

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A / MIRA de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire de fin de cycle
en vue de l'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle
Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

*Approches statistiques de propagation de
l'incertitude paramétrique dans les systèmes
d'attente non fiables*

Réalisé par :

- M^{lle} Benkhaled Mounia
- M^{lle} Boughafene Khedidja

Devant le jury composé de :

M ^{me} Z. Bouamara	M.A.A	Présidente	U. A. Mira Béjaia
M ^r K. ABBAS	Professeur	Encadreur	U. A. Mira Béjaia
M ^{me} B. Takhedmit	M.C.B	Examinatrice	U.bouira
M ^{me} K. Bachi	Doctorante	Examinatrice	U. A. Mira Béjaia

Année Universitaire 2018 – 2019

Remerciements

Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir accordé santé, courage et la volonté pour accomplir ce modeste travail.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Nous tenons également à remercier notre encadreur Pr K. ABBAS pour l'aide et l'assistance qu'il nous a fourni afin de nous permettre de mener à bien et à terme ce mémoire de fin de cycle, et qu'il nous soit permis de leur exprimer notre profonde reconnaissance.

Nous exprimons notre grand respect aux honorables membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce travail en témoignage de mon amour et mon attachement :

À mes parents (mon cher père et ma chère mère) grâce à eux que j'ai trouvé le chemin de la réussite et que j'ai pu suivre convenablement de longues études. Puisse Dieu tout puissant vous protéger du mal, vous procurer longue vie, santé et bonheur afin que je puisse vous rendre un minimum de ce que je vous dois.

À Mes chers frères Walid et Yacin et mes chères soeurs Souad et Chaima. J'implore DIEU qu'il vous apporte bonheur, amour et que vos rêves se réalisent.

À toute ma famille. Pour votre amour, vos prières et vos encouragements qui m'ont été d'un grand soutien au cours de ce long parcours.

À ma copine d'enfance et soeur Mounia que j'aime de tout mon coeur et qui a toujours répondu présente quand j'en avais besoin.

À tous mes amis. En souvenir des moments merveilleux que nous avons passés et aux liens solides qui nous unissent. De peur d'en oublier certains, je ne m'aventurerais pas à tous les citer et, nul doute qu'ils sauront ici se reconnaître. Un grand merci pour votre soutien, vos encouragements, votre aide. Avec toute mon affection et estime, je vous souhaite beaucoup de réussite et de bonheur, autant dans votre vie professionnelle que privée.

Khadija

Dédicaces

Je dédie ce travail en témoignage de mon amour et mon attachement :

À mes parents les personnes les plus chères à mes yeux grâce à eux que j'ai trouvé le chemin de la réussite et que j'ai pu suivre convenablement de longues études. Puisse Dieu tout puissant vous protéger du mal, vous procurer longue vie, santé et bonheur afin que je puisse vous rendre un minimum de ce que je vous dois.

À Mes chers frères Yanis et Adel. J'implore DIEU qu'il vous apporte bonheur, amour et que vos rêves se réalisent.

À toute ma famille. Pour votre amour, vos prières et vos encouragements qui m'ont été d'un grand soutien au cours de ce long parcours.

À ma copine d'enfance et soeur Khadidja que j'aime de tout mon coeur et qui a toujours répondu présente quand j'en avais besoin.

À tous mes amis. En souvenir des moments merveilleux que nous avons passés et aux liens solides qui nous unissent. De peur d'en oublier certains, je ne m'aventurerais pas à tous les citer et, nul doute qu'ils sauront ici se reconnaître. Un grand merci pour votre soutien, vos encouragements, votre aide. Avec toute mon affection et estime, je vous souhaite beaucoup de réussite et de bonheur, autant dans votre vie professionnelle que privée.

Mounia

Table des matières

Liste des figures	vii
Liste des tableaux	ix
<i>Introduction générale</i>	1
1 Systèmes de files d'attente avec pannes	4
Introduction	4
1.1 Files d'attente	4
1.1.1 Classification des files d'attente	5
1.1.2 Les notations de Kendall	6
1.2 Analyse opérationnelle des systèmes de files d'attente	7
1.2.1 Les mesures de performance	7
1.2.2 Formule de Little	7
1.3 Etude du Système d'attente $M/G/1$ classique	8
1.4 Synthèse bibliographique sur les modèles de file d'attente non fiable	10
1.4.1 Systèmes de files d'attente avec pannes classiques	11
1.4.2 Systèmes de files d'attente avec pannes et vacances	12
1.4.3 Systèmes de files d'attente avec pannes et rappels	12
1.4.4 Systèmes de files d'attente avec pannes et priorités	12
1.4.5 Systèmes de files d'attente avec pannes et arrivées négatives	13
1.4.6 Systèmes de files d'attente avec panne et arrivées par groupes	13
1.4.7 Systèmes de files d'attente à plusieurs serveurs avec pannes	14
1.5 Conclusion	14
2 Incertitude paramétrique dans les modèles stochastiques	15
Introduction	15
2.1 Notion d'incertitude paramétrique	15
2.2 Différentes approches de propagation d'incertitude paramétrique	16
2.2.1 Méthode de simulation Monte Carlo	16
2.2.2 Méthodes spectrales stochastiques	16
2.2.3 Méthode des moments	18
2.2.4 Méthode de perturbation	18
2.2.5 Approche par intervalle	19
2.3 Conclusion	22

3	Analyse du modèle d'attente M/G/1 avec pannes dépendantes	23
	Introduction	23
	3.1 Description du modèle	23
	3.2 Analyse numérique du modèle	24
	3.3 Approche par intervalle	33
	Conclusion	38
4	Analyse du modèle d'attente M/G/1 avec pannes classiques	40
	Introduction	40
	4.1 Description du modèle	40
	4.1.1 Mesures de performance	42
	4.2 Nouveau modèle	42
	4.3 Application numérique	44
	Conclusion	57
	Conclusion générale	59
	Bibliographie.	60

Table des figures

1.1	Structure générale d'un système de file d'attente	5
1.2	Graphe de la chaîne de Markov induite	9
3.1	Variation du nombre moyen de clients dans le système en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes	27
3.2	Variation du nombre moyen de clients dans le système en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes	28
3.3	Variation de la probabilité de blocage en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes	29
3.4	Variation de la probabilité de blocage en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes	30
3.5	Variation du temps moyen de séjour dans le système en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes	31
3.6	Variation du temps moyen de séjour dans le système en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes	32
4.1	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes . . .	45
4.2	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes . . .	45
4.3	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes . .	46
4.4	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes . .	47
4.5	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	48
4.6	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	49
4.7	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	50
4.8	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	50
4.9	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes . . .	52

4.10	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes . . .	52
4.11	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes . . .	53
4.12	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour du système dans le modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes . . .	54
4.13	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	55
4.14	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	56
4.15	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	57
4.16	Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	57

Liste des tableaux

3.1	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1/$ avec pannes dépendantes	25
3.2	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes	26
3.3	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.1, 0.3]$	33
3.4	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.4, 0.6]$	34
3.5	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.7, 0.9]$	34
3.6	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.1, 0.3]$	35
3.7	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.4, 0.6]$	35
3.8	Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.7, 0.9]$	35
3.9	Probabilité de blocage du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes	36
3.10	Probabilité de blocage du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes	36
3.11	Nombre moyen de clients dans le système dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes	37
3.12	Nombre moyen de clients dans le système dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes	37
3.13	Temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes	38
3.14	Temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes	38
4.1	Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	44
4.2	Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	46
4.3	Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	48
4.4	Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	49
4.5	Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	51

4.6	Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	53
4.7	Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes	55
4.8	Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes	56

Introduction générale

*” On mesure l’intelligence d’un individu à la quantité
d’incertitude qu’il est capable de supporter”.*

Emmanuel Kant

La théorie des files d’attente, qui est relativement ancienne, connaît actuellement un regain d’intérêt dû à l’extraordinaire développement des réseaux de communication. C’est un domaine de la Recherche Opérationnelle relevant du domaine des probabilités qui permet de modéliser un système d’attente, calculer ses performances et déterminer ses caractéristiques. Elle permet ainsi d’aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions.

Les études sur les phénomènes d’attente tirent leurs origines des recherches de l’ingénieur électricien danois A.K. Erlang entre 1909 et 1920 concernant la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague, alors que la théorie mathématique des files d’attente a été fructueusement développée par la suite grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek [1], et fait actuellement toujours l’objet de nombreuses publications scientifiques.

L’objet primordial des files d’attente est de résoudre un système où des entités, appelées clients, cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées afin d’obtenir un service, tout en prenant en considération la situation du serveur soit libre, occupé ou bien en panne.

Les systèmes de files d’attente avec pannes sont largement utilisés pour modéliser les problèmes rencontrés dans les ordinateurs, les systèmes de fabrication et les réseaux de communication. En règle générale, dans les modèles de files d’attente, les mesures de performances sont évaluées en fonction des valeurs des paramètres déterministes. Cependant, dans la pratique les valeurs exactes de ces paramètres ne sont pas connues mais plutôt affectées d’une erreur. Cette erreur est appelée ”incertitude”. Dans ce sens, il devient alors nécessaire de déterminer les métriques de performances du modèle étudié, en tenant compte de cette incertitude.

Ces dernières années ont vu des avancées dans le domaine des statistiques et de l’informatique, par conséquent des développements d’outils plus puissants de modélisation ont été considérés. Depuis, un intérêt particulier a été porté sur le problème de la relation entre les hypothèses de modélisation et les résultats obtenus. De nombreux

travaux ont été élaborés voir par exemple [2], [3], pour discuter et faire une distinction entre les sources et les types d'incertitudes. De ce fait, on distingue globalement deux types d'incertitudes communes à la modélisation en sciences, à savoir l'incertitude des paramètres et de modélisation. Dans le cadre de ce travail, on s'est intéressé à l'incertitude paramétrique, puisque c'est d'elle qu'il est question lorsque les paramètres d'entrée du modèle sont incertains.

Dans la littérature, ce sujet d'incertitude paramétrique a été abordé par de nombreux auteurs ([4],[5], [6]). Dans ce contexte, cette notion est divisée en deux sources : incertitude aléatoire et incertitude épistémique. Le premier étant irréductible et dû à la variabilité naturelle des phénomènes aléatoires. Le deuxième est dû à un manque de connaissance du système. Ceci a amené la plupart des chercheurs ([7], [8], [9]) à faire une distinction entre ces deux types d'incertitudes.

Le calcul de la propagation de cette incertitude dans le cadre de l'évaluation des performances des modèles étudiés est devenu un enjeu important en calcul scientifique. C'est un sujet qui intéresse indéniablement les industriels et les scientifiques de domaines très différents (mécanique, finance ...) et qui ouvre de nouvelles thématiques de recherche extrêmement actives pour les mathématiciens appliqués. Dans ce sens, plusieurs approches ont été développées et appliquées pour la quantification de cette incertitude. Parmi ces méthodes, on peut citer la simulation Monte Carlo ([10],[11]), les méthodes spectrales stochastiques ([12],[13]et[14]), calculs des intervalles ([15],[16],[17]), le développement en séries de Taylor ([18], [19]).

L'objet assigné à ce travail est d'appliquer les deux dernières méthodes citées précédemment pour l'analyse des performances des systèmes considérés afin de propager l'incertitude infligée sur le paramètre d'intérêt θ qui représente le taux de panne des systèmes considérés. Dans ce sens plusieurs exemples numériques feront l'objet de notre analyse.

Ce mémoire est subdivisé en quatre chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

▷ Dans le premier chapitre, nous décrivons brièvement le formalisme des systèmes de files d'attente, puis nous présenterons une synthèse bibliographique concernant les systèmes de files d'attente avec pannes.

▷ Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques généralités sur la notion d'incertitude paramétrique et nous citerons ainsi les différentes méthodes utilisées pour propager cette incertitude.

▷ Le troisième chapitre est constitué de deux parties, la première est consacrée à l'analyse numérique du modèle $M/G/1$ avec pannes dépendantes. La deuxième consistera à appliquer une nouvelle approche basée sur le calcul par intervalle sur le même modèle.

▷ Le dernier chapitre est consacré à l'application de la méthode des développements en séries de Taylor au système de file d'attente $M/G/1$ avec pannes classiques.

Le travail s'achèvera par une conclusion mettant l'accent sur les perspectives de recherche induites par notre travail.

1

Systèmes de files d'attente avec pannes

Introduction

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. Ce phénomène se manifeste dans divers domaines d'activité : les guichets de poste, les banques, centraux téléphoniques, les billetteries des aéroports, trafic routier, etc. La théorie des files d'attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui vise à optimiser les ressources disponibles et gérer le temps d'attente des clients sollicitant un service précis pour une durée de temps déterminée.

Dans ce chapitre nous allons présenter brièvement quelques concepts et définitions de base liés au formalisme des systèmes de files d'attente. Nous accordons une attention particulière à la présentation du système de files d'attente $M/G/1$ classique, ainsi qu'une synthèse bibliographique sur les modèles d'attente non fiables.

1.1 Files d'attente

La théorie des files d'attente s'attache à modéliser et à analyser de nombreuses situations différentes en apparence. Une file d'attente ou queue est un système stochastique composé d'un espace d'attente (fini ou infini), d'un ou plusieurs serveurs et des clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système.

La figure ci-dessous montre la description schématique d'une file d'attente classique :

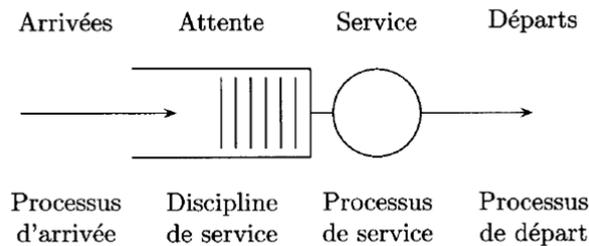


FIGURE 1.1 – Structure générale d'un système de file d'attente

1.1.1 Classification des files d'attente

La classification des files d'attente se base principalement sur les éléments suivants :

1. Processus d'arrivée

Le processus d'arrivée spécifie les instants aux quels les clients arrivent dans le système. Il est déterminé par la loi des intervalles de temps séparant deux arrivées consécutives, que l'on appelle des temps d'inter-arrivées et qui sont souvent supposés indépendants.

2. Processus de service

Les temps de service nécessaires au traitement des clients sont supposés être des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La description du processus de service revient alors à spécifier la loi de probabilités de ces variables aléatoires.

3. Nombre de serveurs :

Le nombre de serveurs correspond au nombre de stations de service qui sont montées en parallèle. Tous les serveurs sont généralement supposés identiques, en particulier les temps de services sont indépendants d'un serveur à l'autre et distribués selon la même loi de probabilité.

4. Capacité de la file

La capacité de la file correspond au nombre maximal de clients pouvant être présents dans le système (en attente de service et en service) à un instant quelconque qui peut être limitée ou non. Dans le premier cas, on suppose que les clients qui arrivent lorsque le système est déjà saturé le quittent immédiatement sans obtenir le service désiré. On dit que ces clients sont perdus. Dans le cas d'un système à capacité illimitée, aucun client n'est perdu.

5. La discipline de service

C'est l'ordre dans lequel les clients en attente sont traités. Les disciplines les plus utilisées sont :

- **FIFO** (First In First Out) : les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée ;
- **LIFO** (Last In First Out) : le dernier client arrivé sera le premier traité ;
- **SIRO** (Service In Random Order) : Cette discipline correspond aux situations, où le prochain client servi est choisi au hasard parmi tous ceux en attente ;
- **RR** (Round-Robin) : tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant un quantum "Q" de leur temps de service et ils sont remplacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli.
- **PS** (Processor Sharing) : Cette discipline est le cas limite de la discipline RR lorsque le quantum tend vers zéro.

1.1.2 Les notations de Kendall

le système le plus répandu actuellement a été introduit par [Kendall D.G (1953)].

La notation de ce système comprend six symboles rangés dans l'ordre suivant :

$$A/B/m/K/P/D$$

La signification de chacun de ces symboles est :

- ◇ A : nature du processus d'arrivée ;
- ◇ B : nature du processus de service ;

pour chaque modèle concret, on remplacera A et B par l'un des symboles standards suivants :

- M* : loi Exponentielle ;
- H_k* : loi Hyper-exponentielle d'ordre k ;
- E_k* : loi d'Erlang d'ordre k ;
- D* : loi Déterministe (temps d'inter-arrivées ou de service constant) ;
- G* : loi Générale (quelconque).

Par ailleurs,

- ◇ m : désigne le nombre de serveurs ;
 - ◇ K : la capacité de la file ;
 - ◇ P : la taille de la population ;
 - ◇ D : la discipline de la file.
-

Dans sa version courte, seuls les trois premiers symboles A/B/m sont utilisés. Il est sous-entendu que $K = +\infty$, $P = +\infty$ et $D = FIFO$.

1.2 Analyse opérationnelle des systèmes de files d'attente

Cette analyse, plus connue sous le nom de l'évaluation de performances, consiste au calcul des caractéristiques de performances d'un système. Cette opération s'impose dès lors où l'on souhaite connaître les performances d'un système réel et que l'on ne peut effectuer de mesure directe sur celui-ci. Les paramètres de performances que l'on souhaite obtenir sont de différents ordres en fonction des systèmes considérés.

1.2.1 Les mesures de performance

Les caractéristiques d'exploitation du système auxquelles on s'intéresse le plus souvent sont :

- Q : le nombre moyen de clients dans le système ;
- L_q : le nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- W : la durée moyenne de séjour dans le système (attente et service) ;
- W_q : la durée moyenne d'attente d'un seul client ;
- P_b : la probabilité de blocage pour les files d'attente à capacité finie.

Remarque Une mesure très importante, qui décrit le comportement asymptotique (lorsqu'il existe) du système tout entier, est la distribution stationnaire notée par π . La plupart des performances précédentes peuvent être exprimées à l'aide de la distribution π .

1.2.2 Formule de Little

La formule de Little est l'un des résultats les plus utiles en théorie de files d'attente. Les valeurs de mesures de performances sont liées les unes aux autres par les relations suivantes [20] :

$$Q = \lambda_e W \quad (1.1)$$

$$L_q = \lambda_e W_q \quad (1.2)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (1.3)$$

$$Q = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} W \quad (1.4)$$

Les deux premières relations sont appelées formules de Little, avec :

λ_e : taux d'arrivée dans le système ;

μ : taux de service ;

Remarque Si la capacité du système est illimitée, on a $\lambda_e = \lambda$, dans le cas contraire, certains clients doivent s'en aller sans être servis d'où $\lambda_e < \lambda$.

1.3 Etude du Système d'attente $M/G/1$ classique

Une file d'attente $M/G/1$ est caractérisée par un processus d'arrivée poissonnien de taux λ et par des temps de services indépendants et identiquement distribués selon une loi de probabilité quelconque F de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

Le processus stochastique décrivant l'évolution du nombre de clients dans le système n'est plus Markovien car le temps de service n'est plus sans mémoire, son analyse se fera donc par l'une des méthodes d'analyse des processus non Markoviens.

- Méthode des étapes d'Erlang.
- Méthode de la chaîne de Markov induite.
- Méthode des variables auxiliaires.
- Méthode des événements fictifs.
- Méthode d'approximation.
- Simulation.

La chaîne de Markov induite

On considère le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant t , qui n'est pas un processus de Markov. Pour le rendre Markovien, nous utiliserons la méthode des chaînes de Markov induites.

Soit le processus à temps discret $X_n = X(t_n), n \geq 1$ représentant le nombre de clients dans le système immédiatement après l'instant (t_n) , où t_n est l'instant où le $n^{\text{ème}}$ client a fini son service et quitte le système. La variable aléatoire X_n est une chaîne de Markov à temps discret. Pour vérifier cela, considérons le nombre A_n de clients qui entrent dans le système pendant le $n^{\text{ème}}$ service. Les variables aléatoires A_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est [105] :

$$P(A_n = k) = a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(t)$$

Alors,

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

avec

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } , X_n \geq 0; \\ 0 & \text{si } , X_n = 0, \quad n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

X_{n+1} ne dépend que de X_n et de A_{n+1} et non pas des valeurs de $\{X_{n-1}, X_{n-2}, \dots\}$. Ce qui signifie que la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ ainsi définie est la chaîne de Markov induite du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Régime transitoire :

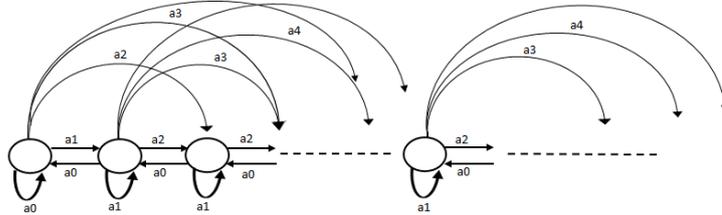


FIGURE 1.2 – Graphe de la chaîne de Markov induite

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ sont données par :

$$P_{ij} = Pr[X_{n+1} = j / X_n = i]$$

$$= \begin{cases} P_{0j} = a_j & \text{si } j \geq 0, i = 0; \\ P_{ij} = a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1; \\ P_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice des probabilités de transition prend la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

où :

$$a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(t)$$

Puisqu'on peut passer de chaque état à n'importe quel état, il s'agit donc d'une chaîne de Markov irréductible dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Régime stationnaire

Supposons que $\rho < 1$ et soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ la distribution stationnaire de la chaîne de Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, où

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution stationnaire π elle-même. Cependant, nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $g(z)$:

$$g(z) = \frac{(z-1)\hat{\mathbb{F}}(\lambda - \lambda z)}{z - \hat{\mathbb{F}}(\lambda - \lambda z)}(1 - \rho).$$

où $\hat{\mathbb{F}}$ représente la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Cette formule est connue sous le nom de la première formule de **Pollaczek-Khinchine**.

