arcs :

- a)– Si G est connexe $\implies m \geq n - 1$;
- b)– Si G est sans cycles $\implies m \leq n - 1$.

Preuve 2.4.1.

a) : On construit le graphe G par adjonction de ses arcs à partir du graphe $G_0 = (X, \emptyset)$, comportant n composantes connexes :

A chaque étape (ajoute un arc) le nombre des composantes connexes décroît au plus d'une unité.

Donc il faut au moins $n - 1$ arcs pour passer du graphe G_0 qui a n composantes connexes à un graphe connexe.

D'où :

$$|U| \geq n - 1.$$

b) : Nous pouvons montrer ce résultat par induction sur le nombre des sommets du graphe. Si G est d'ordre 1, il ne possède aucune arc et la propriété est évidemment vérifiée.

Supposons la propriété vraie à l'ordre n et établissons la à l'ordre $n + 1$. Considérons donc un

graphe $G = (X, T)$ sans cycle à $n + 1$ sommets. Il existe un sommet i de degré au plus 1. Soit $G' = (X', T')$ le sous graphe d'ordre n induit par les sommets $X' = X \setminus \{i\}$.

Le graphe G' est clairement sans cycle, ce qui implique par l'hypothèse d'induction qu'il possède au plus $n - 1$ arc. C'est-à-dire $d_G(i) < 2$ impose que T diffère de T' par au plus un arc, de la forme (i, j) . Par suite $|T|$ est inférieure à n .

Définition 2.4.1. [10]

Un arbre, par définition est un graphe connexe et sans cycles.

Définition 2.4.2.

Un graphe acyclique est un graphe qui ne contient pas des cycles (non nécessairement connexe).

Un graphe connexe acyclique est appelé un arbre.

Remarque 2.4.1. [10]

Un arbre est un graphe orienté simple sans boucle, ayant $(n - 1)$ arcs.

Théorème 2.4.1.

Soit $H = (X, U)$ un graphe avec $n = |X| \geq 2$ sommets. Les six propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

- (1)– H est connexe et sans cycle ;
- (2)– H est sans cycle et admet $(n - 1)$ arcs ;
- (3)– H est connexe et admet $(n - 1)$ arcs ;
- (4)– H est sans cycle et en ajoutant un arc, on crée un cycle (et un seul) ;
- (5)– H est connexe et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe ;
- (6)– Tout couple des sommets est reliés par une chaîne et une seule.

Démonstration 2.4.1.

- (1) \implies (2) : si p est le nombre des composantes connexes, n le nombre des sommets et m le nombre d'arcs alors $p = 1$ et $\mu(H) = m - n + p = 0$ donc $m = n - p = n - 1$.
- (2) \implies (3) : $\mu(H) = 0$ et $m = n - 1 \implies p = \mu(H) - n + 1 + n = 1$ donc est connexe.
- (3) \implies (4) : $p = 1$ et $m = n - 1 \implies \mu(H) = m - n + p = 0$ et en ajoutant un arc $\mu(H) = 1$.
- (4) \implies (5) : si H n'est pas connexe, on prend les sommets i et j non connectés, alors l'ajout de l'arc (i, j) ne suffit pas pour créer un cycle donc est connexe, $p = 1$, $\mu(H) = 0$

et $m = n - 1$. En supprimant un arc, on obtient un graphe H' tel que $m' = n' - 2$

et $\mu(H') = 0 \implies p' = \mu(H') - m' + n' = 2$ et n'est plus connexe.

- (5) \implies (6) : H est connexe donc pour toute paire de sommets i et j , il existe une chaîne $v = (i, j)$ et une seule car dans le cas contraire la suppression d'un arc ne suffirait pas pour déconnecter le graphe.
- (6) \implies (1) : il existe une chaîne entre tout couple des sommets donc H est connexe et il n'y a pas de cycle sinon on pourrait créer deux chaînes.

Propriété 2.4.2. [8]

$H = (X, T)$ est un arbre si et seulement si il existe une chaîne et une seule entre deux sommets quelconques.

Corollaire 2.4.1.

Soit $H = (X, T)$ un arbre, si on ajoute un arc u_k le graphe $H' = (X, T \cup \{u_k\})$ contient un cycle et un seul.

Démonstration 2.4.2.

D'après la définition d'un arbre les cycles de H' contiennent tous l'arc u_k . Si H' comportait deux cycles distincts il y aurait H deux chaînes distinctes joignant les extrémités de l'arc u_k . Ceci est contradiction avec le fait que H est un arbre, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle.

Corollaire 2.4.2.

Un graphe connexe $G = (X, U)$ possède un graphe partiel qui est un arbre.

Démonstration 2.4.3.

S'il existe $u_k \in U$ tel que $H = (X, U \setminus \{u_k\})$ soit encore connexe, on considère H et ainsi de suite jusqu'à ce que le graphe obtenu soit connexe minimal.

Définition 2.4.3. [10]

Une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre. C'est-à-dire un graphe sans cycle.

Définition 2.4.4.

Un arbre couvrant (maximal) pour un graphe connexe $G = (X, U)$ est un arbre construit uniquement à partir des arcs de U et qui connecte ("couvre") tous les sommets de X .

Un arbre couvrant d'un graphe G est donc un graphe H tel que :

- Le graphe H est un arbre ;

- Le graphe H est un graphe partiel de G .

Pour construire un arbre couvrant H dans un graphe orienté connexe $G = (X, U)$ nous utilisons la manière suivante :

- On considère un arc quelconque u_1 ;
- Choisissons un arc u_2 qui ne forme pas de cycle avec l'arc u_1 ;
- Puis choisissons un arc u_3 qui ne forme pas de cycle avec $\{u_1, u_2\}$;
- Lorsque la procédure ne pourra plus se continuer, on aura un arbre maximal H .

2.4.1 Base des cycles associe à l'arbre

Théorème 2.4.2. [3]

$G = (X, U)$ un graphe connexe, $H = (X, E)$ un arbre maximal de G .

Si u_k est un arc de G ne figurant pas dans H , son adjonction à H détermine un cycle Γ^k , et les différents cycles Γ^k constituent une base des cycles indépendants (appelés les cycles associés à l'arbre H). .

Exemple 2.4.1.

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe tel que $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}\}$,

$H = (X, E) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_9\}$ est un arbre maximal de G ,

$\mu(G) = m - n + p = 11 - 8 + 1 = 4$,

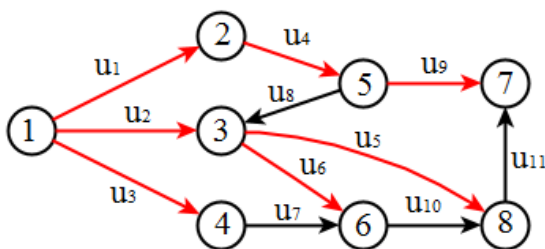


FIGURE 2.6 – Arbre H associé au graphe G

La base des cycles associée à l'arbre est l'ensemble $\{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \Gamma^4\}$.

Arc ajoute	Cycle crée
u_7	$\Gamma^1 = (u_7, u_6, u_2, u_3)$
u_8	$\Gamma^2 = (u_8, u_2, u_1, u_4)$
u_{10}	$\Gamma^3 = (u_{10}, u_5, u_6)$
u_{11}	$\Gamma^4 = (u_{11}, u_9, u_4, u_1, u_2, u_5)$

TABLE 2.3 – La base des cycles associée à l’arbre de la figure 2.6

Définition 2.4.5.

Un sommet i d’un graphe connexe $G = (X, U)$ est une racine s’il existe un chemin joignant i à chaque sommet du graphe G .

2.4.2 Arborescence

Définition 2.4.6. [9]

Un graphe connexe $G = (X, U)$, avec $|X| = n \geq 2$ sommets est une arborescence de racine i si :

- G est un arbre ;
- i est une racine.

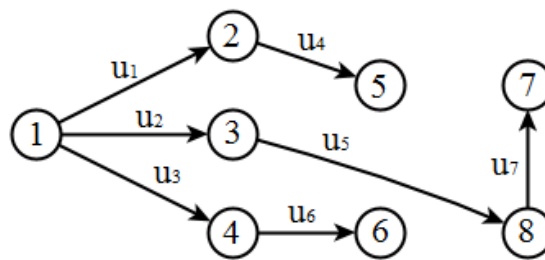


FIGURE 2.7 – Une arborescence

Remarque 2.4.2. [10]

Une arborescence est un arbre mais la réciproque est fausse.

2.4.3 Coarbre

Définition 2.4.7.

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe, on dit que le graphe partiel $G' = (X, E)$ est un coarbre

de G si et seulement si le graphe partiel $G'' = (X, U - E)$ est un arbre de G .

Théorème 2.4.3. [3]

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe, et (V, W) une partition de U en deux classes :

$$V \cup W = U, \quad V \cap W = \emptyset,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que (X, W) soit un coarbre est que (X, V) soit un arbre.

Propriété 2.4.3. [8]

$G' = (X, E)$ est un coarbre de $G = (X, U)$ si et seulement si il ne contient pas de cocycle élémentaire de G , et est maximum avec cette propriété.

Théorème 2.4.4. [3]

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté connexe, $G' = (X, E)$ un coarbre de G : Si u_k est un arc ne figurant pas dans G' , son adjonction à G' détermine un seul cocycle W^k , et les différents cocycles W^k constituent une base des cocycles indépendants.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré aux cycles et cocycles d'un graphe orienté ainsi que la base des cycles et la base des cocycles.

Notions des flots et tensions

Le flot est une notion très importante en théorie des graphes puisqu'elle permet de représenter des flux. Nous donnons quelques définitions et propriétés élémentaires sur les flots et tensions.

3.1 Flots

3.1.1 Flot dans un graphe

Définition 3.1.1.

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté connexe avec $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Un flot dans un graphe G est un vecteur $F = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m))^T \in \mathbb{R}^m$ qui affecte à chaque arc u_k un nombre $f(u_k)$ tel que :

en tout sommet $i \in X$, la première loi de Kirchhoff (loi de conservation aux nœuds) est vérifiée, c'est à dire :

$$\sum_{u_k \in \omega^+(i)} f(u_k) = \sum_{u_k \in \omega^-(i)} f(u_k). \quad (3.1)$$

Définition 3.1.2.

Soit A la matrice d'incidence sommets-arcs du graphe $G = (X, U)$ orienté connexe (sans boucles) alors un flot $F = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m))^T$ dans G est :

$$A.F = A.(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m))^T = 0_m$$

du fait de la loi conservation aux nœuds.

3.1.2 Flot dans un réseau

Définition 3.1.3. réseau[3]

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté connexe sans boucle comportant n sommets.

Nous supposons qu'il existe dans X deux sommets particuliers 1 et n tels que $\Gamma^-(1) = \emptyset$ et $\Gamma^+(n) = \emptyset$, avec 1 est appelé sommet entrée ou source noté $1 = s$ et n est appelé sommet sortie ou puits noté $n = p$ ($p \neq s$). De plus, nous affectons à chaque arc $u_k = (i, j) \in U$ une quantité $c(i, j) \geq 0$ qui représente la capacité de cet arc. Ce graphe est appelé réseau, il est défini par le triplet $R = (X, U, C)$, où $C = \{c_{ij}, (i, j) \in U\}$.

On considère le graphe $G^{m+1} = (X, U^{m+1})$ déduit de G en rajoutant un arc $u_{m+1} = (p, s)$ dont les extrémités initiale et terminale sont respectivement p et s .

L'arc $u_{m+1} = (p, s)$ est appelé l'arc de retour du flot. Les arcs de G^{m+1} sont donc numérotés $1, 2, \dots, m, m+1$.

Définition 3.1.4.

Soit un réseau de transport $R = (X, U, C)$, un flot dans un réseau est vérifiant les trois propriétés suivantes (est appelé flot réalisable) :

1. R est un 1-graphe antisymétrique ;
2. **Contrainte de capacité** : $\forall u_k \in U : 0 \leq f(u_k) \leq c(u_k)$;
3. **Loi de conservation aux nœuds** : $\sum_{u_k \in \omega^+(i)} f(u_k) = \sum_{u_k \in \omega^-(i)} f(u_k), \forall i \in X \setminus \{s, p\}$. (3.2)

Remarque 3.1.1.

- La composante $f(u_k)$ est appelée la quantité de flux sur l'arc u_k ;
- La relation (3.2) exprime simplement que le flot est déterminé par la donnée du flux pour tout les arcs du réseau de transport, et la somme des flux entrant en un sommet est égale la somme des flux sortant de ce sommet (loi de Kirchhoff) ;
- La valeur du flot est :

$$f = \sum_{u_k \in \omega^+(s)} f(u_k) = \sum_{u_k \in \omega^-(p)} f(u_k);$$

- Si $F = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m))^T$ est un flot de s à p dans G est de valeur f , alors $F' = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m), f(u_{m+1}))^T$ est un flot dans G^{m+1} ;
- $\forall i \in X \setminus \{s, p\}$, il existe un chemin(chaine) depuis s passant par i et allant à p ;
- Chaque arc de R possède la capacité et le flux qui le traverse. Comme le montre le graphe de la **figure 3.1** :

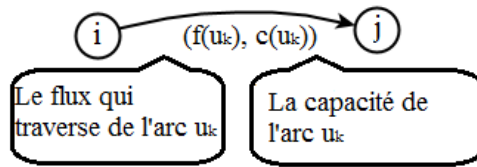


FIGURE 3.1 – Capacité et flux d'un arc

3.1.3 Opérations sur les flots

Les flots que l'on a considérés plus haut sont des vecteurs de l'espace \mathbb{Z}^m , où \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers > 0 , < 0 ou $= 0$. voire [3]

L'espace \mathbb{Z}^m n'est pas un « espace vectoriel » sur \mathbb{Z} (car \mathbb{Z} n'est pas un « corps »), mais un « module » sur \mathbb{Z} , avec les opérations usuelles :

$$s, t \in \mathbb{Z}^m \quad \Rightarrow \quad s + t = (s_1 + t_1, \dots, s_m + t_m) \in \mathbb{Z}^m,$$

$$\lambda \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}^m \quad \Rightarrow \quad \lambda s = (\lambda s_1, \dots, \lambda s_m).$$

De ce fait, l'ensemble Φ de tous les flots d'un graphe G constituent un sous-module de \mathbb{Z}^m , c'est-à-dire qu'on a :

- $\alpha * F$ est un flot sur R ;
- $f(u_1) + f(u_2)$ est un flot sur R ;
- $f(u_1) - f(u_2)$ est un flot sur R .

