

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.Mira de BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



MÉMOIRE DE MASTER

en Mathématiques Appliquées
Spécialité : Mathématiques Financières

Thème :

Jeux à champ moyen : Etude et Applications

Présenté par :

M^{elle} BOUZERIA Zahra

Devant le jury composé de

Président	M ^{me} ANZI Aicha	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.
Promoteur	M ^{me} BOUIBED Karima	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.
Examineur	M ^{me} SAIT Razika	M.A.A	U. A/Mira Bejaia.
Examineur	M ^r ZIANI Sofiane	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.

Promotion 2019/2020

Remerciements

*Pour commencer je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir béni de santé,
courage et volonté pour accomplir ce modeste travail.*

*Je tiens également à remercier mon encadreur M^{me} BOUIBED pour les précieux
conseils, la disponibilité et l'encouragement qu'elle m'a accordé afin de me
pousser à donner le meilleur de moi-même tout au long de la préparation de ce
mémoire.*

*J'exprime mon grand respect aux honorables membres de jury qui ont accepté
d'évaluer mon travail et qui trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.*

*A tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin pour la réalisation de ce travail,
à tous ceux qui ont cru en moi, en mes capacités, un grand MERCI.*

Dédicaces

Pour une fois depuis que j'ai entamé la rédaction de ce mémoire, je me permets la parole, je me manifeste et je m'identifie, pour l'occasion, j'abuserai sûrement, mais je le mérite d'autant plus.

Je voudrais donc, contrairement à mes coutumes, dédier ce travail en premier lieu, à moi-même, après une année surprenante de hauts et de bas, suite à un acharnement de combat, je n'y crois même pas que je suis arrivée à ce stade de rédiger ma dédicace, que j'ai soulevé ce grand défi que je me suis lancée il y a un an déjà.

À ma persévérance, ma détermination et mon ambition.

À mes parents, mes deux piliers principaux, tout est bâti sur la base que vous avez eu les soins de m'offrir, par votre amour et votre encouragement, ma réussite vos revient de droit.

Mon frère et ma soeur, mes deux anges gardiens, la vie est plus belle lorsque vous êtes autour ;

Ma famille, entièrement, un par un, du plus jeune au plus vieux, j'espère juste vous rendre fière, en tant que : petite fille, nièce, cousine, fille, et soeur.

Une pensée spéciale à toutes mes connaissances novices et mes liens anciens soient-ils ou récents, car je ne pourrais nier l'effet que ça a produit sur mon évolution. Je dédie donc ce travail à l'amitié en somme, celle qui a permis à tant de gens de croire en moi, en mes capacités, en mes efforts lorsque moi j'avais perdu foi et confiance, j'ai puisé mon courage au fond de votre support.

Une dédicace particulière à M^{me} BOUIBED, à sa patience et bien évidemment, à la confiance qu'elle m'a accordé depuis le jour où j'ai eu l'idée de lui proposer ce thème, jusqu'à la dernière seconde de la réalisation de ce mémoire.

À mon pauvre pays qui saigne par les lésions incurables de son peuple perdu, désespéré, et consumé par le désespoir, ce travail est une preuve que j'espère encore, je rêve encore d'un lendemain meilleur.

Au COVID19, il ne faut surtout pas négliger l'impact qu'il a exercé sur notre quotidien, je lui offre ce travail comme remerciements pour toute tache usuelle qu'il a transformé en challenge, je lui dis, j'ai réussi à finir quand bien même.

Zahra

Table des matières

1	Généralités et rappels sur la théorie des jeux	6
1.1	Qu'est ce qu'un Jeu ?	7
1.2	Rationalité	7
1.3	Classification des jeux et typologie	8
1.3.1	Représentation d'un jeu	8
1.3.2	Déroulement du jeu dans le temps	9
1.3.3	Nature de l'information	10
1.3.4	Selon le comportement des joueurs (relations entre les joueurs)	10
1.3.5	Autres classes de jeux	11
1.4	Jeux statiques et concepts de solution	12
1.4.1	Elimination des stratégies équivalentes	13
1.4.2	Elimination des stratégies dominées	13
1.4.3	Equilibre de Nash	13
1.4.4	Jeux à un grand nombre de joueurs	15
1.5	Jeux dynamiques	16
1.5.1	Jeux sous forme extensive à information complète	16
1.5.2	Stratégies de comportement	17
1.5.3	Jeux répétés	19
1.5.4	Jeux stochastiques	20
1.5.5	Jeux différentiels	21
1.5.6	Jeux différentiels stochastiques	22
1.6	Applications de la théorie des jeux	24
2	Rappels sur quelques notions mathématiques avancées	25
2.1	Définitions et Rappels	25
2.2	Analyse stochastique	26
2.3	Sur la théorie de contrôle optimal et programmation dynamique . .	28

3	La Théorie des Jeux à Champ Moyen	31
3.1	Pourquoi "champ moyen" ?	32
3.2	Trois chemins vers la théorie des jeux à champ moyen	33
3.2.1	Premier chemin : Partant de la physique	33
3.2.2	Deuxième chemin : Partant de la théorie des jeux	34
3.2.3	Troisième chemin : Partant de l'économie	35
3.3	Qu'est ce qu'un jeu à champ moyen ?	36
3.3.1	Un modèle de jeu initial : Quelle heure la réunion commence-t-elle ? Un modèle initial simple	37
3.3.2	Résolution du modèle	38
3.3.3	Variantes du modèle initial	41
3.3.4	Equilibre de champ moyen comme limite de l'équilibre de Nash à N joueurs	47
3.4	Formulation générale des jeux à champ moyen	50
3.4.1	Cas stationnaire	50
3.4.2	Cas d'un horizon fini	52
3.4.3	Contrôle optimal	53
3.5	Extensions, variantes et résultats	54
4	Motivation et application de la théorie des jeux à champ moyen	56

I	Domaines problématiques et quelques exemples d'applications.	57
4.1	Ingénierie	58
4.1.1	Contrôle du stockage d'énergie résidentiel par l'intégration des énergies renouvelables	58
4.1.2	Les réseaux de communications	59
4.2	Phénomènes sociaux	59
4.3	Première relation avec l'économie et la finance	60

II	Economie, Finance, et jeux à champ moyen	62
4.4	Définitions et vocabulaire économique et financier	63
4.5	Quelques modèles d'applications issus de l'économie	66
4.5.1	Modèles de Bertrand et Cournot : une analyse par les jeux à champ moyen de ressources épuisables	66
4.5.2	Théorie de la croissance économique	67
4.5.3	Modèle de croissance macro-économique	67
4.5.4	Modèle de croissance stochastique	68
4.6	Quelques modèles d'applications issus de la finance	69

4.6.1	Gestion d'un portefeuille financier et gestion d'actifs sous effet de classement	69
4.6.2	Processus de formation des prix, de la volatilité sur les marchés et surpeuplement commercial	70
4.6.3	Modèle d'impact sur les prix de marché	71
4.6.4	Jeux de timing dans les banques et risque systémique	72
4.6.5	Modélisation initiale du risque systémique	73
5	Gestion de portefeuille et compétition entre gérants d'actifs	75
5.1	Présentation du modèle	76
5.2	Résolution du modèle	77
5.3	Exemple numérique illustratif	79

Introduction générale

Le changement est le passage d'un état à un autre, rien n'est figé dans la vie, tout est en évolution, en révolution, en éternelle transformation. L'homme développe sa personne, son mode de vie et sa société. A la conquête de ses sauts vers l'amélioration, diverses questions se posent d'elles-mêmes, des problématiques naissent, et des explications doivent émerger par conséquent. La théorie des jeux fait bien partie des domaines en contribution à ce développement, elle modélise, exprime, résout et étudie des situations conflictuelles présentes en sociologie, économie, biologie, la liste est bien longue. Par définition, il est connu que des situations d'interactions sont modélisées par des jeux, pour lesquels des modèles, des concepts de solution, et des exemples d'applications sont mis en place. A un moment donné, un obstacle apparaît en pratique, en effet, les problèmes en situations réelles supposent un grand nombre d'acteurs interagissant entre eux par leurs choix et décisions. Bien évidemment, que ça soit des agents économiques ou des corps mécaniques étudiés en physique, les notions d'équilibre et les concepts de solutions précédemment conçus ne peuvent atteindre une résolution.

La théorie des jeux à champ moyen a vu le jour afin de pouvoir courir au secours de ces problèmes, car elle s'occupe de contourner l'existence d'un grand nombre d'entités qui tend vers l'infini, développé initialement en physique statique et mécanique et propagé vers l'économie et la finance par les apports d'auteurs dont Lions, Lasry, Huang, Malahme, Caines et d'autres depuis 2006 [36, 13, 50].

Ce présent travail s'entame par un chapitre de généralités sur la théorie des jeux, rappelle les premières marches de cette théorie, notamment concernant les jeux dynamiques à temps continu, à horizon infini. Un deuxième chapitre est consacré à des définitions basiques et redondantes au long du document ainsi que des notions fondamentales utilisées par les jeux à champ moyen, empruntées chez la théorie de contrôle et l'analyse stochastique. La théorie des jeux à champ

moyen est abordée principalement dans le troisième chapitre, d'abord en citant ces premiers guides de routes, ensuite un modèle constructif initial de jeu à champ moyen est exposé " le problème de l'heure de début de la réunion ". Enfin, cette théorie étant motivée et pratique, des approches plus complexes résultent des nombreux travaux sur ce type de jeu, d'où la nécessité de les citer brièvement.

Ayant pour objectif de réaliser un état de l'art sur la théorie des jeux à champ moyen, le quatrième chapitre rassemble en grandes lignes les disciplines de motivations des applications des jeux à champ moyen, tout en prenant soin de valoriser leur richesse bibliographique, principalement la littérature traitant des exemples d'applications en économie et en finance. Une illustration des apports de cette nouvelle théorie est réalisée dans le dernier chapitre, prenant à titre d'exemple son application à la gestion de portefeuille financier sous l'impact d'un effet de compétition entre les gérants d'actifs.

Chapitre 1

Généralités et rappels sur la théorie des jeux

Introduction

La théorie des jeux est un outil mathématique qui offre l'analyse des interactions stratégiques entre des individus, elle s'est essentiellement émergée depuis les développements des premières idées existantes par Oscar Morgenstern et Von Neumann [60]. Viendra par la suite les travaux de Nash et l'apparition de la notion d'équilibre (équilibre de Nash)[64].

Au fil des années, le monde a été témoins du développement considérable de cette théorie et ses applications dans diverses disciplines, notamment en économie, où plusieurs prix NOBEL ont été attribués (à citer Nash et Harsanyi en 1994, Shelling et Aumann en 2005 et autres).

La théorie des jeux s'intéresse à la modélisation des situations conflictuelles inhérentes à une communauté d'individus en interaction, l'étude de ces situations et la proposition selon les différents concepts dont elle est dotée de solutions convenables. Ces agents décideurs qui affectent leurs adversaires par leur comportement sont par ce fait des joueurs, et ce comportement se nomme par des stratégies, ce sont des définitions basiques à rappeler dans la suite de ce chapitre.

1.1 Qu'est ce qu'un Jeu ?

Un jeu représente la situation d'interaction stratégique entre des agents (joueurs) soumis au choix d'une action possible et obtenant une utilité (un gain) dépendante des décisions adverses.

Définition 1 (Joueur). On définit par joueur tout agent décideur, rationnel, dans un jeu, visant la maximisation de son utilité.

On note par P l'ensemble des joueurs tel que $P = \{1, \dots, N\}$, $N \geq 2$.

Une stratégie est un ensemble d'actions à sélectionner par rapport aux situations présentes dans un jeu, on distingue deux types :

Définition 2 (Stratégie pure). [40] Un plan d'actions que le joueur i choisit à chaque susceptibilité de jouer, noter par $S^i = \{s_1^i, \dots, s_{a_i}^i\}$ l'ensemble des stratégies pures du joueur i avec $|S^i| = a_i$ est le nombre de stratégies du joueur i lorsqu'il dispose de plusieurs actions.

Définition 3 (Stratégie mixte). [40] Une distribution de probabilité α^i définit sur l'ensemble des stratégies pures S^i du joueur $i \in P$ telle que

$$\Delta_{a_i} = \{\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{a_i}^i) \in \mathbb{R}^{a_i}, \quad \sum_{j=1}^{a_i} \alpha_j^i = 1, \quad \alpha_j^i \geq 0; \quad \forall j = \overline{1, a_i}, \quad i = \overline{1, N}\}.$$

Δ_{a_i} est l'ensemble de stratégies mixtes du joueur $i \in P$ avec α_j^i est la probabilité que le joueur i joue sa stratégie pure $s_j^i \in S^i$, $\forall j = \overline{1, a_i}$, $i = \overline{1, N}$.

Définition 4 (Fonction d'utilité). [40] A chaque joueur i on associe une fonction d'utilité (ou de valuation) U^i qui n'est pas une mesure du gain matériel ou monétaire mais une mesure subjective de contentement de l'agent pour chaque ensemble de stratégies choisies. Elle est donnée comme suit :

$$U^i : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \in S \longmapsto U^i(s).$$

Où $s = (s^i, s^{-i})$ est un profil de stratégies (issue de jeu), $s \in \{s^1, \dots, s^N\}$ tel que s^i est la stratégie du joueur i , $s^{-i} \in \{s^1, \dots, s^{i-1}, s^{i+1}, \dots, s^N\}$ sont les stratégies autres que celles du joueur i , $\forall i$, $s^i \in S^i$ et $S = \prod_{i=1}^N S^i$.

1.2 Rationalité

Les agents en théorie des jeux sont supposés avoir un comportement rationnel : chaque joueur est conscient des alternatives, fait des anticipations sur les éléments inconnus, possède des préférences, et choisit délibérément son action après un processus d'optimisation[62].

1.3 Classification des jeux et typologie

Parlant de jeu, on se retrouve le plus souvent devant une vaste variété de types distincts, et de formes différentes, séparées selon plusieurs critères et spécifications.

1.3.1 Représentation d'un jeu

En vertu de ce qui a été définie précédemment, les formes de jeux sont scindées en deux catégories : stratégique et extensive.