Les caractéristiques du système

- Le nombre moyen de clients dans le système

à partir de $g'(1) = \mathbb{E}[X] = Q$, on obtient :

$$Q = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + CV^2). \quad (1.5)$$

où : CV est le coefficient de variation.

- le nombre moyen de clients dans la file

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + CV^2). \quad (1.6)$$

à l'aide de la formule de Little, on obtient :

- Le temps moyen de séjour dans la file :

$$W_q = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}(1 + CV^2). \quad (1.7)$$

- le temps moyen de séjour dans le système

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}(1 + CV^2). \quad (1.8)$$

1.4 Synthèse bibliographique sur les modèles de file d'attente non fiable

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Alors que dans les situations réelles, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée et par conséquent, le service des clients est interrompu

durant un certain temps qui sera consacré à la réparation de la panne. Concernant la nature de ces interruptions, on distingue généralement les cas suivants :

- **Pannes de nature conservatrices :**

Dès que la panne se produit, le service est interrompu, mais le client reste auprès du serveur et attend que ce dernier soit réparé. Après la réparation, le service reprend là où il a été interrompu.

- **Pannes de nature non conservatrices :**

Dans ce cas, la partie de service déjà acquise est détruite. Après la réparation de la panne, le service reprend à zéro.

- **Pannes avec perte définitive de clients**

Dès que la panne se produit, le client quitte le système pour de bon.

- **Panne avec perte momentanée de client**

Dès que la panne se produit, le client quitte le serveur et entre en orbite. Par la suite, son comportement ne diffère en rien de celui des clients qui se trouvent déjà en orbite.

Parmi les différents modèles de files d'attente non fiables qui ont été abordés on cite :

1.4.1 Systèmes de files d'attente avec pannes classiques

Dans l'article [21] White et Christie ont étudié un système de files d'attente avec pannes et leurs relations avec le modèle prioritaire. En outre, Avi-Itzhak et Naor [22] et Gaver [23] ont considéré, sous différentes disciplines de service le système d'attente $M/G/1$ et le système de files d'attente $M^X/G/1$, avec serveur sujet à des pannes. Du point de vue de fiabilité, Cao et Cheng [24] ont étudié pour la première fois le modèle proposé dans [22]. L'analyse de la fiabilité du système d'attente $M/G/1$ avec pannes a été aussi considérée par Li et al [25]. Par ailleurs, plusieurs auteurs [26],[27],[28],[29] ont considéré le cas où les périodes de réparation comme étant des variables aléatoires suivant une loi générale. Wang [30] a utilisé une méthode des variables supplémentaires pour l'analyse de la file d'attente $M/G/1$ avec un deuxième service optionnel et des pannes de serveur. Récemment, Jiang et Xin [31] ont considéré un système de files d'attente à serveur unique avec des pannes et réparations différées dans le cadre d'un programme contrôlé par la politique de Bernoulli. Dernièrement Wang et al [32] ont fait l'analyse d'une file d'attente réparable à temps discret avec catastrophes et pannes de travail. Zhu et al [33] ont étudié un système d'attente $Mn/G/1$ avec serveur sujet à des pannes dans lequel les clients qui arrivent peuvent observer la longueur de la file d'attente lors de leurs arrivées, mais pas l'état du serveur.

1.4.2 Systèmes de files d'attente avec pannes et vacances

Dans le cas des systèmes de files d'attente avec pannes et réparations les périodes de pannes ou de réparations peuvent être vu comme des périodes de vacances. Dans ce contexte l'analyse du système $M/G/1$ avec pannes et vacances a été considérée par Li et al [34]. Plus tard, Grey et al [35],[36] ont étudié un modèle de files d'attente non fiable avec vacances multiples, en utilisant l'approche de la fonction génératrice, ils ont obtenu la distribution de la taille de la file. En l'an 2007, Jain et Agrawal [37] ont étudié le système de files d'attente $M/E_k/1$, avec pannes et vacances du serveur. Par la suite Wang et Li [38] ont étudié le système $M/G/1$ non fiable avec des périodes de vacances de Bernoulli, deux phases de service et lancement. Madhu Jain et Anamika Jain [39] ont étudié un modèle d'attente avec vacances et plusieurs types de pannes du serveur. Jain et al [40] ont considéré un système de files d'attente $M/G/1$ à serveur non fiable et avec plusieurs services et vacances optionnels, en utilisant la méthode des variables supplémentaires et les techniques de la fonction génératrice ils ont obtenu la distribution des temps d'attente ainsi que d'autres caractéristiques de fiabilité. Li et al [41] ont considéré un système de files d'attente $M/M/1$ avec pannes et working vacation. Zhao et al [42] ont étudié un système de file d'attente avec rappel $Geo/Geo/1$ et interruption de vacances en service.

1.4.3 Systèmes de files d'attente avec pannes et rappels

Aissani [43] a étudié un modèle de files d'attente avec pannes et rappels de type $M/G/1$, et ceci en se basant sur la théorie des processus de Markov par morceaux. De même Kulkarni et Choi ont analysé le même type de modèle, et ceci en utilisant les outils de la théorie des processus régénérateurs. Ces deux derniers travaux fournissent des résultats identiques. Dans [44],[45],[46] Djellab a étudié la propriété de décomposition stochastique du système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable dans le cas de la distribution générale du temps des inter-rappels, de l'intensité des rappels ainsi que des pannes sur la performance du modèle. En l'an 2009, en utilisant la méthode des variables supplémentaires Wang et Li [47] ont étudié le système d'attente $M/G/1$ avec rappel, découragement, pannes et deux phases de service, où ils ont obtenu les solutions stationnaires pour les mesures d'attente de fiabilité. Récemment, Kumar et al [48] ont analysé les performances d'une file d'attente $M/G/1$ avec rappel à serveur non fiable avec communication bidirectionnelle. Lachemot et al [49] ont étudié un système d'attente $M/G/1$ avec rappels avec deux classes de clients : les clients en transit et les clients récurrents et un serveur sujet à des pannes et réparations différées. Aissani et al [50] ont fait une analyse d'une file d'attente non fiable à l'arrivée d'un lot de serveur unique avec mise en attente et temps de rappel général.

1.4.4 Systèmes de files d'attente avec pannes et priorités

Dans [21],[23],[51], il est montré que le système de files d'attente non fiable peut-être assimilé à un système avec priorité de service pour certains types de clients. Ainsi, Mandan [52] a étudié un système d'attente avec pannes et priorités. Dans un autre travail, le même auteur [53] a étudié un système d'attente avec deux types de pannes, ayant des priorités absolues et un taux constant des arrivées des clients dans le système. D'autre part, Jain

[54] à étudié une file d'attente avec priorité et interruption du service due aux pannes du serveur, où il a utilisé la méthode de la fonction génératrice pour l'obtention de la distribution de la taille de la file. En outre Jain et Bhargava [55] ont considéré le système d'attente $M^X/G/1$ avec pannes, priorités et rappels, où les auteurs ont utilisé la méthode de la fonction génératrice et la technique de la variable supplémentaire pour l'analyse de ce modèle. Kumar et Sharma [56] ont étudié un système de files d'attente $M/M/1$ prioritaire et avec interruption de service où il y'a deux types de clients à savoir prioritaires et non prioritaires. Anamika Jain et Madhu Jain [57] ont étudié un modèle de priorité $M_1^{X_1}M_2^{X_2}/G_1G_2/1$ avec second service optionnel et panne du serveur afin d'analyser les caractéristiques de fiabilité. Actuellement Ayyappan et Udyageetha[58] ont analysé un système de files d'attente prioritaire avec rappel et échec de démarrage.

1.4.5 Systèmes de files d'attente avec pannes et arrivées négatives

Harrison et al [59] ont introduit une nouvelle technique basée sur la notion de G-queue, pour la modélisation des systèmes de files d'attente non fiable. Kumar et al [60] ont obtenu analytiquement la solution transitoire de la taille du système d'attente $M/M/1$ avec catastrophes et pannes du serveur et ils ont aussi obtenu quelques mesures de performances. Par la suite l'analyse du système d'attente $M/G/1$ avec rappels, catastrophes et pannes du serveurs a été effectué par Wang et al [61]. Wang et Zhang [62] ont étudié une file d'attente à temps discret avec rappels et pannes et arrivées négatives. D'autre part, Dimitriou [63] a étudié un modèle de files d'attente non fiable avec réparations et pannes négatives. Kim et Lee [64] ont analysé un système de files d'attente $Geo/G/1$ réparable avec des clients négatifs. Rajadurai [65] a considéré un système d'attente $M/G/1$ avec plusieurs variantes de vacances de travail et d'interruption de vacances où le serveur est sujet à des pannes dû à l'arrivée des clients négatifs, en utilisant la méthode des variables supplémentaires ils ont obtenu la fonction génératrice ainsi que les différentes mesures de performances du système. Sun et Wang [66] ont considéré un système de files d'attente $M/M/1$ avec arrivée de clients négatifs où un client négatif provoque la panne du serveur et le client positif servi est alors obligé de quitter le système.

1.4.6 Systèmes de files d'attente avec panne et arrivées par groupes

Les modèles de files d'attente avec arrivées par groupes sont très étudiés ces dernières années. Particulièrement, Bruneel et Byung [67] ont considéré le modèle $Geo^X/D/1$ à serveur sujet à des pannes et réparations. Un contrôle bi-niveaux pour un serveur non fiable dans un système d'attente avec arrivées par groupes a été discuté par Ke [68]. Une généralisation du modèle introduit par Ke [69] a été considéré par le même auteur dans [70],[71] pour le modèle d'attente $M^X/G/1$ avec un serveur non fiable et lancement. Plus tard, Ayyappan et Shyamala [72] ont présenté un modèle de files d'attente $M^X/G/1$ avec pannes et un second service optionnel et de vacances à Bernoulli. Jain et al [73] ont étudié les caractéristiques de fonctionnement d'un système de files d'attente $M^X/H_K/1$ dans le cadre d'une polytique de vacances multiples et ont trouvé les formules approximatives pour

la distribution de probabilité du temps d'attente des clients dans le système en utilisant le principe d'entropie maximale (MEP). Zirem et al [74] ont considéré un système de files d'attente $M^X/G/1$ avec pannes et réparations. Ils ont obtenu la condition de stabilité pour ce système, la distribution conjointe de l'état du serveur et de la longueur de la file ainsi que certaines mesures de performances.

1.4.7 Systèmes de files d'attente à plusieurs serveurs avec pannes

Les modèles de files d'attente à plusieurs serveurs avec pannes ont été étudiés par de nombreux auteurs. Gnedenko [75] a généralisé les formules d'Erlang pour le système avec refus. Wang et Chang [76] ont étudié le modèle d'attente $M/M/R$ non fiable à capacité et découragement du clients. Par la suite, Sultan et al [77] ont étudié un système d'attente à plusieurs serveurs avec arrivées par groupes et deux types de pannes. En l'an 2009 Yang et Alfa [78] ont utilisé l'approche de la matrice géométrique pour l'analyse d'un système d'attente à plusieurs serveurs non fiables avec des temps de service de type phase. Jain et Bhargava [79] ont présenté et analysé un système de files d'attente à plusieurs serveurs sous une politique de vacances unique avec pannes de serveur et réparations.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les concepts et techniques de base de la théorie des files d'attente classiques ainsi qu'un modèle particulier du système de files d'attente qui est le modèle $M/G/1$ classique. Nous avons également cité quelques travaux de recherches connus étudié par de fameux auteurs concernant les modèles d'attente à serveurs non fiables.

2

Incertitude paramétrique dans les modèles stochastiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d'incertitude paramétrique en simulation numérique. Puis, on passe en revue différentes méthodes pour propager les incertitudes paramétriques dans un modèle mathématique où on s'intéressera à la méthode d'approche par intervalles et celle des développements en séries de Taylor que nous appliquerons par la suite dans notre travail.

2.1 Notion d'incertitude paramétrique

On parle d'incertitude paramétrique lorsque les paramètres d'entrées d'un modèle sont incertains. En effet, l'élaboration ou la construction de tout modèle mathématique est soumise à deux sources d'incertitudes [80], [81],[5] et [4] : l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique.

Incertitude aléatoire

La source d'incertitude qui est dite aléatoire apparaît lors de l'estimation des paramètres du modèle, elle est due à la variabilité naturelle de toute quantité physique mesurée. Elle s'explique parfois comme l'incertitude responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète dans les mêmes conditions une expérience.

Incertitude épistémique

L'incertitude épistémique, du grec *épistémê* signifiant "connaissance", comme l'incertitude issue du manque de celle-ci. Cette incertitude est omniprésente parce que les ressources sont toujours limitées. Elle se révèle du passage du phénomène réel au modèle mathématique.

Il existe plusieurs méthodes pour la propagation d'incertitude, dont on dresse ci-dessous un bref panorama.

2.2 Différentes approches de propagation d'incertitude paramétrique

2.2.1 Méthode de simulation Monte Carlo

L'une des méthodes les plus communément utilisées pour la propagation d'incertitude est la méthode d'échantillonnage **Monte Carlo** (MC) ou l'une de ses variantes.

Son principe comprend deux étapes :

- Génération de N échantillons de taille p suivant une loi de probabilité, où N est le nombre de simulations et p est le nombre de paramètres.
- Calculer la valeur de sortie pour chaque valeur d'entrée d'échantillon.

Ensuite, une fois le N -échantillon de sorties du modèle est obtenu, il est possible d'estimer les différentes valeurs statistiques (espérance, variance ...).

L'avantage de la méthode *MC* est qu'elle est très facilement implémentable puisqu'elle nécessite uniquement l'exécution répétitive de simulations déterministes. Cette méthode est d'autre part très robuste. Néanmoins, l'une de ses principales limitations concerne le faible taux de convergence des statistiques avec le nombre N de réalisations.

2.2.2 Méthodes spectrales stochastiques

1- Méthode des Polynômes de Chaos

Le développement dans le Chaos polynomial est une méthode probabiliste qui consiste à projeter les sorties du modèle sur une base de polynômes orthogonaux en les paramètres d'entrée. Ce développement est basé sur la théorie du Chaos Homogène introduit par Wiener [82] comme une généralisation du développement en série de Fourier dans le domaine des champs aléatoires. Bachi et al [83] l'ont appliqué pour analyser la sensibilité et la propagation de l'incertitude épistémique à travers un système de files d'attente avec pannes. Il permet d'approcher toute variable aléatoire de carré-intégrable par une série de

polynômes en les variables d'entrée X . Le développement en séries s'écrit sous la forme générique suivante :

$$Y(X) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \Phi_{\alpha}(X)$$

où les Φ_{α} sont des polynômes en les variables aléatoires de degret α et les y_{α} sont appelés les coefficients déterministes du développement spectral de Y , ou encore appelés modes stochastiques.

2- Approches spectrales non intrusives

De manière générale, les méthodes stochastiques spectrales sont une classe de méthodes permettant d'obtenir une représentation fonctionnelle de la réponse $Y(X)$ via une décomposition de l'aléa sur un ensemble de fonctions $\{\Phi_i\}_{i=0}^{\infty}$. En considérant $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ un ensemble de coefficients déterministes, cette représentation fonctionnelle peut être exprimée comme :

$$Y(X) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \Phi_i(X) \tag{2.1}$$

Par méthodes non intrusives, on entend l'ensemble des méthodes ne nécessitant aucune modification du code déterministe pour obtenir des informations statistiques de la réponse d'un modèle numérique ayant des entrées aléatoires. Ainsi, les méthodes spectrales non intrusives sont clairement ces méthodes visant à représenter la solution stochastique $Y(X)$ sous la forme (2.1) et à déterminer les coefficients y_i à partir d'évaluations du modèle déterministe dont les valeurs des entrées sont judicieusement choisies. Cela rend les méthodes non-intrusives très attrayantes pour la propagation d'incertitudes paramétriques dans les modèles complexes, les applications industrielles et les situations où l'on a uniquement accès à des codes déterministes. Parmi ces méthodes on trouve la méthode de collocation [84], la méthode de régression [85], [86].

3- Méthodes de Galerkin (intrusives)

Contrairement aux méthodes non-intrusives basées sur des réalisations individuelles pour déterminer la réponse du modèle stochastique aux entrées aléatoires, les méthodes de Galerkin sont basées sur un formalisme de résidus pour construire des systèmes d'équations. De telles méthodes sont dites intrusives puisqu'elles nécessitent dans une certaine mesure la réécriture du code de calcul déterministe. La projection de Galerkin est un outil classique pour la résolution des problèmes spectraux et dans la formulation des méthodes d'éléments finis (voir par exemple le livre de Ern et Guermond [87]). Dans le contexte stochastique, elle fut proposée par Ghanem et Spanos [12] comme méthode de calcul pour déterminer le développement en PC de la solution d'équations linéaires stochastiques. La projection de Galerkin nécessite deux étapes : la première est l'introduction du développement tronqué de la solution dans le problème stochastique, la deuxième est la projection de l'équation stochastique ainsi obtenue sur la base du

développement en PC afin d'obtenir un ensemble d'équations que les modes stochastiques doivent satisfaire.

2.2.3 Méthode des moments

Dans cette approche, on tente de calculer les moments statistiques de la solution stochastique directement. Les inconnues sont les moments statistiques de la solution, et leurs équations sont directement dérivées en intégrant les équations du modèle. Par exemple, l'espérance est déterminée en intégrant ces équations sur le domaine stochastique.

2.2.4 Méthode de perturbation

Les méthodes de perturbation, abondamment utilisées dans de nombreux domaines de l'ingénierie (Kleiber et Hien [88]), sont basées sur un développement tronqué des processus aléatoires via des séries de Taylor autour de leur valeur moyenne. Ces développements élaboré par le mathématicien anglais Brook Taylor[89] en 1715, sont particulièrement utilisés d'une manière très efficace dans le cadre d'analyse des performances des systèmes de files d'attente [90]. En effet, en calculant un nombre fini de dérivées d'ordre supérieur, les développements en séries de Taylor permettent d'évaluer les fonctions de performances d'un certain modèle comme étant une fonction du paramètre d'intérêt.

Théorèmes fondamentaux

Dans ce paragraphe nous donnons d'abord les principaux résultats concernant les fonctions dérivables :

Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Fonction de classe \mathcal{C}^n

On dit qu'une fonction f , définie dans un intervalle $]a, b[$ de \mathbb{R} , est de classe \mathcal{C}^n sur $]a, b[$ si elle admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n .

Formule de Taylor

La formule de Taylor permet l'approximation d'une fonction suffisamment dérivable au voisinage d'un point par polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Définition 2.2.1 [91] Soient I un ouvert de \mathbb{R} $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un point intérieur de I $f \in C^n$. On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 de f , le polynôme :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k; \quad (2.2)$$

on appelle "reste de Taylor" d'ordre n en x_0 de f , la fonction R_n définie sur I comme suit :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

2.2.5 Approche par intervalle

Il existe de nombreuses situations dans lesquelles nous arrondissons les résultats ou donnons une solution approximative aux équations que nous résolvons. Alors, serait-il préférable d'accepter cette solution approximative ou bien de fournir des bornes dans lesquelles se trouve la solution exacte ?

Si nous pouvons fournir des bornes à la solution, alors nous pouvons être certains d'avoir la solution exacte avec la précision indiquée. L'analyse par intervalles nous permet d'analyser et d'effectuer des calculs sur des intervalles qui contiennent la solution exacte. Il existe une variété d'intervalles en mathématiques, mais on se concentre principalement sur les intervalles fermés. Par conséquent, chaque fois qu'on mentionne des intervalles, on présente les définitions et exemples suivants dans cette section, qui découlent de Moor et al [92].

Un intervalle peut être représenté sous la forme suivante,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Suivant la notation utilisée en [92], un intervalle et ses extrémités sont désignés par des lettres majuscules. Alors l'intervalle X est représenté comme $X = [\underline{X}, \overline{X}]$, où \underline{X} est la borne inférieure et \overline{X} est la borne supérieure de l'intervalle.