Théorème 3.1.1. [3]

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté connexe ; $H = (X, V)$ un arbre maximal de G ; $1, 2, \dots, k$ représentent respectivement u_1, u_2, \dots, u_k les arcs de $U - V$; $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^k$ les cycles associés à H . Un flot F est défini d'une façon unique par ses valeurs $f(1), f(2), \dots, f(k)$ sur $U - V$ par :

$$F = f(1)\Gamma^1 + f(2)\Gamma^2 + \dots + f(k)\Gamma^k.$$

Corollaire 3.1.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur F soit un flot est qu'il soit de la forme :

$$F = \alpha_1\Gamma^1 + \alpha_2\Gamma^2 + \dots + \alpha_k\Gamma^k,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$, et $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^k$ sont des cycles élémentaires.

Preuve 3.1.1.

Comme un cycle est un flot, toute combinaison linéaire des cycles est un flot. La réciproque découle immédiatement du théorème 3.1.1, car on peut supposer le graphe G connexe.

Théorème 3.1.2. [3]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur F soit un flot ≥ 0 est qu'il soit de la forme :

$$F = \alpha_1 \Gamma^1 + \alpha_2 \Gamma^2 + \dots + \alpha_k \Gamma^k,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$ et $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^k$ sont des circuits.

3.2 Flot compatible

Définition 3.2.1.

Un flot F est dit compatible dans un réseau $R = (X, U, C)$ si :

$$\forall u_k \in U, b(u_k) \leq f(u_k) \leq c(u_k),$$

où : $b(u_k)$ est la capacité minimum de l'arc u_k , $c(u_k)$ est la capacité maximum de l'arc u_k .

Définition 3.2.2. [8]

Si F est un flot dans R , alors pour tout sous-ensemble de sommets $S \subset X$:

$$\sum_{u_k \in \omega^+(S)} f(u_k) - \sum_{u_k \in \omega^-(S)} f(u_k) = 0;$$

Cette equation exprime simplement que la somme des flux entrant dans S est égale à la somme des flux sortant de S une conséquence directe de la loi de Kirchhoff.

Si F est un flot compatible, on doit alors avoir nécessairement :

$$\sum_{u_k \in \omega^+(S)} c(u_k) - \sum_{u_k \in \omega^-(S)} b(u_k) \geq 0, \forall S \subset X.$$

3.2.1 Théorème du flot compatible (Hoffman 1960)

Théorème 3.2.1.

Etant donné un graphe $G = (X, U)$ et pour chaque arc $u_k \in U$ deux nombres $b(u_k)$ et $c(u_k)$ tels que : $b(u_k) \leq c(u_k)$ une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un flot F vérifiant :

$$b(u_k) \leq f(u_k) \leq c(u_k), \forall u_k \in U,$$

est que :

$$\sum_{u_k \in \omega^+(A)} c(u_k) - \sum_{u_k \in \omega^-(A)} b(u_k) \geq 0,$$

Pour tout cocycle $W(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$.

Preuve 3.2.1.

Si un flot compatible F existe, on a :

$$0 = \sum_{u_k \in \omega^+(A)} f(u_k) - \sum_{u_k \in \omega^-(A)} f(u_k) \leq \sum_{u_k \in \omega^+(A)} c(u_k) - \sum_{u_k \in \omega^-(A)} b(u_k).$$

3.3 Flot complet

Définition 3.3.1. [6]

Soit un réseau de transport $R = (X, U, C)$, un flot est dit complet si toute chaîne allant de sommet s à p contient au moins un arc u_k saturé, c'est-à-dire un arc u_k tel que :

$$f(u_k) = c(u_k)$$

3.4 Flot maximum

Définition 3.4.1.

Un flot maximum dans un réseau de transport $R = (X, U, C)$ est un flot compatible ($b_i = 0$) de valeur maximale, c'est-à-dire la composante F sur l'arc de retour soit maximale (le flux sur l'arc de retour = la valeur de flot).

3.4.1 Capacité d'une coupe

Définition 3.4.2. [8]

Soit $S \subset X$ un sous ensemble des sommets de $R = (X, U, C)$, tels que $s \in S$ et $p \notin S$, on dit que $\omega^+(A) = \{u_k \in U / I(u_k) \in S \text{ et } T(u_k) \notin S\}$ est une coupe séparant s et p (s-p coupe).

La capacité de la coupe S est la somme des capacité des arcs S :

$$\zeta(S) = \sum_{u_k \in \omega^+(S)} c(u_k).$$

Théorème 3.4.1.

Pour tout flot F et toute coupe S séparant s et p , on a :

$$f \leq \zeta(S).$$

Preuve 3.4.1.

Soit $S \subset X$ un sous ensemble des sommets de $R = (X, U, C)$, tels que $s \in S$ et $p \notin S$ et S une $s - p$ coupe et F' est un flot réalisable. D'après la loi de Kirchhoff, on a :

$$\sum_{u_k \in \omega^+(S)} f(u_k) = \sum_{u_k \in \omega^-(S)} f(u_k),$$

Comme l'arc $u_{m+1} \in \omega^-(S)$, on peut ainsi écrire :

$$\sum_{u_k \in \omega^+(S)} f(u_k) = \sum_{u_k \in \omega^-(S) \setminus \{u_{m+1}\}} f(u_k) + f(u_{m+1}),$$

D'où :

$$f = f(u_{m+1}) = \sum_{u_k \in \omega^+(S)} f(u_k) - \sum_{u_k \in \omega^-(S) \setminus \{u_{m+1}\}} f(u_k),$$

Comme le flot F' est réalisable, alors on a :

$$\forall u_k \in U : 0 \leq f(u_k) \leq c(u_k),$$

D'où :

$$\sum_{u_k \in \omega^+(S)} f(u_k) \leq \sum_{u_k \in \omega^+(S)} c(u_k) = \zeta(S),$$

et

$$\sum_{u_k \in \omega^-(S) \setminus \{u_{m+1}\}} f(u_k) \geq 0,$$

Par conséquent, on aura :

$$f \leq \zeta(S),$$

Ce résultat montre que la valeur maximale d'un flot ne dépasse jamais la capacité d'une coupe séparant s et p .

Corollaire 3.4.1. [8]

Si un flot F et une coupe S vérifie $f = \zeta(S)$, alors F est un flot maximum de s à p et S est une coupe de capacité minimale séparant s et p .

Proposition 3.4.1. [8]

Une condition nécessaire et suffisante pour un problème du flot maximum de s à p dans $R = (X, U, C)$ admet une solution de valeur finie, est qu'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre s et p .

3.4.2 Chaîne améliorante

Définition 3.4.3. [13]

Soit F un flot réalisable et CH est une chaîne élémentaire reliant s et p , on note par :

- CH^+ : l'ensemble des arcs de CH ayant le sens de parcours de (s, p) ;
- CH^- : l'ensemble des arcs de CH ayant le sens de parcours inverse de (s, p) .

Un chaîne CH est dite améliorant (augmentante) si et seulement si elle est composée d'arcs non saturés, c'est-à-dire elle vérifie :

$$\begin{cases} f(u_k) \leq c(u_k) & \forall u_k \in CH^+, \\ f(u_k) > 0 & \forall u_k \in CH^-. \end{cases}$$

Si on trouve une telle chaîne CH , alors on calcule l'augmentation de flot qu'elle permet, notée ξ (capacité résiduelle), tel que : $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ avec

$$\xi_1 = \min_{u_k \in CH^+} \{c(u_k) - f(u_k)\};$$

$$\xi_2 = \min_{u_k \in CH^-} \{f(u_k)\};$$

Donc, on augmente la valeur de flot de ξ unités de tous les arcs de CH^+ et on diminue le flot des arcs de CH^- de ξ unités. Ce termine quand on n'arrive pas à déterminer une chaîne améliorante et dans ce cas le flot est maximal.

3.4.3 Recherche d'une chaîne améliorante

Pour chercher une chaîne améliorante reliant s et p , on peut utiliser la procédure de marquage suivante :

- On marque le sommet source s d'un "+" et poser $S = \{s\}$, $CH^+ = CH^- = \emptyset$;
- On marque d'un "+" un sommet $j \notin S$ tel que : $f(u_k) \leq c(u_k)$, $i \in S$ avec $u_k = (i, j)$

$$CH^+ = CH^+ \cup \{i, j\}, S = S \cup \{j\};$$

- On marque d'un "-" un sommet $j \notin S$ tel que : $f(u_k) > 0$, $i \in S$ avec $u_k = (i, j)$

$$CH^- = CH^- \cup \{j, i\}, S = S \cup \{j\};$$

- On arrête la procédure lorsqu'on marque le sommet puits p et obtenu une chaîne améliorant $CH = CH^+ \cup CH^-$ de s à p ;
- Si p n'est pas marqué, terminé le flot est maximum.

Remarque 3.4.1.

- Si on a pas marqué le sommet puits p , alors la chaîne améliorante n'existe pas;
- Il existe plusieurs choix pour trouver une chaîne améliorant mais il faut toujours vérifie que la procédure de marquage est parfait.

3.5 Tensions

Définition 3.5.1. [2]

Soit un graphe orienté connexe $G = (X, U)$. Une tension sur un graphe G est un vecteur $\tau = (\tau(u_1), \tau(u_2), \dots, \tau(u_m))^T \in \mathbb{R}^m$, tel que pour tout cycle élémentaire Γ on ait :

$$\sum_{u_k \in \Gamma^+} \tau(u_k) = \sum_{u_k \in \Gamma^-} \tau(u_k),$$

On peut aussi exprimer cette égalité avec le produit scalaire :

$$\langle \Gamma, \tau \rangle = \sum \Gamma(u_k) \cdot \tau(u_k) = 0.$$

3.5.1 Opérations sur les tensions

On désigne par Θ l'ensemble des tensions. On remarque que Θ est un sous-module de \mathbb{Z}^m , c'est-à-dire :

$$\tau(u_1), \tau(u_2) \in \Theta \quad \Rightarrow \quad \tau(u_1) + \tau(u_2) \in \Theta;$$

$$\beta \in \mathbb{Z}, \tau \in \Theta \quad \Rightarrow \quad \beta \cdot \tau \in \Theta.$$

3.5.2 Propriété sur les tensions

Théorème 3.5.1. [3]

Dans un graphe $G = (X, U)$ un vecteur $\tau = (\tau(u_1), \tau(u_2), \dots, \tau(u_m))^T \in \mathbb{R}^m$ est une tension si

et seulement s'il existe une fonction $t(i)$ définie sur l'ensemble X et à valeurs dans \mathbb{Z} telle que pour tout arc u_k on ait :

$$\tau(u_k) = t(T(u_k)) - t(I(u_k)),$$

La fonction t est un potentiel attaché à la tension τ .

Corollaire 3.5.1.

Le vecteur représentatif d'un cocycle est une tension.

Preuve 3.5.1.

Considérons le cocycle $W(A)$, où :

$$A \subset X \quad \text{et} \quad t(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \notin A, \\ 0 & \text{si } i \in A. \end{cases}$$

On aura :

$$t(T(u_k)) - t(I(u_k)) = \omega_k = \begin{cases} 1 & \text{si } u_k \in \omega^+, \\ -1 & \text{si } u_k \in \omega^-, \\ 0 & \text{si } u_k \notin W. \end{cases}$$

Théorème 3.5.2.

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe; $H = (X, V)$ un arbre maximal; $1, 2, \dots, l$ représentent respectivement u_1, u_2, \dots, u_l les arcs de cet arbre; W^1, W^2, \dots, W^l les cocycles associés à H ; une tension $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)^T$ est définie d'une façon unique par ses valeurs sur les arcs de l'arbre au moyen de la formule :

$$\tau = \tau_1 W^1 + \tau_2 W^2 + \dots + \tau_l W^l.$$

Preuve 3.5.2.

En effet, le vecteur

$$\tau' = \tau - \tau_1 W^1 - \tau_2 W^2 - \dots - \tau_l W^l$$

est une tension qui a ses valeurs nulles sur tous les arcs de l'arbre $H = (X, V)$; si τ' est défini par une fonction-potential $t'(i)$, on a donc :

$$t'(1) = t'(2) = \dots = t'(n),$$

On a par conséquent $\tau' = 0$, et l'on a bien la formule annoncée.

Corollaire 3.5.2.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur τ soit une tension est qu'il soit de la forme :

$$\tau = \beta_1 W^1 + \beta_2 W^2 + \dots + \beta_k W^k,$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{Z}$, et W^1, W^2, \dots, W^k sont des cocycles élémentaires.

Preuve 3.5.3.

En effet toute combinaison linéaire de cocycles élémentaires est une tension, et inversement d'après le théorème 3.5.2.. Le théorème 3.5.2., est important, car il permet, dans un problème où l'on doit déterminer une tension

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)^T,$$

de ramener le nombre d'inconnues de m à $\lambda(G) = n - 1$.

Théorème 3.5.3. [3]

Une condition nécessaire et suffisante pour que τ soit une tension ≥ 0 est que l'on ait :

$$\tau = \beta_1 W^1 + \beta_2 W^2 + \dots + \beta_k W^k,$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{Z}$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \geq 0$ et où W^1, W^2, \dots, W^k sont des cocircuits élémentaires.

3.6 Le problème de la tension maximum

Considérons un réseau $R = (X, U, C)$, dont les arcs sont dénotés par u_1, u_2, \dots, u_m ; considérons d'autre part des nombres $h(u_1), h(u_2), \dots, h(u_m)$; $l(u_1), l(u_2), \dots, l(u_m) \in \mathbb{Z}$, avec

$$-\infty \leq h(u_k) \leq l(u_k) \leq +\infty.$$

On peut se poser les problèmes suivants :[3]

– **Problème de la tension compatible**

Trouver pour un réseau R une tension τ , avec

$$h(u_k) \leq \tau(u_k) \leq l(u_k), \quad \forall u_k \in U.$$

– **Problème de la tension maximum**

Trouver pour un réseau R une tension τ telle que :

1. $h(u_k) \leq \tau(u_k) \leq l(u_k), \quad \forall u_k \in U$;
2. L'arc de retour est maximum.

3.6.1 Théorème de la tension compatible (Ghouila-Houri, 1960)

Théorème 3.6.1.

Etant donné un réseau R et des nombres $h(u_k)$ et $l(u_k)$, avec $-\infty \leq h(u_k) \leq l(u_k) \leq +\infty$ (pour tout $u_k \in U$), une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une tension $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$, avec $h(u_k) \leq \tau(u_k) \leq l(u_k)$ (pour tout $u_k \in U$), est que pour tout cycle Γ , on ait :

$$\sum_{u_k \in \Gamma^+} l(u_k) = \sum_{u_k \in \Gamma^-} h(u_k) \geq 0.$$

Preuve 3.6.1.