Définition 5 (Jeu sous forme stratégique). [40] Un jeu sous forme stratégique ou normale en stratégies pures est donnée par le triplet suivant.

$$\langle P, \{S^i\}_{i \in P}, \{U^i\}_{i \in P} \rangle . \quad (1.1)$$

- Un ensemble de joueurs $P = \{1, \dots, N\}$.
- Un ensemble de stratégies $S^i = (s_1^i, \dots, s_{a_i}^i)$ pour chaque joueur i .
- Une fonction d'utilité pour chaque joueur i

$$U^i : S = \prod_{i=1}^N S^i \longrightarrow \mathbb{R}.$$

L'extension mixte du jeu sous forme normale précédent est donnée comme suit :

$$\langle P, \{\Delta_{a_i}\}_{i \in P}, \{E_i\}_{i \in P} \rangle . \quad (1.2)$$

Où :

- Δ_{a_i} est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i .
- E_i est le gain espéré du joueur i qui représente le gain moyen que peut obtenir le joueur i en jouant à la stratégie s^i , avec une probabilité α^i .

Notons que cette représentation est appropriée en général aux jeux simultanés.

Définition 6 (Jeu sous forme extensive). [40] Un jeu sous forme extensive est définie par :

- Un ensemble de joueurs $P = \{1, \dots, N\}$.
- Un arbre (arbre de Kuhn) qui représente un graphe connexe sans cycle où l'ensemble des noeuds $\{A, B, C, \dots\}$ représente les coups (chaque noeud terminal correspond à une issue de jeu et un joueur est associé aux noeuds non terminaux de même niveau indiquant son tour de jouer), et l'ensemble des arcs $\{x, y, \dots\}$ représente les alternatives à chaque coup.
- Fonction de nommage (indiquant à chaque noeud le tour de chaque joueur).
- Fonction de valuation (associant à chaque noeud terminal un vecteur de gain de chaque joueur).

Exemple 1 (La dissuasion à l'entrée). [67] Soit une firme, notée NC (Nouveau Concurrent) qui envisage de produire un bien dont le marché est tenu par un monopole appelé M . Pour NC , le choix est simple : soit il entre, soit il n'entre pas, tandis que M a à décider entre céder ; par exemple en limitant sa production afin d'éviter un effondrement des prix, dans le cas où NC entre, et ne pas céder. Il y a donc trois issues possibles :

1. soit NC n'entre pas et M fait le bénéfice maximum,
2. soit NC entre et M cède de sorte qu'il y ait partage des ventes (et des bénéfices) entre les deux firmes,
3. soit NC entre et M ne cède pas, et toutes deux produisent à perte.

Ce jeu est représenté par l'arbre de Kuhn (Figure 1.1) avec des vecteurs de gain de la forme (a, b) , où a est le gain du joueur qui intervient au premier coup (ici NC), b étant celui intervenant au deuxième coup (ici, M).

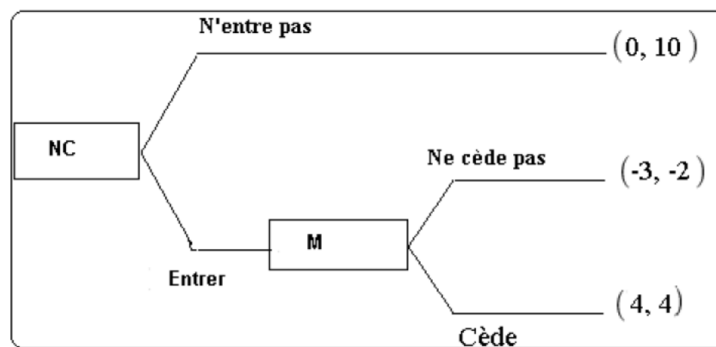


FIGURE 1.1 – Arbre de Kuhn, pour le cas du monopole et du nouveau concurrent.

D'après cet arbre, si NC n'entre pas, M garde sa position du monopole. A l'inverse, si NC entre, alors M a tout intérêt à céder car il assurera alors un gain de 4, au lieu de perdre 3 ce qui peut être alors une façon de maximiser ses gains en fonction des choix des autres. La solution de ce jeu paraît donc simple et elle est obtenue en utilisant la méthode de récurrence à rebours ; NC entre (parce que des bénéfices sont prévisibles si M a un comportement rationnel), et M cède.

1.3.2 Déroulement du jeu dans le temps

Cette distinction introduit deux types de jeux :

Définition 7 (Jeu statique). Un jeu statique (ou stratégique) est un jeu qui se déroule en un seul coup, c'est à dire les joueurs interviennent simultanément en choisissant leurs stratégies. Par exemple le jeu du dilemme du prisonnier.

Définition 8 (Jeu dynamique). Les jeux dynamiques sont des jeux qui se déroulent en plusieurs coups (pouvant être à un horizon fini ou pas). Par exemple, le jeu d'échecs.

1.3.3 Nature de l'information

Les informations à la portée des joueurs lors du jeu sont primordiales pour la description du jeu car elles possèdent une influence déterminante sur l'évaluation et le choix des stratégies par les joueurs et ainsi sur leur perception de ces dernières.

Définition 9 (Information complète et incomplète). Un jeu est à information incomplète si au moins un des joueurs ne connaît pas parfaitement la structure du jeu. Dans le cas contraire, il est à information complète. Ce qui signifie que chaque joueur est au courant de ces éléments : nombres de joueurs, ensemble de stratégies de chaque joueur, objectif de chaque joueur, y compris lui-même.

Définition 10 (Information parfaite et imparfaite). On dit que l'information est parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs, elle est imparfaite lorsqu'un joueur ignore certains des choix effectués avant le sien.

Remarque 1. Les ensembles d'information représentent l'information disposée par chaque joueur, chaque fois qu'il doit choisir une stratégie.

Dans les jeux simultanés l'information est imparfaite par définition. Parfois, il est possible que certains joueurs ignorent certaines composantes du jeu, et leurs gains peuvent dépendre d'un événement aléatoire, dans ce cas, la connaissance est incomplète.

L'information incomplète devient asymétrique si certains connaissent mieux les règles du jeu que d'autres.

On reconnaît par la suite deux types de jeux dynamiques selon la nature de l'information : jeux séquentiels et jeux répétés.

Remarque 2. La résolution de ce type de jeu nécessite une méthode de raisonnement utile à connaître dite raisonnement à rebours (backward induction).

1.3.4 Selon le comportement des joueurs (relations entre les joueurs)

L'entité basique de la théorie des jeux est le joueur, pouvant être un individu ou un groupe prenant une décision. Une fois l'ensemble des joueurs définie, nous pouvons distinguer deux types de modèles : les jeux dont les éléments de base sont

les stratégies des joueurs individuels et ceux basées sur les stratégies jointes d'un groupe de joueurs. Les modèles du premier type sont appelés jeux non coopératifs et ceux du second type des jeux coopératifs. Les firmes composant un duopole de Cournot participent à un jeu non coopératif tandis que les firmes formant un cartel et donc maximisant leur profil joint, participent à un jeu coopératif [62].

Définition 11 (Jeu coopératifs et non coopératifs). Un jeu est coopératif lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante (par exemple, sous la forme d'un contrat qui prévoit une sanction légale dans le cas du non respect de l'accord) avant le déroulement du jeu dans le cas contraire, on parlera alors des jeux non coopératifs.

1.3.5 Autres classes de jeux

1-Selon le nombre de stratégies

Définition 12 (Jeu fini à N joueurs). Le jeu (1.1) est dit fini, lorsque les ensembles de stratégies S^i , $i \in P$ sont finis.

$$(|S^i| < \infty, \quad \forall i \in P).$$

Définition 13 (Jeu infini à N joueurs). Le jeu (1.1) est dit infini, lorsque un des ensembles de stratégies S^i , $i \in P$ est un ensemble infini.

$$(\exists i \in P, \quad |S^i| = \infty).$$

2-Selon le gains des joueurs

Définition 14 (Jeu fini à somme constante). Le jeu (1.1) est dit à somme constante si :

$$\sum_{i=1}^N U^i(s) = cste; \quad \forall s \in S = \prod_{i=1}^N S_i.$$

Cas particulier : (Jeu à somme nulle) : Un jeu à deux joueurs est dit à somme nulle, si quelque soit l'issue du jeu, les valeurs des fonctions d'utilité des deux joueurs sont de signes opposés, c'est à dire que dans ce type de jeu, le gain d'un joueur représente effectivement la perte de l'autre (jeu strictement compétitif).

$$U^1(s^1, s^2) + U^2(s^1, s^2) = 0 \quad \forall s^1 \in S^1, \forall s^2 \in S^2, \quad (U^1 = -U^2).$$

Remarque 3. Certains théoriciens critiquent les jeux à somme nulle, au moins en vue des situations économiques, au motif qu'un échange économique est en principe mutuellement avantageux, et que les jeux à somme nulle, seraient totalement irréalistes.

3-Selon la mémoire

Pour qu'un jeu soit complet, il convient de distinguer les jeux à mémoire parfaite et imparfaite :

Définition 15 (Jeux à mémoire parfaite et imparfaite). Les jeux à mémoire parfaite sont des situations où chaque joueur peut se rappeler à tous moments de la suite des coups joués précédemment, au besoin, en notant au fur et à mesure les coups. Tandis que ceux à mémoire imparfaite, supposent une sorte d'amnésie de la part des joueurs. Par exemple le jeu des dominos est un jeu à mémoire parfaite, car on peut se rappeler des coups joués, à n'importe quel étape du jeu.

1.4 Jeux statiques et concepts de solution

Définition 16. [73] Un jeu statique à information complète est représenté par le triplet précédemment défini (1.1).

$$\langle P, \{S^i\}_{i \in P}, \{U^i\}_{i \in P} \rangle .$$

Où :

- P ensemble des joueurs, $P = \{1, \dots, N\}$.
- S^i ensemble des stratégies du joueur $i \in P$.
- $U^i : S^1 \times S^2 \times \dots \times S^N \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction utilité du joueur $i \in P$ qu'il optimise.

Un jeu est dit statique, simultané, stratégique ou sous forme normale lorsque les joueurs choisissent simultanément leurs actions et reçoivent ensuite leurs gains respectifs [62, 25]. Parmi les jeux statiques, les jeux finis à deux joueurs occupent une place privilégiée parce qu'ils permettent une présentation simple et pédagogique des principales questions posées en théorie des jeux. Ils sont décrits sous la forme de matrices dans lesquelles le premier joueur joue horizontalement, c'est-à-dire choisit une ligne de la matrice, et le second verticalement en choisissant une colonne, ça parle dans ce cas de jeux bimatriciels.

Exemple 2. [67] Deux firmes se partagent un marché et proposent des biens totalement homogènes. Ces firmes ne peuvent pas se communiquer entre elle dans la fixation de leurs prix de vente. Elles choisissent indépendamment entre des prix élevés ou des prix faibles. Cette situation de concurrence duopolistique peut être représentée sous forme d'un jeu matriciel où :

- L'ensemble des joueurs est : $P = \{\text{firme 1, firme 2}\}$.
 - $X_i = \{\text{Prix faible, Prix élevé}\}$ est l'ensemble des stratégies de chaque firme $i \in P$.
- Donc, la matrice de gain associée est donnée par :

		firme 2	
		prix faible	prix élevé
firme 1	A =	prix faible	prix élevé
		(5, 5)	(12, 0)
		(0, 12)	(10, 10)

1.4.1 Elimination des stratégies équivalentes

Définition 17 (Stratégies équivalentes). Deux stratégies s^i et s'^i sont équivalentes si et seulement si pour tout profil donné de stratégies des joueurs adverses, le joueur i obtient la même utilité quand il joue la stratégie s^i ou s'^i .

$$\forall i \in P, \forall s^{-i} \in S^{-i}; U^i(s^i, s^{-i}) = U^i(s'^i, s^{-i}).$$

-Toutes les stratégies équivalentes à s^i forment une [classe d'équivalence].

Définition 18 (Forme normale réduite). La forme normale réduite d'un jeu s'obtient en remplaçant par une seule stratégie toutes les stratégies d'une classe d'équivalence dans sa forme normale initiale.

1.4.2 Elimination des stratégies dominées

Certaines stratégies peuvent être globalement plus mauvaises que d'autres, et on s'attend qu'elles ne soient jamais choisies par un joueur rationnel. On peut alors les éliminer d'emblée du jeu.

Définition 19. [62, 40] Une stratégie s^i du joueur i est strictement dominée si : $\exists s'^i \in S^i$ tel que :

$$U^i(s'^i, s^{-i}) > U^i(s^i, s^{-i}), \quad \forall s^{-i} \in S^{-i}.$$

Une stratégie s^i est dominée si :

$\exists s'^i \in S^i, i \in P$ tel que :

$$U^i(s'^i, s^{-i}) \geq U^i(s^i, s^{-i}), \quad \forall s^{-i} \in S^{-i}.$$

Proposition 1. [40] Un jeu est résoluble par élimination itératives des stratégies dominées (EISD) si : on obtient un unique profil en éliminant successivement les stratégies strictement dominées.

1.4.3 Equilibre de Nash

John Nash a généralisé le concept d'équilibre de Cournot, ayant pour idée, dans un jeu non coopératif, sans communication ni engagement envers une stratégie particulière, de chercher les résultats stables, unilatérales en absence de coordination.

Un équilibre de Nash (EN) est donc un résultat indéviable par n'importe quel joueur étant donné les stratégies jouées par ses adversaires. L'équilibre de Nash est donc le point fixe de la fonction de meilleure réponse définie comme suit :

Définition 20 (Fonction de meilleure réponse en stratégies pures). [62, 40] Une fonction de meilleure réponse est définie de S^{-i} dans S^i par :

$$\mathbf{BR}^i(s^{-i}) = \{s^i \in S^i, tq : U^i(s^i, s^{-i}) \geq U^i(s'^i, s^{-i})\}, \forall s'^i \in S^i.$$

Définition 21 (Fonction de meilleure réponse en stratégies mixtes). [62, 40] Une fonction de meilleure réponse en stratégies mixtes est définie par :

$$\mathbf{BR}^i(\alpha^{-i}) = \{\alpha^i \in \Delta_{a_i}, tq : E^i(\alpha^i, \alpha^{-i}) \geq E^i(\alpha'^i, \alpha^{-i})\}, \forall \alpha'^i \in \Delta_{a_i}.$$

Définition 22 (Equilibre de Nash en stratégies pures). [62, 40] Un équilibre de Nash en stratégies pures est un profil de stratégies $s^* = (s^{i*}, s^{-i*})$ tel que :

$$\forall i \in P, \forall s^i \in S^i : U^i(s^{i*}, s^{-i*}) \geq U^i(s^i, s^{-i*}).$$

Proposition 2. [46] Un équilibre de Nash $s^{i*} \in \mathbf{BR}^i(s^{-i*})$, $\forall i \in P$.