Une des choses qu'on peut faire avec des intervalles est d'effectuer des opérations arithmétiques de base sur ces intervalles tels que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

Puisque la représentation d'intervalle est interchangeable avec la représentation d'ensemble, toutes les opérations arithmétiques sur les intervalles X et Y peuvent être représentés comme suit :

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X, y \in Y\}$$

où \odot représente l'opération arithmétique et $y \neq 0$ pour la division. Pour effectuer ces opérations arithmétiques on utilise les extrémités des intervalles X et Y .

◇ Addition

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}],$$

◇ Soustraction

$$X - Y = [\underline{X} - \underline{Y}, \overline{X} - \overline{Y}],$$

◇ Multiplication

$$X.Y = [\min S, \max S], \quad \text{où } S = [\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}]$$

◇ Division

$$X/Y = X.(1/Y), \quad \text{où } 1/Y = \{y : 1/y \in Y \setminus \{0\}\} = [1/\overline{Y}, 1/\underline{Y}].$$

On peut également étendre les intervalles aux vecteurs et matrices. Un vecteur d'intervalle X dont les éléments sont des intervalles est représenté comme suit :

$$X = (X_1, X_2) = ([\underline{X}_1, \overline{X}_1], [\underline{X}_2, \overline{X}_2])$$

De même, une matrice d'intervalles A est une matrice dont les éléments sont des intervalles et peuvent être exprimés, par exemple, par

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

où $A_{ij} = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]$ pour $i, j = 1, 2$.

Incorporation d'intervalle dans les chaînes de Markov

A présent, on cherche à combiner les intervalles avec les chaînes de Markov. On se concentrera sur les chaînes de Markov à temps discret et on note que l'incorporation d'intervalles suit de la même manière pour la chaîne de Markov à temps continu.

Soit une chaîne de Markov à temps discret X_m , avec $n + 1$ états, $S = \{0, 1, \dots, n\}$ avec l'état 0 un état absorbant. Rappeler que la probabilité de transition de l'état i à l'état j de n à $n + 1$ est donné par $P(X_{m+1} = j / X_m = i)$ qui dépend de m . Pour incorporer des intervalles dans une chaîne de Markov à temps discret, on peut spécifier un intervalle de probabilités pour la matrice de probabilité de transition notée P_m . Ces chaînes de Markov à temps discret sont maintenant connues sous le nom de chaînes de Markov à intervalles de temps discrets et elles ont une matrice de probabilité de transition d'intervalle désignée par ce qui est représenté comme suit

$$P_m = \begin{bmatrix} [\underline{P}_{00}, \overline{P}_{00}] & [\underline{P}_{01}, \overline{P}_{01}] & \cdots & [\underline{P}_{0n}, \overline{P}_{0n}] \\ [\underline{P}_{10}, \overline{P}_{10}] & [\underline{P}_{11}, \overline{P}_{11}] & \cdots & [\underline{P}_{1n}, \overline{P}_{1n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{P}_{n0}, \overline{P}_{n0}] & [\underline{P}_{n1}, \overline{P}_{n1}] & \cdots & [\underline{P}_{nn}, \overline{P}_{nn}] \end{bmatrix}.$$

Cela semble être un simple remplacement de l'estimation ponctuelle par des intervalles dans la matrice de probabilité de transition. Cependant, il existe des subtilités dans ce remplacement lorsqu'il s'agit de la chaîne de Markov, il y a donc plusieurs façons d'incorporer des intervalles dans la matrice de probabilité de transition.

Une chaîne de Markov homogène dans le temps a la propriété suivante :

$$P_{ij} = P(X_{m+1} = j / X_m = i) = P(X_1 = j / X_0 = i), \quad \text{pour tout } i, j \in S \text{ et } m \in \mathbb{N}.$$

Cela indique que la probabilité de passer de l'état i à l'état j ne dépend pas de m , par conséquent, la matrice de probabilité de transition P est constante dans le temps. C'est là qu'il ya une certaine ambiguïté lorsqu'on incorpore des intervalles à la chaîne de Markov et c'est pour cette raison on choisit la terminologie suivante pour les matrices de probabilité de transition d'intervalle, dans laquelle on fait la distinction entre une chaîne de Markov homogène dans le temps et une matrice d'intervalle homogène dans le temps [93].

Matrice d'intervalle homogène dans le temps :

La même matrice d'intervalle est utilisée à chaque pas de temps. Il s'agit d'une simple extension d'une chaîne de Markov homogène dans le temps jusqu'à l'intervalle où on remplace les estimations ponctuelles par des entiers. Sous cette classe, on a deux sous-classes.

Chaîne de Markov homogène dans le temps :

La même valeur initialement choisie dans la matrice d'intervalle est utilisée à chaque pas de temps. Il s'agit d'une correspondance directe avec une chaîne de Markov homogène

dans le temps, où la matrice de probabilité de transition à une étape est constante dans le temps.

Chaîne de Markov inhomogène dans le temps :

Une valeur différente de la matrice d'intervalles peut être choisie à chaque pas de temps. C'est une chaîne différente de la chaîne de Markov homogène dans le temps, car la matrice de probabilité de transition à une étape n'est pas constante dans le temps.

Matrice d'intervalle inhomogène dans le temps :

Une matrice d'intervalle différente est utilisée à chaque pas de temps. Il s'agit d'une extension d'une chaîne de Markov inhomogène dans le temps qui a été explorée par [94], [95]. Cette idée de maintenir les intervalles dans une matrice de probabilité de transition constante tout en permettant une variation dans le choix des éléments dans les intervalles a été explorée par [96], [97].

2.3 Conclusion

Au sein de ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions concernant l'incertitude paramétrique où nous nous sommes focalisés sur le développement en séries de Taylor ainsi que la méthode d'analyse par intervalle.

3

Analyse du modèle d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes

Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le modèle d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes du nombre de services achevés avec succès depuis la dernière panne. Ainsi une analyse numérique de ce système sera considérée pour voir l'effet de la perturbation de quelques paramètres sur les mesures de performances du système. Dans la dernière partie, nous allons voir que l'imprécision sur la valeur d'un unique paramètre conduit à une incertitude sur les valeurs des mesures de performances du système. Dans ce cadre, on utilisera l'approche par intervalle pour l'étude de cette imprécision.

3.1 Description du modèle

Considérons un système de files d'attente $M/G/1$, où le serveur est sujet à des pannes dépendantes. Le flux des arrivées est poissonnien de paramètre λ . La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition $F(x)$ et de moyenne $\frac{1}{\mu}$. Supposons que si le serveur tombe en panne sa période de réparation est exponentielle de taux r qui est indépendant de tout le reste. La capacité de la file d'attente est infinie et la discipline de service est **FIFO**.

Dans ce système, nous considérons que la probabilité que le serveur tombe en panne augmente en fonction du nombre de services achevés avec succès depuis la dernière panne.

On note i le nombre de clients dans le système juste après une fin de service ou réparation et par j le nombre de clients servis avec succès depuis la dernière panne. À la fin de chaque service, il ya une probabilité $\theta(j)$ que le serveur tombe en panne et

entre en état de réparation et une probabilité $(1 - \theta(j))$ que le serveur est opérationnel et sert les clients. Les seuls moments où une panne peut avoir lieu est juste après le début d'un service. Le noyau de transition de la chaîne de Markov induite est donné par : [98]

$$P_{(0,j),(i^*,j+1)}^\theta = (1 - \theta(j)) \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{i^*}}{i^*!} dF(x)$$

et

$$P_{(0,j),(i^*,0)}^\theta = \theta(j) \frac{r}{\lambda + r} \left(\frac{\lambda}{\lambda + r} \right)^{i^*},$$

pour $i^* \geq 1$, pour $i > 0$, on a

$$P_{(i,j),(i^*,j^*)}^\theta = (1 - \theta(j)) \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{i^*-i+1}}{(i^* - i + 1)!} dF(x)$$

et

$$P_{(i,j),(i^*,0)}^\theta = \theta(j) \frac{r}{\lambda + r} \left(\frac{\lambda}{\lambda + r} \right)^{i^*-i+1} 1_{i^*-i+1} \geq 0$$

3.2 Analyse numérique du modèle

Dans cette section, nous présentons quelques exemples numériques en utilisant MATLAB afin d'illustrer l'effet de divers paramètres sur les mesures de performance du système. Pour le but d'une illustration numérique, on considère le cas où $\theta(j)$ est une variable aléatoire géométrique (c'est-à-dire $\theta(j) = \theta^j$). Les différents résultats obtenus sont présentés dans des figures. Pour cela on va considérer quatre types de distributions du processus de service à savoir :

- **Déterministe (D)** : La loi déterministe ayant le coefficient de variation $CV = 0$;
- **Exponentielle (M)** : sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \mu \exp(-\mu x), x \geq 0$$

le processus de service exponentiel a un coefficient de variation $CV = 1$.

- **Hyper-exponentielle d'ordre 2 (H_2)** : sa fonction de densité est définie comme suit :

$$f(x) = \gamma \mu_1 \exp(-\mu_1 x) + (1 - \gamma) \mu_2 \exp(-\mu_2 x), \text{ avec } 0 \leq \gamma \leq 1,$$

le processus Hyper-exponentiel a un coefficient de variation $CV \geq 1$. En changeant les valeurs du paramètre γ , on peut obtenir différentes valeurs de CV .

Le coefficient de variation CV , correspondant à cette distribution est donné par :

$$\sqrt{\frac{1 + (2\gamma - 1)^2}{1 - (2\gamma - 1)^2}}$$

– **Erlang** (E_2) : La fonction de densité correspondante à cette distribution est donnée par :

$$f(x) = \frac{\mu_1\mu_2(\exp(-\mu_1x) - \exp(-\mu_2x))}{\mu_1 - \mu_2}, \quad x \geq 0.$$

Les valeurs du coefficient de variation de la loi d'Erlang d'ordre deux varient entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1. Le coefficient de variation, CV , correspondant à cette distribution est donné par :

$$\sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}}$$

Dans ce qui suit on va prendre en considération seulement les deux cas de distributions du processus de service à savoir Exponentielle et Erlang.

1. La distribution stationnaire

Dans cette partie, nous exhibons les différents résultats numériques relatifs au calcul de la distribution stationnaire du modèle. Pour cela on fait varier le taux d'arrivées λ et le taux de service μ tout en fixant le taux de réparation $r = 3$ ainsi que le taux de panne θ respectivement à 0.2, 0.5 et 0.8.

Les résultats obtenus concernant le modèle d'attente $M/M/1/$ avec pannes dépendantes sont présentés dans le tableau suivant :

		$\theta = 0.2$				$\theta = 0.5$				$\theta = 0.8$			
λ	μ	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
1.5	6.5	0.8426	0.1259	0.0079	0.0236	0.5975	0.2511	0.0378	0.1135	0.4158	0.2922	0.0730	0.2190
2.8	7.4	0.8685	0.1034	0.0092	0.0190	0.6385	0.2189	0.0465	0.0962	0.4541	0.2612	0.0927	0.1921
3	8.2	0.8718	0.1005	0.0092	0.0184	0.6447	0.2144	0.0470	0.0940	0.4606	0.2568	0.0942	0.1885
4.5	9.4	0.8905	0.0850	0.0091	0.0155	0.6823	0.1882	0.0480	0.0815	0.5025	0.2307	0.0989	0.1679
4.8	9.9	0.8964	0.0801	0.0090	0.0145	0.6953	0.1795	0.0477	0.0775	0.5180	0.2218	0.0991	0.1611

TABLE 3.1 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1/$ avec pannes dépendantes

De même, le tableau qui suit illustre les différents résultats numériques relatifs au modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes :

		$\theta = 0.2$				$\theta = 0.5$				$\theta = 0.8$			
λ	μ	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
1.5	6.5	0.8424	0.1262	0.0079	0.0236	0.5969	0.2518	0.0378	0.1135	0.3709	0.2920	0.0843	0.2528
2.8	7.4	0.8682	0.1036	0.0092	0.0190	0.6378	0.2196	0.0464	0.0962	0.4075	0.2610	0.1079	0.2235
3.0	8.2	0.8716	0.1007	0.0092	0.0184	0.6440	0.2151	0.0470	0.0939	0.4139	0.2567	0.1098	0.2196
4.3	9.4	0.8903	0.0851	0.0091	0.0155	0.6818	0.1887	0.0480	0.0815	0.4556	0.2314	0.1160	0.1970
4.8	9.9	0.8962	0.0803	0.0090	0.0145	0.6948	0.1800	0.0477	0.0775	0.4711	0.2228	0.1166	0.1895

TABLE 3.2 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes

On remarque que la perturbation du taux d'arrivée λ et du taux de service μ induit une petite variation des composantes de la distribution stationnaire. On constate aussi que les composante de la distribution stationnaire varient en fonction du taux de panne θ .

2. L'effet du taux d'arrivée λ et du taux de service μ sur le nombre moyen de client dans le système Q :

On fait varier le taux d'arrivée λ ainsi que le taux de service μ afin de voir l'impact de ces deux derniers sur la variation du nombre moyen de clients dans le système et cela pour différentes valeurs de θ fixées à 0.2, 0.5 et 0.8.

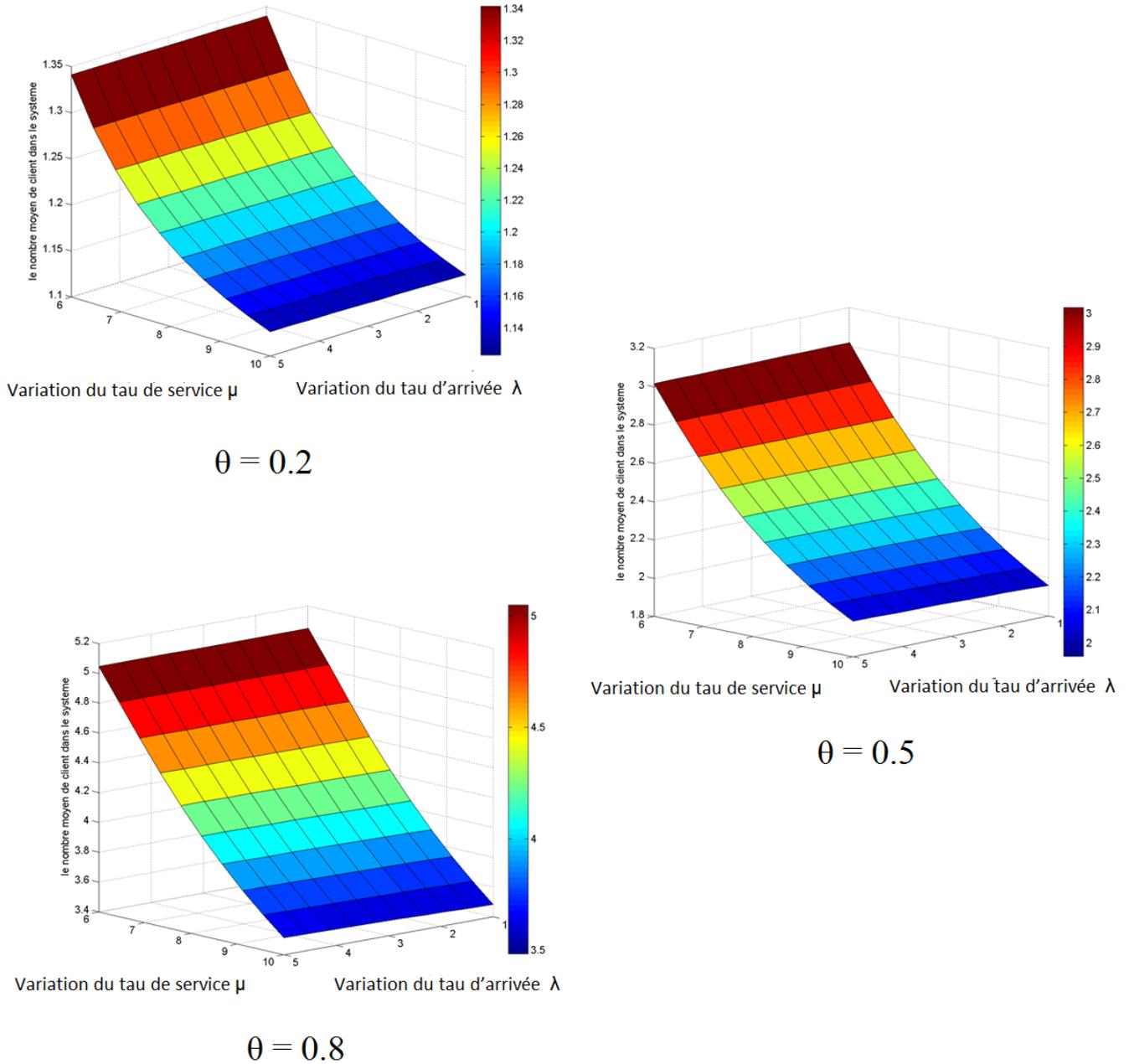


FIGURE 3.1 – Variation du nombre moyen de clients dans le système en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente M/M/1 avec pannes dépendantes

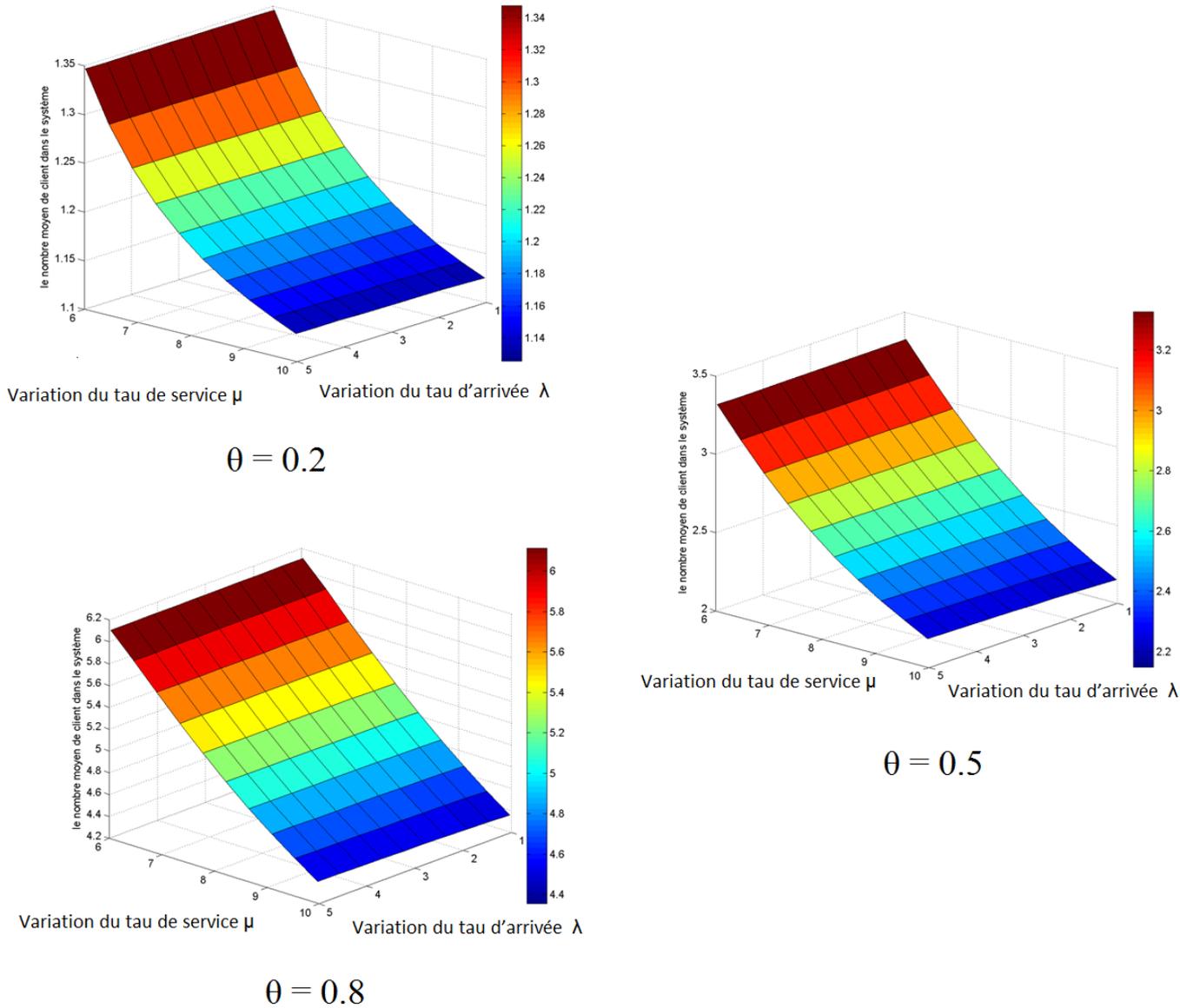


FIGURE 3.2 – Variation du nombre moyen de clients dans le système en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes

On remarque que le nombre moyen de clients dans le système se comporte de la même manière et cela pour les deux types de distributions de la durée de service considérées, c'est à dire que à chaque fois qu'on augmente le taux de service μ le nombre moyen de clients dans le système Q diminue, mais il reste stable avec l'augmentation du taux d'arrivée λ .