Si une telle tension τ existe, on a, pour tout cycle Γ :

$$0 = \langle \Gamma, \tau \rangle = \langle \Gamma^+, \tau \rangle = \langle \Gamma^-, \tau \rangle \geq \sum_{u_k \in \Gamma^+} h(u_k) - \sum_{u_k \in \Gamma^-} l(u_k),$$

les flots F ont pour support les cycles et les tensions τ ont pour support les cocycles.

Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté la théorie des réseaux de transport et le problème de flot et tension dans les réseaux.

Les problèmes des flots maximum

Les problèmes des flots maximum peut correspondre à un problème d'acheminement de tonnages disponibles sur des bateaux, des camions, des wagons ou à des canalisations, à des voies de transmission ...etc, vers une destination. Par exemple, l'alimentation journalière d'une ville en gaz peut être considérée comme un problème du flot, si on s'intéresse à la quantité de gaz que cette ville peut recevoir.

4.1 Le problème du flot maximum

Le problème du flot maximum consiste à trouver la quantité maximum de flot à acheminer de source s vers la puits p et vérifie, les contraintes de capacité.

4.2 L'algorithme pour la recherche d'un flot maximum

L'algorithme le plus connu pour résoudre ce problème est celui de Ford et Fulkerson.

4.2.1 L'algorithme de Ford et Fulkerson

L'algorithme de Ford et Fulkerson est un algorithme pour le problème du flot maximum, un problème d'optimisation classique dans le domaine de la recherche opérationnelle.

4.2.2 Les étapes de l'algorithme de Ford et Fulkerson

– **Étape(1) Initialisation :**

Démarrer à partir d'un flot réalisable (par exemple $F = 0$), $h = 0$;

– **Étape(2) Procédure de marquage :**

À l'itération h , soit F^h un flot réalisable; cherche une chaîne augmentante CH^h reliant s à p en utilisant la procédure de marquage précédente; si CH^h n'existe pas alors le flot F^h est maximal et on s'arrête;

sinon, aller à l'étape(3);

– **Étape(3) mise à jour du flot F^{h+1} :**

Soit ξ^h la capacité résiduelle de la chaîne améliorante, alors poser :

$$f(u_k)^{h+1} = \begin{cases} f(u_k)^h + \xi^h & \text{si } u_k \in CH^{h+} \\ f(u_k)^h - \xi^h & \text{si } u_k \in CH^{h-} \\ 0 & \text{si } u_k \notin CH^h \end{cases}$$

Efface le marquage et $h = h + 1$ et retourner en l'étape (2).

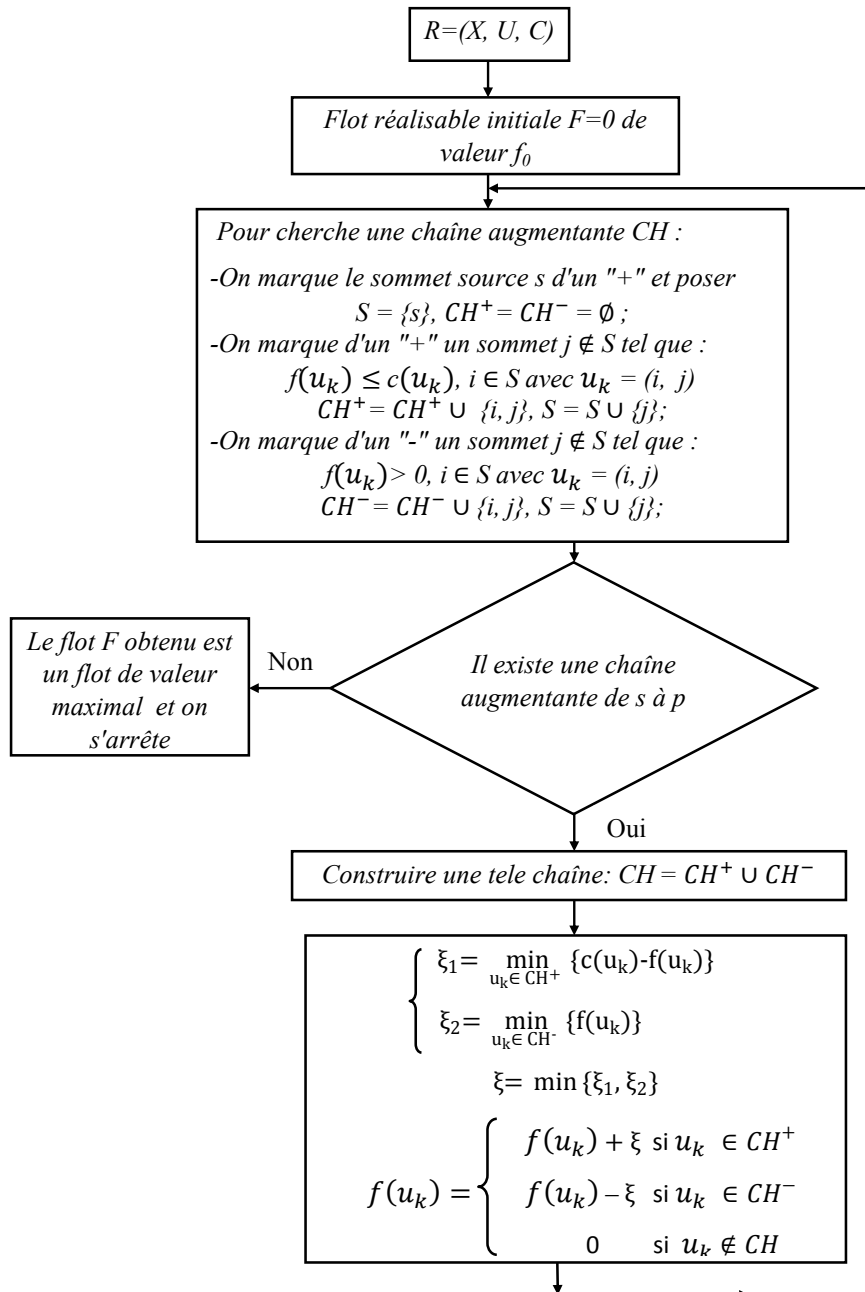
Remarque 4.2.1.

Si on n'arrive pas à marquer le sommet p , alors la chaîne augmentante n'existe pas.

Remarque 4.2.2. [13]

La coupe S est composée de l'ensemble d'arcs reliant l'ensemble des sommets marqués à l'ensemble des sommets non marqués.

4.3 Organigramme de l'algorithme de Ford et Fulkerson



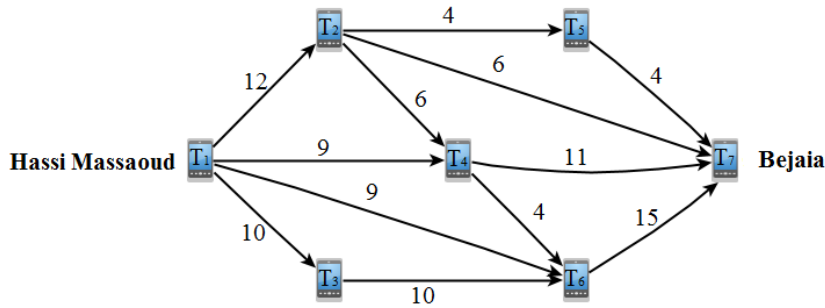
4.3.1 Quelques exemples

Exemple 4.3.1.

Une compagnie (SONATRACH) ayant deux stations de base possède 7 postes $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ de retransmission des appels téléphoniques entre Hassi Massaoud et Bejaia.

- Les appels de Hassi Massaoud passent tous par le poste T_1 qui les achemine vers les autres postes ;
- Les appels arrivant au poste T_7 sont tous acheminés vers Bejaia.

Problème : Soit F le différent d'appels passant dans le réseau de T_1 (la source) à T_7 (la destination), comment répartir les appels dans le réseau de façon à maximiser F ?



- **Résolution :**

Pour résoudre ce problème on lui applique l'algorithme de Ford et Fulkerson :

On commence par le flot nul $F^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ de valeur $f^0 = 0$, et les sommets $s, 2, 3, 4, 5, 6, p$ représente respectivement les postes T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 et T_6, T_7 .

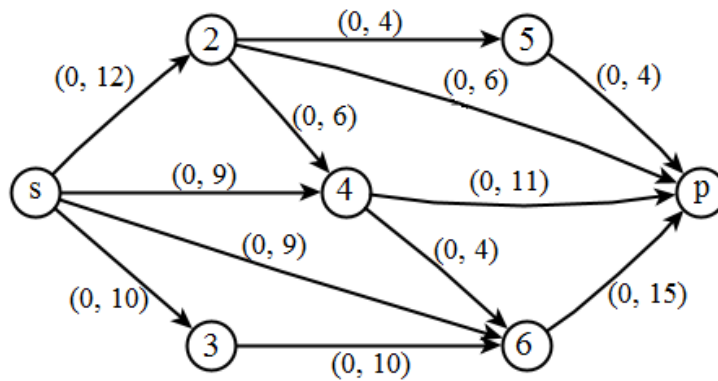


FIGURE 4.1 – Réseau associé à la modélisation

• **Initialisation** : On marque le sommet s par le signe $+$.

On pose : $S = \{s\}; CH^+ \cup CH^- = \emptyset$ et on a $f^k = 0$ avec $k = 0$.

• **Itération 1** : Dans le réseau R , on suit la procédure de marquage suivante :

– On marque le sommet 2 d'un $+$, car il est successeur de s et $f(s, 2) = 0 \leq c(s, 2) = 12$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [s, 2], S = S \cup \{2\}$;

– On marque le sommet 5 d'un $+$, car il est successeur de 2 et $f(2, 5) = 0 \leq c(2, 5) = 4$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [2, 5], S = S \cup \{5\}$;

– On marque le sommet p d'un $+$, car il est successeur de 5 et $f(5, p) = 0 \leq c(5, p) = 4$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [5, p], S = S \cup \{p\}$. Le sommet p était marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 2, 5, p]$ reliant le sommet s et p . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - f(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 2) - f(s, 2); c(2, 5) - f(2, 5); c(5, p) - f(5, p)\} \\ &= \min\{12 - 0; 4 - 0; 4 - 0\} = 4 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot F^0 pour obtenir un nouveau flot F^1 , en ajoutant la quantité $\xi = 4$ au flot des arcs de CH^+ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et $f^1 = 0 + 4$.

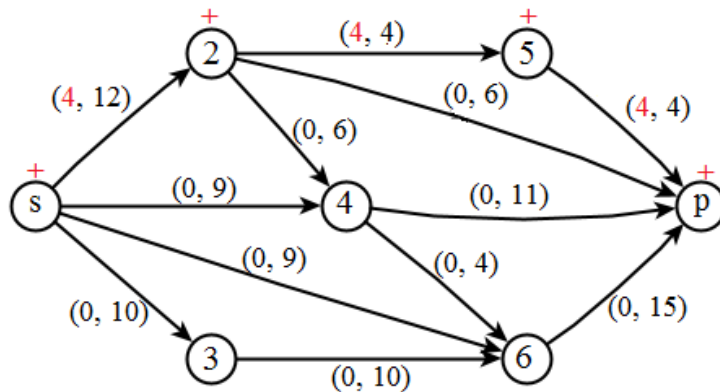


FIGURE 4.2 – Résultat de la première itération

• **Itération 2** : Dans le réseau R , on suit la procédure de marquage suivante :

On efface les marques sauf en s .

– On marque le sommet 2 d'un $+$, car il est successeur de s et $f(s, 2) = 4 \leq c(s, 2) = 12$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [s, 2], S = S \cup \{2\}$;

– On marque le sommet p d'un $+$, car il est successeur de 2 et $f(2, p) = 0 \leq c(2, p) = 6$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [2, p], S = S \cup \{p\}$. Le sommet p était marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 2, p]$ reliant le sommet s et p . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - f(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 2) - f(s, 2); c(2, p) - f(2, p)\} \\ &= \min\{10 - 4; 6 - 0\} = 6 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot F^1 pour obtenir un nouveau flot F^2 , en ajoutant la quantité $\xi = 6$ au flot des arcs de CH^+ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et $f^2 = 4 + 6 = 10$.

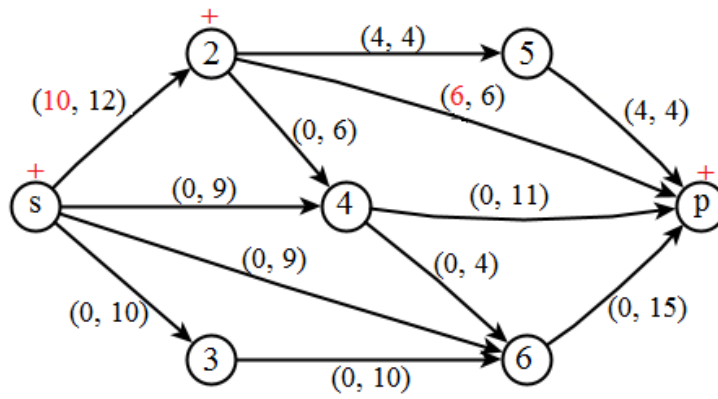


FIGURE 4.3 – Résultat de la deuxième itération

• **Itération 3 :** Dans le réseau R , on suit la procédure de marquage suivante :

On efface les marques sauf en s .

– On marque le sommet 2 d'un +, car il est successeur de s et $f(s, 2) = 10 \leq c(s, 2) = 12$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [s, 2], S = S \cup \{2\}$;

– On marque le sommet 4 d'un +, car il est successeur de 2 et $f(2, 4) = 0 \leq c(2, 4) = 6$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [2, 4], S = S \cup \{4\}$;

– On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de 4 et $f(4, p) = 0 \leq c(4, p) = 11$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [4, p], S = S \cup \{p\}$. Le sommet p était marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 2, 4, p]$ reliant le sommet s et p . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - f(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 2) - f(s, 2); c(2, 4) - f(2, 4); c(4, p) - f(4, p)\} \\ &= \min\{12 - 10; 6 - 0; 11 - 0; \} = 2 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot F^2 pour obtenir un nouveau flot F^3 , en ajoutant la quantité $\xi = 2$ au flot des arcs de CH^+ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et $f^3 = 4 + 6 + 2 = 12$.