Définition 23 (Equilibre de Nash en stratégies mixtes). [62, 40] Une issue

$$\alpha^* \in \Delta = \prod_{i=1}^N \Delta_{a_i}$$

est un EN en stratégies mixtes si :

$$\forall i \in P, \forall \alpha^i \in \Delta_{a_i}, E_i(\alpha^{i*}, \alpha^{-i*}) \geq E_i(\alpha^i, \alpha^{-i*}).$$

Théorème 1 (Nash 1950). [62] *Tout jeu fini sous la forme normale admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Proposition 3. [46] $\alpha^* = (\alpha^{i*}, \alpha^{-i*}) \in \Delta$ est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\alpha^{i*} \in \mathbf{BR}^i(\alpha^{-i*}), \quad \forall i \in P.$$

Exemple 3 (Duopole de Cournot). Le duopole de Cournot s'intéresse au fonctionnement d'un marché, sur lequel deux firmes 1 et 2 se font concurrence par les quantités (avec un prix p qui est fixé de façon à garantir l'équilibre entre l'offre et la demande). Le modèle de base considère une demande linéaire $D(p) = \alpha - p$, avec α un paramètre, et des fonctions de coût de la forme $C_i(q_i) = cq_i$, $i = \{1, 2\}$, avec $q_i \in \mathbb{R}^+$ la production de la firme i , et c le coût unitaire de production (supposé

constant). Chaque firme décide de sa production de façon à maximiser son profit donné comme suit

$$\Pi_i(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - q_2)q_i - cq_i.$$

Et ce sans connaître le choix de sa rivale (si 1 et 2 mettent q_1 et q_2 , la production globale se fixe à $Q = q_1 + q_2$ et le prix qui permet d'équilibrer le marché est donné $p = \alpha - Q = \alpha - q_1 - q_2$).

L'équilibre de Nash de ce jeu correspond alors à un couple de productions (q_1^*, q_2^*) tel que q_1 maximise le profit de 1 si 2 produit q_2^* , et réciproquement. Il se détermine en résolvant un système d'équations $q_1 = R_1(q_2)$ et $q_2 = R_2(q_1)$ avec $R_1(q_2) = (\alpha - c - q_2)/2$ et $R_2(q_1) = (\alpha - c - q_1)/2$ sont les fonctions de meilleure réponse des firmes 1 et 2, ces dernières donnant la production optimale de la firme i , $i = \{1, 2\}$, pour chaque niveau de production mis sur le marché par la rivale.

Ainsi un équilibre symétrique $q_1^* = q_2^* = (\alpha - c)/3$ est obtenu avec un prix d'équilibre $p^* = (\alpha + 2c)/3$ et des profits $\Pi_1^* = \Pi_2^* = (1 - c)^2/9$. Cet équilibre se révèle alors ne pas être optimal au sens de Pareto, au sens privé du terme c'est-à-dire en se préoccupant des seuls intérêts des joueurs, en étant notamment dominé par un profil en lequel chacun met la moitié de la production de monopole (soit $(q_1, q_2) = ((\alpha - c)/4, (\alpha - c)/4)$).

1.4.4 Jeux à un grand nombre de joueurs

Le théorème de Nash présenté précédemment malgré ses démonstrations rigoureuses, des exemples ont insisté sur l'importance de la finitude mentionnée et le besoin d'outils de théorie de la mesure pour analyser des jeux à un grand nombre de joueurs dont le contre-exemple présenté par PELEG (1969) où il a supposé l'ensemble des naturels positifs comme étant l'ensemble des joueurs, chacun ayant comme actions 0 et 1, son gain dépend de son choix et de la somme des actions des autres joueurs. Le jeu ne possède pas d'équilibre de Nash en stratégies pures ni en stratégies mixtes.

Visiblement, la résolution des jeux à un grand nombre de joueurs s'annonce une tâche difficile, pour surpasser cette difficulté des simplifications liées à la limite quand N tend vers l'infini seront présentées à la section 3 (sous-section 4) dans le Chapitre 3.

1.5 Jeux dynamiques

1.5.1 Jeux sous forme extensive à information complète

Définition 24 (Jeu sous forme extensive à un seul coup). [73, 76, 46] Un jeu sous forme extensive à un seul coup est défini par les données suivantes :

1. $P = \{1, \dots, N\}$ est l'ensemble des joueurs, chaque joueur joue à une étape donnée.
2. L'arbre du jeu constitué d'un ensemble de sommets $v = \{v_0\} \cup \{v_1, \dots, v_m\} \cup \{z_1, \dots, z_p\}$ tel que :
 - v_0 est le sommet initial, il représente le début du jeu.
 - Chaque noeud v_i , $i = 1, 2, \dots, m$ possède un prédécesseur et un successeur.
 - Les noeuds z_j , $j = 1, 2, \dots, p$ sont appelés noeuds terminaux, ils n'ont pas de successeurs. Ils représentent la fin du jeu.
3. Il est associé à chaque sommet " v " non terminal un joueur $T(v)$, c'est au tour de $T(v)$ de jouer. Par abus d'écriture, $T^{-1}(j) = \{v \in V : T(v) = j\}$, $j \in P$.
4. Les arcs de l'arbre représentent les actions ou alternatives du joueur.
5. Il est associé à chaque sommet terminal " z_j " le vecteur des gains de chaque joueur, résultant des actions prises par les joueurs contenus dans le chemin de " v_0 " à " z_j ".
6. A chaque joueur $i \in P$ une *partition d'information* est associée, notée PI^i , tel que PI^i est une partition de $T^{-1}(i)$.
Chaque élément de PI^i est appelé *ensemble d'information*, il est noté par EI_j^i , $j = 1, \dots, |PI^i|$.

Proposition 4. [73, 76] Un jeu sous forme extensive est à information parfaite si chaque ensemble d'information est un singleton.

Définition 25. [73, 76, 46] Une stratégie pure s^i du joueur i est une application de PI^i dans A^i vérifiant $s^i(EI_j^i) \in A_j^i$, $\forall EI_j^i \in PI^i$ où :

A_j^i est l'ensemble des actions du joueur i relatif à l'ensemble d'information EI_j^i et $A^i = \bigcup_{j=1}^{|PI^i|} A_j^i$.

Soit S^i l'ensemble de toutes les stratégies du joueur i . Pour $i \in P$:

$$\begin{aligned} S^i : PI^i &\rightarrow A^i \\ x = EI_j^i &\rightarrow s^i(x) \in A_j^i. \end{aligned}$$

Définition 26. [73, 76] L'équilibre de Nash en stratégies pures d'un jeu sous forme extensive est l'équilibre de Nash de sa représentation sous forme normale (stratégique).

Définition 27. [73, 76] Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble de ses stratégies pures.

L'ensemble des stratégies mixtes d'un jeu fini est :

$$\Delta^i = \{\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_m^i)^T \in [0, 1]^m, \sum_{j=1}^m \alpha_j^i = 1, i = \overline{1, N}\}.$$

Où α_j^i représente la probabilité de choisir la stratégie pure s_j^i , $j = 1, 2, \dots, m$.

Théorème 2. [73, 76, 46] *Tout jeu sous forme extensive fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

1.5.2 Stratégies de comportement

Définition 28. [73, 76, 46] Soit PI^i la partition d'information du joueur i , $\Delta_j^i = \Delta(EI_j^i)$ est l'ensemble des distributions de probabilité sur A_j^i et $\Delta^i = \{\Delta_1^i, \Delta_2^i, \dots, \Delta_{|PI^i|}^i\}$.

Une stratégie de comportement du joueur i est l'application $\gamma^i : PI^i \rightarrow \Delta$, tel que $\gamma^i(EI) \in \Delta(EI)$, $\forall EI \in PI^i$.

Une stratégie de comportement précise la probabilité de jouer une action donnée sur un ensemble d'information donnée.

Définition 29 (Sous-jeu d'un jeu). [62] Un sous jeu d'un jeu sous forme extensive est un jeu composé d'un noeud (ensemble d'information singleton), de tous ses noeuds successeurs, des arcs les reliant ainsi que les utilités associées à tous les noeuds terminaux successeurs.

Définition 30 (Equilibre parfait en sous-jeu (EPSJ)). [62] Un EN d'un jeu sous forme extensive est un équilibre parfait en sous-jeu si : toute restriction du profil de stratégies à un sous-jeu est un EN pour ce sous-jeu.

- Pour déterminer l'équilibre de Nash parfait en sous jeu, il faut suivre la procédure dite d'induction à rebours.

-Récurrence à rebours (Backward induction)

-On commence par chercher les choix optimaux à la dernière période (noeuds terminaux).

-On remonte l'arbre de noeud en noeud, cherchant à chaque noeud le choix optimal, une fois que les choix optimaux des noeuds fils sont pris en compte.

Théorème 3 (Zermelo, Kuhn 1953). [46] *Tout jeu (fini) sous forme extensive à information parfaite a un équilibre de Nash en stratégies pures (obtenable par récurrence à rebours).*

Théorème 4. [46] *Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies mixtes (donc en stratégies de comportement).*

Exemple 4 (Duopole de Stackelberg). Reprenant les données du duopole de Cournot, il est supposé à présent que la firme 1 joue la première, suite à quoi la firme 2 détermine à son tour son niveau de production et ce après avoir observé le choix de sa rivale. Cette situation dans laquelle la firme 1 joue le rôle de leader forme un jeu dynamique à information parfaite qui se résout au moyen de l'équilibre parfait. A ces fins, il faut se placer à la fin du jeu et déterminer, pour chaque niveau de production de la firme 1, la production optimale de la firme 2. Cette fonction est alors connue car elle correspond à la meilleure réponse de la firme 2, $R_2(q_1) = (\alpha - c - q_1)/2$, calculée dans le duopole de Cournot. Puis, connaissant dans chaque sous-jeu le choix optimal de la firme 2, il faut remonter d'un cran et examiner le problème de décision de la firme 1. Comme 1 sait que 2 jouera $q_2 = R_2(q_1)$ si elle joue q_1 , 1 tient compte de ce comportement de 2 et sélectionne un niveau de production de façon à maximiser $\Pi_1(q_1, R_2(q_1))$. Il s'obtient ainsi $q_1^s = (\alpha - c)/2$, puis par cascade $q_2^s = (\alpha - c)/4$. La production globale, le prix et les profits se fixent alors à $Q^s = 3(\alpha - c)/4$, $q^s = (\alpha + 3c)/4$, $\Pi_1^s = (\alpha - c)^2/8$, $\Pi_2^s = (\alpha - c)^2/16$ et cet équilibre demeure dominé au sens de Pareto (une réduction de moitié de la production de la firme 1 permet d'augmenter le profit de la firme 2 sans modifier celui de la firme 1).

Un point remarquable est alors que le duopole de Stackelberg est plus favorable pour les consommateurs que le duopole de Cournot (la production est plus importante et le prix de vente est plus faible), ce qui est paradoxal dans la mesure où la structure de marché la plus concurrentielle semble bien être initialement celle de Cournot.

- Un jeu dynamique est un jeu qui se déroule en plusieurs étapes. Ce type de jeux est important car il permet de modéliser le fait qu'une action passée d'un joueur puisse contraindre les gains d'un autre joueur dans le futur. Il existe deux sortes de jeux dynamiques : le jeu en information parfaite (appelé jeu séquentiel) dans lequel chaque joueur connaît l'ensemble des actions passées de tous les autres joueurs. Le joueur est donc le seul à choisir à une étape donnée. Le jeu de Stackelberg est un exemple de ce type de jeu dynamique. Dans le deuxième type, l'information est imparfaite dans lequel les joueurs choisissent leurs actions simultanément à chaque étape du jeu (appelé jeu répété). On se trouve donc plus ou moins dans le cadre

d'un jeu statique bien que l'historique influence les stratégies des joueurs. Parmi les principaux jeux dynamiques, on distingue :

1.5.3 Jeux répétés

Un jeu répété consiste en la répétition d'un nombre fini ou infini de fois d'un jeu sous forme normale défini par le jeu (1.1); C'est le même jeu, appelé jeu constituant, qui se répète de période en période. Dans le cas où les conditions du jeu ne se modifient pas au cours du temps (même nombre de joueurs, même ensemble de stratégies, même fonctions de gain et même facteur d'actualisation) il est appelé jeu stationnaire[5, 24, 66].

Soit T un nombre entier fini ou infini appelé l'horizon du jeu, et δ , un réel dans l'intervalle $[0, 1]$. Le jeu (1.1) répété T fois, actualisé par δ est défini comme le jeu sous forme extensive suivant :

$$\langle P, \{\sigma_i\}_{i \in P}, \{G_i\}_{i \in P}, \delta \rangle . \quad (1.3)$$

Avec P ensemble des joueurs, σ_i les stratégies du joueur i et G_i ses gains qui seront définis par la suite.

La notion de stratégies

Soit $x_i(t)$ l'action du joueur i à l'instant t . Le profil d'actions sélectionné par les N joueurs à l'instant t s'écrit :

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \in X = \prod_{i=1}^N X_i.$$

Définition 31 (Histoire du jeu). [67, 24] L'histoire du jeu à l'instant t est donnée par :

$$h_t : h_t = (x(0), x(1), \dots, x(t-1)) \in X^t = \prod_{t=0}^{t-1} X.$$

Elle correspond à l'ensemble des profils d'actions que les joueurs ont choisi entre la période initiale 0 et la période $t-1$.

Définition 32 (Stratégie de comportement). [67, 24] Une stratégie pour le joueur i du jeu (1.3) consiste en une séquence de règles décisionnelles, une par période. Cette stratégie est notée $\sigma_i = (\sigma_i(0), \sigma_i(1), \sigma_i(2), \dots, \sigma_i(t), \dots)$ où $\sigma_i(t)$ est la règle de décision du joueur i à l'instant t où :

$$\sigma_i(t) : X^t \rightarrow X_i$$

spécifie pour chaque histoire h_t possible du jeu une action du joueur i (stratégie de comportement) à prendre à l'instant t , $1 \leq t \leq T$. Donc, le joueur $i \in P$ joue à l'instant t l'action $\sigma_i(t)(h_t)$ s'il a observé h_t . Ainsi, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ est le profil de stratégies choisi par les N joueurs.

Définition 33 (Les gains actualisés des joueurs). [67, 24] Si les stratégies σ conduisent à la réalisation des issues $x(t)$, $t = \overline{1, T}$, le gain du joueur i est égal à :

$$G_i(x(t)) = \begin{cases} \sum_{t=0}^T \delta^t f_i(x(t)), & \text{si } T \text{ est fini.} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} (1 - \delta) \sum_{t=0}^{t=s} \delta^t f_i(x(t)), & \text{si } T \text{ est infini.} \end{cases}$$

1.5.4 Jeux stochastiques

Les jeux stochastiques modélisent l'interaction entre des décideurs pouvant influencer leur environnement. Ces jeux ont d'abord été introduits et étudiés par Loyd Shapley [68]. Depuis, la littérature n'a cessé de croître.