On remarque aussi que, le nombre moyen de clients dans le système augmente en parallèle avec la probabilité d'occurrence de panne θ .

3. L'effet du taux d'arrivée λ et du taux de service μ sur la probabilité de blocage P_b :

Dans cette partie, nous illustrons le comportement de la probabilité de blocage par rapport aux changements du taux de service μ et du taux d'arrivée λ pour les deux types de distributions du processus de service considérées précédemment, et cela pour différentes valeurs de θ fixées à 0.2, 0.5 et 0.8.

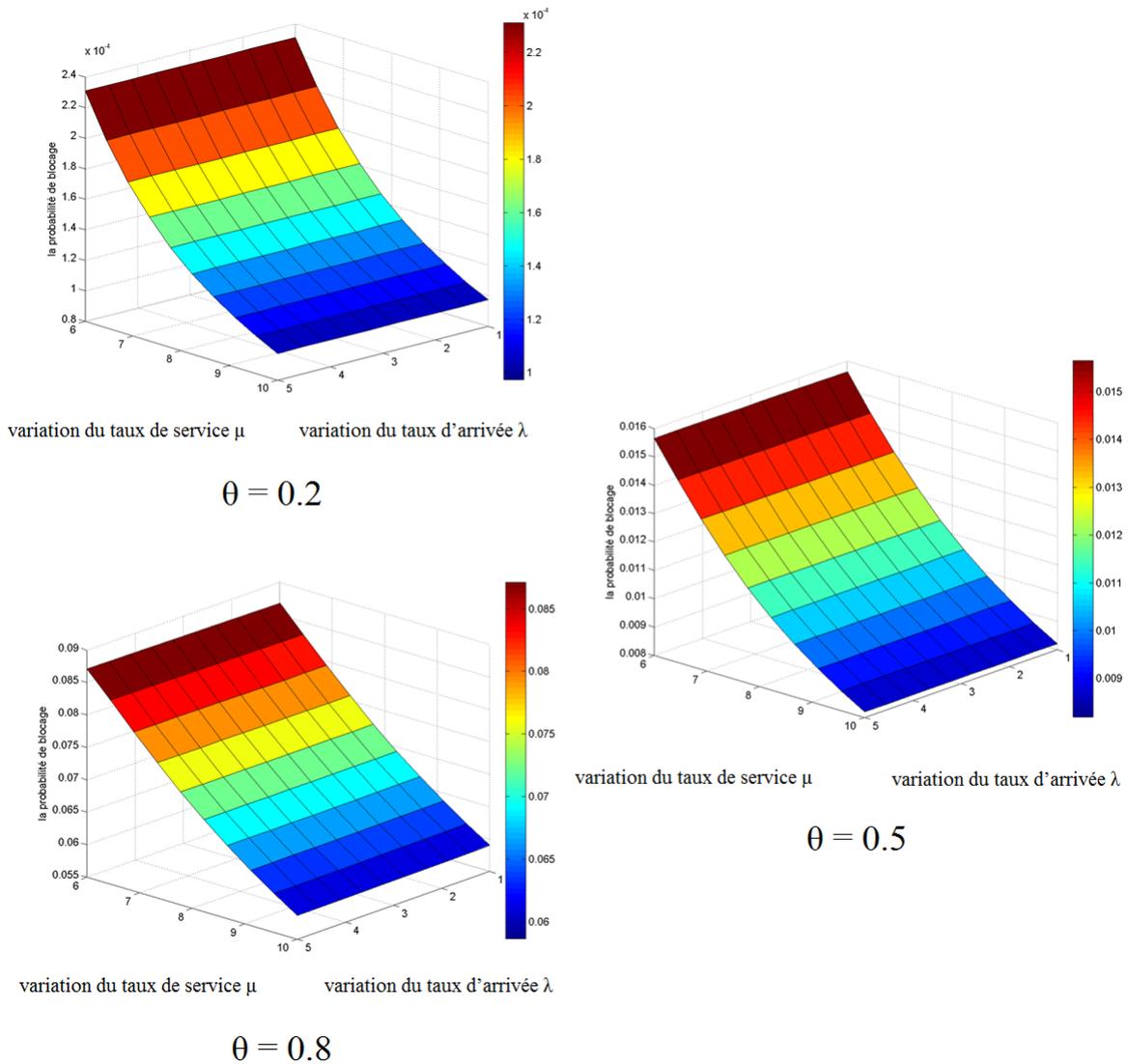


FIGURE 3.3 – Variation de la probabilité de blocage en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes

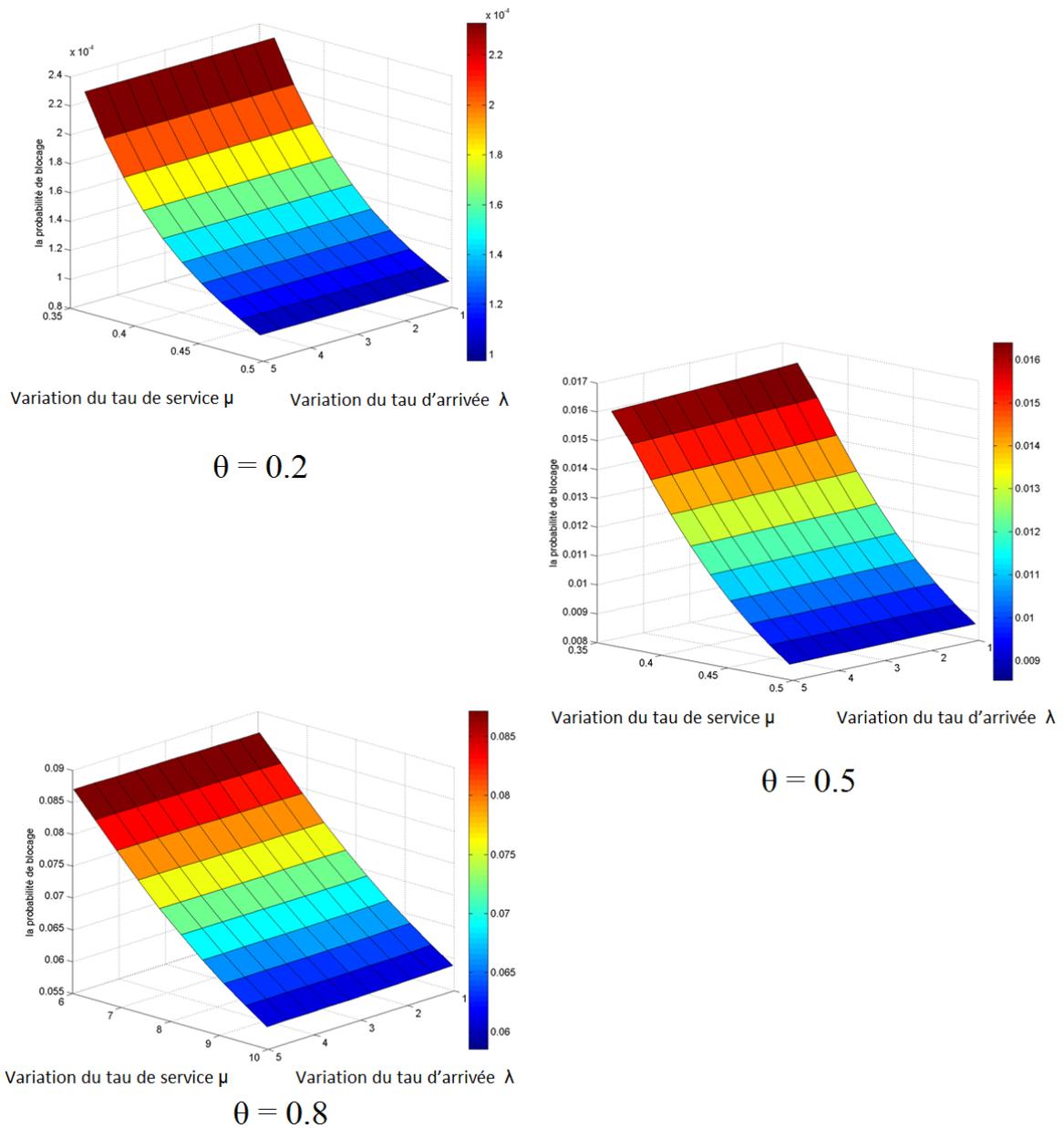


FIGURE 3.4 – Variation de la probabilité de blocage en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes

Comme on peut le voir sur les figures ci-dessus, l'augmentation du taux de service μ engendre la diminution de la probabilité de blocage, par contre elle reste stable dans le cas d'augmentation du taux d'arrivée λ .

On constate aussi qu'en augmentant la probabilité d'occurrence de panne θ , la probabilité de blocage augmente aussi.

4. L'effet du taux d'arrivée λ et du taux de service μ sur le temps moyen de séjour W :

De la même manière, nous illustrons le comportement du temps moyen de séjour en fonction des variations du taux de service μ et du taux d'arrivée λ .

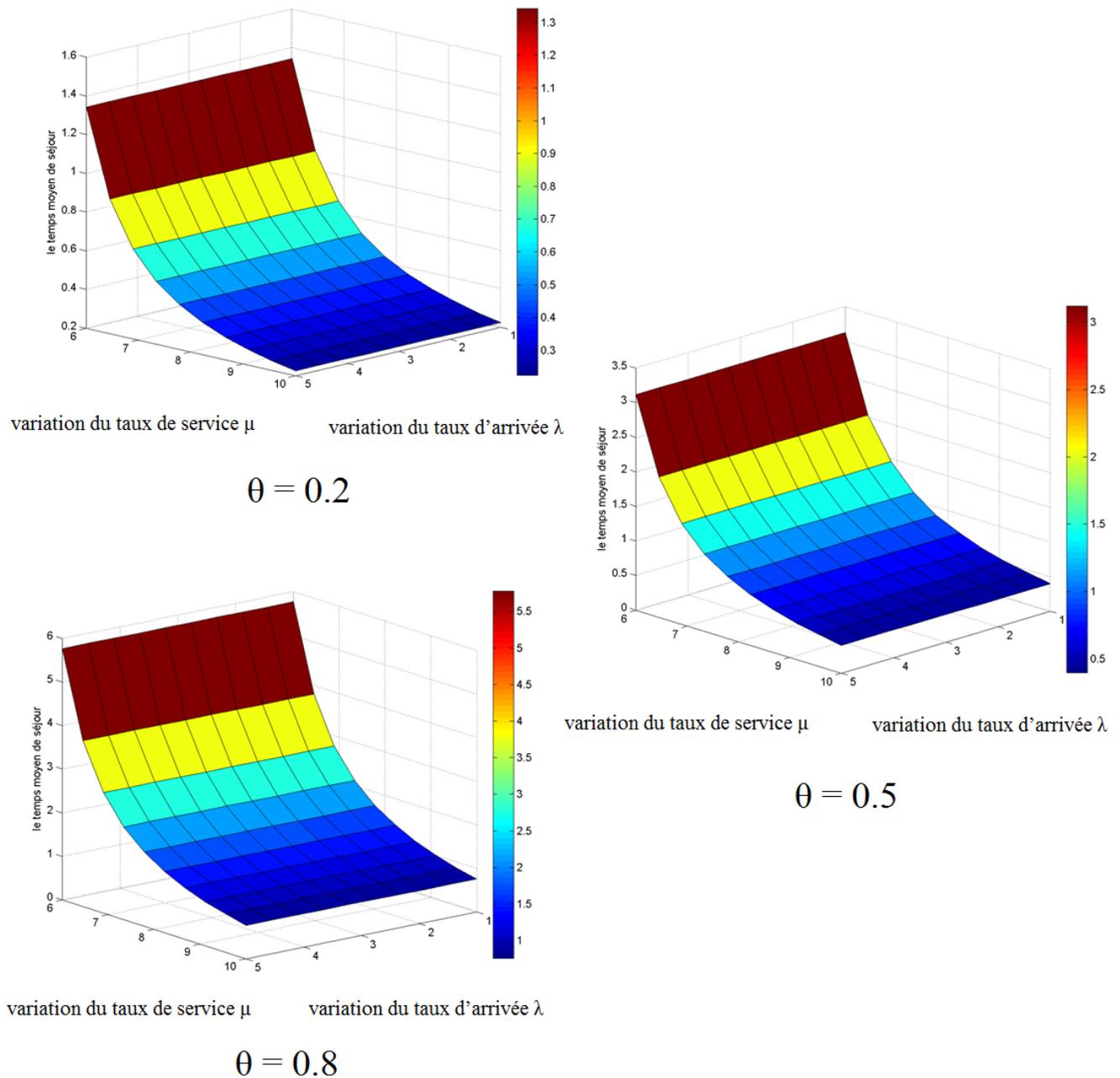


FIGURE 3.5 – Variation du temps moyen de séjour dans le système en fonction de λ et μ dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes

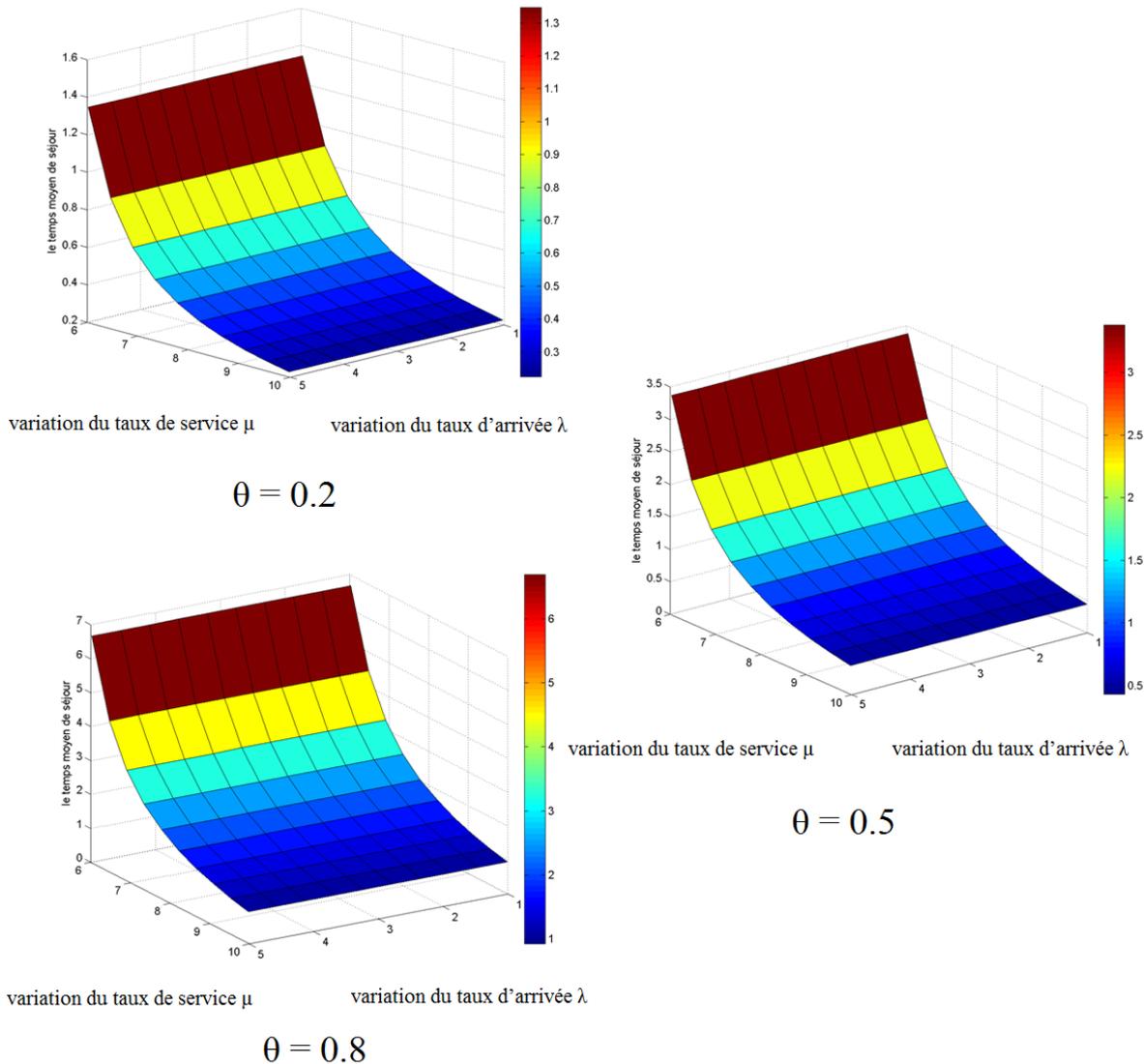


FIGURE 3.6 – Variation du temps moyen de séjour dans le système en fonction de λ et μ ans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes

D'après l'illustration graphique des figures précédentes, on constate que l'augmentation du taux de service μ entraîne systématiquement la diminution du temps moyen de séjour en question, alors qu'il reste constant lors de l'augmentation du taux d'arrivée λ .

De même, l'augmentation de la probabilité d'occurrence de panne θ implique celle du temps moyen de séjour dans le système.

3.3 Approche par intervalle

Supposons que les paramètres d'entrée d'un modèle ne sont pas connues avec précision mais appartiennent avec certitude à des intervalles, dans ce cas on introduit une nouvelle théorie qui est l'approche par intervalle. Cette approche est basée sur l'obtention de la borne inférieure et la borne supérieure de ces intervalles.

Dans cette section on s'intéresse au calcul numérique des mesures de performance du système afin d'obtenir la valeur minimale et la valeur maximale de chaque mesure.

Dans ce qui suit, on fixe le paramètre de la loi de réparation $r = 3$, et le taux des arrivées $\lambda = 2$. Concernant la loi de temps de service, on a choisi les deux modèles suivants :

- ◇ Exponentielle du paramètre $\mu = 2$.
- ◇ Erlang-2 du paramètre $\mu_1 = 8/9$, $\mu_2 = 3/2$ et $CV = 0.73$

La probabilité d'occurrence d'une panne θ est une variable aléatoire géométrique ($\theta(j) = \theta^j$) générée selon une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$, où ce dernier est pris respectivement $([0.1 : 0.3], [0.4 : 0.6], [0.7 : 0.9])$

1. La distribution stationnaire

Dans cette partie nous présentons les différents résultats obtenus sur la distribution stationnaire et cela pour les deux types de distributions de service.

La loi de service est Exponentielle

Les résultats numériques du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes sont les suivants pour les trois cas du paramètre θ :

▷ $\theta \in [0.1, 0.3]$

	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
Min	0.8509	0.0345	0.0022	0.0033
Max	0.9600	0.1032	0.0184	0.0276
Moyenne	0.9092	0.0686	0.0089	0.0133
Mediane	0.9103	0.0689	0.0083	0.0125
Variance * 10^{-3}	0.9643	0.3828	0.0213	0.0480

TABLE 3.3 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.1, 0.3]$

où π s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi = ([0.8509; 0.9600], [0.0345; 0.1032], [0.0022; 0.0184], [0.0033; 0.0276]).$$

▷ $\theta \in [0.4, 0.6]$

	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
Min	0.6646	0.1334	0.0312	0.0468
Max	0.7885	0.1787	0.0627	0.0940
Moyenne	0.7244	0.1584	0.0468	0.0703
Mediane	0.7234	0.1597	0.0468	0.0702
Variance	0.0013	0.0002	0.0001	0.0002

TABLE 3.4 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.4, 0.6]$

où π s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi = ([0.6646; 0.7885], [0.1334; 0.1787], [0.0312; 0.0627], [0.0468; 0.0940]).$$

▷ $\theta \in [0.7, 0.9]$

	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
Min	0.5077	0.1927	0.0801	0.1202
Max	0.6070	0.2030	0.1157	0.1736
Moyenne	0.5543	0.1999	0.0983	0.1475
Mediane	0.5536	0.2008	0.0982	0.1474
Variance * 10^{-3}	0.8119	0.0091	0.1047	0.2356

TABLE 3.5 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.7, 0.9]$

où π s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi = ([0.5077; 0.6070], [0.1927; 0.2030], [0.0801; 0.1157], [0.1202; 0.1736]).$$

La loi de service est d'Erlang

De même les résultats du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes pour les trois cas du paramètre θ sont présentés dans le tableau ci-dessous :

▷ $\theta \in [0.1, 0.3]$

	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
Min	0.8576	0.0339	0.0022	0.0034
Max	0.9605	0.0967	0.0183	0.0274
Moyenne	0.9142	0.0642	0.0086	0.0129
Mediane	0.9174	0.0633	0.0077	0.0116
Variance * 10^{-3}	0.8810	0.3284	0.0216	0.0487

TABLE 3.6 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.1, 0.3]$

où π s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi = ([0.8576; 0.9605], [0.0339; 0.0967], [0.0022; 0.0183], [0.0034; 0.0274])$$

▷ $\theta \in [0.4, 0.6]$

	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
Min	0.6764	0.1246	0.0313	0.0470
Max	0.7970	0.1668	0.0627	0.0941
Moyenne	0.7355	0.1474	0.0468	0.0703
Mediane	0.7344	0.1486	0.0468	0.0702
Variance	0.0014	0.0002	0.0001	0.0002

TABLE 3.7 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.4, 0.6]$

où π s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi = ([0.6764; 0.7970], [0.1246; 0.1668], [0.0313; 0.0627], [0.0470; 0.0941])$$

▷ $\theta \in [0.7, 0.9]$

	π_{00}	π_{01}	π_{10}	π_{11}
Min	0.5129	0.1817	0.0806	0.1209
Max	0.6167	0.1977	0.1158	0.1737
Moyenne	0.5586	0.1918	0.0998	0.1498
Mediane	0.5570	0.1925	0.1002	0.1503
Variance * 10^{-3}	0.8040	0.0182	0.0931	0.2094

TABLE 3.8 – Distribution stationnaire du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes pour $\theta \in [0.7, 0.9]$

où π s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi = ([0.5129; 0.6167], [0.1817; 0.1977], [0.0806; 0.1158], [0.1209; 0.1737]).$$

2- La probabilité de blocage

A présent, nous illustrons les différents résultats numériques que nous avons obtenus concernant la probabilité de blocage pour les deux types de distributions de service considérées précédemment :

La loi de service est Exponentielle

Les résultats numériques du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes sont les suivants pour les trois cas du paramètre θ :

	$\theta \in [0.1 : 0.3]$	$\theta \in [0.4 : 0.6]$	$\theta \in [0.7 : 0.9]$
Min	0.0000	0.0049	0.0493
Max	0.0013	0.0276	0.1197
Moyenne	$3.0505 * 10^{-4}$	0.0144	0.0819
Medianne	$1.6607 * 10^{-4}$	0.0135	0.0806
Variance	$1.0985 * 10^{-7}$	$4.2624 * 10^{-5}$	$4.1411 * 10^{-4}$

TABLE 3.9 – Probabilité de blocage du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes

La loi de service est d'Erlang

De même on présente les résultats du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes et cela pour les trois cas du paramètre θ

	$\theta \in [0.1 : 0.3]$	$\theta \in [0.4 : 0.6]$	$\theta \in [0.7 : 0.9]$
Min	0.0000	0.0062	0.0546
Max	0.0012	0.0325	0.1240
Moyenne	$3.6516 * 10^{-4}$	0.0163	0.0864
Medianne	$2.2172 * 10^{-4}$	0.0146	0.0842
Variance	$1.3579 * 10^{-7}$	$5.8122 * 10^{-5}$	$3.9979 * 10^{-4}$

TABLE 3.10 – Probabilité de blocage du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes

Pour les deux types de distributions de service, on constate qu'en augmentant la probabilité d'occurrence d'une panne θ la probabilité de blocage augmente aussi.