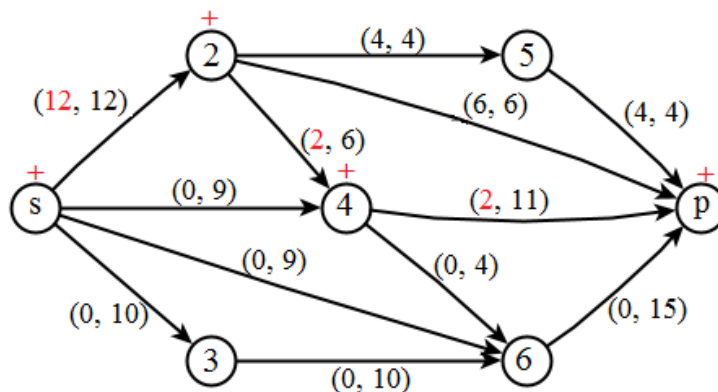


FIGURE 4.4 – Résultat de la troisième itération

• **Itération 4 :** Dans le réseau R , on suit la procédure de marquage suivante :

On efface les marques sauf en s .

– On marque le sommet 4 d'un +, car il est successeur de s et $f(s, 4) = 0 \leq c(s, 4) = 9$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [s, 4], S = S \cup \{4\}$;

– On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de 4 et $f(4, p) = 2 \leq c(4, p) = 11$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [4, p], S = S \cup \{p\}$. Le sommet p était marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 4, p]$ reliant le sommet s et p . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - f(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 4) - f(s, 4); c(4, p) - f(4, p)\} \\ &= \min\{9 - 0; 11 - 2\} \\ &= 9 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot F^3 pour obtenir un nouveau flot F^4 , en ajoutant la quantité $\xi = 4$ au flot des arcs de CH^+ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et $f^4 = 12 + 9 = 21$.

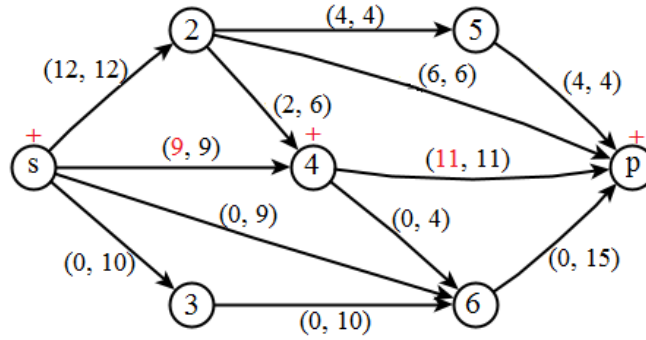


FIGURE 4.5 – Résultat de la quatrième itération

• **Itération 5 :** Dans le réseau R , on suit la procédure de marquage suivante :

On efface les marques sauf en s .

– On marque le sommet 6 d'un $+$, car il est successeur de s et $f(s, 6) = 0 \leq c(s, 6) = 9$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [s, 6], S = S \cup \{6\}$;

– On marque le sommet p d'un $+$, car il est successeur de 6 et $f(6, p) = 0 \leq c(6, p) = 15$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [6, p], S = S \cup \{p\}$. Le sommet p était marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 6, p]$ reliant le sommet s et p . On calcule :

$$\xi_1 = \min\{c(u_k) - f(u_k); u_k \in CH^+\}$$

$$= \min\{c(s, 6) - f(s, 6); c(6, p) - f(6, p)\} = \min\{9 - 0; 15 - 0\} = 9$$

On améliore ainsi le flot F^4 pour obtenir un nouveau flot F^5 , en ajoutant la quantité $\xi = 9$ au flot des arcs de CH^+ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et $f^5 = 21 + 9 = 30$.

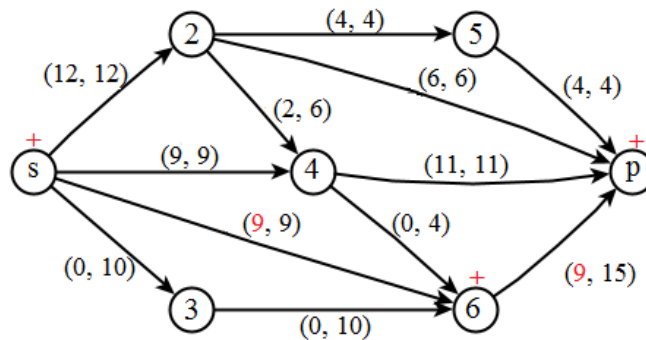


FIGURE 4.6 – Résultat de la cinquième itération

• **Itération 6** : Dans le réseau R , on suit la procédure de marquage suivante :

On efface les marques sauf en s .

– On marque le sommet 3 d'un +, car il est successeur de s et $f(s, 3) = 0 \leq c(s, 3) = 10$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [s, 3], S = S \cup \{3\}$;

– On marque le sommet 6 d'un +, car il est successeur de 3 et $f(3, 6) = 0 \leq c(3, 6) = 10$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [3, 6], S = S \cup \{6\}$;

– On marque le sommet p d'un +, car il est successeur de 6 et $f(6, p) = 9 \leq c(6, p) = 15$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [6, p], S = S \cup \{p\}$; Le sommet p était marqué, la procédure

s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 3, 6, p]$ reliant le sommet s et p .

On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - f(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 3) - f(s, 3); c(3, 6) - f(3, 6); c(6, p) - f(6, p)\} \\ &= \min\{10 - 0; 10 - 0; 15 - 9;\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot F^5 pour obtenir un nouveau flot F^6 , en ajoutant la quantité $\xi = 6$ au flot des arcs de CH^+ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et $f^6 = 30 + 6 = 36$.

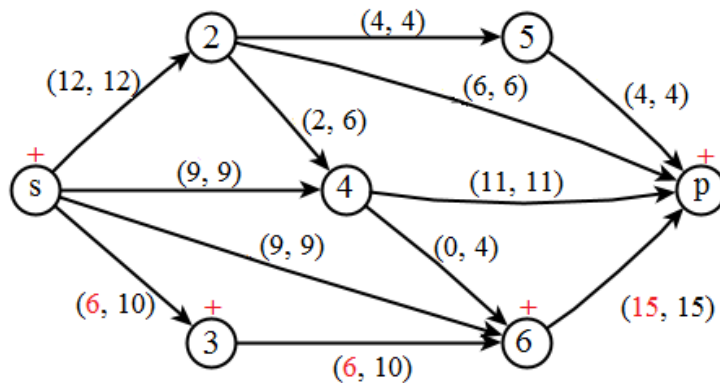


FIGURE 4.7 – Résultat de la sixième itération

• **Itération 7** : Dans le réseau R , on suit la procédure de marquage suivante :

On efface les marques sauf en s .

– On marque le sommet 3 d'un +, car il est successeur de s et $f(s, 3) = 6 \leq c(s, 3) = 10$,

On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [s, 3], S = S \cup \{3\}$;

- On marque le sommet 6 d'un +, car il est successeur de 3 et $f(3, 6) = 6 \leq c(3, 6) = 10$,
On pose : $CH^+ = CH^+ \cup [3, 6], S = S \cup \{6\}$;
- On ne peut pas marquer le sommet p , la procédure s'arrête. Donc le flot obtenu est maximum.

la valeur du flot est :

$$f = \sum_{u_k \in \omega^+(s)} f(u_k) = \sum_{u_k \in \omega^-(p)} f(u_k)$$

$$f = f(s, 2) + f(s, 4) + f(s, 6) + f(s, 3) = 12 + 9 + 9 + 6 = 36$$

$$= f(5, p) + f(2, p) + f(4, p) + f(3, p) = 4 + 6 + 11 + 15 = 36$$

La capacité de la coupe S est la somme des capacité des arcs $S = \{s, 3, 6\}$:

$$\zeta(S) = \sum_{u_k \in \omega^+(S)} c(u_k) = c(s, 2) + c(s, 4) + c(6, p) = 12 + 9 + 15 = 36$$

$$f = \zeta(S) = 36$$

Donc $F^6 = F$ est un flot maximum de s à p et S est une coupe de capacité minimale séparant s et p .

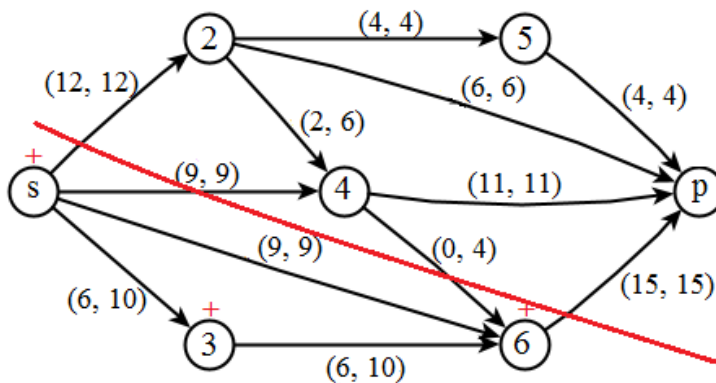


FIGURE 4.8 – Résultat de la dernière itération et la coupe minimale

Exemple 4.3.2. (Réseau distribution de Tchin-Lait)

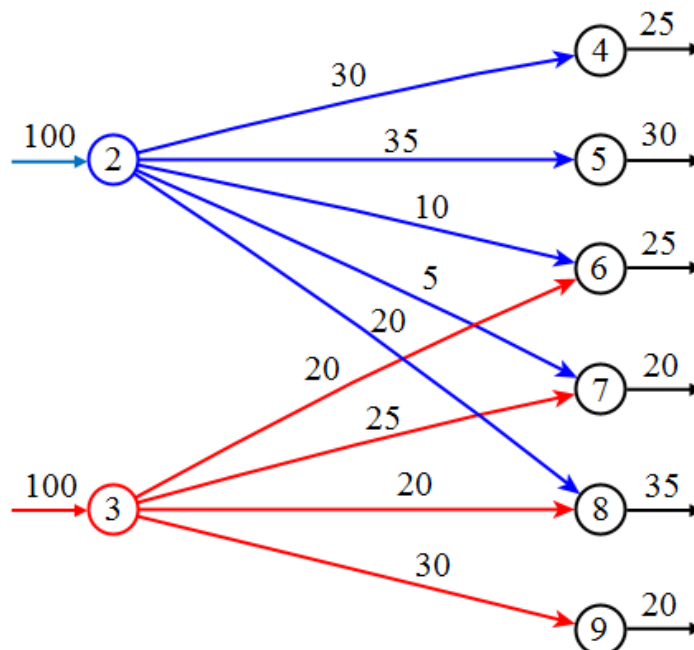
Le réseau de distribution de l'entreprise Tchin-Lait se compose d'un deux unités des fabrications (Bejaia, Alger), on dispose respectivement de 100, 100 tonnes de marchandises, On a des demandes de 25, 30, 25, 20, 35 et 20 tonnes aux grossistes (Jijel, Annaba, Setif, Tizi ouzou, Blida, Chelf) .

Il existe des possibilités de transport à l'aide de camions. Ces possibilités sont rapportées dans le tableau suivant :

C	Jijel	Annaba	Setif	Tizi ouzou	Blida	Chelf
Bejaia	30	35	10	5	20	0
Alger	0	0	20	25	20	30

La variable c_{ij} représente le nombre de capacité maximal de tonnes de marchandises transporté par chaque unités i (où $i = 2 = Bejaia, 3 = Alger$), à chaque grossiste j (où $j = 4 = Jijel, 5 = Annaba, 6 = Setif, 7 = Tiziouzou, 8 = Blida, 9 = Chelf$).

Le graphe associe est :



Problème : Déterminer un plan de transport permettant de transporter des origines aux destinations une quantité maximale.

– **Modélisation : cas où il ya plusieurs sources et plusieurs puits :**

On crée une super-source (s) qu'on relie à toutes les sources par un arc de capacité égale à la disponibilité de cette source ; on relie aussi tous les puits à super-puits (p) de capacité égale à la demande de ce puits.

Le graphe que modélisant ce problème est :

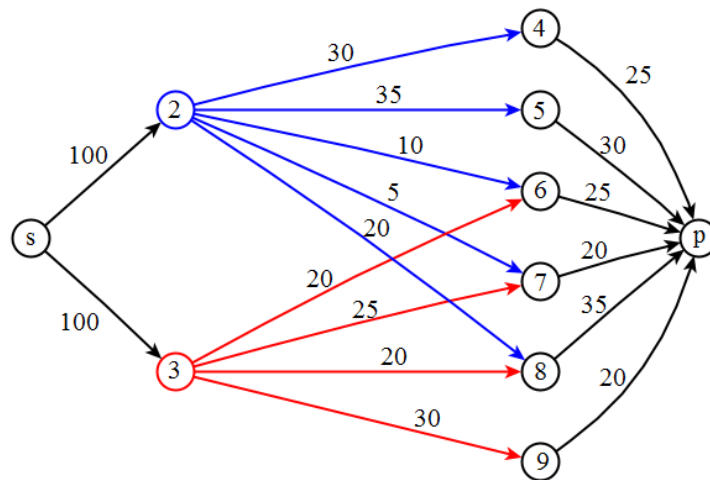


FIGURE 4.9 – Réseau associé après la modélisation

– **Résolution :**

Pour résoudre ce problème on lui applique l'algorithme de Ford et Fulkerson :

- **Initialisation :** On marque le sommet s par le signe $+$.

On pose : $S = \{s\}$; $CH^+ \cup CH^- = \emptyset$ et on a $f^h = 0$ et $F^h = 0$ avec $h = 0$.