Dans un jeu stochastique, les joueurs font face à des buts potentiellement différents. Ils doivent assurer un bon paiement aujourd'hui tout en maintenant une espérance de paiement élevée pour demain. Un jeu stochastique est un jeu répété avec une fonction objectif dépendante d'un paramètre qui varie aléatoirement.

Définition 34. [47, 31] Un jeu stochastique discontinu fini est défini par :

$$\Sigma = \langle P, \Omega, \{X_i(\omega)\}_{(i,\omega) \in N \times \Omega}, \{f_i\}_{i \in P}, \pi, \delta \rangle \quad (1.4)$$

Où :

- $P = \{1, \dots, N\}$ est l'ensemble des joueurs. Un joueur quelconque est désigné par l'indice i ; $i \in P$.
- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_z\}$ est l'espace des états.
- $X_i(\omega) = \{x_i^1(\omega), x_i^2(\omega), \dots, x_i^{m_i^\omega}(\omega)\}$ désigne l'ensemble des stratégies du joueur $i \in P$ à l'état $\omega \in \Omega$ et $m_i^\omega = |X_i(\omega)|$.
- $X(\omega) = \prod_{i \in P} X_i(\omega)$ est donc l'ensemble de tous les profils d'actions admissibles en une étape donnée à l'état $\omega \in \Omega$.
- $D = \Omega \times X = \{(\omega, x(\omega)) / \omega \in \Omega, x(\omega) \in X(\omega)\}$ est l'ensemble des couples (état, profil d'actions).
- $f_i : D = \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i \in P$, est la fonction du gain instantané (en une seule période) du $i^{\text{ème}}$ joueur si à l'état $\omega \in \Omega$, le profil $x(\omega)$ est choisi.
- $\pi : D = \Omega \times X \rightarrow \Delta(\Omega)$ appelée probabilité de transition. Pour chaque couple $(\omega, x(\omega)) \in D$. On peut identifier le vecteur $(\pi(\omega_1/\omega, x(\omega)), \dots, \pi(\omega_z/\omega, x(\omega)), \pi(\hat{\omega}/\omega, x(\omega)))$ représente la probabilité que

le système passe à l'état $\hat{\omega} \in \Omega$ si à l'état $\omega \in \Omega$ le profil d'actions $x(\omega) \in \Omega$ est joué. Cependant, $\pi(\hat{\omega}/\omega, x(\omega)) \geq 0$ et $\sum_{\hat{\omega} \in \Omega} \pi(\hat{\omega}/\omega, x(\omega)) = 1$.

- $\delta \in]0, 1[$ est appelé le taux d'actualisation ou le facteur d'escompte.
- Les ensembles P , Ω et $X_i(\omega)$, pour tout $i \in P$ sont supposés finis et non vides. La fonction $f_i(\omega, \cdot)$ est supposée continue sur X , pour tout $\omega \in \Omega$.

1.5.5 Jeux différentiels

Les jeux différentiels ont leur origine dans des problèmes pratiques dont le principe est le suivant : un système dynamique est décrit par des équations différentielles qui en lient les coordonnées de phase avec les forces de commandes. Une partie de ses forces doit réaliser un objectif, l'autre doit l'en empêcher. Aussi ce processus est-il interprété comme un jeu entre deux parties antagonistes disposant de l'un ou de l'autre de ces groupes de forces.

Le caractère de jeu de ces problèmes conflictuels de commande réside justement dans l'hypothèse qu'aucun des joueurs ne sait à chaque instant quel sera le comportement futur de son adversaire (ne connaît exactement les commandes futures de son adversaire), et en définissant ses propres actions ce joueur ne peut se fonder que la connaissance de ses possibilités physiques et celles de son adversaire.

Définition 35 (Jeu différentiel). [1] Soit un système dont l'évolution est repérée à tout instant $t \in [0, T]$ par un vecteur $x(t)$ à n composantes. Il est supposé que cette évolution peut être représentée par un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, u_1, \dots, u_i, u_N),$$

équations dans lesquelles les vecteurs u_1, \dots, u_i, u_N désignent les décisions des différents joueurs. L'état du système à l'instant initial, $x(0)$, est supposé connu, $x(0) = x_0$.

La structure d'évaluation du joueur i peut s'écrire de la façon suivante :

$$\max \int_0^T L_i(x, t, u_1, \dots, u_i, u_N) dt.$$

Sachant que $L_i(x, t, u_1, \dots, u_i, u_N)$ mesure l'utilité du joueur i . Sous les contraintes $g_i(x(T), T) \geq 0$.

Avec l'inégalité vectorielle $g_i(x(T), T) \geq 0$ représentant la cible que le joueur i se propose d'atteindre à l'époque T .

L'évolution du système est généralement limitée par un certain nombre de contraintes qui portent soit sur l'état du système, soit sur les décisions des différents joueurs, soit encore sur les deux à la fois. En ce qui concerne le réseau

d'information, il est à admettre que chaque joueur possède une connaissance parfaite des termes du conflit et des forces en présence ; Plus précisément, il connaît les équations qui régissent l'évolution du système, la forme des contraintes et les différentes structures d'évaluation.

Il n'en est pas de même de l'observation du système :

- ou bien il est supposé que les joueurs ont les moyens d'observer continûment et parfaitement la trajectoire ; Dans ce cas le système sera géré en boucle fermée c'est-à-dire que chaque joueur définira pour toute époque $t \in [0, T]$ une stratégie décisionnelle du type $u[x(t), t]$.

- sinon, il est supposé que les joueurs ne disposent d'aucune information sur l'évolution du vecteur $x(t)$; Dans ce cas, le système sera géré en boucle ouverte, c'est-à-dire que chaque joueur définira pour chaque époque $t \in [0, T]$ une stratégie décisionnelle du type $u(t)$.

1.5.6 Jeux différentiels stochastiques

Les jeux différentiels sont des jeux dynamiques où les stratégies des joueurs sont des fonctions du temps [71]. Dans ce type de jeux, l'état du joueur i à l'instant t est spécifié par un vecteur (variable d'état) $X_t^i \in \mathbb{R}^n$. Un jeu différentiel est relié aux problèmes de Contrôle de Commande Optimal. Il consiste à généraliser ce problème à plusieurs contrôles, plusieurs critères, un pour chaque joueur. D'autre part, les jeux stochastiques se déroulent selon des transitions probabilistes en une séquence d'étapes telles que le début de chaque étape est marqué par un état initial.

A terme d'exemple, le jeu différentiel stochastique considéré ici décrit le déplacement d'un joueur $i \in P$, partant d'une position initiale $X_0^i = x_0^i$ où sa stratégie $v^i(\cdot)$ représente le choix de sa vitesse à chaque instant, et sachant que son mouvement est bruité ainsi :

$$dX_t^i = v_t^i dt + \sigma^i dW_t^i, \quad (1.5)$$

où σ^i est la force du bruit et les W_t^i sont des bruits blancs Gaussiens indépendants.

Les joueurs dans cette situation, grâce aux actions adoptées sur leurs stratégies minimisent un coût :

$$J^i[v^1(\cdot), \dots, v^N(\cdot)] = \mathbb{E} \left[\int_0^T L^i(X_\tau^i, v_\tau^i) + F^i(X_\tau^1, \dots, X_\tau^N) d\tau + c_T^i(X_\tau^1, \dots, X_\tau^N) \right]. \quad (1.6)$$

Tel que :

- L^i représente le coût instantané du joueur i et F^i son potentiel.

- c_T^i est le coût terminal du joueur i à l'instant T . Sous l'hypothèse de rationalité des joueurs la solution du problème est donnée par l'EN (v^{1*}, \dots, v^{N*}) définie par :

$$J^i[v^{1*}, \dots, v^{N*}] \leq J^i[v^{1*}, \dots, v^i, \dots, v^{N*}], \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad \forall v^i.$$

La fonction valeur se définit donc :

$$u^i(x^1, \dots, x^N, t) = \inf_{v^i} \mathbb{E} \left[\int_t^T L^i(X_\tau^i, v_\tau^i) + F^i(X_\tau^{1*}, \dots, X_\tau^i, \dots, X_\tau^{N*}) d\tau + c_T^i(X_\tau^{1*}, \dots, X_\tau^i, \dots, X_\tau^{N*}) \right],$$

tel que $X_t^i = x^i, \forall i$ ie $u^i(x^1, \dots, x^N)$ est le coût optimal subi par le joueur i , sur ce la fonction valeur vérifie l'équation différentielle partielle (EDP) suivante pour chaque joueur i :

$$\partial_t u^i + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_{x^j} u^i + \sum_{j \neq i} \partial_p H^j(x^j, \Delta_{x^j} u^j) \cdot \Delta_{x^j} u^i + H^i(x, \Delta_{x^i} u^i) = -F^i(x^1, \dots, x^N), \quad (1.7)$$

avec la condition finale :

$$u^i(x^1, \dots, x^N, T) = c_T^i(x^1, \dots, x^N),$$

ainsi l'Hamiltonien à introduire est :

$$H^i(x, p) = \inf_v [v \cdot p + L^i(x, v)].$$

Ce qui donne un système de N équations différentielles partielles non linéaires à résoudre, et les stratégies optimales seront :

$$v_t^i = \frac{\partial H^i}{\partial p} \left(X_t^i, \Delta_{x^i} u^i(X_t^1, \dots, X_t^N, t) \right).$$

Le jeu différentiel stochastique peut donc être représenté par le triplet :

$$\langle P, \{v^i\}_{i \in P}, \{J^i\}_{i \in P} \rangle. \quad (1.8)$$

1.6 Applications de la théorie des jeux

La théorie des jeux s'est immiscée dans plusieurs domaines, elle a réussi à se frayer un chemin depuis ses débuts partant des Sciences Politiques et les Relations Internationales. Elle a su expliquer certains faits Historiques, de là, elle fait son apparition en Anthropologie, puis étudie les décisions en Sciences Sociales. Au-dessus de l'homme et son comportement, elle a permis la compréhension de l'attitude d'autres espèces vivantes face aux modifications environnementales en Biologie. En Philosophie, elle a servi à fonder une théorie évolutionniste de la justice et de la morale.

Ce n'est pas tout, se tournant vers l'informatique, cette théorie a investi dans les réseaux sans fils dans l'optimisation au niveau du débit de transmission et consommation énergétique...

L'Économie est la discipline où la théorie des jeux s'est épanouie réellement, au point de décrocher 11 prix Nobel en économie. Son utilisation est importante dans l'économie Industrielle afin d'analyser la concurrence d'oligopoles. Puis vient la naissance de la théorie de l'enchères.

Aujourd'hui, les crises économiques et bancaires, à savoir la gestion de portefeuille financier, les Risques systémiques sont modélisés et étudiés par la théorie des jeux, des nouveaux modèles de jeux et concepts de solutions apparaissent répondant aux besoins de l'économie moderne.

Conclusion

Dans ce premier chapitre, certaines notions de bases et définitions primales de la théorie des jeux sont rappelées brièvement, tout en présentant les jeux appartenant à la classe des jeux dynamiques, à savoir, les jeux répétés et les jeux différentiels/stochastiques qui constituent une première base introductive des jeux à champ moyen et posent la nécessité d'agréger des développements adéquats à la situation des jeux à un grand nombre de joueurs.

Chapitre 2

Rappels sur quelques notions mathématiques avancées

Introduction

Afin de faciliter la compréhension, l'assimilation, et le déplacement du lecteur de ce document, puis, sachant que la théorie des jeux à champ moyen par son inspiration de diverses disciplines et ses applications dans beaucoup d'autres, une boîte à outils mathématiques s'avère indispensable.

Ce chapitre est dédié aux définitions et notions usuelles qui seront utilisées et citées continuellement le long de ce travail. En effet, trois différentes sections fourniront les outils demandés par les chapitres suivants, à savoir des notions de programmation dynamique en théorie de contrôle, quelques équations issues de l'analyse stochastique et finalement des définitions primaires et primordiales.

2.1 Définitions et Rappels

Définition 36 (Processus stochastique). Soit $T \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble. Un processus stochastique indexé par T et à valeurs dans \mathbb{R}^d est une famille $(X_t)_{t \in T}$ d'applications mesurables de (Ω, \mathcal{F}) dans $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.

Définition 37 (Processus de Wiener). [10] Un processus de Wiener, également appelé Mouvement Brownien est un processus $\{W_t, t \geq 0\}$ défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) tel que :

- Le Mouvement Brownien est issu de l'origine $\mathbb{P}[W_0 = 0] = 1$.
- $\forall s < t$, $\{W_t - W_s\}$ est une variable réelle gaussienne centrée de variance $(t - s)$, i.e $\{W_t - W_s\} \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

- $\forall n, \forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ les incréments $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$ sont indépendants.

Définition 38 (Distribution empirique). [75] Soit X_1, \dots, X_N des variables aléatoires indépendantes et de distribution identique, avec la fonction distribution cumulative $F(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$, $i = \overline{1, N}$. La distribution empirique est défini comme suit :

$$\mu_X^N = F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

Définition 39 (Fonction distribution cumulative). [37] La fonction de distribution cumulative (fonction de répartition) est la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x \in \mathbb{R} &\rightarrow F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i < x} \mathbb{P}(X = x_i). \end{aligned}$$

Définition 40 (Lois des grands nombres). [9] C'est le nom donné à un ensemble de théorèmes qui affirment la convergence de la moyenne des n premiers termes $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$.

2.2 Analyse stochastique

Les équations différentielles stochastiques sont des équations qui régissent l'évolution de la plus part des prix des actifs financiers, d'où leur grande utilisation et importance dans beaucoup de domaines, entre autres, elles ont été largement appliquées dans la théorie des jeux à champ moyen.

Définition 41 (Equation différentielle ordinaire EDO). [72] Une EDO sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est un système de type

$$\begin{cases} x = x_0, \\ x'_t = f(t, x_t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Où :

$$\begin{cases} x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow x_t. \end{cases}$$

Est la fonction inconnue et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (parfois appelée équation différentielle partielle et abrégée en EDP) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues

1. La fonction distribution cumulative est exactement la fonction de répartition.

dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrés par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasitotalité des problèmes. Les EDP sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes).

Définition 42 (Equation aux dérivées partielles (EDP)). [7] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à plusieurs variables réelles $f(x_1, x_2, x_i, \dots, x_n)$.

f est dite différentiable au point x_i si :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, x_i, \dots, x_n)}{|h|}.$$

Les dites dérivées partielles de f sont les fonctions :

$$\begin{aligned} \partial_i f : \quad & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Elles peuvent être notées : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\partial_{x_i} f(x)$ ou bien simplement $\partial_i f(x)$.