3- Le nombre moyen de clients dans le système

Dans cette partie nous allons donner les différents résultats obtenus concernant le nombre moyen de clients dans le système et ceux pour les deux types de distributions de service considérées précédemment.

La loi de service est Exponentielle

Le tableau suivant montre les résultats numériques du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes et cela pour les trois cas du paramètre θ :

	$\theta \in [0.1 : 0.3]$	$\theta \in [0.4 : 0.6]$	$\theta \in [0.7 : 0.9]$
Min	1.1144	2.1050	4.6596
Max	1.8531	3.7346	6.3388
Moyenne	1.4209	2.8945	5.5287
Medianne	1.3919	2.8813	5.5429
Variance	0.0452	0.2269	0.2442

TABLE 3.11 – Nombre moyen de clients dans le système dans le modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes

La loi de service est d'Erlang

Les résultats numériques correspondants au modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes sont présentés dans le tableau suivant :

	$\theta \in [0.1 : 0.3]$	$\theta \in [0.4 : 0.6]$	$\theta \in [0.7 : 0.9]$
Min	1.0661	1.9505	4.3958
Max	1.5300	3.4344	6.2171
Moyenne	1.2457	2.6634	5.2419
Medianne	1.2229	2.6696	5.2472
Variance	0.0172	0.1672	0.2916

TABLE 3.12 – Nombre moyen de clients dans le système dans le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes

D'après l'illustration des tableaux précédents, on remarque que l'augmentation de la probabilité d'occurrence de panne θ entraîne celle du nombre moyen de clients dans le système et cela pour les deux lois de services considérées.

4- Le temps moyen de séjour

Dans cette dernière partie, nous présentons les différents résultats numériques obtenus concernant le temps moyen de séjour dans le système et cela pour les deux types de distribution de service.

La loi de service est Exponentielle

les résultats numériques du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes sont les suivants pour les trois cas du paramètre θ :

	$\theta \in [0.1 : 0.3]$	$\theta \in [0.4 : 0.6]$	$\theta \in [0.7 : 0.9]$
Min	0.0000	0.0049	0.0494
Max	0.0013	0.0276	0.1197
Moyenne	$3.0505 * 10^{-4}$	0.0145	0.0818
Medianne	$1.6607 * 10^{-4}$	0.0135	0.0799
Variance	$1.0985 * 10^{-7}$	$4.3655 * 10^{-5}$	$4.0927 * 10^{-4}$

TABLE 3.13 – Temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/M/1$ avec pannes dépendantes

La loi de service est d'Erlang

Dans ce cas on considère le modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes, les résultats obtenus pour divers valeurs de θ sont les suivants :

	$\theta \in [0.1 : 0.3]$	$\theta \in [0.4 : 0.6]$	$\theta \in [0.7 : 0.9]$
Min	0.5311	0.0042	2.3198
Max	0.7439	1.7690	3.5473
Moyenne	0.6135	1.3477	2.8986
Medianne	0.6020	1.2764	2.8999
Variance	0.0042	0.0639	0.1200

TABLE 3.14 – Temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/E_2/1$ avec pannes dépendantes

D'après les tableaux présentés précédemment, on remarque que l'augmentation de la probabilité d'occurrence de panne θ engendre l'augmentation du temps moyen de séjour et cela pour les deux types de distributions de services considérées.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré une analyse numérique de la file d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes et cela en utilisant deux approches. Plusieurs exemples ont été aussi illustrés.

4

Analyse du modèle d'attente $M/G/1$ avec pannes classiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons considérer le modèle d'attente $M/G/1$ avec pannes classiques. Afin d'évaluer les différentes mesures de performances de ce modèle nous allons appliquer la méthode des développements limités en séries de Taylor des chaînes de Markov. On supposera que le paramètre θ est une variable aléatoire, et ce afin de modéliser l'incertitude infligée sur ce paramètre. Plusieurs résultats numériques seront ainsi présentés.

4.1 Description du modèle

Considérons un système de files d'attente $M/G/1$, où le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Le flux des arrivées est poissonnien de paramètre λ . La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition $F_1(x)$ et de moyenne $1/\mu_1$. Supposons que la période de réparation est exponentielle de taux $r > 0$ et de fonction de répartition $F_0(x)$. La capacité de la file d'attente est infinie et la discipline du service est *FIFO*.

Dans ce système, nous considérons les pannes avec perte définitive de client (c'est la nature de panne de serveur). Supposons que le client quitte le système définitivement avec une probabilité $(1 - \theta)$ lorsque le serveur est tombé en panne. Sinon, il est pris en charge par le serveur avec une probabilité $\theta > 0$ [99].

L'état de ce système en un instant t , peut-être décrit par le processus stochastique suivant :

$$E_t = \{N_t, X_t, Y_t; t > 0\}$$

où

N_t : "est le nombre de clients dans le système à l'instant t ",

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est en bon état;} \\ 1 & \text{si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

Y_t : est une variable aléatoire, définie comme suit :

- Si $X_t = 0$ et $N_t = 0$ alors Y_t est la durée du temps qui s'écoule entre l'instant t et l'instant d'occurrence d'une panne tout en ayant le système vide;
- si $N_t \neq 0$
 - si $X_t = 0$, Y_t est la durée du temps restante de service (la durée résiduelle de service);
 - si $X_t = 1$, Y_t est la durée du temps restante de réparation (la durée résiduelle de réparation).

En raison de l'hypothèse que les pannes se produisent indépendamment de tout le reste, donc la matrice de transition s'écrit sous la forme suivante :

$$P = \theta P_1 + (1 - \theta)P_0$$

avec :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \beta_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Où :

$$\alpha_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f_1(x) dx, \quad \beta_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f_0(x) dx$$

4.1.1 Mesures de performance

1. Le nombre moyen de clients dans le système :

$$Q = \rho + \frac{\theta\rho_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\rho_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)} \quad (4.1)$$

2. Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = Q - \rho = \frac{\theta\rho_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\rho_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)} \quad (4.2)$$

3. Le temps moyen de séjour dans le système :

$$W = \frac{Q}{\lambda} = \theta m_1 + (1 - \theta)m_0 + \frac{\theta\lambda m_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\lambda m_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)} \quad (4.3)$$

4. Le temps moyen de séjour dans la file :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\theta\lambda m_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\lambda m_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)} \quad (4.4)$$

4.2 Nouveau modèle

Dans cette partie, nous considérons un aspect statistique pour le calcul des mesures de performances relatives au modèle d'attente $M/G/1$ avec pannes, où nous supposons que le taux d'occurrence d'une panne θ est déterminé avec une certaine incertitude. Pour ce faire, nous appliquons l'approche de développement en séries de Taylor, tout en utilisant ainsi le **p-boxe** (probability-boxe) afin de propager l'incertitude en question.

Boîte de probabilité

Dans un cadre plus général d'une distribution de probabilité nous définissons une loi de densité d'une variable X avec ses bornes inférieure et supérieure. Cela est dû au manque de connaissance de la formule de la loi. Ainsi, le p-boxe prend en compte l'aléatoire (incertitude aléatoire) aussi bien que pour l'incertitude épistémique dans la description de la variable X [100]. Les bornes inférieure et supérieure de la loi de densité $g(X)$, sont notées par $[\underline{g}(X); \bar{g}(X)]$. De plus, la loi de densité mais inconnue $g_X(x)$ de la variable X se trouve entre ces deux bornes :

$$\underline{g}(X) \leq g(X) \leq \bar{g}(X).$$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au p-boxe paramétrique. Ce type de p-boxe nous permet d'avoir une idée sur la forme de la loi de densité mais garde l'incertitude dans ses paramètres. Nous introduisons donc le nouveau modèle associé au paramètre incertain θ , défini comme suit :

P-boxe du modèle

$$\theta = \bar{\theta} + \sigma\varepsilon, \quad \varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.5)$$

avec

$$\bar{\theta} \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\theta}, \bar{\theta}] \quad (4.6)$$

$$\sigma \rightsquigarrow \mathcal{U}[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}] \quad (4.7)$$

$$\theta \rightsquigarrow \mathcal{N}[\bar{\theta}, \sigma] \quad (4.8)$$

où $\bar{\theta}$ est la moyenne du taux de panne θ , σ son écart type et ε est la variable aléatoire modélisant le bruit blanc infligé sur θ .

Les formules du développement de Taylor relatives aux mesures de performance du modèle d'attente M/G/1 avec pannes classiques à l'ordre n au voisinage de la moyenne $\bar{\theta}$, sont données par :

– **Le nombre moyen de clients dans le système :**

$$Q(\theta) = Q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(\bar{\theta})}{k!} (\sigma\varepsilon)^k$$

– **Le nombre moyen de clients dans la file :**

$$L_q(\theta) = L_q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \frac{L_q^{(k)}(\bar{\theta})}{k!} (\sigma\varepsilon)^k$$

– **Le temps moyen de séjour dans le système :**

$$W(\theta) = W(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \frac{W^{(k)}(\bar{\theta})}{k!} (\sigma\varepsilon)^k$$

– **Le nombre moyen de clients dans la file :**

$$W_q(\theta) = W_q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \frac{W_q^{(k)}(\bar{\theta})}{k!} (\sigma\varepsilon)^k$$

4.3 Application numérique

Sous l'hypothèse statistique, consistant à considérer l'incertitude liée au paramètre θ , les mesures de performances ($Q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$, $L_q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$, $W(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$, $W_q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$) deviendront des variables aléatoires, elles s'agissent d'une transformée d'autres variables aléatoires. Afin de caractériser celles-ci nous allons essayer d'estimer leurs espérances et leurs variances en procédant par la méthode des développements limités en séries de Taylor. De ce fait, les calculs de ces derniers seront réalisés à l'aide du logiciel MATLAB. Dans ce cas, les valeurs des paramètres du modèle seront fixées comme suit :

Le taux des arrivées $\lambda = 1$, l'ordre du polynôme $n = 4$. Concernant la loi du temps de service, on a choisi les deux modèles suivants :

- ◇ Déterministe du paramètre $CV = 0$
- ◇ Hyper-exponentielle-2 du paramètre $\gamma = 0.3$, $CV = 1.18$.

Le nombre moyen de clients dans le système

Dans cette partie, nous présentons les différents résultats obtenus concernant le nombre moyen de clients dans le système et cela pour les deux types de distributions de service considérées précédemment.

La loi de service est Déterministe

Les résultats obtenus dans cette analyse numérique, relatifs au calculs de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire $Q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$ dans le modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes en variant le taux de réparation r et le taux de service μ se résument dans le tableau suivant :

Espérance(Q)		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
	Min	1.0068	2.7225	3.2395	3.9991	4.6336
	Max	1.1614	4.8985	5.3102	7.1595	7.8054
	Moyenne	1.0709	3.4010	3.8782	4.9937	5.6800
	Medianne	1.0694	3.3036	3.7681	4.8550	5.5298
Variance	0.0011	0.2050	0.1924	0.3911	0.4527	
Variance(Q)	Min	0.0024	0.0636	0.0001	0.0183	0.0021
	Max	0.0108	0.4115	0.0023	0.1127	0.0112
	Moyenne	0.0060	0.1870	0.0007	0.0528	0.0057
	Medianne	0.0059	0.1781	0.0005	0.0500	0.0053
	Variance	0.0000	0.0060	0.0000	0.0005	0.0000

TABLE 4.1 – Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

Les résultats du tableau ci-dessus nous ont permis d'obtenir la représentation en boîte à moustache ainsi que les courbes des fonctions de densité de probabilité (pdf) du nombre moyen de clients dans le système estimé par la méthode du noyau dans le modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes qui sont données comme suit :

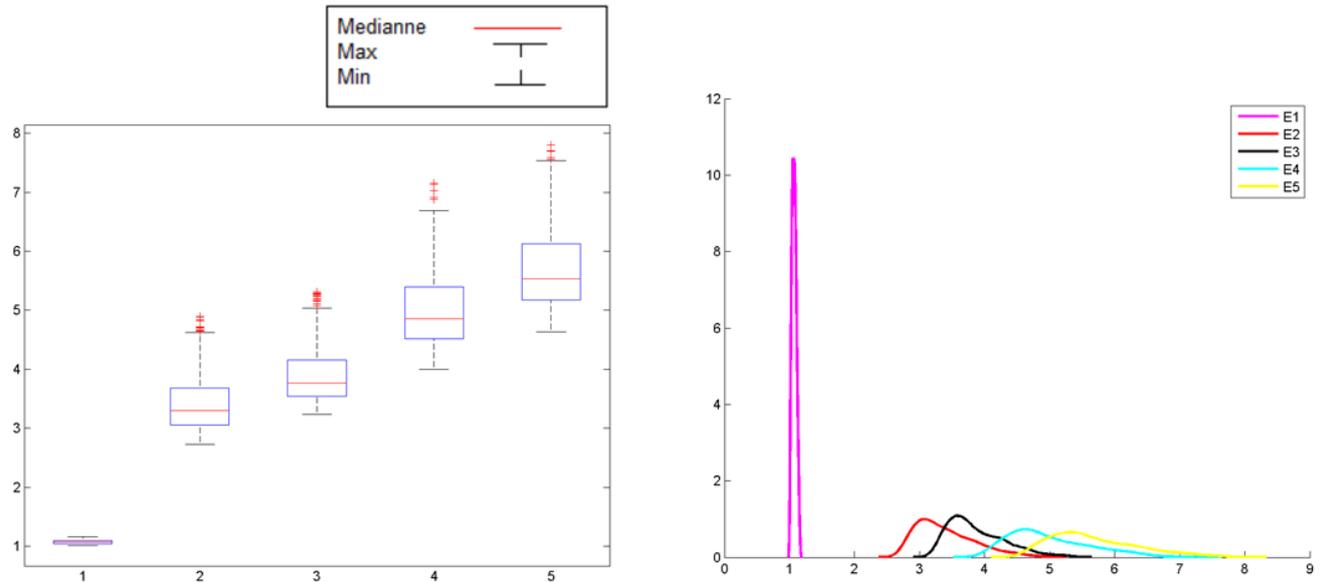


FIGURE 4.1 – Boîte à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

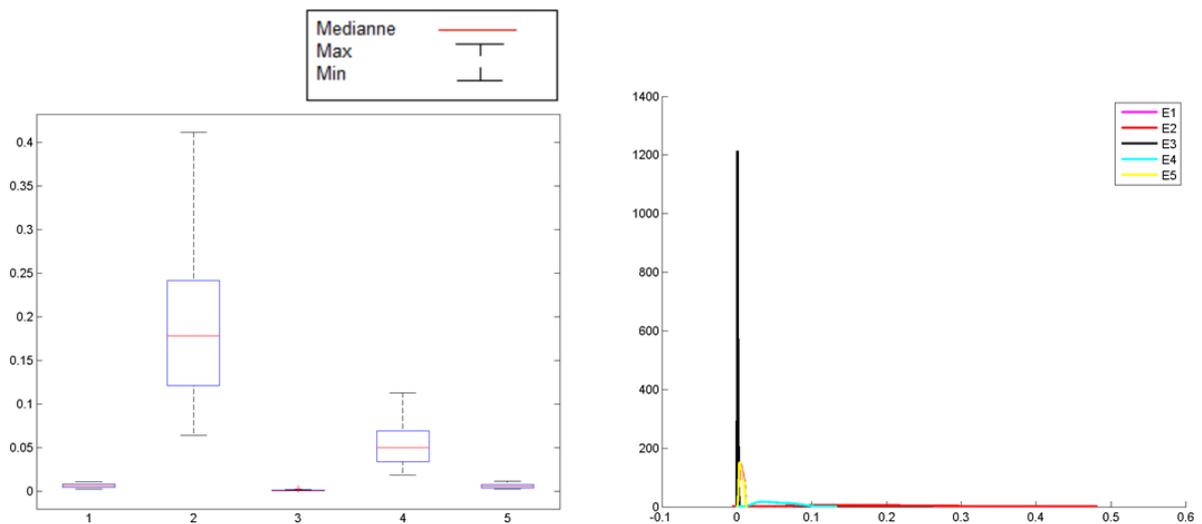


FIGURE 4.2 – Boîte à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

La loi Hyper-exponentielle

Dans le tableau suivant nous exhibons les résultats numériques du nombre moyen de clients dans le système associés au modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes et cela pour les différentes valeurs des paramètres μ et r .