• **Itération 1 :**

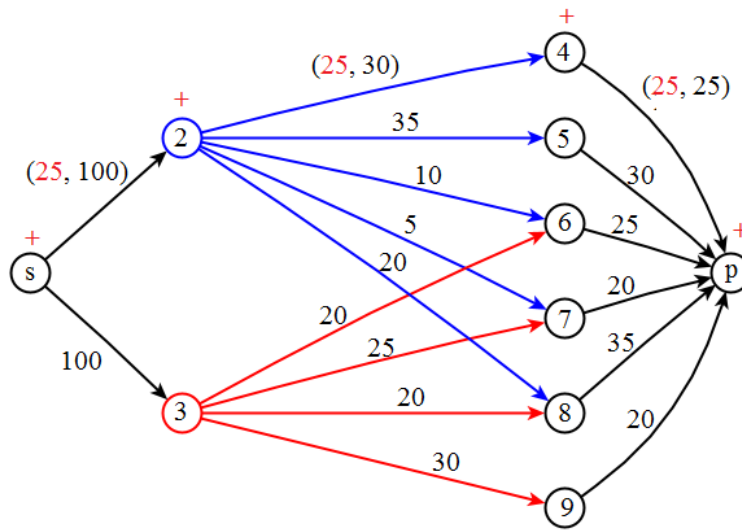


FIGURE 4.10 – Réseau obtenu à la première itération

• **Itération 2 :**

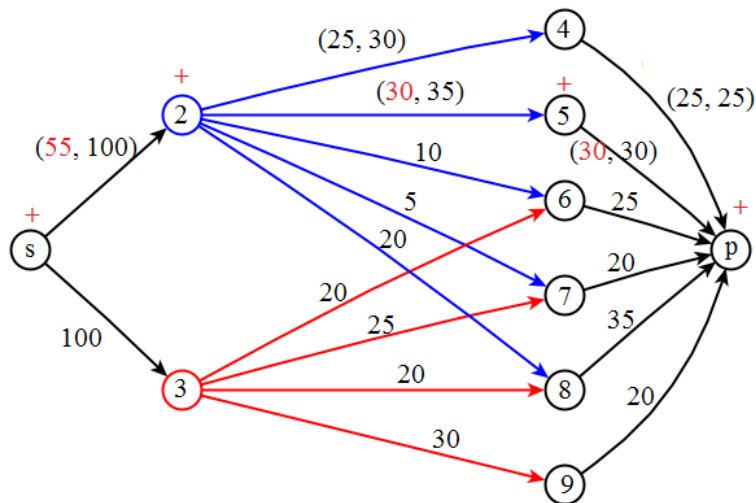


FIGURE 4.11 – Réseau obtenu à la deuxième itération

. **Itération 3 :**

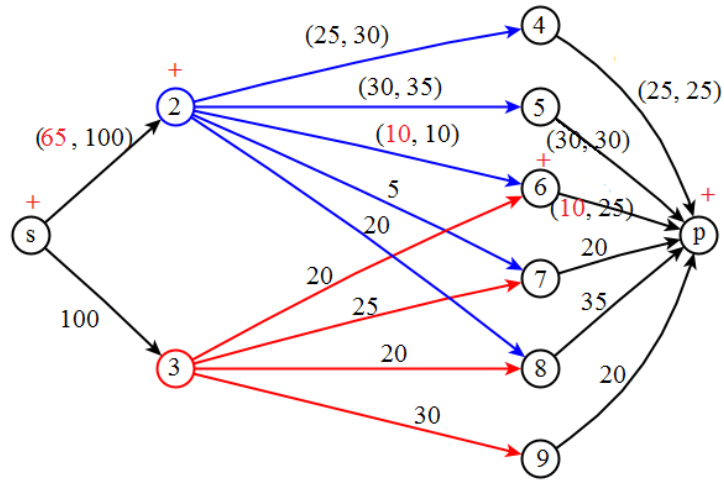


FIGURE 4.12 – Réseau obtenu à la troisième itération

. **Itération 4 :**

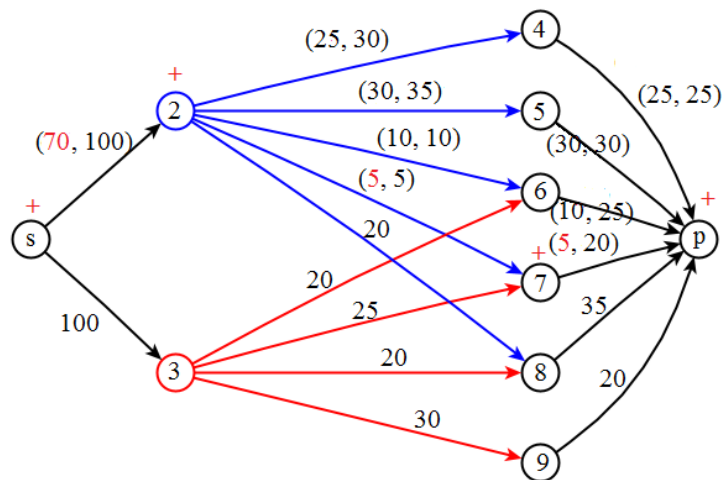


FIGURE 4.13 – Réseau obtenu à la quatrième itération

. Itération 5 :

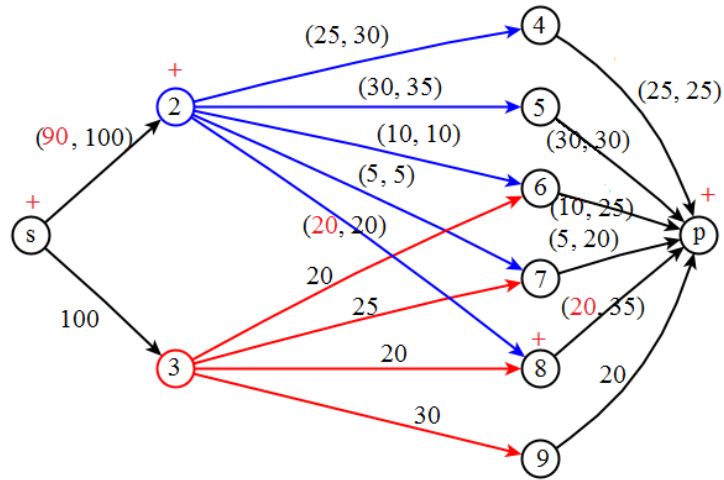


FIGURE 4.14 – Réseau obtenu à la cinquième itération

. Itération 6 :

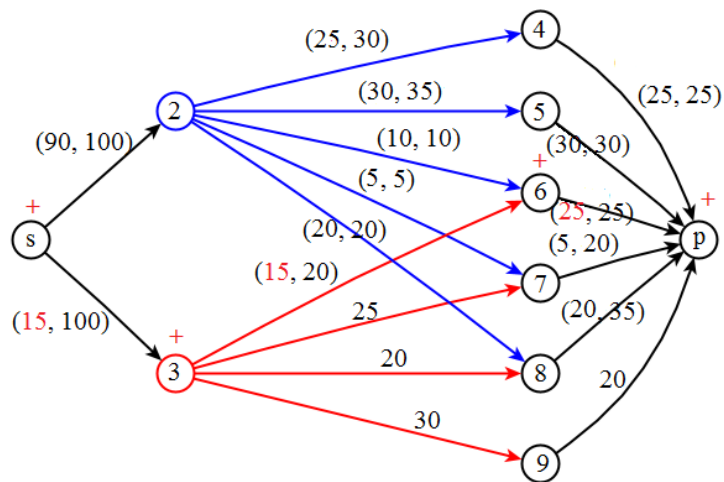


FIGURE 4.15 – Réseau obtenu à la sixième itération

. Itération 7 :

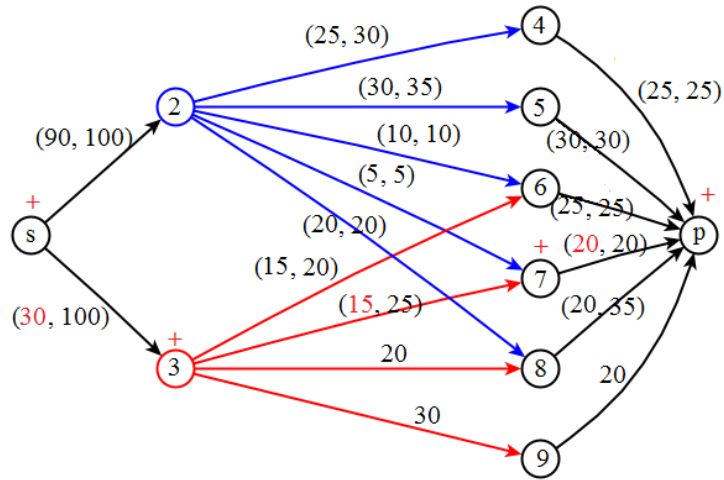


FIGURE 4.16 – Réseau obtenu à la septième itération

. Itération 8 :

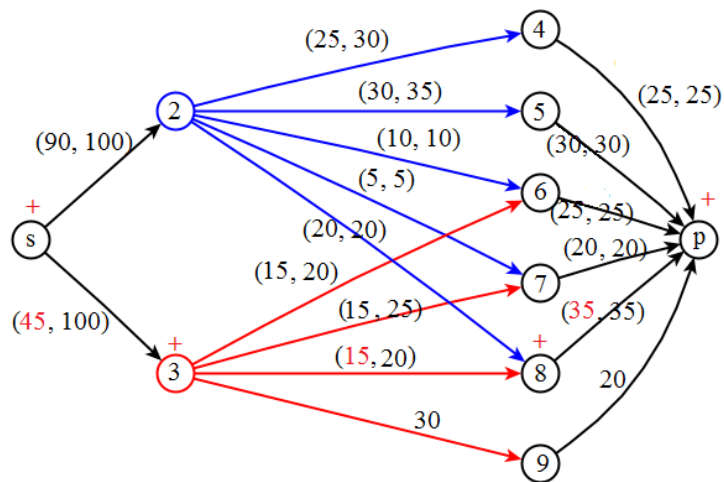


FIGURE 4.17 – Réseau obtenu à la huitième itération

• **Itération 9 :**

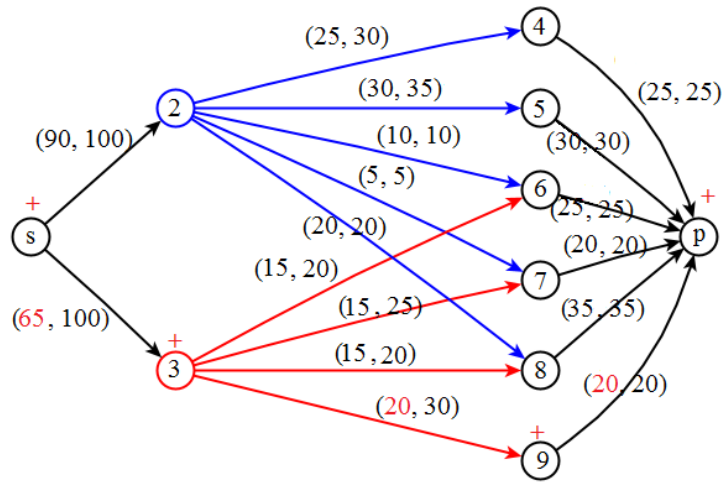


FIGURE 4.18 – Réseau obtenu à la neuvième itération

• **Itération 10 :**

- On ne peut pas marquer le sommet p , la procédure s'arrête. Donc le flot obtenu est maximum.

La valeur de flot est :

$$f = 25 + 30 + 10 + 5 + 20 + 15 + 15 + 15 + 20 = 155$$

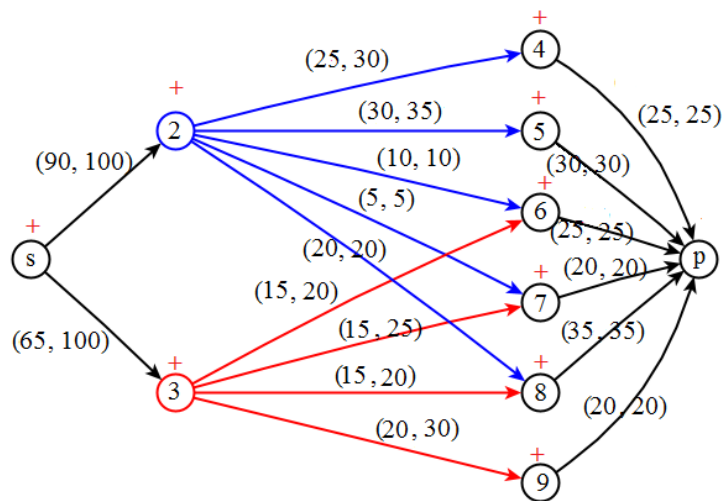


FIGURE 4.19 – Réseau obtenu à la dernière itération

Exemple 4.3.3. (Acheminement du pétrole)

La compagnie pétrolière SONATRACH souhaite acheminer du pétrole par oléoduc vers un pays

(Italie). Chaque oléoduc est directionnel et possède une capacité maximum (en litres par unité de temps) à ne pas dépasser. Nous cherchons à savoir quelle quantité maximum de pétrole nous pouvons envoyer du compagnie vers le pays (voir figure ci-dessous). Le problème est donc très proche du problème du flot maximum. La compagnie pétrolière est représentée par le sommet (s), le client par le sommet (p).

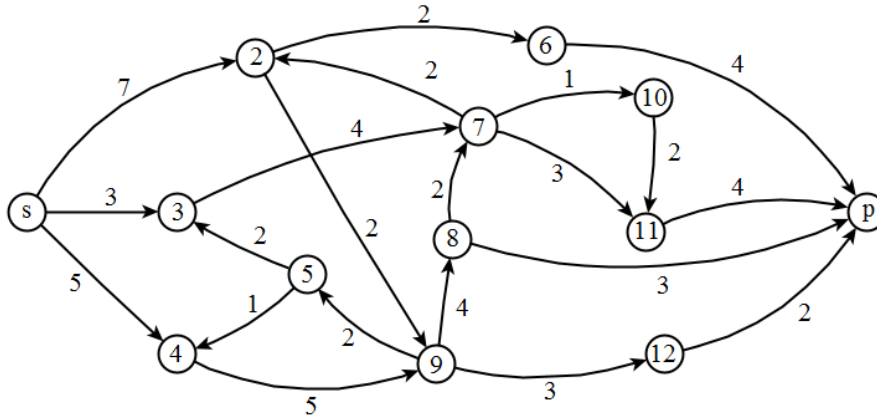


FIGURE 4.20 – Réseau associé au problème

– **Résolution :**

Pour résoudre ce problème on lui applique l’algorithme de Ford et Fulkerson :

- **Initialisation :** On marque le sommet s par le signe $+$.

On pose : $S = \{s\}$; $CH^+ \cup CH^- = \emptyset$ et on a $f^h = 0$ et $F^h = 0$ avec $h = 0$.