Définition 43 (Equation différentielle stochastique (EDS)). [72] Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'EDO (2.1) avec un terme aléatoire modélisant un bruit au tour du phénomène déterministe décrit par (2.1). La perturbation la plus simple est l'ajout d'un Mouvement brownien², où :

$$\begin{cases} X_0 = x, \\ dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma dB_t. \end{cases} \quad (2.2)$$

Le cadre des EDS concerne la situation où le coefficient σ dépend aussi du temps et de la solution X_t (en finance, ça parle alors de modèle à volatilité locale).

Définition 44 (Opérateur nabla). [7] La notation $\nabla f(x)$ qui se lit "nabla f de x " est souvent utilisée pour représenter la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ au point x lorsque celle-ci est une matrice colonne ($q = 1$) qui s'identifie au gradient de f au point x .

$$(\nabla f(x))_{i,j} = \partial_i f_j(x).$$

2. Voir la définition dans la section précédente

Définition 45 (Opérateur divergence). [7] Pour une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ (égalité des dimensions de départ et d'arrivée) la divergence se définit par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\operatorname{div} f)(x) = \sum_{i=1}^p \partial_i f_i(x). \end{aligned}$$

2.3 Sur la théorie de contrôle optimal et programmation dynamique

Le contrôle optimal est la branche des mathématiques qui étudie les systèmes dynamiques dont l'état peut être modifié par un contrôle et grâce auquel une trajectoire optimale peut se faire suivre au système.

Dans ce qui suit, l'intérêt se porte à la formulation de problèmes de contrôle optimal dans un cadre mathématique général, d'abord dans un environnement déterministe puis dans un autre stochastique (soumis à des perturbations aléatoires)[71].

Soit les notations :

- n est un entier positif ou nul ;
- $L, \sigma : (x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions de deux variables à valeurs réelles ;
- $c_T : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles.

D'abord, dans le cas déterministe, un système est spécifié par un état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ qui évolue selon la dynamique suivante :

$$\dot{x} = f(x(t), \alpha(t)). \quad (2.3)$$

Où f est une fonction donnée et $\alpha(t)$ est le contrôle.

Un problème de contrôle optimal consiste à minimiser la fonction de coût définie par :

$$J[\alpha(\cdot)] = \int_0^T L(x_s, \alpha_s) ds + c_T(x_T). \quad (2.4)$$

Un agent est supposé partir de la position x_0 à l'instant $t = 0$ et que son état évolue dans le temps par la formule (2.3). L'horizon $T > 0$ représente la durée sur laquelle l'agent optimise son coût instantané L , et la fonction c_T est le coût terminal. La minimisation se fait dans un certain espace des contrôles dits contrôles admissibles.

Dans le cas où le caractère aléatoire du problème est pris en compte, une dynamique stochastique est considérée telle que :

$$dX_t = f(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dW_t. \quad (2.5)$$

Où W_t est un mouvement brownien, et la volatilité σ peut dépendre de l'état et du contrôle à l'instant t . Le coût est alors défini comme une valeur moyenne sur le bruit, c'est-à-dire que le problème de minimisation s'écrit :

$$J[\alpha(\cdot)] = \mathbb{E} \left[\int_0^T L(X_s, \alpha_s)ds + c_T(X_T) \right]. \quad (2.6)$$

L'agent part toujours de x_0 à l'instant $t = 0$.

Il existe principalement deux méthodes pour aborder ce type de problème : l'une aboutit aux équations d'Euler tandis que l'autre à une équation aux dérivées partielles, dite d'Hamilton-Jacobi-Bellman. La première est basée sur les variations infinitésimales de la fonction de coût autour de la solution minimale, et donc, est une approche locale, tandis que la seconde passe par la résolution d'une famille de problèmes, au sein de laquelle le problème initial n'est qu'un élément particulier.

La suite se contente de présenter à titre d'exemple la seconde approche, dans le cas d'une dynamique stochastique de la forme (2.5).

Plus précisément, la fonction valeur $u(x_0, t_0)$ se définit comme le coût optimal pour un agent qui partirait de x_0 à l'instant t_0 :

$$u(x_0, t_0) = \inf_v [L(x_0, v) + u(x_0 + dX_{t_0}, t_0 + dt)]. \quad (2.7)$$

D'après le lemme d'Itô [23] :

$$\mathbb{E}[u(x_0 + dX_{t_0}, t_0 + dt)] = u(x_0, t_0) + \partial_t u(x_0, t_0)dt + v \nabla_x u(x_0, t_0)dt + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u(x_0, t_0)dt. \quad (2.8)$$

Ainsi, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman est obtenue en remplaçant dans l'équation (2.5), elle s'écrit comme suit :

$$\partial_t u + H(x, \nabla_x u) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = 0 \quad (2.9)$$

Pour plus de détails et d'explication sur la conception de cette équation, des auteurs ont fourni des développements rigoureux, tels que les travaux de Bensoussan et Lions [6].

Conclusion

La théorie des jeux à champ moyen met à son usage une large boîte à outils mathématiques. La lecture de documents et ouvrages dédié à ce type de jeux dynamiques nécessite le plus souvent de retourner à des notions basiques, étant donné que ces dernières attribuent à la formulation des jeux et leur résolution. Dans ce chapitre, les définitions les plus redondantes uniquement ont été rappelées dans la première section. Ensuite, les notions fondamentales du calcul différentiel ont été exposées dans la deuxième section, pour finir par une présentation de l'aspect de contrôle optimal dans la dernière section.

La Théorie des Jeux à Champ Moyen

Introduction

La théorie des jeux à Champ moyen (Mean Field Game Theory en Anglais) est une branche de la théorie des jeux qui se trouve dans l'intersection de cette dernière avec l'analyse stochastique et la théorie de contrôle.

L'objectif de cette théorie est de modéliser et d'analyser des situations d'interaction d'un très grand nombre de joueurs rationnels optimisant leurs décisions. Chaque joueur ayant très peu d'influence sur les stratégies utilisées par les autres, il interagit avec eux en basant ses choix sur la moyenne des comportement des autres joueurs.

Cette nouvelle théorie a été élaborée en 2006 par Jean-Michel Lasry et Pierre-Louis Lions, ainsi que les premiers développements (structures, concepts, définitions d'équilibres, théorèmes d'existence et d'unicité, relations avec l'équilibre de Nash à N joueurs, le cas où N tend vers l'infini)[54, 48, 49, 50, 36].

Plus tard, d'autres résultats ont été implémentés par Lions et Lasry en collaboration avec Olivier Guéant : Notions de stabilités des solutions, méthodes numériques spécifiques, et des développements en $1/N$ pour une meilleure approximation à des jeux à N joueurs.

Ces développements ont été présentés dans des cours successifs du " collège de France " [54] et des publications [29, 50, 36], tous comme la thèse de doctorat de Guéant [28].

Depuis 2008, plusieurs auteurs ont contribué, d'autres travaillent toujours sur de nouvelles applications et propriétés des jeux à champ moyen(MFG) [13, 14, 16, 15, 42].

Cette même théorie a été travaillée indépendamment par Huang, Malhane et Caines, en 2006 [13].

Deux approches ont été proposées pour étudier ces jeux, Hamilton-Jacobi-Bellman et Focker-Plank issue de la programmation dynamique en théorie de Contrôle, ainsi que les équations différentielles partielles (EDPs) et les équations différentielles stochastiques forward-backward (EDSFBs) de type McKean-Vlasov issues de l'analyse stochastique. Plus précisément, le travail consiste en l'analyse des systèmes d'équations obtenues en tendant le nombre de joueurs à l'infini dans un équilibre de Nash à N joueurs, afin d'en déduire des modèles d'équilibre pour des continus de joueurs. Les équations induites s'avèrent très générales, contiennent particulièrement d'autres équations classiques : équations elliptiques semi-linéaires, équations de type Hartree de la mécanique quantique, équations d'Euler de la mécanique des Fluides, équations de Vlasov ou Boltzmann (modèles cinétiques), équations du transport optimal de masse (problème de Monge-Kantorovich), Equations associées à des problèmes de contrôle optimal d'EDP (Euler-Lagrange)...[54].

Sur ce, les approches de modélisation de cette théorie mènent à des classes de modèles extrêmement vastes, et posent des questions d'analyse mathématique, qui, parfois, ne sont pas encore résolues.

Dans ce chapitre, sera présentée l'idée du champ moyen, les différents chemins qui ont mené à cette théorie, ainsi que la formulation de ce type de jeux, commençant par un modèle de jeu initiale " First Toy Model ", et passant par les formulations mathématiques générales qui l'ont suivi.

3.1 Pourquoi "champ moyen" ?

Afin d'illustrer l'idée du " champ moyen ", le meilleur exemple réel reste de penser à la pression atmosphérique dans une pièce où la totalité des particules d'air forment en contribution la pression à laquelle elles y sont soumises. Cette pression, ne pouvant être changée par l'agitation d'une seule particule, si une forte proportion d'entre elles choisissent d'aller dans la même direction, ceci va engendrer un courant d'air qui va exercer une influence potentielle sur toutes les autres particules [52].

De retour à la terminologie " champ moyen ", cette expression provient de la physique et de la mécanique, pas seulement par analogie, la théorie des jeux à champ moyen contient en effet, particulièrement les théories de champ moyen en physique ou mécanique, comme citées précédemment en introduction [54].

On s'intéresse ici, au cas où les joueurs n'ont plus de possibilités de choisir, alors ils sont soumis passivement aux interactions avec le reste des joueurs tels que des " particules " physiques ou des éléments de matière en mécanique.

Un autre exemple permettant de bien comprendre l'idée du champ moyen, est de considérer un modèle explicatif simplifié de l'apparition d'une aimantation dans les matériaux de nature " Ferromagnétiques ", semblables à des aimants usuels [71].

3.2 Trois chemins vers la théorie des jeux à champ moyen

Il existe trois chemins qui mènent vers la théorie des jeux à champ moyen [29]. Chaque chemin renvoie à un aspect particulier de cette théorie, en se complétant les uns les autres.

3.2.1 Premier chemin : Partant de la physique

Le point de départ de ce chemin est la physique des particules. Dans ce domaine de la physique, la théorie du champ moyen est une méthodologie efficace de gestion d'une variété de situations où il y a un très grand nombre de particules pour permettre de décrire une dynamique ou équilibre en modélisant les interactions inter-particules.

Dû au nombre énorme des interactions, le modèle détaillé est inefficace : illisible, inadapté au calcul, et à la simulation, en somme le modèle devient inutilisable. Cependant, dans plusieurs situations de ce genre, il est possible de construire une approximation à cette situation en introduisant un ou plusieurs " champs moyens " qui servent d'intermédiaires pour décrire les interactions inter-particules.

Dans ce type de modèle, la contribution de chaque particule à la création d'un champ moyen, ainsi que l'effet du champ moyen sur chaque particule, se décrivent en considérant chacune des particules infinitésimal, c'est-à-dire en effectuant une sorte de processus limite sur le nombre n de particules ($n \rightarrow \infty$).

La majorité des types d'interactions inter-particules reposent sur cette méthodologie : Les phénomènes statistiques émergent lorsque les interactions inter-particules sont suffisamment " faibles " ou " régulière ". La théorie des jeux à champ moyen permet une adaptation de cette méthodologie aux cas dans lequel les particules sont remplacées par des agents en interaction mutuelle dans des conditions socio-économiques et/ou des situations stratégiques. En principe, la différence qui

se présente, voire le défi est de prendre en considération, au-dessus de la capacité des agents à prendre des décisions, leur capacité d'interaction stratégique, autrement dit, la capacité de chaque agent à construire des stratégies tenant compte des choix de ses pairs qui à leurs tours, simultanément, élaborent leurs propres stratégies individuelles.

Cette première voie est incontestablement celle qui éclaire profondément les caractéristiques de fonctionnement de la théorie des jeux à champ moyen, tant que la méthodologie des champs moyens fonctionne convenablement en physique des particules et fournit des modèles exploitables a priori dans des situations complexes, elle offre de bonnes perspectives de transposition dans le monde des agents.

En outre, cet itinéraire est le plus exigeant, probablement le plus décourageant en termes de tentative initiale.

Cette théorie vise la proposition d'une nouvelle branche de la théorie des jeux pour des grands jeux en s'appuyant sur les équilibres de Nash, et sur la richesse en concepts introduits dans ce domaine au cours des cinq décennies passées. Le point important à souligner est de bien savoir différencier la théorie des jeux à champ moyen de l'éconophysique (qui parvient à donner aux économistes des modèles descriptifs seulement). La théorie des jeux à champ moyen propose d'utiliser les outils de la physique, précisément dans l'axiomatique économique classique pour garantir une explication du phénomène, non seulement une description. Donc la rationalité est assignée aux agents (qui ne peuvent être ni des particules de gaz, ni des robots appliquant des stratégies comportementales). Les choix stratégiques dans les modèles de théorie des jeux en champ moyen, tous comme en théorie des jeux en général sont endogènes.

3.2.2 Deuxième chemin : Partant de la théorie des jeux

Mathématiquement jugé, cette route est la plus tracée, car elle implique l'étude de la limite d'une grande classe de jeux à N joueurs lorsque N tend vers l'infini.

Le plus souvent, les jeux différentiels à N joueurs peuvent se résumer par un système d'EDP d'Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs, qui s'avère difficile à traiter.

Pour une large gamme de jeux symétriques, les choses se simplifient autant que les joueurs sont concernés, à mesure que leur nombre augmente. Effectivement, les joueurs ne peuvent plus mettre en oeuvre les stratégies complexes interindividuelles étant donné que chacun d'entre eux se perd dans la foule progressivement aux yeux des autres joueurs lorsque le nombre augmente.

Plus exactement, la classe qui se montre plus adaptée à ce genre de passage à la limite est celle des jeux à des joueurs interchangeables sans influencer le jeu (indépendance de l'individu). Ceci est une hypothèse appropriée pour la

modélisation des applications à un grand nombre d'agents. Afin d'atteindre la limite, cette hypothèse d'invariance par permutation est crucial mathématiquement.

S'approcher de la limite donne naissance à une situation où chaque joueur est devenu infinitésimal au coeur de la masse des autres joueurs, et construit ses stratégies selon son propre état et celui de la masse infinie de ses adverses, qui construisent simultanément de la même manière leurs stratégies respectives. C'est cet équilibre de chaque joueur parmi la masse des co-joueurs qui s'appelle l'approche du champ moyen.