Espérance(Q)		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
Min		1.0091	2.9715	3.5126	4.3093	4.9344
Max		1.3348	3.1213	3.6227	4.6690	5.3345
Moyenne		1.1630	3.0242	3.5557	4.4580	5.1022
Medianne		1.1599	3.0216	3.5525	4.4514	5.0945
Variance		0.0076	0.0010	0.0007	0.0061	0.0077
Variance(Q)	Min	0.0244	0.0313	0.0013	0.0156	0.0006
	Max	0.1385	0.2129	0.0061	0.0944	0.0040
	Moyenne	0.0678	0.0959	0.0033	0.0442	0.0018
	Medianne	0.0644	0.0907	0.0031	0.0422	0.0017
	Variance	0.0007	0.0016	0.0000	0.0003	0.0000

TABLE 4.2 – Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

les figures suivantes montrent la représentation en boîte à moustache ainsi que les courbes des fonctions de densité de probabilité (pdf) du nombre moyen de clients dans le système estimé par la méthode du noyau dans le modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes qui sont données comme suit :

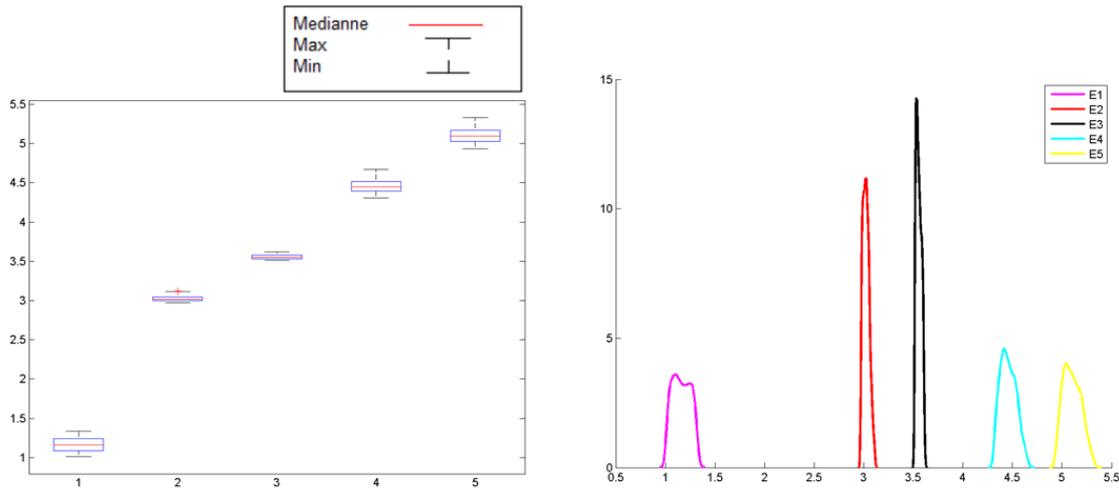


FIGURE 4.3 – Boîte à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

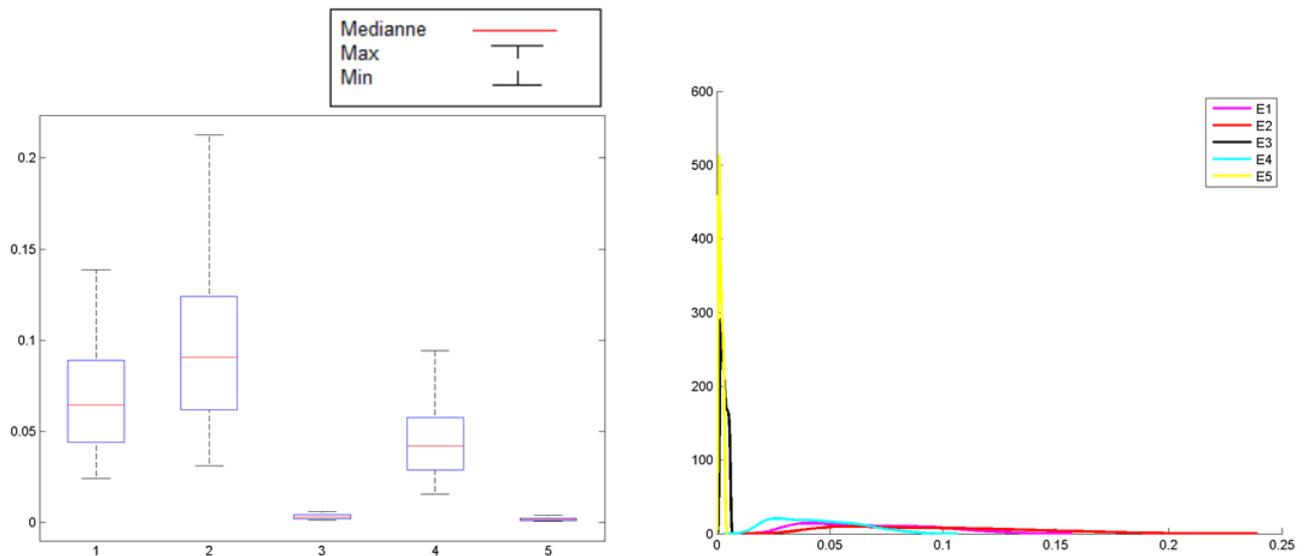


FIGURE 4.4 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

Le nombre moyen de client dans la file

Dans cette partie, nous présentons les différents résultats liés au nombre moyen de client dans la file selon les deux types de distributions de service considérés précédemment et cela pour différentes valeurs du taux de service μ et du taux de réparation r .

La loi de service est Déterministe

Les résultats obtenus pour le modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes relatifs au calcul de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire $L_q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$ sont dressés dans le tableau et figures ci-après :

		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
Espérance(L_q)	Min	0.5055	1.5421	1.6949	2.0599	2.2600
	Max	0.6198	3.8170	3.9777	5.2688	5.5702
	Moyenne	0.5466	2.2300	2.3932	3.0359	3.2937
	Medianne	0.5436	2.1191	2.2880	2.8933	3.1500
	Variance	0.0005	0.2060	0.2089	0.4054	0.4315
Variance(L_q)	Min	0.0004	0.0471	0.0001	0.0084	0.0012
	Max	0.0024	0.3479	0.0025	0.0642	0.0078
	Moyenne	0.0011	0.1509	0.0007	0.0277	0.0034
	Medianne	0.0011	0.1418	0.0005	0.0262	0.0032
	Variance	0.0000	0.0042	0.0000	0.0001	0.0000

TABLE 4.3 – Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

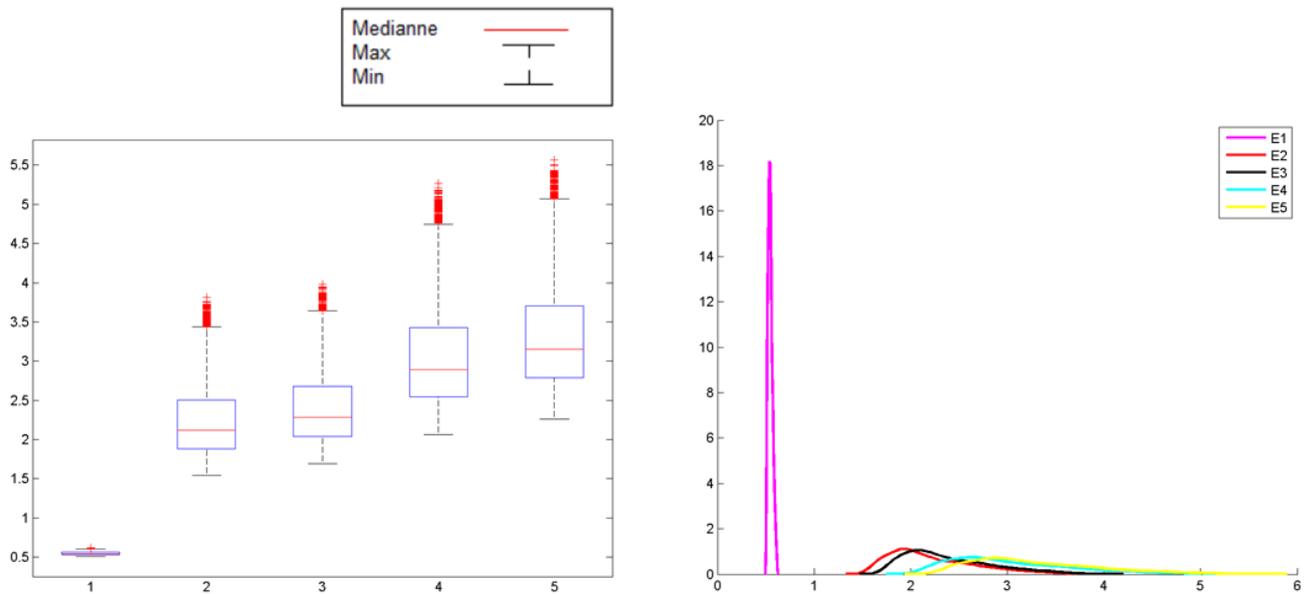


FIGURE 4.5 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

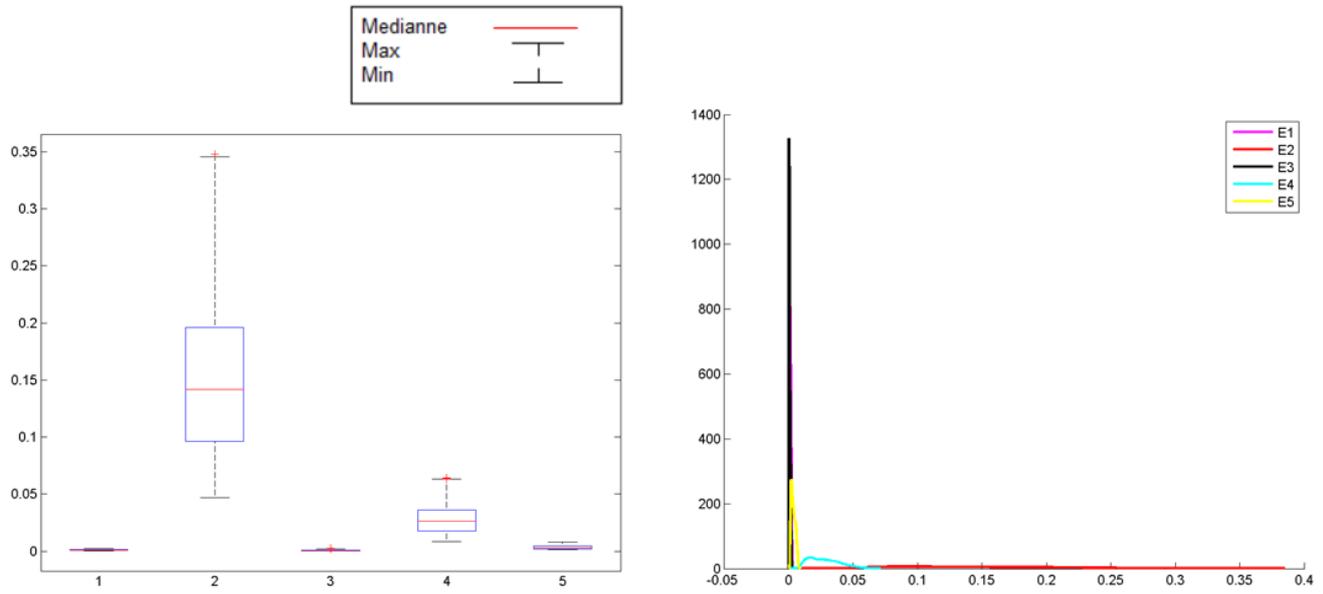


FIGURE 4.6 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

La loi de service est Hyper-exponentielle

Le tableau suivant regroupe les résultats numériques correspondants au calcul de la moyenne et de la variance du nombre moyen de clients dans la file dans le modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes dépendantes :

Espérance(L_q)		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
Min		0.5354	1.8858	2.0880	2.4725	2.7168
Max		1.2804	3.5037	3.6557	4.9018	5.1686
Moyenne		0.7838	2.2660	2.4636	3.0694	3.3142
Medianne		0.0214	0.1459	0.1438	0.2864	0.2914
Variance		0.0076	0.0010	0.0007	0.0061	0.0077
Variance(L_q)	Min	0.0160	0.0218	0.0006	0.0064	0.0002
	Max	0.0985	0.1630	0.0034	0.0489	0.0023
	Moyenne	0.0465	0.0698	0.0017	0.0209	0.0009
	Medianne	0.0440	0.0653	0.0016	0.0193	0.0008
	Variance	0.0003	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000

TABLE 4.4 – Espérance et Variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

les figures suivantes montrent la représentation en boite à moustache ainsi que les courbes des fonctions de densité de probabilité (pdf) du nombre moyen de clients dans la file

estimé par la méthode du noyau dans le modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes qui sont données comme suit :

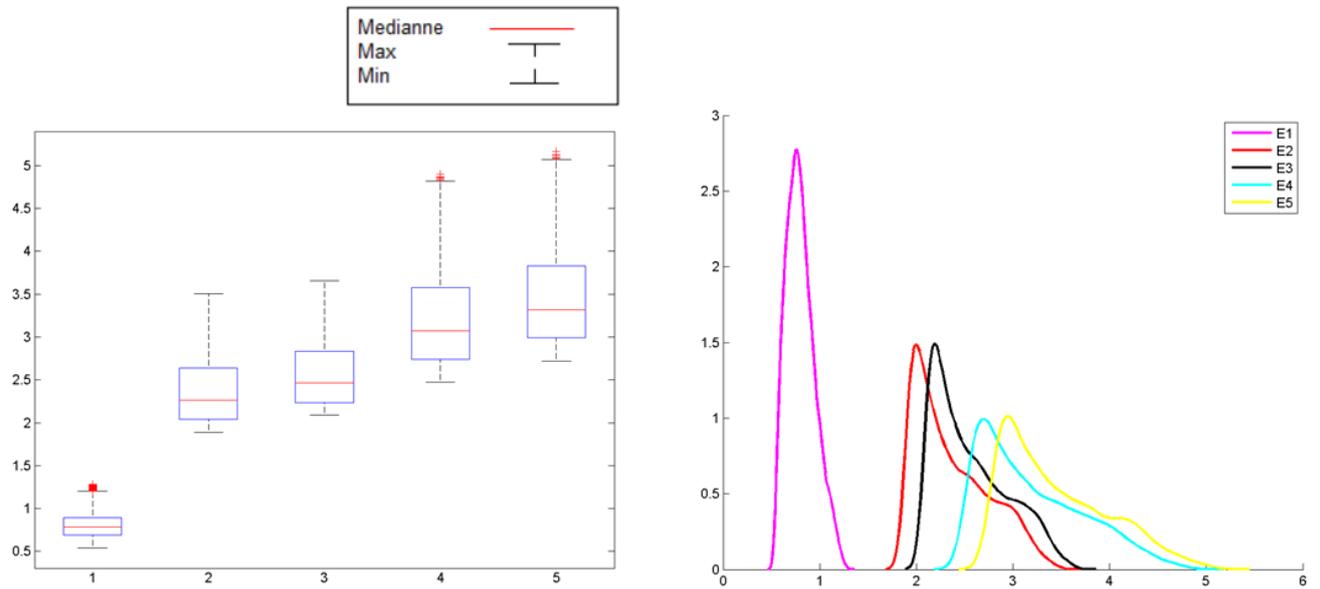


FIGURE 4.7 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

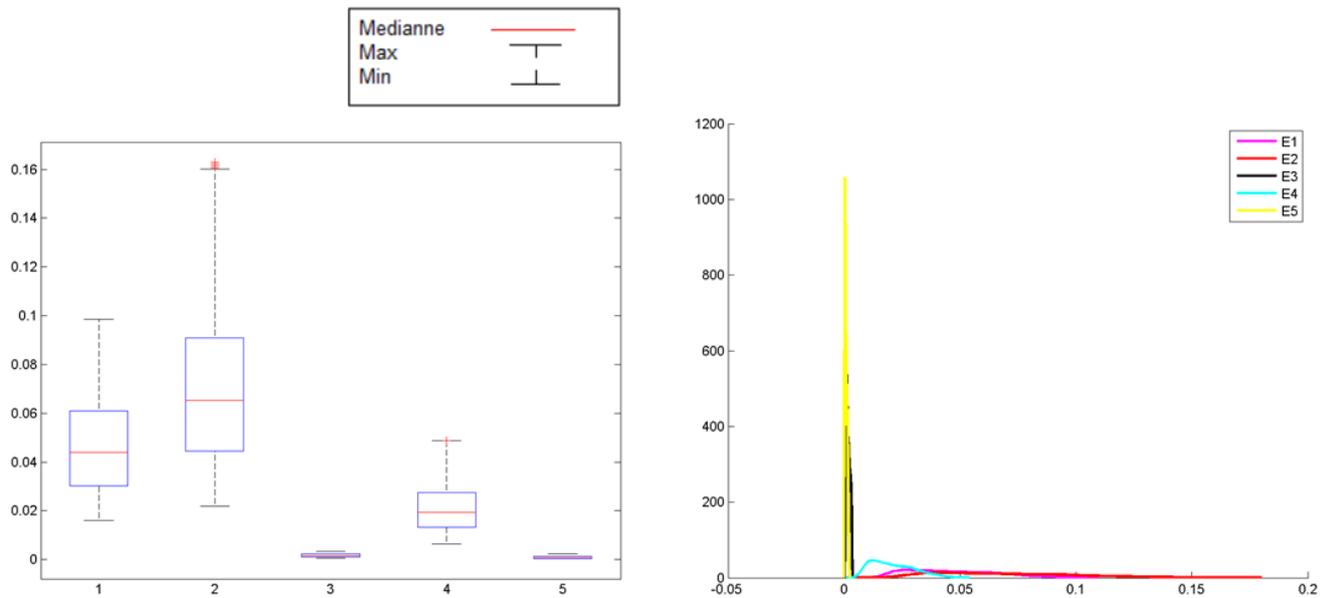


FIGURE 4.8 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

Le temps moyen de séjour dans le système

Dans cette partie, nous allons donner les différents résultats numériques relatifs au calcul de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire $W(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$ et cela pour les deux types de distributions de services considérées précédemment et en variant les valeurs du taux de service μ et du taux de réparation r .

La loi de service est Déterministe

Les résultats numériques appropriés au temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ sont exhibés dans le tableau et figures suivants :

Espérance(W)		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
	Min	1.0061	2.7063	3.2149	4.0015	4.5842
	Max	1.1697	4.9600	5.4625	7.2538	7.9778
	Moyenne	1.0715	3.3964	3.8942	5.0049	5.6482
	Medianne	1.0700	3.2961	3.7801	4.8629	5.5059
Variance	0.0011	0.2012	0.2057	0.4082	0.4441	
Variance(W)	Min	0.0023	0.0597	0.0001	0.0182	0.0021
	Max	0.0113	0.4193	0.0025	0.1149	0.0115
	Moyenne	0.0060	0.1862	0.0007	0.0536	0.0056
	Medianne	0.0057	0.1760	0.0005	0.0508	0.0053
	Variance	0.0000	0.0060	0.0000	0.0005	0.0000

TABLE 4.5 – Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

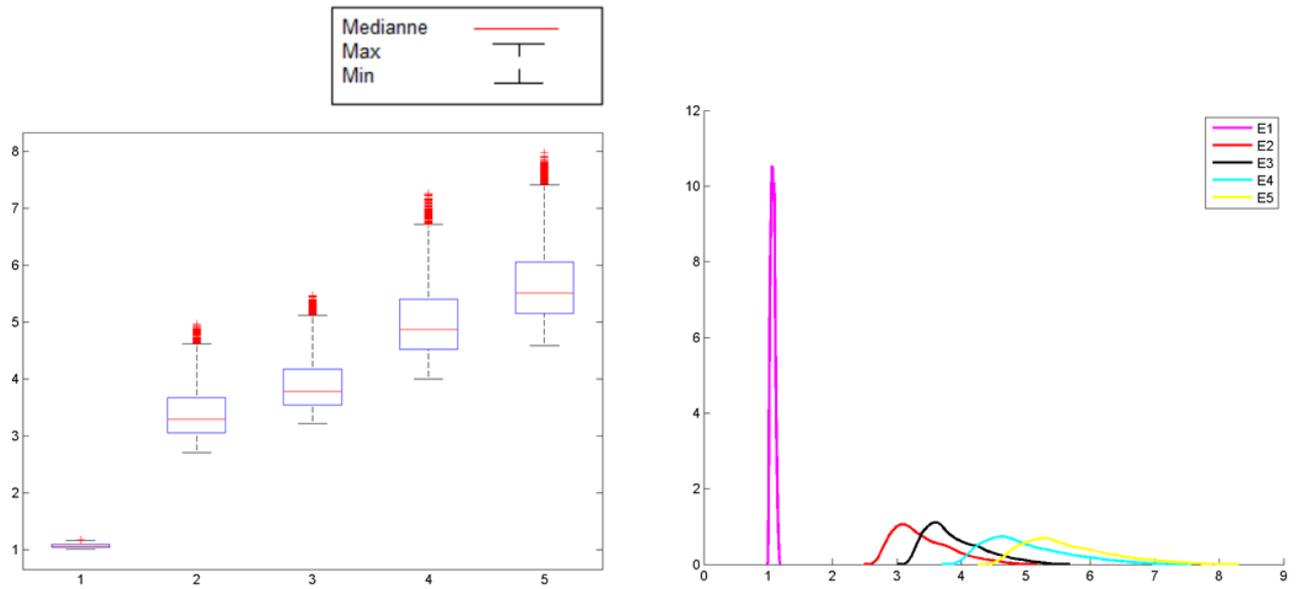


FIGURE 4.9 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

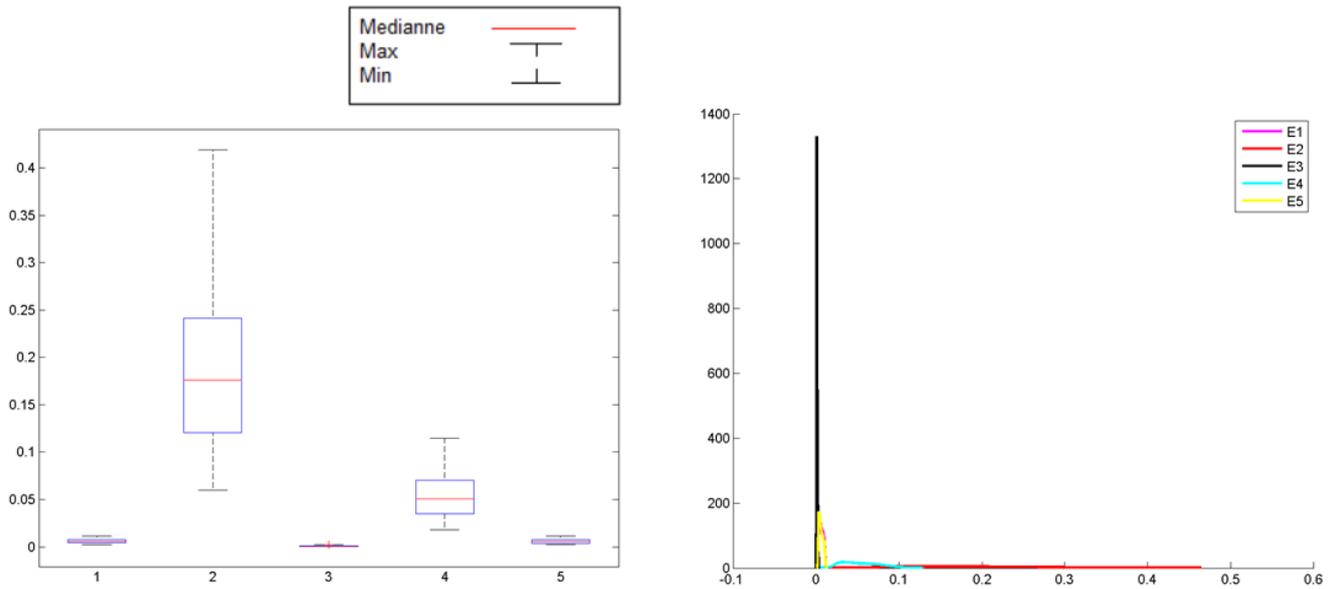


FIGURE 4.10 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

La loi de service est Hyper-exponentielle

Le tableau ci-dessous montre les résultats obtenus concernant le temps moyen de séjour dans le système pour le modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes.