- **Itération 1 :**

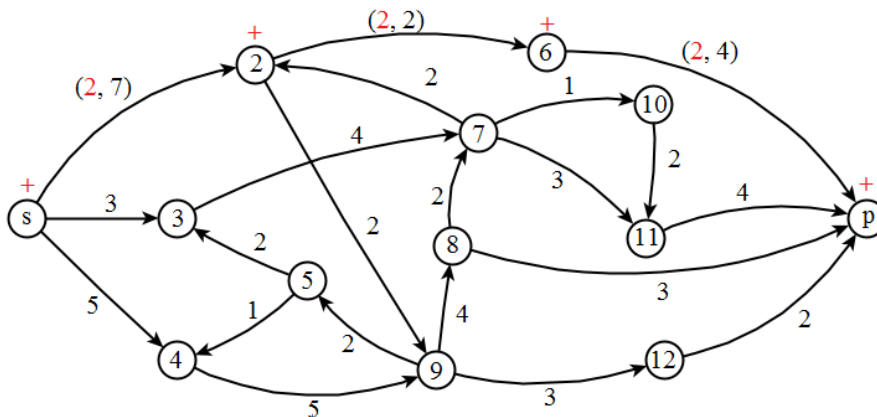


FIGURE 4.21 – Réseau obtenu à l’itération numéro 1

. Itération 2 :

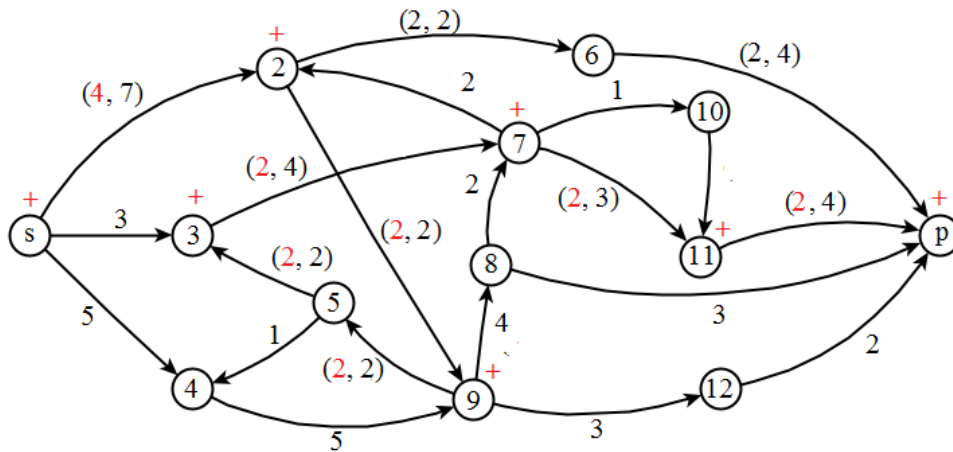


FIGURE 4.22 – Réseau obtenu à l'itération numéro 2

. Itération 3 :

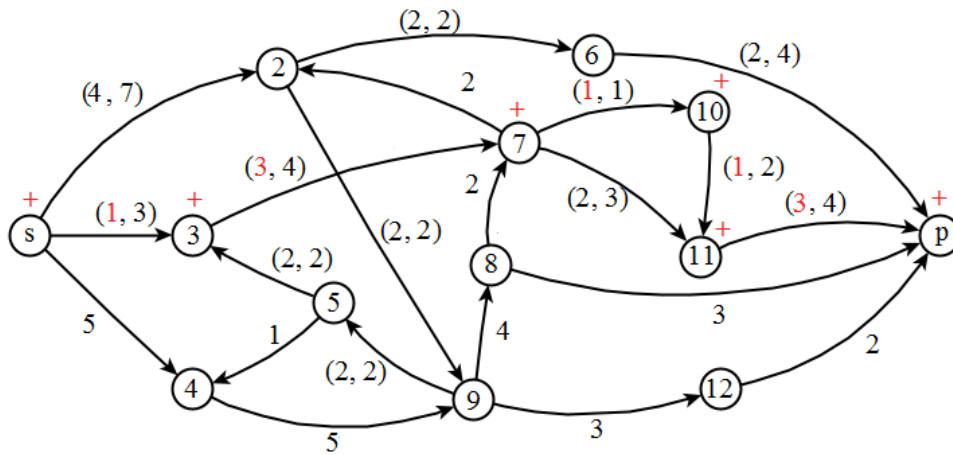


FIGURE 4.23 – Réseau obtenu à l'itération numéro 3

. Itération 4 :

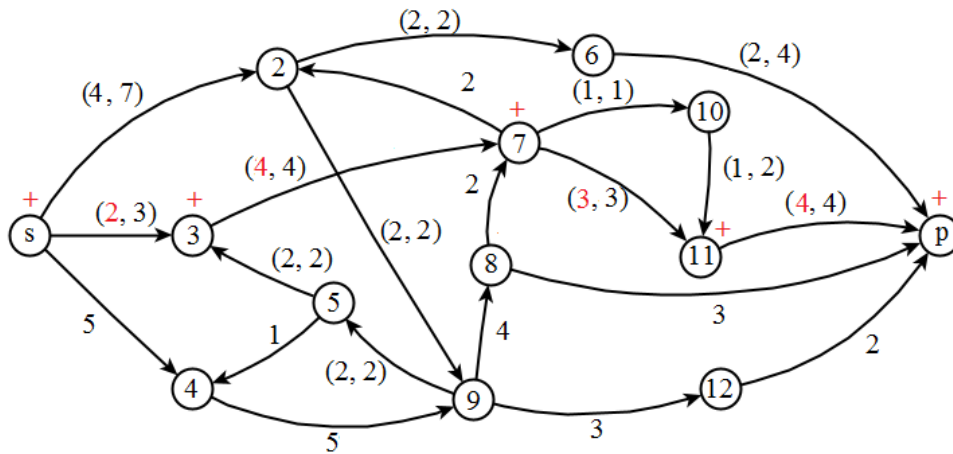


FIGURE 4.24 – Réseau obtenu à l'itération numéro 4

. Itération 5 :

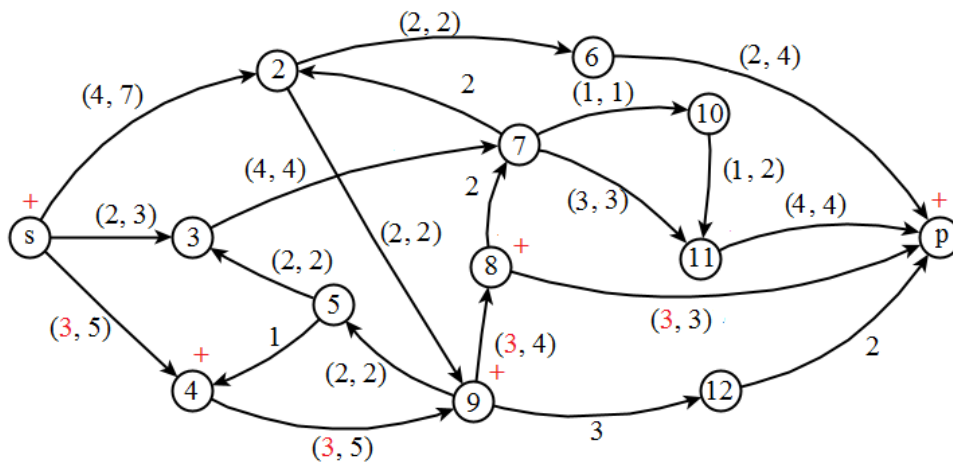


FIGURE 4.25 – Réseau obtenu à l'itération numéro 5

• **Itération 6 :**

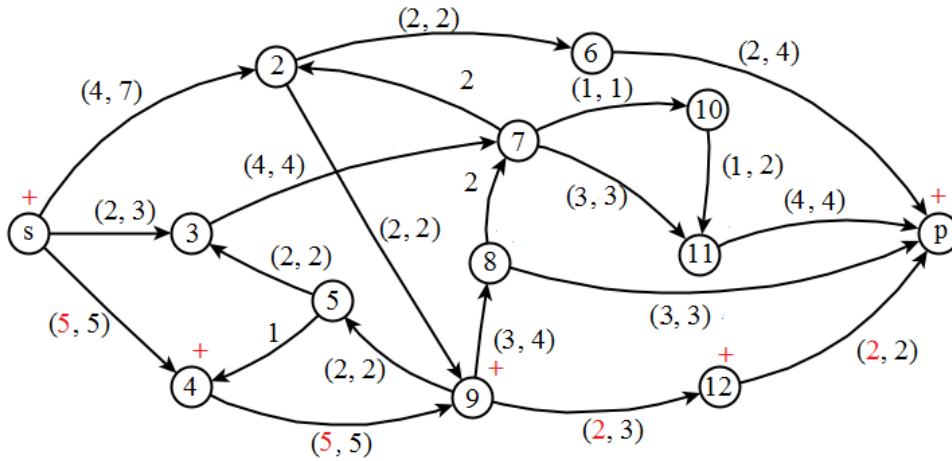


FIGURE 4.26 – Réseau obtenu à l'itération numéro 6

• **Itération 7 :**

- On ne peut pas marquer le sommet p , la procédure s'arrête. Donc le flot obtenu est maximum.

La valeur de flot est :

$$f = 2 + 2 + 1 + 1 + 3 + 2 = 11.$$

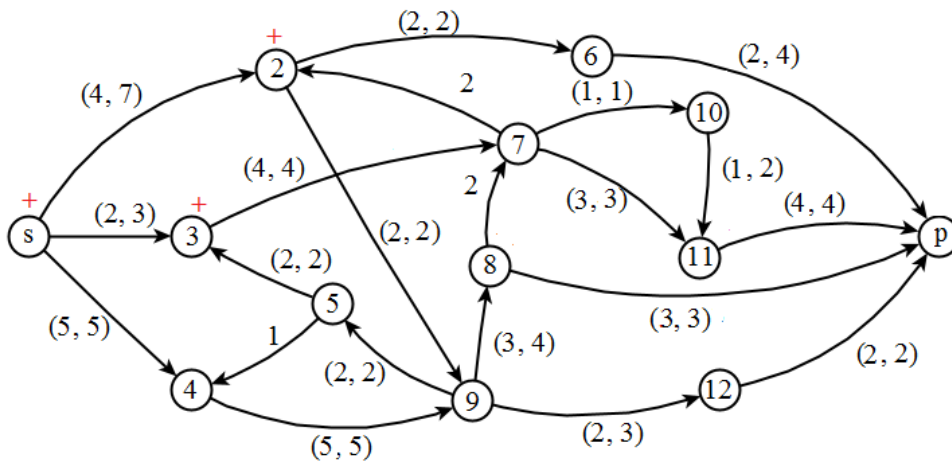


FIGURE 4.27 – Réseau obtenu à la dernière itération

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la méthode de résolution de différent problème dans les réseaux ainsi quelques exemples pour mieux comprendre leurs résolution.

Application sur MATLAB

Dans ce chapitre on va programmer un petit algorithme simple pour obtenir le flot maximum d'un réseau R donné, pour faire cet algorithme nous utiliserons le logiciel MATLAB.

5.1 Présentation du logiciel MATLAB

MATLAB est un logiciel de calcul numérique produit par MathWorks (voir le site web <http://www.mathworks.com>). Il est disponible sur plusieurs plateformes. MATLAB est un langage simple et très efficace, optimisé pour le traitement des matrices, d'où son nom. Pour le calcul numérique. MATLAB contient également une interface graphique puissante, ainsi qu'une grande variété d'algorithmes scientifiques.

Il existe aussi plusieurs versions de logiciel MATLAB, nous intéressons dans notre travail la version MATLAB 7.10.0 (R2010a).

5.2 Espace de travail dans MATLAB

À l'exécution, MATLAB affiche plusieurs fenêtres sur l'écran. Les deux types de fenêtres les plus importantes sont :

- "Command window", où toutes les commandes sont entrées ;
- "Editor Window" où l'utilisateur peut modifier ou créer des programmes MATLAB.

5.2.1 Fenêtre de commande

Une fois que MATLAB est parti, une fenêtre appelée "Command Window" apparaît sur l'écran. L'utilisateur peut entrer multiples commandes ou équations mathématiques après le signe "»" qui apparaît au côté gauche de la fenêtre. Pour exécuter une opération, il faut toujours appuyer sur la touche "enter" du clavier. De plus, il faut terminer l'opération par un point-virgule ";" sinon, toutes les étapes du calcul seront affichées sur l'écran.

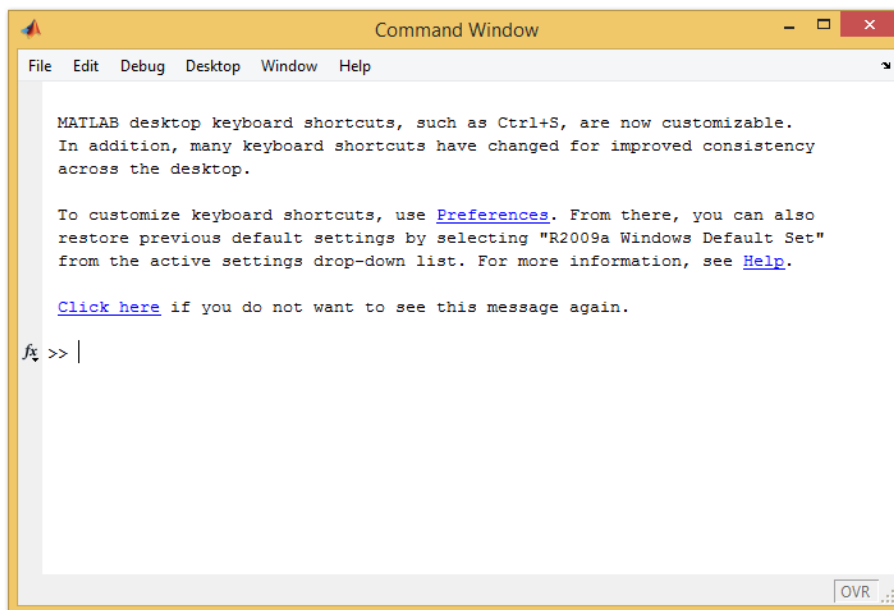


FIGURE 5.1 – Interface de la fenêtre de commande

5.2.2 Editor window

Au lieu de taper les commandes individuellement et directement dans la fenêtre de commande, il est possible de créer deux types de fichiers qui peuvent être programmés avec MATLAB : les fichiers SCRIPT et FUNCTION.

- **Fichiers SCRIPT**

Le fichier SCRIPT permet de lancer les mêmes opérations que celles écrites directement à l'invite MATLAB. Toutes les variables utilisées dans un SCRIPT sont disponibles à l'invite MATLAB ;

- **Fichiers FUNCTION**

L'idée de base d'une fonction est d'effectuer des opérations sur une ou plusieurs entrées ou arguments pour obtenir un résultat qui sera appelée sortie.

Il est important de noter que les variables internes ne sont pas disponibles à l'invite MATLAB.