Dans la littérature, les continuums de joueurs ne sont pas une nouveauté, Depuis le travail de Robert Aumann et ses fondements sur l'équilibre générale avec un nombre infini de joueurs dans son article [2]. En effet, la théorie des jeux à champ moyen n'a pu émerger que grâce à l'existence de la théorie des jeux à N joueurs longtemps depuis les travaux pionniers menés par Von Neumann et Morgenstern soixante ans en arrière [60] ainsi que les développements rajoutés par Nash [64], sans omettre les nombreuses applications nées sous l'aile de diverses branches d'économie. Ils ont été beaucoup utilisés, mais l'approche présentée dans ce travail diffère des études faites avant sa réalisation. La stratégie d'approximation qu'il utilise permet de contraindre les stratégies des joueurs et donc de réduire la dimension finie du jeu conduisant à un bruit (commun) pour le groupe de joueurs.

3.2.3 Troisième chemin : Partant de l'économie

En théorie d'équilibre économique général, les agents sont indifférents les uns les autres, ils se basent sur leurs intérêts ainsi que le prix du marché. Le seul cas où les agents s'intéressent à l'existence des autres est celui de l'hypothèse des attentes rationnelles. La théorie prend sa crédibilité du point de vue de l'hypothèse des attentes rationnelles lorsque chaque agent se mettant à la place des autres réussit à vérifier qu'il aura exactement le comportement prédit par la théorie. C'est la seule exigence qui retire l'agent d'équilibre général de son solipsisme. Autrement dit, dans la théorie d'équilibre général, les prix interviennent dans toutes les interactions sociales.

Malgré que dans de nombreux cas, d'autres effets existent et donnent lieu à d'autres interactions entre les agents, voire l'externalité et les biens publics. L'intégration de ces effets lorsqu'ils sont de nature statique, ce qui est commun, ramène à une définition de type " champ moyen " d'équilibre entre les agents. D'une manière équivalente, les problèmes d'économie industrielle dans lesquels les agents sont impliqués dans des systèmes complexes de signalisation, de barrière à l'entrée, de positionnement par rapport à la concurrence peuvent devenir

des équilibres de champ moyen quand la dimension des groupes d'agents augmente.

L'intérêt principal des économistes consiste en ces interactions entre les agents. Ils visent à comprendre la manière dont les prix se forment à travers des comportements rationnels, de même que les conséquences des effets externes. En outre, l'évolution d'une économie intéresse les économistes, ainsi ils ont investi beaucoup de temps dans les anticipations, et la façon dont les comportements, ou en particulier les prix se forment dans un contexte intertemporel.

En éconophysique, qui ne considère que les problèmes avancés sans anticipation, sauf peut-être heuristiquement (faisant disparaître la dimension arrière), ce domaine de l'économie devient clairement intraitable. Les jeux à champ moyen ont en fait une structure Forward/Backward (une équation directe et une équation à rebours), visiblement une autre différence entre la théorie des jeux à champ moyen et la théorie du champ moyen en éconophysique.

Au sein des modèles de théorie des jeux à champ moyen, la boîte à outils économique de la maximisation de l'utilité et des attentes rationnelles ne sert pas seulement à décrire, mais donne encore plus d'importance à expliquer le phénomène étudié.

De ce fait, la théorie des jeux à champ moyen ne représente pas un paradigme concurrent en sciences sociale évitant de considérer les progrès méthodologiques principaux atteints par les économistes au cours des décennies. Plutôt, elle apparaît comme un nouvel ustensile à l'usage et bénéfice des économistes.

3.3 Qu'est ce qu'un jeu à champ moyen ?

Un jeu à champ moyen est un jeu dynamique, symétrique à un très grand nombre de joueurs pouvant le supposer tendre vers l'infini. En général, les jeux sont étudiés à deux joueurs puis étendu par induction au cas de plusieurs joueurs. Lorsque le temps est continu avec des états continus (jeux différentiels/jeux différentiels stochastiques) cette méthode perd son utilisabilité due aux complexités générées par les interactions dynamiques.

En effet, chaque joueur agit selon son problème d'optimisation tenant compte des décisions prises par les autres joueurs, ses actions affectent l'ensemble de la population mais les interactions entre les joueurs restent négligeables, alors un joueurs représentatif est considéré afin de déduire des états dynamiques complexes.

3.3.1 Un modèle de jeu initial : Quelle heure la réunion commence-t-elle ? Un modèle initial simple

Dans cet exemple, il est supposé y avoir une population de N professeurs à l'université qui participent à une réunion devant commencer à l'heure t_0 (temps initial).

Néanmoins, une réunion programmée pour un certain temps ne démarre le plus souvent que quelques minutes après l'heure prévue. En effet, l'heure réelle T de début de la réunion dépend de la dynamique de l'arrivée de ses participants. Si une règle fixe le début de la réunion au moment où un certain quorum est atteint, cette règle établit un formulaire d'interactions stratégiques entre les agents. De là, une première approche de jeux à champ moyen pour cette situation sera construite.

Dans ce cas, étant donné que les uns sont connus pour leur retard, le comité d'organisation décide de ne commencer la réunion que lorsque une certaine proportion θ d'entre les participants se rassemble sur le lieu de la rencontre.

La réunion est envisagée avec un très grand nombre de participants, qui sont considérés comme un continuum d'agents. Ces agents sont rationnels et comprennent la situation. Plus précisément, toutes les données fournies concernant le problème sont des connaissances communes aux participants à la réunion.

Chacun d'entre eux, ayant ses préférences, ils ont une heure d'arrivée prévue t_i mais dû à des évènements qui ne peuvent être anticipés (conditions météorologiques, circulation ...etc.), ils arrivent à X_i (l'heure d'arrivée réelle de chaque participant i).

Chaque X_i est simplement la somme de l'horaires d'arrivée désirée par le professeur (t_i qui est complètement sous son contrôle), et le bruit aléatoire.

$$X_i = t_i + \sigma_i \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, N}$$

- $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une suite de bruits normaux i.i.d (indépendants, identiquement distribués) de variance 1.

$\varepsilon_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ spécifique à l'agent i (hypothèse du bruit idiosyncratique¹). Plus exactement, t_i est une variable contrôlée par l'agent i et le produit $\sigma_i \varepsilon_i$ est une incertitude à laquelle l'agent est soumis. Ces incertitudes et leurs intensités diffèrent dans la population des agents. Etant donné que certains agents font un long chemin pour venir participer à la réunion, d'autres sont plus proches.

1. Cette hypothèse d'indépendance permet la simplification des équations pour déterminer un équilibre.

- $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq N}$ est aussi une suite iid de distribution à noter m_0 .

Dans ce modèle de jeu initial (Toy Model), Lions et al.[29], dans le but de la simplification ont supposé que le coût global à optimiser par l'agent pour décider de son heure d'arrivée prévue t_i est composé de trois composantes :

- Le coût de retard relié au temps initial programmé t_0 (l'effet de la réputation)

$$C_1(t_0, T, X_t) = \alpha[X_t - t_0]_+^2$$

- Le coût de retard relié à l'heure réelle de début de la réunion T

$$C_2(t_0, T, X_t) = \beta[X_t - T]_+$$

- Le coût de temps d'attente correspondant au temps perdu pour atteindre l'heure T

$$C_3(t_0, T, X_t) = \gamma[T - X_t]_+$$

avec :

- t_0 : heure initiale programmée pour le début de la réunion.
- X_t : heure d'arrivée réelle.
- T heure réelle de début de la réunion.
- α, β, γ des paramètres positifs.

D'ici, le coût global noté $C(t_0, T, X_t)$ est la somme des trois coûts et est une fonction convexe de X_t .

Remarque 4. Ce modèle a été conçu par ses auteurs simplement sans supposer différentes fonctions selon l'agent pour les trois coûts dans le but de pouvoir expliquer la méthodologie.

Le coût global attendu par chaque agent s'écrit donc :

$$C(t_0, T, X_t) = \alpha[X_t - t_0]_+ + \beta[X_t - T]_+ + \gamma[T - X_t]_+ \quad (3.1)$$

3.3.2 Résolution du modèle

Dans ce modèle[29] les agents font face à un problème d'optimisation dans lequel chaque agent minimise son coût total attendu. L'équilibre de Nash de jeux à champ moyen (MFG-Nash) sera obtenu en présupposant que chaque agent considère T connu, avec des attentes rationnelles.

2. $[X_t - t_0]_+ = \max\{X_t - t_0, 0\}$

T est considéré déterministe à partir de là tel qu'impliqué par la " Loi des Grands Nombres³ ", vue que le nombre de joueurs est infini.

Pour l'agent i le problème est alors :

$$t_i = \arg \min \mathbb{E}[c(t_0, T, X_i)], \quad X_i = t_i + \sigma_i \varepsilon_i. \quad (3.2)$$

Le champ moyen dans ce cas est T car T résume exhaustivement pour chaque joueur le comportement des autres joueurs.

Dans ce qui suit, pour prouver l'existence d'un point fixe T le travail consiste à montrer que les comportements d'optimisation individuels génèrent complètement la réalisation de ce même temps T supposé connu au départ, en tirant profit de quelques propositions [29], commençant par une condition de premier ordre, les choix individuels des agents seront examinés de plus près pour montrer qu'un tel équilibre existe.

Proposition 5 (Condition de premier ordre). [29] Le t_i optimal d'un agent ayant un σ égale à σ_i est implicitement définie par

$$\alpha \mathcal{N}\left(\frac{t_i - t_0}{\sigma_i}\right) + (\beta + \gamma) \mathcal{N}\left(\frac{t_i - T}{\sigma_i}\right) = \gamma.$$

Où \mathcal{N} est la fonction distribution cumulative associée à une distribution normale.

Preuve. L'expression à minimiser est :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\alpha[X_i - t_0]_+ + \beta[X_i - T]_+ + \gamma[T - X_i]_+\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\alpha[X_i - t_0]_+ + (\beta + \gamma)[X_i - T]_+ - \gamma(X_i - T)\right] \\ &= \alpha \mathbb{E}\left([t_i - t_0 + \sigma_i \varepsilon_i]_+\right) + (\beta + \gamma) \mathbb{E}\left([t_i - T + \sigma_i \varepsilon_i]_+\right) - \gamma(t_i - T). \end{aligned}$$

Sur ce, la condition de premier ordre est donnée par :

$$\alpha \mathbb{P}(t_i - t_0 + \sigma_i \varepsilon_i > 0) + (\beta + \gamma) \mathbb{P}(t_i - T + \sigma_i \varepsilon_i > 0) = \gamma.$$

$$\alpha \mathcal{N}\left(\frac{t_i - t_0}{\sigma_i}\right) + (\beta + \gamma) \mathcal{N}\left(\frac{t_i - T}{\sigma_i}\right) = \gamma.$$

3. Voir définition dans le Chapitre 2

L'existence et l'unicité de t_i peuvent être déduites facilement depuis que \mathcal{N} est une fonction de distribution cumulative strictement monotone, et les trois paramètres α, β, γ sont positifs.

D'abord la distribution m_0 de σ_i est considéré dans le continuum, en vertu de ce dernier et par la loi des grands nombres, la distribution est transportée par l'application $\sigma_i \mapsto X_i$. Ainsi viendra la déduction de la dynamique d'arrivée des agents de la caractérisation de t_i (une fonction de (t_0, T, σ_i)).

Il est naturel d'établir une règle sur l'heure réelle de début de la réunion T dépendante de la fonction de distribution cumulative des heures d'arrivée réelles des agents noté F (déterministe) comme dans l'exemple du quorum où la réunion ne commence qu'après l'heure programmé et l'arrivée d'une proportion θ des participants.

Dans le but de prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe, le schéma suivant est présenté[29] en commençant par une valeur T .

$$T^{**} : T \mapsto (t_i(\cdot, T))_i \mapsto (X_i(\cdot, T))_i \mapsto F = F(\cdot, T) \mapsto T^*(F)$$

Par la règle de l'heure de début de la réunion $T^*(F)$ (le quorum), le T se déduit de la distribution cumulative déterministe F selon laquelle sont distribuées (à partir de l'hypothèse d'indépendance des incertitudes des agents et la loi des grands nombres) les heures d'arrivée réelles de chaque personne $(X_i(\cdot, T))_i$ obtenues après affectation des stratégies optimales des agents par un bruit (les stratégies optimales sont les heures d'arrivée prévues).

Le résultat obtenu figure dans cette proposition :

Proposition 6 (T équilibre). [29] Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et si $0 \notin \overline{\text{supp}(m_0)}$ (0 n'appartient pas au support de m_0) alors T^{**} est une application contractante de $[t, +\infty[$ et il existe une solution unique T pour le problème (3.2).

D'après la preuve de cette proposition [29], les propriétés suivantes sont vérifiées :

Propriétés. – $\forall F(\cdot), \quad T^*(F(\cdot)) \geq t_0$: la réunion ne commence jamais avant l'heure initial t_0

– **Monotonie** : soit $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ deux fonctions de distributions cumulatives

$$F(\cdot) \leq G(\cdot) \rightarrow T^*(F(\cdot)) \geq T^*(G(\cdot)).$$

– **Sous-additivité** : $\forall s > 0, \quad T^*(F(\cdot - s)) - T^*(F(\cdot)) \leq s$.

Dans le cas général, le coût social de chaque agent dépend de la proportion de participants arrivés avant lui, donc ce coût dépend de la fonction de distribution cumulative des heures d'arrivées réelles F sachant que les interactions stratégiques

ne sont pas réduites à l'heure réelle de début de la réunion. Sur ce, chaque participant prend sa décision selon F et se sont ces décisions qui construisent F qui n'est autre que le champ moyen.

3.3.3 Variantes du modèle initial

Ce modèle de jeu initial (Toy Model) est susceptible à être enrichie ce qui explique l'existence de variantes telles que :

- Considération d'une autre perturbation partagé au-dessus de la perturbation idiosyncratique ; dans une telle variante l'importance réside dans la dynamique de la population qui est stochastique, mais dû à la longueur des développements, cette variante ne pourra être présentée dans ce travail.
- Une variante présenté par Guéant et al. [29] est le modèle dit " Géographique" où l'emplacement des agents à l'état initial est différemment distribué, tout en ayant à se rendre au lieu de la tenue de la réunion.

Le but du choix de cette variante est la possibilité de montrer l'émergence des EDPs couplées avant et arrière (Forward/Bachward coupled PDEs) qui sont le noyau de la théorie des jeux à champ moyen en temps continu et dans un espace d'état continu.