Espérance(W)		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
Min		1.0362	3.0526	3.6003	4.4180	5.0425
Max		1.8262	4.6726	5.1830	6.8878	7.542
Moyenne		1.3276	3.5399	4.0806	5.1686	5.8140
Medianne		1.3108	3.4406	3.9885	5.0248	5.6747
Variance		0.0246	0.1454	0.1449	0.2979	0.3003
Variance(W)	Min	0.0240	0.0312	0.0013	0.0152	0.0006
	Max	0.1388	0.2126	0.0061	0.0942	0.0041
	Moyenne	0.0675	0.0948	0.0033	0.0439	0.0018
	Medianne	0.0643	0.0893	0.0031	0.0413	0.0017
	Variance	0.0007	0.0016	0.0000	0.0003	0.0000

TABLE 4.6 – Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

Les résultats obtenus sont données dans les figures suivante :

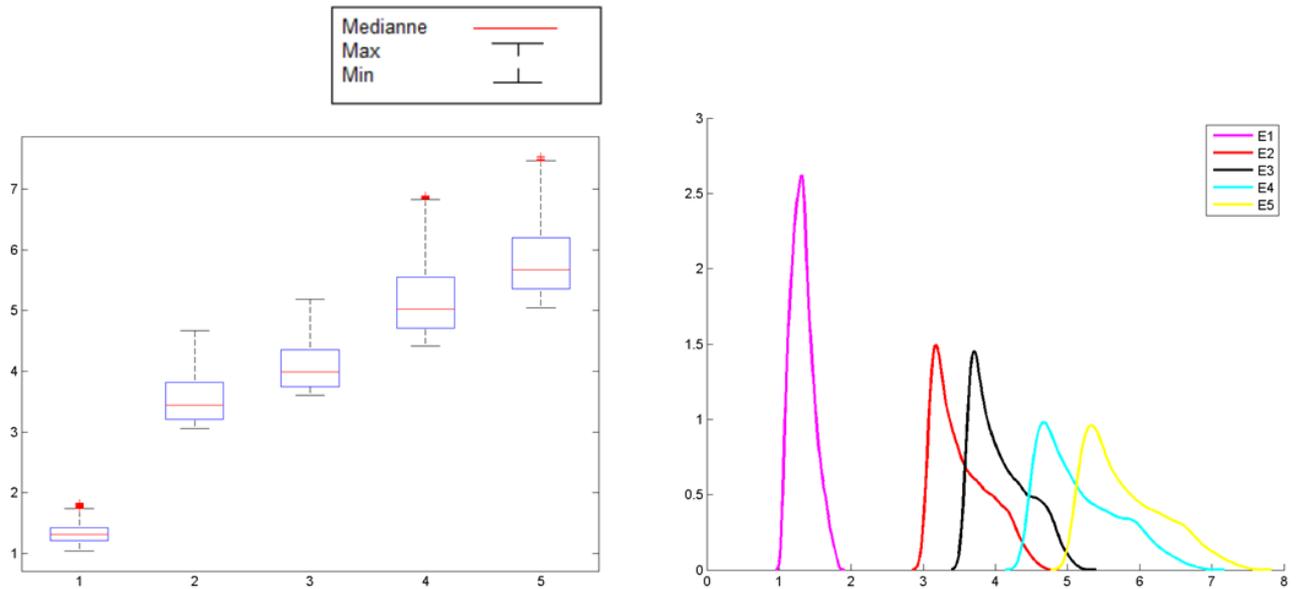


FIGURE 4.11 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans le système du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

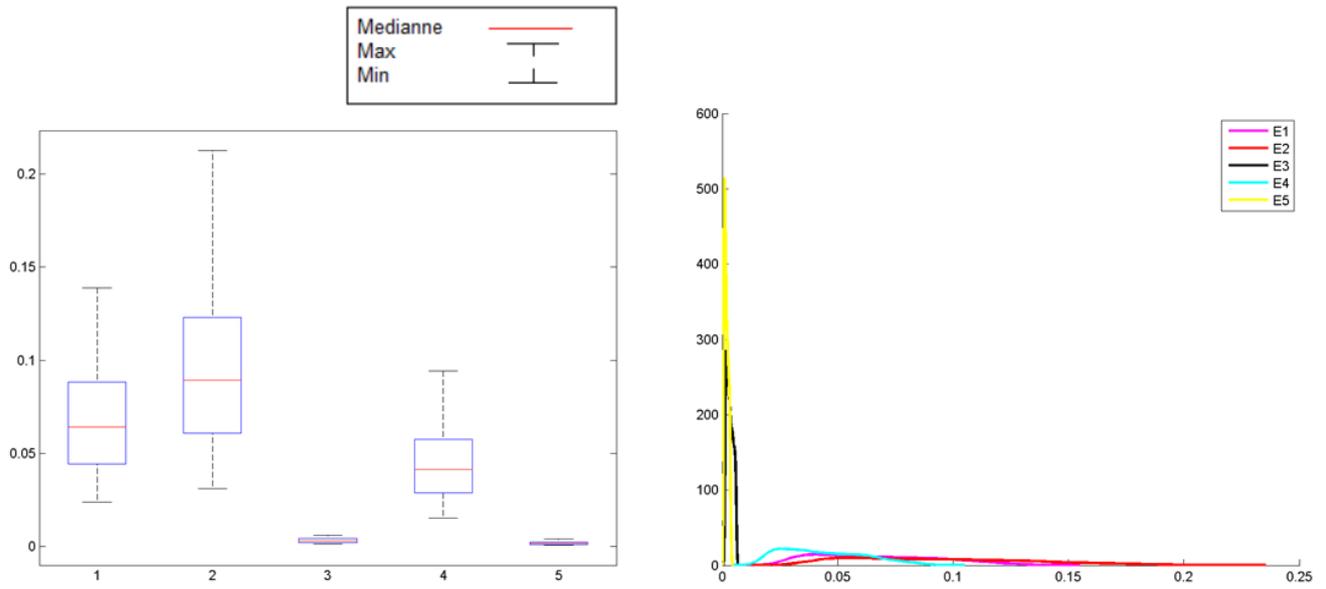


FIGURE 4.12 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour du système dans le modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

Le temps moyen de séjour dans la file

Cette dernière partie, regroupent les différents résultats numériques associés au calcul de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire $W_q(\bar{\theta} + \sigma\varepsilon)$ pour différentes valeurs du taux de service μ et du taux de réparation r .

La loi de service est Déterministe

Le tableau et les figures ci-dessous montrent les résultats obtenus concernant le temps moyen de séjour dans la file pour le système d'attente $M/D/1$ avec pannes.

Espérance(W_q)		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
Min		0.5064	1.5558	1.7197	2.0536	2.3057
Max		0.6120	3.7319	3.8082	5.1618	5.4082
Moyenne		0.5464	2.2344	2.3682	3.0213	3.3161
Medianne		0.5431	2.1370	2.2592	2.8833	3.1623
Variance		0.0005	0.2050	0.1948	0.3824	0.4382
Variance(W_q)	Min	0.0004	0.0498	0.0001	0.0084	0.0012
	Max	0.0022	0.3417	0.0023	0.0632	0.0075
	Moyenne	0.0011	0.1507	0.0006	0.0271	0.0035
	Medianne	0.0011	0.1423	0.0005	0.0252	0.0032
	Variance	0.0000	0.0041	0.0000	0.0001	0.0000

TABLE 4.7 – Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

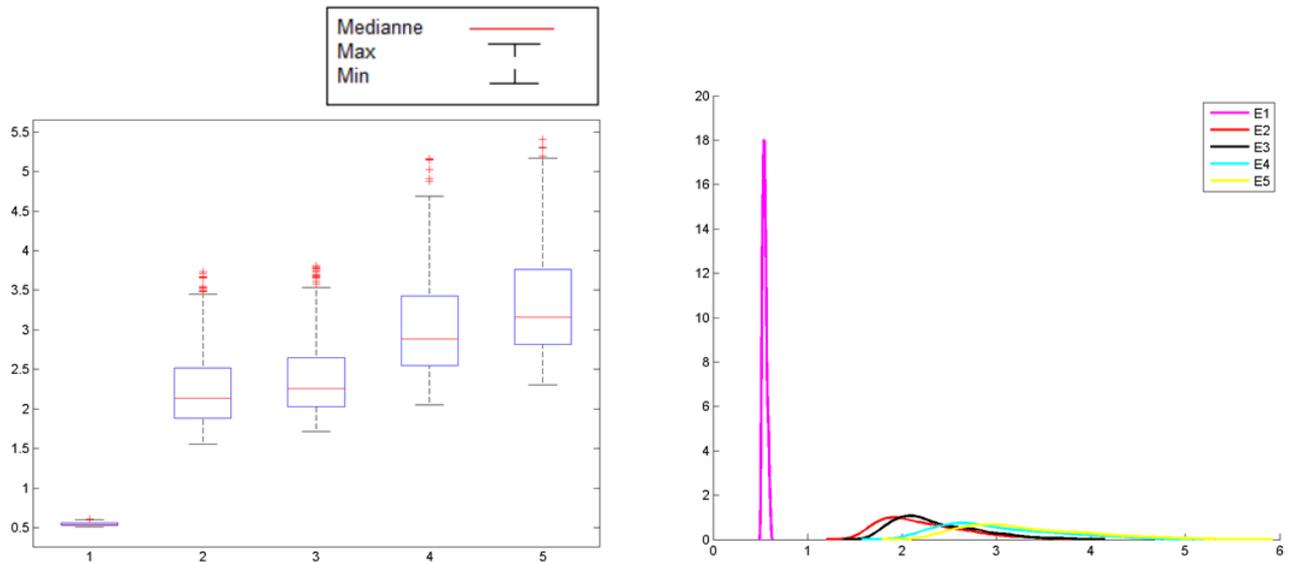


FIGURE 4.13 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

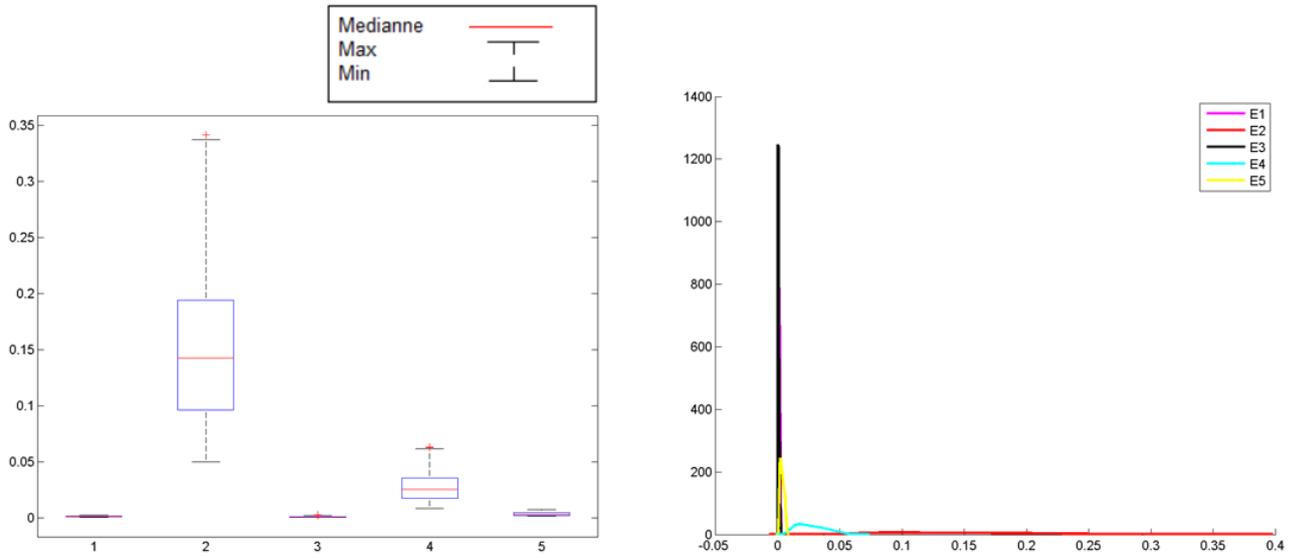


FIGURE 4.14 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/D/1$ avec pannes

La loi de service est Hyper-exponentielle

Dans ce dernier cas, nous exhibons les différents résultats numériques correspondant au calcul de la moyenne et de la variance du nombre moyen de clients dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes :

		r= 2	r= 1.5	r=3	r= 2	r=2.5
		$\mu=1.5$	$\mu=2$	$\mu=2.5$	$\mu= 4$	$\mu=3$
Espérance(W_q)	Min	0.5416	1.8877	2.0914	2.4720	2.7295
	Max	1.2258	3.4430	3.6013	4.8088	5.0479
	Moyenne	0.8009	2.3845	2.5462	3.1832	3.4749
	Medianne	0.7792	2.2920	2.4487	3.0506	3.3334
	Variance	0.0211	0.1465	0.1372	0.2765	0.2986
Variance(W_q)	Min	0.0168	0.0225	0.0006	0.0065	0.0002
	Max	0.0954	0.1594	0.0034	0.0488	0.0023
	Moyenne	0.0460	0.0704	0.0018	0.0212	0.0009
	Medianne	0.0428	0.0654	0.0016	0.0196	0.0008
	Variance	0.0003	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000

TABLE 4.8 – Espérance et Variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

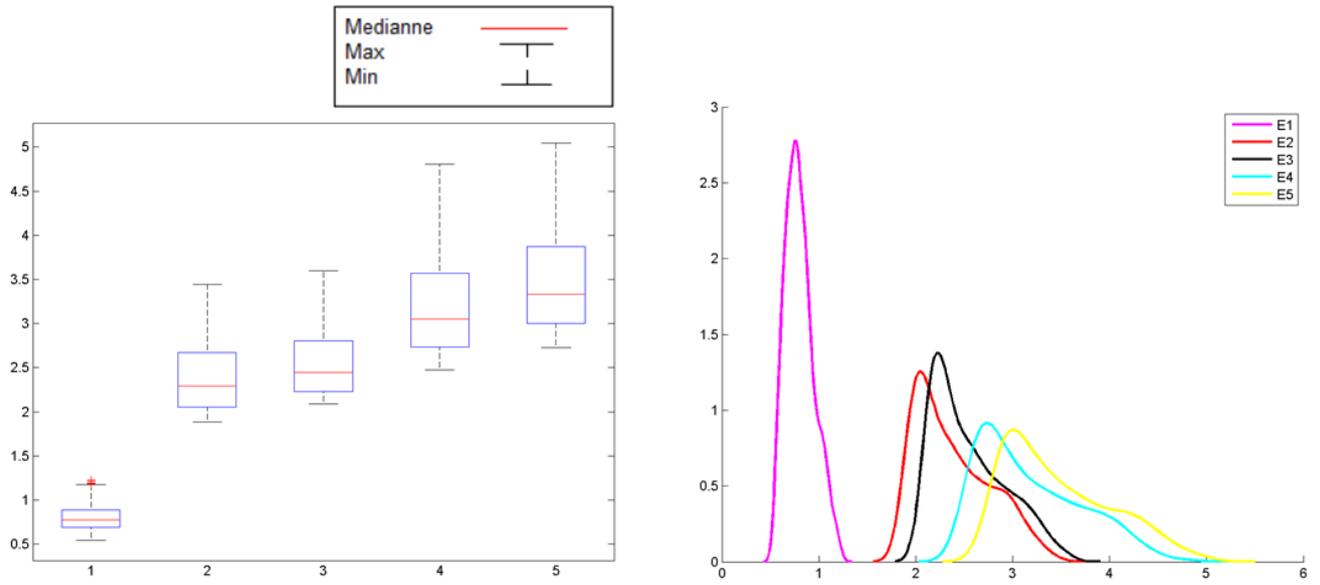


FIGURE 4.15 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de l'espérance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

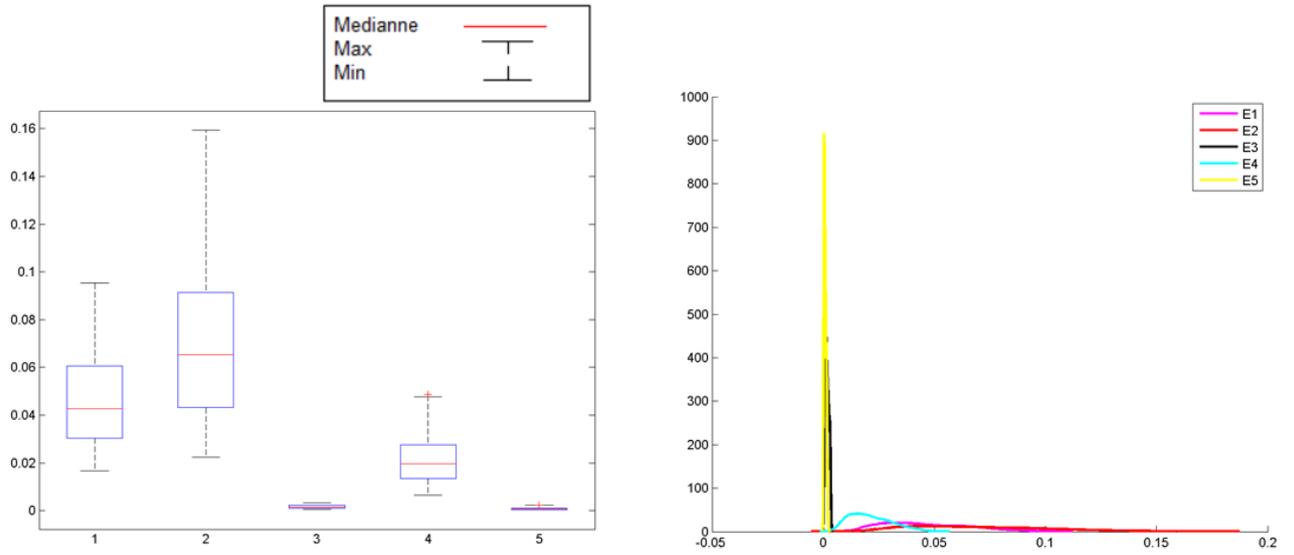


FIGURE 4.16 – Boite à moustache et densité de probabilité du vecteur de la variance du temps moyen de séjour dans la file du modèle d'attente $M/H_2/1$ avec pannes

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode des développements en séries de Taylor pour calculer les mesures de performances du système considéré sous la propagation de l'incertitude lié au taux de panne θ . Ainsi, nous avons illustré les différents résultats numérique obtenus.

Conclusion générale

L'étude des phénomènes réels passe souvent par le développement d'un modèle mathématique. Un tel modèle est souvent nécessaire pour mieux comprendre et expliquer ce phénomène qui peut être très complexe. Cependant lorsqu'il s'agit de systèmes complexes, les entrées et les paramètres du modèle sont pris avec un certain degré d'incertitude, cela est dû aux erreurs de mesures et ceux d'estimation de la valeur des paramètres, etc. A cela s'ajoute l'incertitude sur la structure du modèle, due à la représentation incomplète ou inadéquate de divers processus. En effet, plus le modèle intègrera des connaissances pertinentes, mieux il représentera le phénomène étudié pour un niveau de complexité donné.