- ▶ Le logiciel lit et exécute les programmes ligne par ligne. Lorsque MATLAB détecte une erreur, le logiciel arrête et envoie un message d'erreur ainsi que la ligne où l'erreur est détectée s'affichent à l'écran(Command Window). Apprendre à lire les messages d'erreur est donc important pour "débuguer" vos programmes rapidement et efficacement.
- ▶ Pour créer un nouveau fichier, allez dans le menu de sélection à : "File/New/Script" ou "File/New/Function"
- ▶ Pour ouvrir un fichier déjà créé, allez à : "File/Open" et choisissez le nom du fichier.
- ▶ Pour sauvegarder un fichier, allez dans le menu de sélection à : "File/Save As" et écrire le nom du fichier.

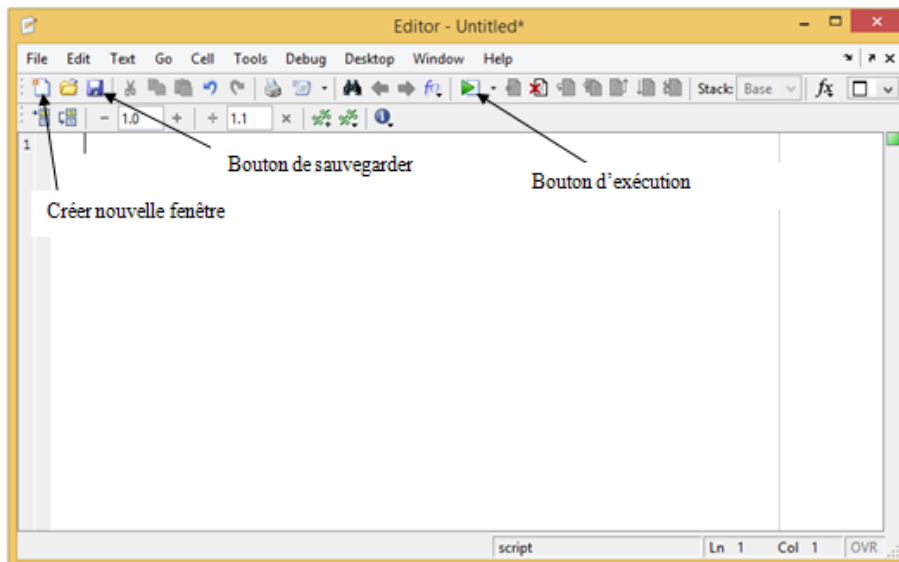


FIGURE 5.2 – Interface d'editor window

5.3 Obtenir de l'aide dans MATLAB

Il y a plusieurs manières d'obtenir de l'aide dans MATLAB.

- La première option est de taper dans la fenêtre de commande "help" suivi par le nom de la fonction que vous recherchez ;
- La deuxième option est de taper "helpwin" dans la fenêtre de commande. Ceci, vous affichera toutes les bibliothèques de Matlab incluant les fonctions de chacune d'elles.

Ensuite, choisissez la section "signal processing toolbox".

Ceci vous affichera toutes les fonctions disponibles.

5.4 Instructions de contrôle

Les instructions de contrôle sous matlab sont très proches de celles existant dans d'autres langages de programmation :

- **Boucle for** : parcours d'un intervalle;
- **Boucle while** : tant que faire;
- L'instruction conditionnée **if**.

5.5 Commandes et fonctions de MATLAB

Les principales commandes et fonctions les plus utilisées sont :

- **"quit"** : Permet de quitter MATLAB;
- **"ans"** : Réponse retournée après exécution d'une commande;
- **"clear"** : Efface toutes les variables existantes en mémoire;
- **"clc"** : Efface l'écran (fenêtre) de MATLAB;
- **"input(' ')"** : Introduire une ou des variables par l'intermédiaire du clavier;
- **"length"** : Renvoie la longueur d'un vecteur;
- **"zeros"** : Matrice de 0;
- **"return"** : Retour à la fonction appelée;
- **"break"** : Termine l'exécution d'une boucle for ou while;
- **"end"** : Termine les blocs des test;
- **" ~="** : Différent;
- **"=="** : Égal;
- **"&&"** : Et logique;
- **"fprintf(' ')"** : Format de sortie sur écran;
- **"disp"** : Permet d'afficher un tableau de valeurs numérique ou de caractères.

5.6 Application numérique

Cet exemple d'application que nous avons tiré du Web et que nous avons apporté des modifications (n'est pas réel).

Exemple 5.6.1. (Réseau de télécommunication)

On considère un réseau de télécommunication (Société Algérie Télécom), composé d'émetteurs/récepteurs pouvant envoyer des informations ayant une taille (octet, kilooctet, mégaoctet, gigaoctet). La société possède plusieurs agences (S.A.T) pour une seule wilaya, chacun peut transmettre des données entre les points (émetteurs/récepteurs) sur les fibres optiques vers la (S.A.T).

Chaque fibre optique a une capacité limite. Nous cherchons à savoir quelle taille maximale des données nous pouvons envoyer entre les points (émetteurs/récepteurs) sans perdre aucune informations.

- La carte géographique de l'Algérie indiquant les frontières entre les wilayas :

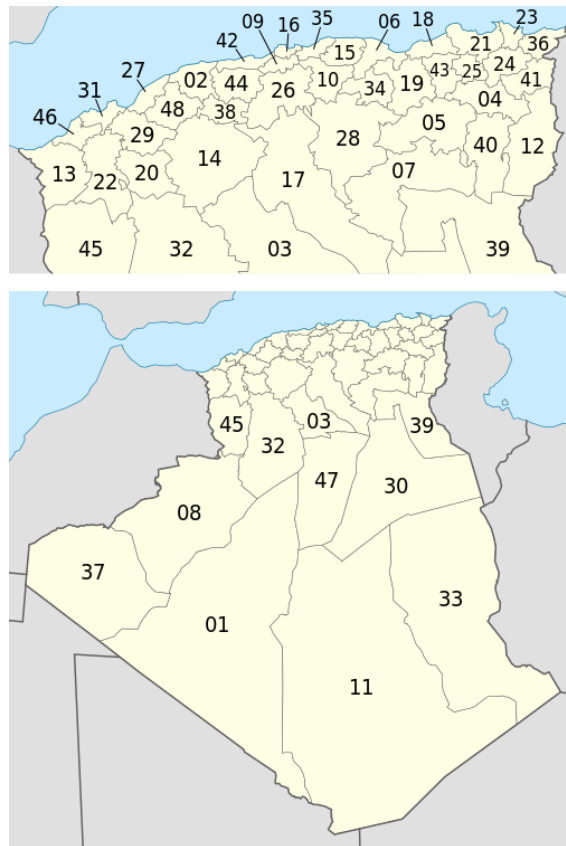


FIGURE 5.3 – La carte géographique de l'Algérie

. Le tableau suivant représente les différents codes de chaque wilaya :

(01) Adrar	(13) Tlemcen	(25) Constantine	(37) Tindouf
(02) Chlef	(14) Tiaret	(26) Medea	(38) Tissemsilt
(03) Laghouat	(15) Tizi ousou	(27) Mostaganem	(39) El-Oued
(04) Oum El Bouaghi	(16) Alger	(28) M'Sila	(40) Khenchela
(05) Batna	(17) Djelfa	(29) Mascara	(41) Souk Ahras
(06) Béjaia	(18) Jijel	(30) Ouargla	(42) Tipaza
(07) Biskra	(19) Setif	(31) Oran	(43) Mila
(08) Béchar	(20) Saïda	(32) El Bayadh	(44) Aïn Defla
(09) Blida	(21) Skikda	(33) Illizi	(45) Naâma
(10) Bouira	(22) Sidi Bel Abbès	(34) Bordj Bou Arreridj	(46) Aïn Témouchent
(11) Tamanrasset	(23) Annaba	(35) Boumerdès	(47) Ghardaïa
(12) Tébessa	(24) Guelma	(36) El Tarf	(48) Relizane

Considérons les wilayas 3, 14, 17, 38, 26, 28, 44, 10, 34, 09, 06, 15, 42, 35, 16, et le graphe associé aux wilayas concernées est donné par la **figure 5.4** :

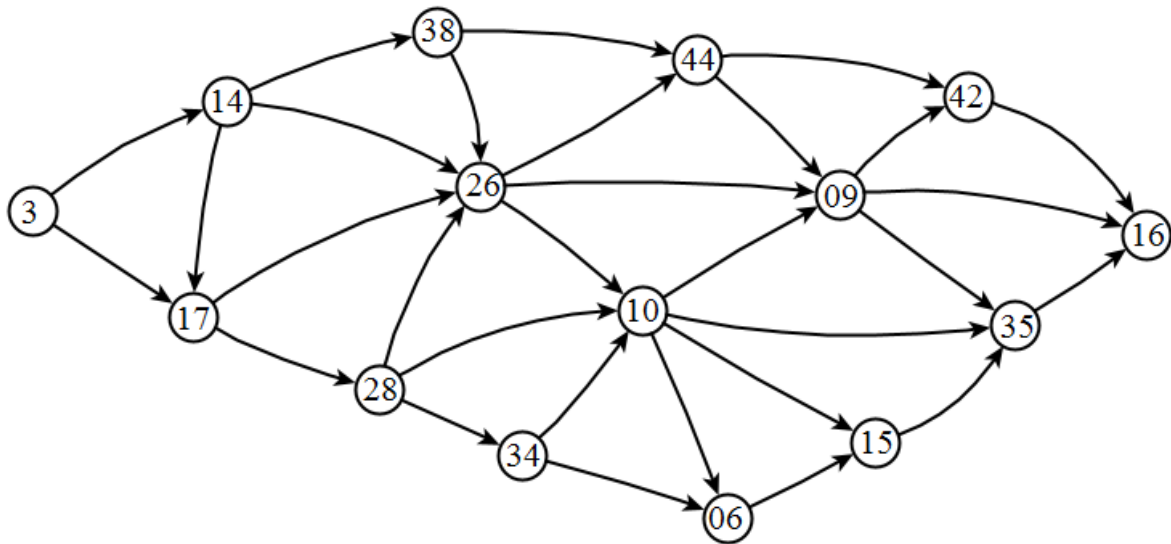


FIGURE 5.4 – Le lien entre quinze wilayas d'Algérie

- La sommet source représente la wilaya de Laghouat ;
- La sommet puits représente la wilaya de Alger ;
- Chaque émetteurs/récepteurs (wilaya) représente un sommet ;

- Les fibres optiques représente des arcs que reliant entre les wilayas ;
- $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ représente respectivement $\{3, 14, 17, 38, 26, 28, 44, 10, 34, 09, 06, 15, 42, 35, 16\}$: est l'ensemble des sommets ;
- U : L'ensemble des arcs ;
- C : Les capacités des arcs (en mégaocet par seconde), comme indiqué dans le graphe de la **figure 5.5**

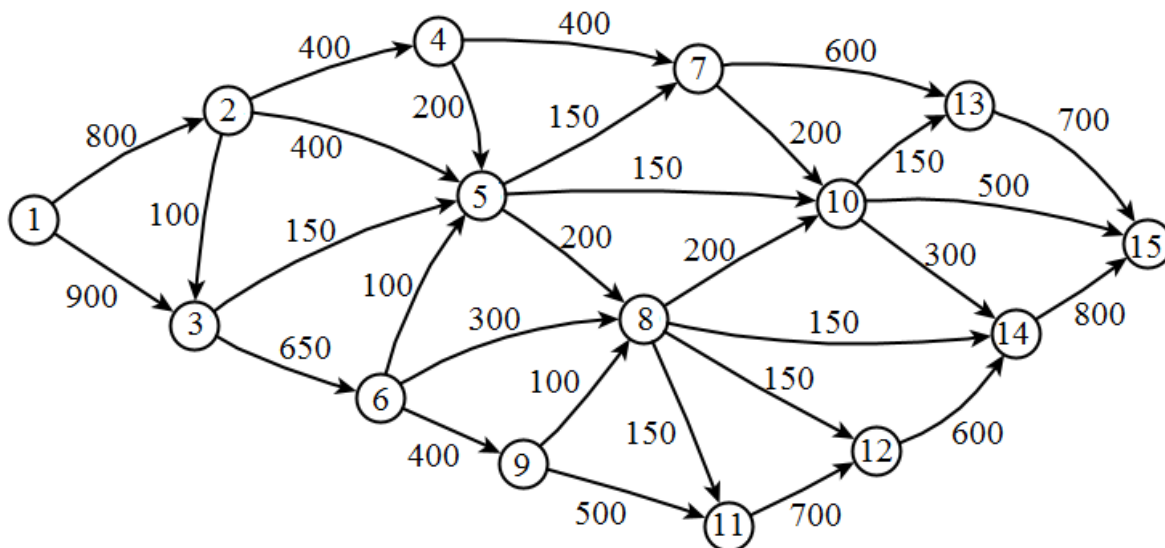


FIGURE 5.5 – Réseau de communication entre les quinze wilayas

- **Résolution :**

Pour la résolution de ce problème, on implémente l'algorithme de Ford et Fulkerson sur logiciel MATLAB.