- Par la suite, une approche probabiliste de ce modèle de jeu initial sera présenté selon le travail de Carmona et Delaru [15] où la source des interactions entre les agents est le fait que le choix de l'heure réelle de début de la réunion est une fonction de la distribution empiriques des heures d'arrivées.

Modèle géographique

La variante présenté par Lions et al. [29] suppose que les agents doivent se rendre à la réunion tenue à l'instant 0 tandis qu'ils se répartissent sur la demi-droite négative selon la fonction distribution m_0 avec un support compact et tel que $m_0 = 0$.

Le processus de déplacement d'un agent i vers la réunion à l'instant 0 est décrit par $dY_t^i = a_t^i dt + \sigma dw_t^i$ où la volatilité σ est la même pour tout le monde, a est la dérive (rendement) contrôlée en échange d'un coût quadratique $\frac{1}{2}a^2$.

Chaque agent fait face à un problème d'optimisation du genre :

$$\min_{a(\cdot)} \mathbb{E} \left[c(t_0, T, X_i) + \frac{1}{2} \int_0^{X_i} a^2(t) dt \right].$$

Avec la condition initiale $Y_0^i = y_0$ de début de déplacement de l'agent suivant le processus $dY_t^i = a_t^i dt + \sigma dw_t^i$.

$X_i = \min\{s/Y_s^i = 0\}$ est le temps pour atteindre 0.

La recherche d'un équilibre de Nash pour un jeu à champ moyen commence par un T donné ce qui donne à chaque agent un problème de contrôle stochastique. Alors, l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ⁴

$$\begin{aligned} \partial_t u + \min_a (a \partial_y u + \frac{1}{2} a^2) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy}^2 u &= 0. \\ \Leftrightarrow \partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_y u)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy}^2 u &= 0. \quad (HJB) \end{aligned}$$

Tous comme dans la présentation précédente, le coût total de l'arrivée à la réunion c est de la même forme avec une imposition de la non linéarité par morceaux et deux fois continument différentiable, le T étant déterministe, la condition à la limite sera comme suit :

$$\forall t, \quad u(t, 0) = c(t_0, T, t).$$

L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman indique le comportement optimal des agents à un T fixé et donne une fonction de Bellman u similaire pour tous les agents ayant les mêmes critères de coût malgré leurs points de départ distincts au moment initial. Comme dans la majorité des problèmes d'optimisation stochastiques, la solution à obtenir est markovienne et la dérive optimale u qui est la stratégie dépend uniquement du lieu y et l'heure s .

$$a(s, y) = -\partial_y u(s, y).$$

Les agents possèdent la même information, frais de transport et critères, ce qui donne une simplification de l'expression du problème. Particulièrement, les agents conduit par des facteurs inconnus au point y au moment s adoptent naturellement la même stratégie, ainsi la dérive ne dépend pas de l'agent concerné.

L'équation de Kolmogorov suivante décrit la dynamique de la distribution

4. Dans ce texte, il est souvent considéré que la solution de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman est une solution du problème d'optimisation. En général, si aucun résultat de vérification pour les solutions de l'équation différentielle partielle des jeux à champ moyen n'est fourni, il faut remarquer que vérifier (u, m) fournit bien une solution u du problème d'optimisation avec m fixe. Par conséquent, il ne devrait pas y avoir des outils de vérification spécifiques pour les jeux à champ moyen.

m des agents donnée par la loi des grands nombres, elle correspond à la distribution des joueurs qui ne sont pas encore arrivées au lieu de réunion, elle enregistre une perte de masse à mesure de l'arrivée progressive des agents.

$$\partial_t m + \partial_y((- \partial_y u)m) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy}^2 m. \quad (Kolmogorov)$$

La recherche de la solution est conditionnée par la condition de la coupe lisse $m(., 0) = 0$, $m(0, .) = m_0(.)$ fixé.

La fonction de distribution cumulative F des heures d'arrivées se définit par :

$$F(s) = - \int_0^s \partial_y m(v, 0) dv.$$

En supposant le domaine auquel le modèle est restreint $[0, T_{max}] \times [-T_{max}, 0]$ (dû à la modélisation par la dynamique de la diffusion brownienne) et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(T_{max}, .) &= c(t_0, T, T_{max}). \\ u(., -Y_{max}) &= c(t_0, T, T_{max}). \\ m(., -Y_{max}) &= 0. \end{aligned}$$

et le flux d'agents atteignant le lieu de rencontre à 0 est :

$$s \mapsto \partial_y m(s, 0).$$

Dans ce modèle il est imposé que $T \in [t_0, T_{max}]$ malgré qu'elle est fixée par la règle du quorum ($\theta = 90\%$) . Autrement dit :

$$T = \begin{cases} t_0 & \text{si } F^{-1}(\theta) \leq t_0 \\ T_{max} & \text{si } F(T_{max}) \leq \theta \\ F^{-1}(\theta) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'existence d'un équilibre pour l'heure de début de la réunion sera montrée par un théorème de point fixe qui prouvera l'existence d'un temps cohérent T aux expectations rationnelles des agents en commençant par un T donnée par l'arrivée d'une proportion θ des agents et puis déduire u . Le flux d'arrivée m se déduit de l'équation de Kolmogorov commençant par l'introduction de quelques hypothèses :

$$T \mapsto c(t_0, T, t) \quad \text{est une fonction continue.}$$

$t \mapsto c(t_0, T, t)$ est une fonction de \mathcal{C}^2 .

$$m_0(0) = m_0(-Y_{max}) = 0, \quad \text{de plus } |m'_0(0)| > 0 \quad \text{et } |m'_0(-Y_{max})| > 0$$

Et un schéma prouvé continu [29] de $[t_0, T_{max}]$ à $[t_0, T_{max}]$ tel que :

$$T \mapsto c(t_0, T, \cdot) \in \mathcal{C}^2 \mapsto u \in \mathcal{C}^2 \mapsto \partial_y u \in \mathcal{C}^1 \mapsto m \in \mathcal{C}^1 \mapsto -\partial_y m(\cdot, 0) \in \mathcal{C}^0(\mapsto F) \mapsto T.$$

La solution u et le contrôle $-\partial_y u$ s'obtiennent à partir de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman, et en appliquant le principe de Hopf⁵ se déduit également la solution m de l'équation de Kolmogorov. Avec u fonction de \mathcal{C}^2 et $a = -\partial_y u$ une fonction Lipchitz. D'où l'adaptation d'un lemme qui donne une borne inférieure au flux arrivant à la réunion.

Lemme 1. [29]

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall T \in [t_0, T_{max}]; \quad \inf |\partial_y m(\cdot, 0)| \geq \epsilon$$

Soit $\Psi : -\partial_y m(\cdot, 0) \in \mathcal{C}^0 \mapsto T$ définit dans le schéma précédent en utilisant la règle du quorum.

Le lemme suivant prouvera la continuité de Ψ lorsque $-\partial_y m(\cdot, 0)$ est inférieurement borné par ϵ positif.

Lemme 2. [29] Ψ est une fonction lipchitzienne sur $\mathcal{C}^0([0, T_{max}], \mathbb{R}_+^*)$

Maintenant que le schéma est continu, l'existence d'un équilibre T peut s'obtenir de la proposition suivante :

Proposition 7 (Existence). [29] Le schéma qui définit le T réelle comme une fonction du T anticipée est continue et a au moins un point fixe. Par conséquent, il y a au moins un seul équilibre T .

Dans cette variante qui fait bon exemple au sein de la théorie des jeux à champ moyen, l'hypothèse de l'espérance rationnelle est source de la cohérence entre le m anticipé et le m réel. L'information pertinente est capturé par T qui est en fonction de m (anticipation de T nécessite l'anticipation de m). L'équation HJB décrit le raisonnement à rebours (backward), tandis que les actions individuelles sont insérées dans l'équation directe (forward) de Kolmogorov (les agents cherchent à connaître la dynamique réelle de la communauté impliquée par le comportement individuel).

5. Le principe de Hopf est une généralisation du principe du maximum, il montre qu'une fonction satisfaisant une inéquation aux dérivées partielles du second ordre d'un certain type sur un domaine de \mathbb{R}^n et qui atteint son maximum à l'intérieur du domaine est nécessairement constante.

Approche Probabiliste

Toujours dans le même concept précédent des N professeurs participant à une réunion qui devrait se tenir à l'heure initiale t_0 , ils viennent de diverses locations tout en considérant un cas de symétrie où chacun partage les mêmes caractéristiques que les autres (distance, vitesse, temps relatif...). Néanmoins, certains ont une réputation de retardataires, ce qui amène les organisateurs à décider de ne commencer qu'en ayant un pourcentage arrivées. Ainsi chaque participant prévoit son heure d'arrivée t_i mais ne réussit à rejoindre le lieu qu'à X_i (dû à des événements indésirables). Les heures d'arrivées anticipées et réelles sont définies similairement que dans les sections qui précèdent.

Dans cette variante[15], l'heure réelle de début de la réunion T est une fonction de la distribution empirique $\bar{\mu}_X^N$ ⁶ des heures d'arrivées réelles $X = (X_1, \dots, X_N)$.

Le jeu " quand la réunion commence-t-elle? " se reformule donc comme suit :

- $P = \{1, 2, \dots, N\}$. ensemble de joueurs (N professeurs).
- $A_i = [0, E]$ les joueurs peuvent choisir un temps positif t_i , avec 0 représente une notion de début qui peut être prise comme le début de la journée et E sa fin, ou bien la fin de l'évènement.

$$\mathcal{A} = A_1 \times \dots \times A_N = [0, E]^N$$

- $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ Ensemble des mesures de probabilité sur \mathcal{A} (le caractère aléatoire du comportement des joueurs attribué par la nature).
- $J_i(t_i, \tau(\bar{\mu}_{X_{-i}}^{N-1}))$ est la fonction d'utilité qui s'écrit comme le coût global attendu du professeur i définie de la même manière que dans le modèle initiale (3.1)

$$J_i(t_1, \dots, t_N) = \mathbb{E} \left[A[X_i - t_0]_+ + B[X_i - T]_+ + C[T - X_i]_+ \right] \quad (3.3)$$

A, B , et C des constantes positives.

Tel que mentionné auparavant, les interactions dans ce modèle se produisent selon la fonction de distribution empirique $T = \tau(\bar{\mu}_X^N)$ entre les agents qui minimisent leurs coûts tenant compte des décisions prises par les autres agents. Plus d'explications sur l'utilisation de cette fonction sont fournies dans le travail [15].

6. Voir définition dans le Chapitre 2

En utilisant l'ensemble des notions et théorèmes présentés par Carmona et al.[15] dans le but de prouver la convergence par la loi des grands nombres de la fonction de distribution empirique vers une distribution μ , ils s'appêtent à résoudre ce modèle de jeu initial (Toy model) " quand la réunion commence-t-elle ? "

Le nombre de participants qui tend vers l'infini, des simplifications s'imposent :

- $J_1 = \dots = J_N = J$
- $X_1 = \dots = X_N = X$
- $t_1 = \dots = t_N = t$
- $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq N} \rightsquigarrow \epsilon \sim N(0, 1)$
- $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq N} \rightsquigarrow \sigma \sim v$

En effet, le problème est reformulé par les auteurs dans un sens de présence d'un agent représentatif suite à la loi des grands nombres et à la symétrie du modèle qu'ils décrivent.

Soit $X = t + Z$ où $Z = \sigma\epsilon$.

L'incertitude du modèle est générée par l'hypothèse du bruit idiosyncratique, et depuis l'indépendance du produit $\sigma_i\epsilon_i$ ce qui donne la distribution F suivante :

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[\sigma\epsilon \leq z]$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{z}{\kappa}\right)v(d\kappa). \quad (3.4)$$

La distribution empirique $\bar{\mu}_X^N$ approche la distribution μ , d'ailleurs $T = \tau(\bar{\mu}_X^N)$ approche aussi $T^* = \tau(\mu)$.

De ce fait, la fonction de meilleure réponse de l'agent représentatif composée est la solution du problème de minimisation

$$\inf_{t \in A} J(t, T^*).$$

Proposition 8. Si A, B, C , des constantes positives et $X = t + \sigma\epsilon$ avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\sigma \sim v$ des v.a indépendantes, alors il existe un unique \hat{t} qui minimise (3.3) qui peut être identifié comme l'unique solution t de l'équation implicite :

$$AF(t - t_0) + (B + C)F(t - T^*) = C. \quad (3.5)$$

Où F est la fonction de distribution cumulative associée à la variable $Z = \sigma\epsilon$, avec $T^* = \tau(\mu)$ fixé.

La recherche de l'équilibre de Nash dans ce modèle se base sur l'utilisation du théorème du point fixe de Banach, en définissant un opérateur avec prudence car l'heure de début de la réunion est en fonction du temps d'arrivée $T^* = \tau(\mu)$ à la limite.

Théorème 5. [15] Supposons que la fonction $\tau : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall \mu \in \mathcal{P}(A), \quad \tau(\mu) \geq t_0$ autrement dit, la réunion ne commence jamais avant t_0 .
2. *Monotonie* : si $\mu, \mu' \in \mathcal{P}(A)$ et si $\mu([0, t]) \leq \mu'([0, t])$ pour tout $t \geq 0$, alors $\tau(\mu) \geq \tau(\mu')$.
3. *Sous-additivité* : si $\mu \in \mathcal{P}(A)$ alors pour tout $t \geq 0$, $\tau(\mu(\cdot - t)) \leq \tau(\mu) + t$.

3.3.4 Equilibre de champ moyen comme limite de l'équilibre de Nash à N joueurs

De retour au modèle simple précédent sous l'hypothèse du continuum en considérant le jeu à N joueurs, et pour simplifications, le cas particulier de la proportion θ pour le début de la réunion est préservé, tout en gardant $T \in [t_0, T_{max}]$ et en supposant que tous les agents ont le même σ .

Guéant, Lasry et Lions [29] misent sur l'ouverture d'une voie d'approximation d'un jeu à N joueurs par jeux à champ moyen en affirmant les points suivants (dans le cas symétrique) :

- Existence d'un équilibre de Nash pour le jeu à N joueurs.
- Unicité de cet équilibre.
- Lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini, l'équilibre de Nash à N joueurs (EN) tend vers un équilibre de jeu à champ moyen.

Dans cet exemple d'approximation d'un jeu à N joueurs, le travail se réalise par une expansion de premier ordre⁷ " $G_0 + \frac{1}{N}G_1$ " (G_0 champ moyen, G_1 coefficient de correction d'ordre 1), ce qui donne naissance à un nouveau concept de solution d'équilibre de jeux à N joueurs où l'insouciance individuelle des agents envers leurs adverses règnent.