Dans ce mémoire nous avons appliqué deux approches numériques afin d'étudier la propagation d'incertitude dans les modèles de file d'attente qui se produisent avec des serveurs non fiables. Pour illustrer l'applicabilité des approches proposées, deux modèles de systèmes de file d'attente ont été étudiés. Le premier modèle (file d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes), nous l'avons étudié en deux parties : dans la première partie nous avons effectué une analyse numérique montrant l'effet de la variation de quelques paramètres sur les mesures de performances (le nombre moyen de clients dans le système, temps moyen de séjour, probabilité de blocage et distribution stationnaire) et cela pour différentes valeurs du taux de panne θ . Dans la deuxième partie nous avons utilisé l'approche par intervalle où l'incertitude infligée sur la probabilité d'occurrence d'une panne θ est décrite par un intervalle dans lequel est supposée se trouver la vraie valeur inconnue du paramètre.

Dans le deuxième modèle (file d'attente $M/G/1$ non fiable avec perte définitive de client) nous avons appliqué la méthode des développements en séries de Taylor où nous avons considéré l'incertitude infligée dans la détermination du taux de panne θ . Nous avons pu estimer les valeurs de chaque mesure de performance (le nombre moyen de client dans le système, le nombre moyen de client dans la file, temps moyen de séjour dans le système, temps moyen de séjour dans la file) du modèle étudié, tout en caractérisant leurs espérances et leurs variances.

L'étude que nous avons réalisée nous a permis de déceler plusieurs perspectives intéressantes, parmi les plus significatives, on peut citer :

- ◇ Élargir l'analyse que nous avons effectuée au cas de la perturbation de plusieurs paramètres.
- ◇ Analyse de sensibilité des modèles étudiés, en utilisant la méthode de Sobol.

- ◇ Élargir l'application de ces nouvelles approches aux cas de modèles et réseaux plus compliqués.
 - ◇ Enfin, il serait souhaitable de comparer les deux méthodes que nous avons considéré avec les autres méthodes existantes pour propager les incertitudes dans les systèmes de files d'attente.
-

Bibliographie

- [1] É. Pardoux. *Processus de Markov et applications, Algorithmes, Réseaux, Génome et Finance*. 2006.
- [2] S. Lloyd ; et R. Ries. Characterizing, propagating, and analyzing uncertainty in life-cycle assessment a survey of quantitative approaches. *Journal of Industrial Ecology*, vol.11, no.1 :pages 116–179, 2007.
- [3] R. Hiejungs. Sensitivity coefficients for matrix-based LCA. *The International Journal of Life Cycle Assessment*, vol.15, no.5 :pages 511–520, 2010.
- [4] R.W. Walters ; et L. Huyse. *Uncertainty analysis for fluid mechanics with applications*. Technical Report NASA/CR-2002-211449 Report No. 2002-1, NASA, 2002.
- [5] W.L. Oberkampf ; et S.M. DeLand ; B.M. Rutherford ; K.V. Diegert ; K.F. Alvin. Error uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 75, no. 3 :pages 333–375, 2002.
- [6] E. Zio ; et G. Apostolakis. Two methods for the structured assessment of model uncertainty by experts in performance assessments of radioactive waste repositories. *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 54 :pages 225–241, 1996.
- [7] E. Zio. Reliability engineering : Old problems and new challenges. *reliability engineering & system safety*. vol.94, no. 2 :page 125–141, 2009.
- [8] T.Aven. Some reflections on uncertainty analysis and management. *Reliability Engineering & System Safety*, vol.93, no.3 :pages 195–201, 2010.
- [9] M. Elisabeth Paté-Cornell. Uncertainties in risk analysis : Six levels of treatment. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 54, no. 2-3 :page 95–111, 1996.
- [10] X. Du ; et P.K.Venigell ; D.Liu. Robust mechanism synthesis with random and interval variables. *Mech. Mach. Theory*, vol.44 :pages 1321–1337, 2009.
- [11] C.E. Papadopolous ; et H. Yeung. Uncertainty estimation and Monte Carlo simulation method. *Flow Measurement and Instrumentation*, vol. 12, 2001.
- [12] R. Ghanem ; et P. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Dover. 2 edition, 2003.
- [13] O. Le Maître ; et O. Knio. Spectral methods for uncertainty quantification. *Scientific Computation. Springer-Verlag, New York. With applications to computational fluid dynamics*, 2010.
- [14] D. Xiu. *Numerical Methods for Stochastic Computations : A Spectral Method Approach*. Princeton University Press, 2010.

-
- [15] C. Jiang ; X.Y. Long ; X. Han ; Y.R. Tao ; et J. Liu. Probability-interval hybrid reliability analysis for cracked structures existing epistemic uncertainty. *Eng. Fract. Mech*, vol. 112 :pages 148–164, 2013.
- [16] R. Moore. Methods and applications of interval analysis. *Philadelphia : SIAM Studies in Applied Mathematic*, 1979.
- [17] C.M. Rocco ; W. Klindt. *Distribution systems reliability uncertainty evaluation using an interval arithmetic approach*. Proceedings of the second IEEE international caracas conference on devices, circuits and systems, 1998.
- [18] S.V. Dhople ; et A.D.A. Dominguez-Garcia. Parametric uncertainty analysis method for markov reliability and reward models. *IEEE Trans. Reliab*, vol.61, no.3 :634–648, 2012.
- [19] M.Granger ; et M.Henrion. *Comparative analysis of uncertainty propagation methods for robust engineering design*. Uncertainty : A guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis. USA : Cambridge University Press, 1993.
- [20] A. Ruegg. *Processus stochastique*. Presse Polytechnique Rromandes, Suisse, 1985.
- [21] H.C. White et L.S. Christie. Queuing with peemptive priorities or with breakdown. *Oper.Res*, vol. 6, pages 79-95, 1958.
- [22] B. Avi-Itzhak ; et P. Naor. Some queueing problems with the service station subject to breakdown. *Operations Research*, vol. 10 :pages 303–320, 1962.
- [23] D.P. Gaver. A waiting line with interrupted service, including priotities. *Journal of the Royal Statistical Society Journal 24(ser. B)*, pages 73–90, 1962.
- [24] J. Cao ; K. Cheng. Analysis of $M/G/1$ queueing system with repairable service station. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, vol. 5, no. 2 :pages 113–127, 1982.
- [25] Q. Li ; D. Xu ; et J.Cao. Reliability approximation of a Marcovian queueing system with server breakdown and repair. *Microelectron. Reliab*, vol. 37 :pages 1203–1212, 1997.
- [26] A. Federgruen ; et L. Green. Queueing systems with service interruptions. *Operations Research*, vol. 34 :pages 752–768, 1986.
- [27] A. Federgruen. et L. Green. Queueing systems with service interruptions II. *Naval Research Logistics*, vol. 35 :pages 345–385, 1988.
- [28] L.D. Shin. Analysis of a single server queue with semi-markovian service interruption. *Queueing Systems*, vol.27 :pages 153–178, 1997.
- [29] T. Takine ; et B. Sengupta. A single server queue with service interruption. *Queueing System*, vol 26 :pages 285–300, 1997.
- [30] J. Wang. An $M/G/1$ queue with second optional service and server breakdowns. *Computers & Mathematics with Applications*, vol.47 :pages 1713–1723, 2004.
- [31] T. jiang ; et B. Xin. Computational analysis of the queue with working breakdowns and delaying repair under a bernoulli-schedule-controlled policy. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 48 :pages 1–16, 2018.
- [32] J. Wang ; et T.V. Do ; S. Gao. Analysis of a discrete-time repairable queue with disasters and working breakdowns. *RAIRO - Operations Research*, pages 1–22, 2018.
-

-
- [33] S. Zhu ; J. Wang ; B. Lieu. Equilibrium joining strategies in the $Mn/G/1$ queue with server breakdowns and repairs. *Operational Research*, pages pages 1–25, 2018.
- [34] W. Li ; et D. Shi ; X. Chao. Reliability analysis of $M/G/1$ queueing system with server breakdowns and vacations. *J. Appl. Prob*, vol. 34 :pages 546–555, 1997.
- [35] W.J. Grey ; P.P. Wang ; et M.K. Scott. A vacation queueing model with service breakdowns. *Applied Mathematical Modeling*, vol 24 :pages 391–400, 2000.
- [36] W.J. Grey ; P.P. Wang ; et M.K. Scott. A queueing model with multiple types of server breakdowns. *International Journal of Quality Technology and Quantitative Management*, vol. 1, no. 2 :pages 245–255, 2004.
- [37] P.K. Agrawal ; et M. Jain. $M/E_k/1$ queueing system with working vacation. *International Journal of Quality Technology and Quantitative Management*, vol. 4, no. 4 :pages 455–470, 2007.
- [38] K. Wang ; J. Li. A Repairable $M/G/1$ retrial queue with retrial Bernoulli vacation and two-phase service. *International Journal of Quality Technology and Quantitative Management*, vol. 5, no. 2 :pages 179–192, 2008.
- [39] M. Jain ; et A. Jain. Working vacation queueing model with multiple types of sever breakdowns. *Applied Mathematical Modeling*, vol. 34 :pages 1–13, 2010.
- [40] M. Jain ; G.C. Sharma ; et R. Sharma. Unreliable server $M/G/1$ queue with multi-optional services and multioptional vacations. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, Vol. 5, No. 2 :pages 145–169, 2013.
- [41] T. Li ; L. Zhang ; et S. Gao. Performance of an $M/M/1$ Retrial Queue with Working Vacation Interruption and Classical Retrial Policy. *Operations Research*, pages 1–9, 2016.
- [42] M. Wu ; Y. Huang ; Y. Song ; L. Zhao ; et J. Liu. Geo/Geo/1 Retrial Queue with Working Vacation Interruption and Nonpersistent Customers. *International Conference on Management Science and Engineering Management*, pages 421–437, 2018.
- [43] A. Aissani. On the $M/G/1$ queueing system with a repeated orders and unreliable server. *Journal of Technology*, vol. 6 :pages 98–123, 1988.
- [44] N.V. Djellab. $M/G/1$ retrial queue with random breakdowns and general retrial times. *Proceedings of the Int. Conferaence "Modern Mathematical Methods of investigating of the information Networks"*, Minsk, pages 73–78, 2001.
- [45] N.V. Djellab. On the $M/G/1$ retrial queue subjected to breakdowns. *RAIRO : Operations Research*, vol. 36 :pages 299–310, 2002.
- [46] N.V. Djellab. Systèmes de files d’attente avec rappel : Méthode d’approximation pour un système $M/G/1$ avec rappels et pannes. *Thèse de Doctorat, Université de Annaba*, 2003.
- [47] J. Wang ; et J.Li. A single server retrial queue with general retrial times and two-phase service. *Jrl Syst. Sci & Complexity*, vol. 22 :pages 291–302, 2009.
- [48] S. Kumar ; et M. Muthukrishnan ; A. Dadlani. Performance analysis of an unreliable $m/g/1$ retrial queue with two-way communication. *Operational Research*, pages 2–13, 2018.
-

-
- [49] T. Lachemot ; M. Ourbih-Tari ; et H. Saggou. Performance measures of $M/G/1$ retrial queues with recurrent customers, breakdowns and general delays. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 46 :pages 7998–8015, 2016.
- [50] D. Aissani ; M. Boualem ; D. Zirem ; et K. Adel-Aissanou. Analysis of a single server batch arrival unreliable queue with balking and general retrial time. *Quality Technology and Quantitative Management*, pages 22–23, 2018.
- [51] A. Aissani. Queueing systems with a single unreliable server. *Paper 756-BeD83, Bielorussian Institutue for Scientific and Technical Information, Minsk*, 1983.
- [52] K.C. Madan. A priority queueing system with service interruptions. *Statistica Neerlandica*, vol.3, no .3 :pages 115–123, 1972.
- [53] K.C. Madan. A queueing system with two types of failures and priority for vital repairs. *J. MACT*, vol. 25 :pages 35–43, 1992.
- [54] M. Jain. Single server queue with breakdown including priority and varying rates. *JKAU : Eng. Sci.*, vol. 11, no. 2 :pages 51–60, 1999.
- [55] M. Jain ; et C. Bhargava. Bulk arrival retrial queue with unreliable server and priority subscribers. *International Journal of Operations Research*, vol. 5, no. 4 :pages 242–259, 2008.
- [56] R. Sharma ; G. Kumar. Unreliable server $M/M/1$ queue with priority queueing system. *International Journal of Engineering and Technical Research*, pages pages 368–371, 2014.
- [57] M. Jain ; et A. Jain. Batch Arrival Priority Queueing Model with Second Optional Service and Server Breakdown. *International Journal of Operations Research*, Vol. 11, No. 4 :pages 112–130, 2014.
- [58] G. Ayyappan ; et J. Udayageetha. Analysis of Preemptive Priority Retrial Queueing System with Starting Failure, Modified Bernoulli Vacation with Vacation Interruption, Repair, Immediate Feedback and Impatient Customers. *International Journal of Mathematics And its Applications*, vol. 6 :pages 1013–1024, 2018.
- [59] P.G. Harrisson ; N.M. Patel ; et E. Pitel. Reliability modelling using G-queues. *European Journal of Operational Research*, vol. 126 :pages 273–287, 2000.
- [60] B.K. Kumar ; A. Krishnamoorthy ; S.P. Madheswari ; et S.S. Basha. Transient analysis of a single server queue with catastrophes, failures and repairs. *Queueing Syst*, vol.56 :pages 133–141, 2007.
- [61] J. Wang ; B. Liu ; et J. Li. Transient analysis of an $M/G/1$ retrial queue subject to disasters and server failures. *Euro. J. Oper. Res*, vol. 189, no. 3 :pages 1118–1132, 2008.
- [62] J. Wang ; et P. Zhang. A discrete-time retrial queue with negative customers and unreliable server. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 56 :pages 1216–1222, 2009.
- [63] I. Dimitriou. A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37 :pages 1295–1309, 2013.
-

-
- [64] D. Lee and K. Kim. Analysis of repairable $Geo/G/1$ queues with negative customers. *Applied Mathematics*, pages 1–9, 2014.
- [65] P. Rajadurai. A study on an $M/G/1$ retrial G-queue with unreliable server under variant working vacations policy and vacation interruption. *Songklanakarinn J. Sci. Technol.*, vol. 40, no. 1 :pages 231–242, 2018.
- [66] K. Sun ; et J. Wang. Equilibrium joining strategies in the single server queues with negative customers. *International Journal of Computer Mathematics*, pages 1–21, 2018.
- [67] H. Bruneel ; et K.G. Byung. Discret-Time Models for Communication Systems Including ATM, Kluwer Academic Publishers. 1993.
- [68] J.C. Ke. Bi-level control for bath arrival queues with an early startup and unreliable server. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 28, no. 5 :pages 469–485, 2004.
- [69] J.C. Ke. Modified T vacation policy for an $M/G/1$ queueing system with an unreliable server and startup. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 41 :pages 1267–1277, 2005.
- [70] J.C. Ke. An $M^{[x]}/G/1$ system with startup server and J additional options for service. *Applied Mathematical Modelling*, 2008.
- [71] J.C. Ke. Two thresholds of batch arrival queueing system under modified T vacation policy with startup and closedown. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 31 :pages 229–247, 2008.
- [72] G. Ayyappan ; S. Shyamala. Transient Solution of $M^{[X]}/G/1$ With Second Optional Service, Bernoulli Schedule Server Vacation and Random Break Downs. *International Journal of Management & Information Technology*, Vol. 3, No.3, :pages 45–55, 2013.
- [73] M. Jain ; R. Sharma ; et G.C. Sharma. Multiple vacation policy for $M^X/H_k/1$ queue with unreliable server. *Journal of Industrial Engineering International*, Vol. 9 :pages 1–11, 2013.
- [74] D. Zirem ; M. Boualem ; et D. Aissani. $M^X/G/1$ Queueing System With Breakdowns and Repairs. *International Journal of Advances in Computer Science & Its Applications*, Vol. 6 :pages 18–21, 2016.
- [75] B.V. Gnedenko. Sur une Généralisation de la Formule d’Erlang. *C.A. Acad. Sc. (4), USSR*, 1959.
- [76] K.H. Wang ; et Y.C. Chang. Coast analysis of a finite $M/M/R$ queueing system with balking, reneging, and server breakdowns. *Math. Meth. Oper. Res*, vol. 56 :pages 169–180, 2002.
- [77] A.M. Sultan ; N.A. Hassan ; et N.M. Elhamy. Computational analysis of a multi-server bulk arrival with two modes server breakdown. *Math. Comput. appl*, vol. 10, no. 2 :pages 249–259, 2005.
- [78] X. Yang ; et A.S Alfa. A class of multi-server queueing system with server failures. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 56 :pages 33–43, 2009.
- [79] C. Bhargava ; et M. Jain. Unreliable multiserver queueing system with modified vacation policy. *Operational Research Society of India*, vol. 51, no. 2 :pages 159–182, 2013.
-

-
- [80] L. R. Abramson. *Model uncertainty form a regulatory point of view*. In Workshop, Model Uncertainty : its Characterization and Qualification, Anapolis (Maryland, USA), 1993.
- [81] U. Pulkkinen ; et T. Huovinen. Model uncertainty in safety assessment. *Technical Report STUKYTO-TR 95, Finnish Center for Radiation and Nulcear Safety*, 1996.
- [82] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics* 60, 1938.
- [83] K. Bachi ; C. Chauvière ; H. Djellout ; et K. Abbas. Propagation of epistemic uncertainty in queueing models with unreliable server using chaos expansions. *Communication in Statistics- Simulation and Computation*, page 1–18, 2017.
- [84] R. Agarwal ; et P. Wong. Error inequalities in polynomial interpolation and their applications. vol. 262, Kluwer, 1993.
- [85] F. Pukelsheim. Optimal Design of Experiments, Classics in Applied Mathematics. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, Reprint of the 1993 original*, 2006.
- [86] M. Berveiller ; B. Sudret ; et M. Lemaire. Stochastic finite element :a non intrusive approach by regression. *Eur. J. Comput. Mech.*, vol. 15 :pages 81–92, 2006.
- [87] A. Ern ; et J.L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements, Springer-Verlag*. 2004.
- [88] M. Kleiber ; et T. Hien. *The Stochastic Finite Element Method. John Wiley and Sons*. 1992.
- [89] B. Taylor. *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. London, 1715.
- [90] K. Abbas ; B. Heidergott ; et D. Aissani. A Taylor series approach to the numerical analysis of the $M/D/1/N$ queue. *Procedia Computer Science* 1, pages 1553–1560, 2010.
- [91] D.J. Mercier. Formules de Taylor. Applications. IUMF de Guadeloupe, France. 2003.
- [92] R.E. Moor ; R.B. Kearfott ; et M.J. Cloud. *Introduction to interval analysis*. Society for Indistrual and Applied Mathematics, 2009.
- [93] M. Teo. Interval Markov chains : Performance measures and sensitivity analysis. Master’s thesis, School of Mathematical Sciences, 2013.
- [94] D.J. Hartfiel. Markov set-chains. *Lecture Notes in Mathematics. Springer*, 1998.
- [95] D.J. Hartfiel ; et E. Seneta. On the theory of marcov set-chaine. *Advences in Apllied Probability*, vol. 26, no. 4 :pages 947–964, 1994.
- [96] D. Škulj. Discrete Time Markov Chains with Interval Probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 50, no. 8 :pages 1314–1329, 2009.
- [97] D. Škulj. Finite Discret Time Marcov Chain with Inetrval Prorobabilities. *In Soft Method for Integrated Uncertainty Modelling*, vol. 37 of Advences In Soft Computing :pages 299–306, 2006.
- [98] K. boudhan ; B. Thakhedmit ; et K. Abbas. Analyse de l’incertitude épistémique dans le modèle d’attente $M/G/1$ avec pannes dépendante. *Rapport thechnique, Université de Béjaia*, 2019.
-

- [99] K. Abbas ; et Z. Hammoudi. Analyse du système d'attente $M/G/1$ avec pannes. *Rapport thechnique, Université de Béjaia*, 2017.
- [100] F. Pianosi ; F. Sarrazin et T. Wangener. A matlab toolbox for sensitivity analysis. *Journal of Elsevier*, vol. 70 :pages 1364–8152, 2015.
-

Résumé

Dans ce mémoire, nous considérons une analyse d'incertitude pour l'étude de deux systèmes de files d'attente non fiables. Nous avons appliqué l'approche par intervalle pour étudier le système d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes. Ainsi que la méthode des développements en séries de Taylor des chaînes de Markov pour l'analyse du système d'attente $M/G/1$ avec pannes classique où nous avons estimé différentes quantités d'intérêt des mesures de sorties. Plusieurs exemples numériques ont été réalisés.

Mots-clés : Développement en séries de Taylor ; Système de file d'attente non fiables ; Approche par intervalle ; Incertitude épistémique.

Abstract

In this thesis, we considered an uncertainty analysis for the study of two unreliable queueing systems. We applied the interval approach to study the $M/G/1$ queueing system with dependent failures. We also applied the Taylor series expansions of Markov chains for the analysis of the $M/G/1$ queueing system with classical failures where we have estimated different quantities of interest of the output measures. Several numerical examples have been realized.

Keywords : Taylor series expansions ; Unreliable queueing system ; Interval approach ; Epistemic uncertainty.