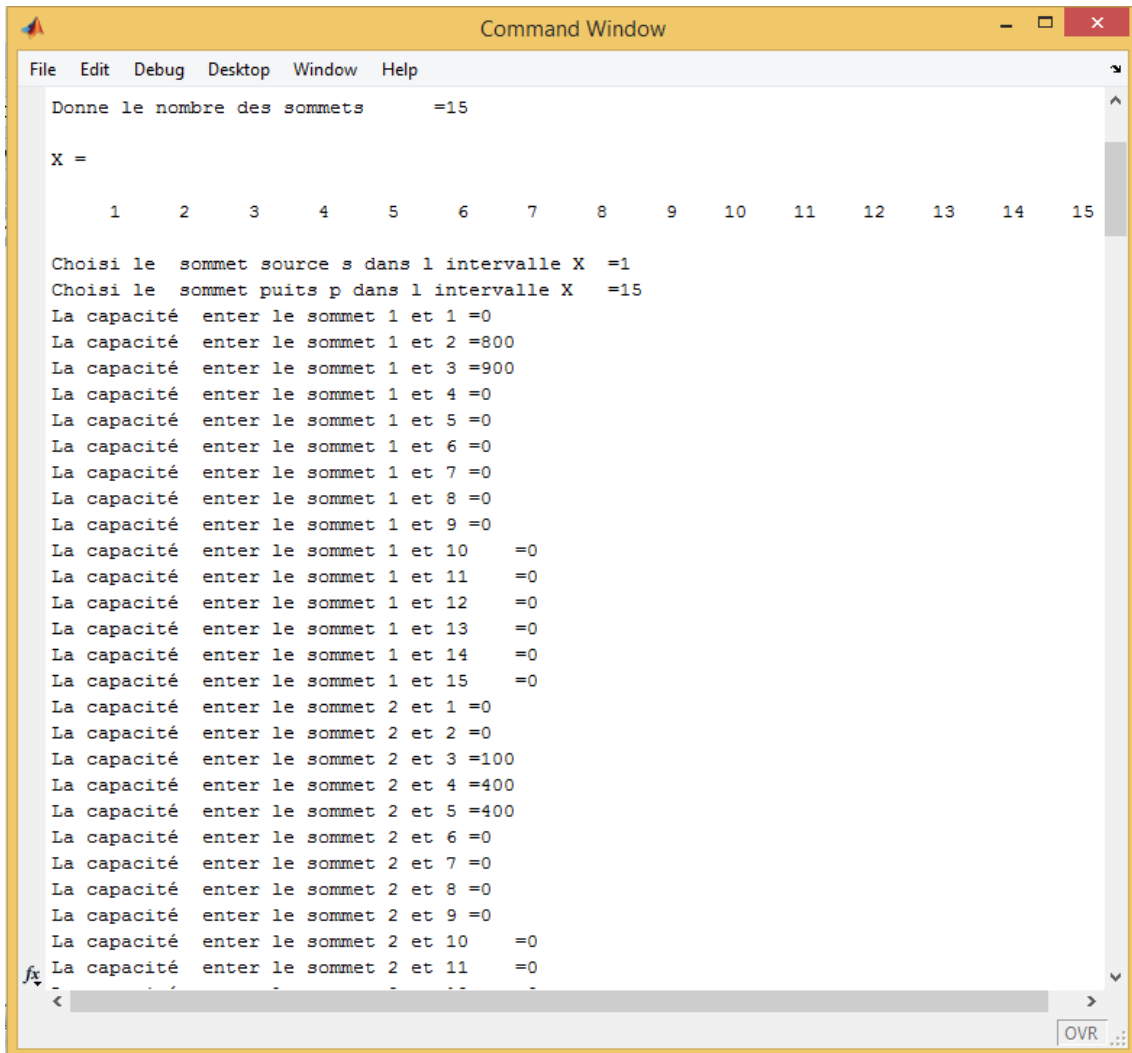


FIGURE 5.6 – Introduire des données (la capacité des arcs (i,j) de la première sommet)

Nous continuons de introduire la capacité de chaque arc jusqu’à atteindre le dernier sommet.

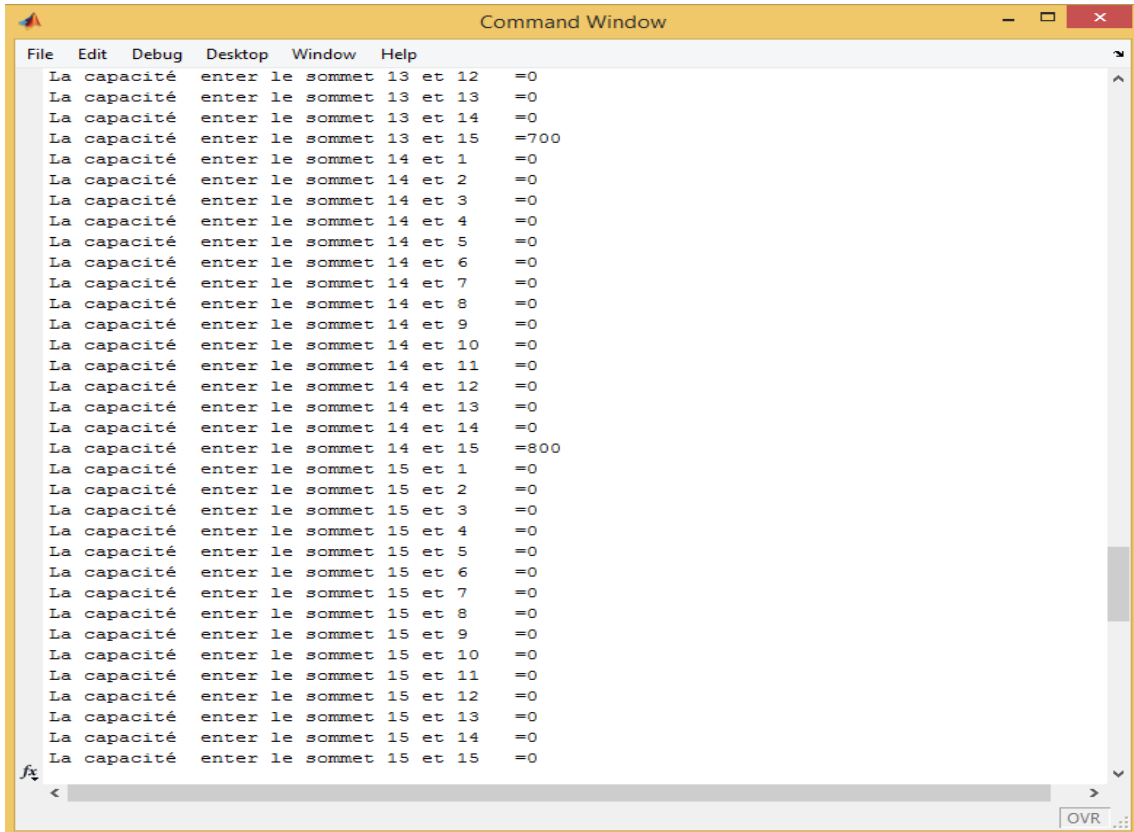


FIGURE 5.7 – Introduire des données (la capacité des arcs (i,j) de la dernier sommet)

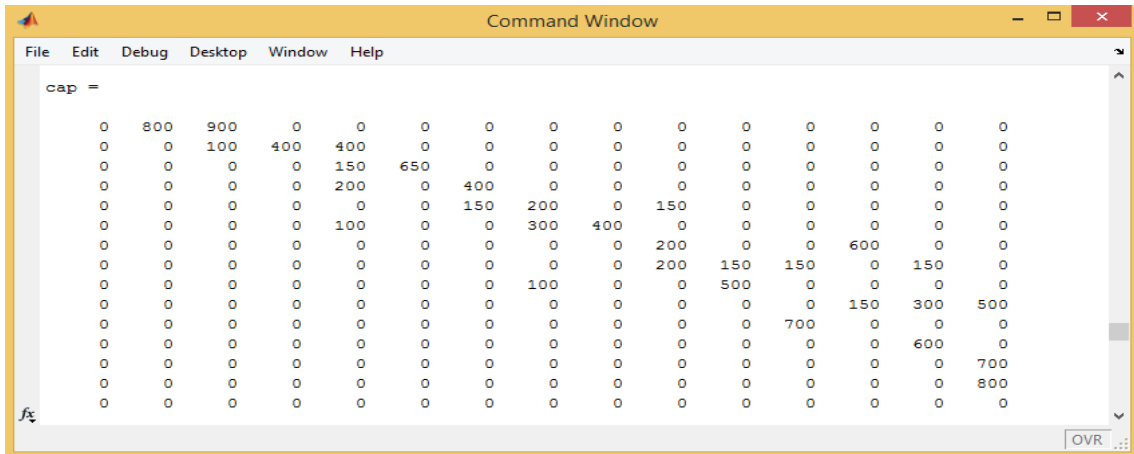


FIGURE 5.8 – Matrice de capacité

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 10 5 2 1
en ajoutant la quantité 150 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 10 7 4 2 1
en ajoutant la quantité 200 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 13 7 4 2 1
en ajoutant la quantité 200 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 13 7 5 2 1
en ajoutant la quantité 150 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 10 8 5 2 1
en ajoutant la quantité 100 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 10 8 5 3 1
en ajoutant la quantité 50 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 14 8 5 3 1
en ajoutant la quantité 50 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 14 8 6 3 1
en ajoutant la quantité 100 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 13 10 8 6 3 1
en ajoutant la quantité 50 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 14 12 8 6 3 1
en ajoutant la quantité 150 au flux des arcs de la chaine précédente
la chaine_augmentant enter les sommets est = 15 14 12 11 9 6 3
en ajoutant la quantité 350 au flux des arcs de la chaine précédente

La matrice des flux est =
0 800 750 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 400 400 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 100 650 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 400 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 150 200 0 150 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 300 350 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 200 0 0 350 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 200 0 150 0 150 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 350 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 50 0 500
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 350 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 500 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 400
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 650
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

La valeur de flot est = 1550
>>

```

FIGURE 5.9 – Résultat final qui montre la valeur maximal de flot f

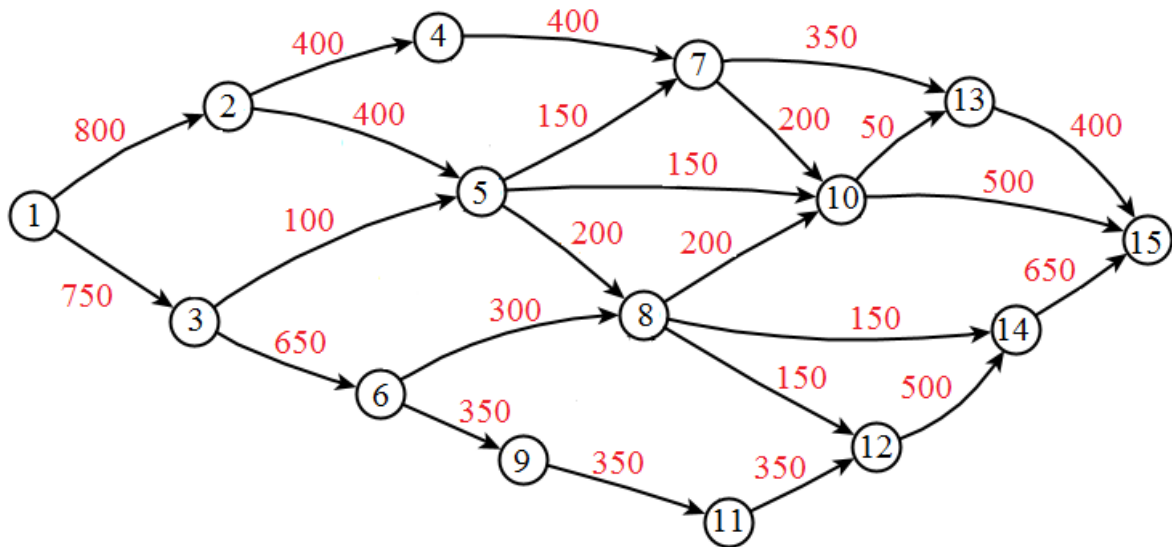


FIGURE 5.10 – Le graphe associé au résultat

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implémentation sous MATLAB de l'algorithme de Ford et Fulkerson qui permet de résoudre le problème du flot maximum du réseau de télécommunication.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème d'optimisation dans les réseaux en utilisant les graphes valués (flot et tension).

Ce qui a permis de présenter un algorithme de résolution pour la recherche d'un flot maximale (Ford et Fulkerson) dans un réseau. Après un rappel des résultats principaux de la théorie des graphes, et présenter quelques caractéristiques de flot et tension ; nous avons abordé le problème.

Notre travail consiste à résoudre des problèmes des réseaux (canalisation, transport, télécommunication).

Finalement, nous avons programmé l'algorithme de Ford et Fulkerson sous logiciel MATLAB, pour résoudre un problème de télécommunication des données dans un réseau.

Comme perspective, nous allons modéliser une situation réelle sur la forme d'un graphe de tension, pour lequel nous allons appliquer un algorithme afin de trouver la tension maximum.

Bibliographie

- [1] A.Sache, La théorie des graphes, Presses Universitaires de France, 1974.
- [2] B.Kahina et H.Nadjet, Notions fondamentales de la théorie des graphes, Licence, Université Abdarrahmane Mira, Bejaia 2012-2013.
- [3] C.Berge, Graphes et hypergraphes, DUNOD, Paris, 1970.
- [4] J.Claude Fournier, Théorie des graphes et applications , Lavoisier-Paris, 2011.
- [5] J.Cohen, Théorie des graphes et algorithmes, 8 octobre 2012.
- [6] K.Fahima et O.Siham, Problème de flot. Application à un réseau de transport, Master, Université Abdarrahmane Mira, Bejaia 2013.
- [7] M.Hadjjat, Problèmes de tension sur un graphe, 1996.
- [8] M.Gondran et M.Minoux, Graphes et algorithmes, Eyrolles, Paris, 1995.
- [9] M.Sakarovitch, OPTIMISATION COMBINATOIRE, Méthodes mathématiques et algorithmiques, GRAPHERS ET PROGRAMMATION LINÉAIRE, Hermann, Paris, 1984.
- [10] N.Belharrat, La Théorie des Graphes (Recherche Opérationnelle), Bouira-Algérie, 2002-2003.
- [11] N.Hudon, Initiation à Matlab, Ecole Polytechnique de Montréal, 22 janvier 2004.
- [12] O.Cogis et C.Schwartz, Théorie des graphes, Cassini, 2018.
- [13] R.Jean-Michel, Qutlis d'optimisation pour la logistique : théorie et pratique, London, 2015.
- [14] R.Faure et C.Roucairol et P.Tolla, Chemins et flots, ordonnancements, l'Université de Californie, 1976.

Résumé

Notre travail a été développé sur trois points essentiels, le premier point, un rappel des concepts de base de la théorie des graphes dans les deux premiers chapitres. Ensuite pour le deuxième point, nous nous sommes interrogés sur le problème de flot et tension, nous nous sommes ensuite intéressés à l'algorithme de résolution de problème du flot maximum. Et pour le troisième point, on a implémenté l'algorithme de Ford et Fulkerson avec le logiciel MATLAB par la suite nous avons appliqué le programme pour résoudre un problème de télécommunication de quinze wilayas d'Algérie.

Mots clés : Théorie des graphes ; Cycle ; Flot ; Tension ; Algorithme de Ford et Fulkerson.

Abstract

Our work has been developed on three essential points, the first point, a reminder of the basic concepts of graph theory in the first two chapters. Then for the second point, we wondered about the problem of flow and tension, later, we are interested in the algorithm of resolution of problem of maximum flow. And for the third point, we implemented the algorithm of Ford and Fulkerson with the MATLAB software later we applied the program to solve a telecommunication problem of fifteen wilayas of Algeria.

Key words : Theory of the graphs ; Cycle ; Flow ; Tension ; Algorithm of Ford and Fulkerson.