En effet, les agents s'intéressent uniquement à la dynamique de la population, et la présence du nombre de joueurs N vise à compter " la granularité " du jeu et l'imperfection de l'hypothèse du continuum seulement.

La recherche de la solution des jeux à N joueurs dans ce cadre commence par considérer que $N = 10k/(k = 1, 2, 3, \dots)$ et la réunion débute à l'arrivée du $9k^{\text{ème}}$ joueur. Une équation de Nash symétrique doit être vérifiée par une heure d'arrivée t^* visé par un joueur précis (soit le joueur 1).

$$t^* = \arg \min_{t_1} \mathbb{E} \left[c(t^1 + \sigma\epsilon_1, t^* + \sigma\epsilon_2, t^* + \sigma\epsilon_N) \right].$$

7. Il s'agit d'une expansion de Taylor, autrement dit un développement limité en séries de Taylor.

Ici, la fonction c dépend réellement juste des deux statistiques d'ordre $t^* + \sigma\epsilon_{(9k-1)}$ et $t^* + \sigma\epsilon_{(9k)}$. Ainsi l'EN se caractérise :

$$t^* = \arg \min_{t_1} \mathbb{E} \left[G(t_1 + \sigma\epsilon_1, t^* + \sigma y, t^* + \sigma z) \right].$$

Où les statistiques d'ordre (y, z) correspondent respectivement aux $(9k-1)^{\text{ème}}$ et $9k^{\text{ème}}$ éléments de $\{\epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$ et sont indépendantes de ϵ_1 .
Suivant le modèle initial, G sera défini par :

$$\forall a, \forall b, \forall c \geq b \quad G(a, b, c) = G(a, t_0 \vee b \wedge T_{max}, t_0 \vee c \wedge T_{max})$$

$$\forall b \leq c \in [t_0, T_{max}], \quad G(a, b, c) = \begin{cases} -\gamma(a-b) & a \leq t \\ -\gamma(a-b) + \alpha(a-t_0) & a \in (t_0, b] \\ \alpha(a-t_0) & a \in (b, c] \\ \alpha(a-t_0) + \beta(a-c) & a > c \end{cases}$$

Lemme 3. [29] $\forall b, \forall c \geq b, a \mapsto G(a, b, c)$ est continue, linéaire par morceaux et convexe.

Pour des fins d'optimisation, il est nécessaire de définir une fonction pratique H (le Hamiltonien) :

$$H : (t_1, b, c) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_1 + \sigma x, b, c) \mathcal{N}'(x) dx.$$

\mathcal{N} étant toujours la fonction distribution cumulative d'une variable normale de variance 1.

Lemme 4. [29] $\forall b \leq c, H$ est une fonction strictement convexe de t_1 qui est d'abord décroissante puis croissante. De plus, des dérivées peuvent être calculées.

$$\partial_1 H(t_1, b, c) = \left[-\gamma \mathcal{N}\left(\frac{b-t_1}{\sigma}\right) + \alpha \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{t_0-t_1}{\sigma}\right)\right) + \beta \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{c-t_1}{\sigma}\right)\right) \right]$$

$$\partial_{11}^2 H(t_1, b, c) = \frac{1}{\sigma} \left[\gamma \mathcal{N}'\left(\frac{b-t_1}{\sigma}\right) + \alpha \mathcal{N}'\left(\frac{t_0-t_1}{\sigma}\right) + \beta \mathcal{N}'\left(\frac{c-t_1}{\sigma}\right) \right].$$

$$\partial_{12}^2 H(t_1, b, c) = -\frac{1}{\sigma} \gamma \mathcal{N}'\left(\frac{b-t_1}{\sigma}\right).$$

$$\partial_{13}^3 H(t_1, b, c) = -\frac{1}{\sigma} \alpha \mathcal{N}'\left(\frac{c - t_1}{\sigma}\right).$$

Maintenant viendra le tour de réécrire la condition pour trouver un EN symétrique en utilisant la fonction H :

$$t^* = \arg \min_{t_1} \mathbb{E} \left[H(t_1, t^* + \sigma y, t^* + \sigma z) \right].$$

Afin d'assurer une meilleure compréhension de la fonction $\partial_1 H$ il a été question d'introduire un lemme qui garantira la compacité du problème par la suite :

Lemme 5. [29] $\mathbf{B} = \{t_1 | \exists b \leq c, \partial_1 H(t_1, b, c) = 0\}$ est un ensemble borné.

Remarque 5. L'ensemble \mathbf{B} introduit par ce lemme correspond à l'ensemble des points en lesquels H atteint son minimum pour tous les couples (b, c) possibles, $b \leq c$.

La recherche d'un équilibre de Nash signifie la recherche d'un point fixe de la fonction de meilleure réponse de l'agent représentateur choisi qui se définit tel que :

Définition 46 (Fonction de meilleure réponse). [29]

$$R(t^*) = \arg \min_{t_1} \mathbb{E} \left[H(t_1, t^* + \sigma y, t^* + \sigma z) \right].$$

est la fonction de meilleure réponse de l'agent 1. Qui peut aussi s'écrire implicitement avec la condition de premier ordre 3.6

$$\mathbb{E} \left[\partial_1 H(R(t^*), t^* + \sigma y, t^* + \sigma z) \right]. \quad (3.6)$$

Lemme 6.

$$\forall t^*, \quad \inf \mathbf{B} \leq R(t^*) \leq \sup \mathbf{B}.$$

En vertu du lemme précédent, et dû au fait que l'EN est un point fixe de la fonction de meilleure réponse R , cette dernière peut se restreindre à l'ensemble $\mathbb{K} = [\inf \mathbf{B}, \sup \mathbf{B}]$. Alors n'importe quel équilibre de Nash symétrique doit être un point fixe de $R|_{\mathbb{K}} : t^* \in \mathbb{K} \mapsto R(t^*)$ qui est une application contractante de \mathbb{K} à \mathbb{K} .

Proposition 9 (Existence et unicité). [29] Il existe un unique équilibre de Nash symétrique pour les jeux à N joueurs.

Remarque 6. Ce résultat d'existence et d'unicité reste vrai pour tout N et θ donnés.

Lorsque un modèle de jeux à champ moyen est considéré pour effectuer la résolution d'un jeu à N joueurs l'ordre de grandeur de l'erreur survenue doit être connu, pour commencer, il faut rappeler que le cas du jeu à champ moyen présente des individus ayant le même σ (l'équilibre est une mesure de Dirac). Cet équilibre sera noté dans ce qui se suit t_{MFG}^* .

Soit à noter aussi que l'heure de début de la réunion s'écrit $t_{MFG}^* + \sigma F^{-1}(\theta)$ avec F fonction de distribution cumulative d'une distribution normale.

L'équilibre de jeux à champ moyen sera donc défini :

$$\partial_1 H(t_{MFG}^*, t_{MFG}^* + \sigma F^{-1}(\theta), t_{MFG}^* + \sigma F^{-1}(\theta)).$$

Après l'introduction de la fonction $J(t, y, z) = \partial_1 H(t, t + \sigma y, t + \sigma z)$ et la réalisation d'une expansion de Taylor [29], une étude détaillée des propriétés des statistiques d'ordre [63] (les variables y et z) montre que la convergence de t_N^* vers t_{MFG}^* se produit en $\frac{1}{N}$ et induit les constantes suivantes :

$$\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} NE(y - F^{-1}(\theta)) \in \mathbb{R}.$$

$$\zeta = \lim_{N \rightarrow \infty} NE(z - F^{-1}(\theta)) \in \mathbb{R}.$$

$$v = \lim_{N \rightarrow \infty} NE(y - F^{-1}(\theta))^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} NE(z - F^{-1}(\theta))^2 \in \mathbb{R}.$$

Qui ont permis d'écrire :

$$t_N^* = t_{MFG}^* - \frac{1}{N} \frac{1}{\partial_1 J} \left[\xi \partial_2 J + \zeta \partial_3 J + \frac{v^2}{2} (\partial_{22} J + \partial_{33} J + 2\partial_{23} J) \right] + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ce qui veut dire que le cadre des jeux à champ moyen (MFG) est une approximation d'un jeu à N joueurs lorsque N est très grand.

3.4 Formulation générale des jeux à champ moyen

3.4.1 Cas stationnaire

Dans cette partie, une classe générale des jeux à N joueurs de dynamique stochastique à temps continue (problèmes ergodiques) sera introduite. Selon les travaux de Lions et Lasry [48, 49, 50], et les notes de cours élaborées par Cardaliaguet [14], des résultats d'existence et d'unicité d'équilibre de Nash ont été

présentés en premier lieu, et la limite est dérivé rigoureusement à chaque fois que le nombre de joueurs N tend vers l'infini.

Ce qui mènera à l'introduction d'un système de jeux à champ moyen du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta v + H(x, \Delta v) + \lambda = V[m] \quad \in Q, \quad \int_Q v dx = 0, \\ -\nu\Delta m - \operatorname{div}\left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \Delta v)m\right) = 0 \in Q, \quad m > 0 \in Q, \quad \int_Q m dx = 1. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathcal{C}^2, \quad m \in W^{1,p}(\forall p < +\infty).$$

Ici, toutes les fonctions considérées sont périodiques sur $Q = [0, 1]^d$, $d \geq 1$, $\nu > 0$, $H(x, p)$ est un Hamiltonien convexe. V est un opérateur défini sur l'ensemble des mesures de probabilité \mathcal{P} sur Q et est soumis à des conditions [48]. Dans ce travail, le système précédent a été réduit à une équation Hartree de mécanique quantique en considérant le cas où $H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2$.

Le cadre mathématique élémentaire considère N joueurs ($N \geq 1$) dont la dynamique est donnée par :

$$dX_t^i = \sigma^i dW_t^i - \alpha^i dt, \quad X_0^i = x^i \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.8)$$

Soit $X_t^i \in T^d$ et toutes les fonctions données sont périodiques en x^i , $\forall i$.

Par but de simplification le coût s'écrit de la forme :

$$J^i(\alpha^1, \dots, \alpha^N) = \liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T L^i(X_t^i, \alpha_t^i) + F^i(X_t^i, \dots, X_t^N) dt \right]. \quad (3.9)$$

L'existence de l'équilibre de Nash peut s'obtenir sous des conditions générales sur les données, à titre d'exemple [48] les Hamiltoniens H^i , $\forall i$ vérifient :

$$\exists \Theta \in]0, 1[, \quad \inf_x \left(\frac{\partial H^i}{\partial x} \cdot p + \frac{\Theta}{d\nu^i} (H^i)^2 \right) > 0 \quad \text{pour } |p| \text{ grand} \quad (3.10)$$

Le passage à la limite requière de supposer que les joueurs sont indistinguables, particulièrement $v^i = v$ et $H^i = H$, $\forall i$. Le critère F^i ne dépend que de x^i et de densité empirique des autres joueurs $\left(\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{x^j}\right)$

$$F^i(x^1, \dots, x^N) = V \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{x^j} \right] (x^i).$$

Avec $V[m_n]$ converge uniformément vers $V[m]$ sur Q si m_n converge faiblement vers m dans \mathcal{P} .

Les solutions du système (3.7) ne sont généralement pas uniques, sauf que les simplifications qui se produisent lorsque N est infini (symétrie des équilibres) donnent lieu à des situations où les solutions sont uniques.

Théorème 6. [48] *Si V est strictement monotone (dans \mathcal{L}^2) i.e si V vérifie*

$$\int_Q (V[m_1] - V[m_2])(m_1 - m_2) dx \leq 0 \Rightarrow V[m_1] \equiv V[m_2]. \quad (3.11)$$

Alors il y a unicité des solutions du système (3.7).

3.4.2 Cas d'un horizon fini

Dans la réalité, des problèmes plus délicat apparaissent, en horizon fini ($T \in]0, +\infty[$) et le système se réécrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + H(x, \Delta v) = V[m] \quad \in Q \times [0, T], \quad v|_{t=0} = v_0[m(0)] \text{ sur } Q, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \nu \Delta m + \operatorname{div} \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \Delta v) m \right) = 0 \in Q \times [0, T], \quad m|_{t=T} = m_0 \text{ sur } Q \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Avec $\nu > 0$, m_0 fonction régulière sur Q , $m_0 > 0$, $\int_Q m_0 = 1$, $H(x, p)$ lipschitz en $x \in Q$, convexe, de classe \mathcal{C}^1 en $p (\forall x \in Q)$.

Tous comme le cas précédent, les joueurs ont une dynamique stochastique décrite par :

$$\begin{aligned} dX_s^i &= \sigma dW_s^i - \alpha_s^i, \quad s \geq t \\ X_t^i &= x^i \in Q \quad \text{où } x^i \in Q; \end{aligned}$$

W_s^i , $\forall i = \overline{1, N}$ sont des mouvements browniens indépendants, et α_s^i est le contrôle à exercer par le joueur i . Ainsi, le critère de chaque joueur s'écrit :

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T L(X_s^i, \alpha_s^i) + V \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{X_s^j} \right] ds + v_0 \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{X_T^j} \right] \right].$$

Pour $0 \leq t \leq T$, $H(x, p) = \sup_{\alpha} [\alpha \cdot p - L(x, \alpha)]$ et une densité initiale $\prod_{j=1}^N m_0(x^j)$.

L'existence d'un équilibre du système (3.12) nécessite de mettre des hypothèses sur H [49] :

$$\exists C \geq 0, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \right| \leq C(1 + |p|) \quad \forall (x, p) \in Q \times \mathbb{R}^d. \quad (3.13)$$

$$\exists C \geq 0, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \right| \leq C(1 + |p|) \quad \forall (x, p) \in Q \times \mathbb{R}^d. \quad (3.14)$$

En supposant que $V[m]$ et $v_0[m]$ sont réguliers si m l'est aussi.

Théorème 7. [49] *Sous les hypothèses précédentes il existe une solution régulière (v, m) de (3.12).*

Lorsque les opérateurs V et v_0 sont strictement monotones tels qu'ils vérifient :

$$\int_Q (A[m_1] - A[m_2])(m_1 - m_2) dx \leq 0 \Rightarrow A[m_1] \equiv A[m_2]. \quad (3.15)$$

L'unicité des solutions du système (3.12) est prouvée [49].

3.4.3 Contrôle optimal

Des principes variationnels s'associe au système (3.12), à défaut de multiplication d'hypothèses dans le cas où $V[m]$ et $v_0[m]$ sont des gradients de fonctionnelles $\Phi(m)$ et $\Psi(m)$ dans $\mathcal{L}^2(Q \times [0, T])$, $\mathcal{L}(Q)$ respectivement.

En premier lieu, le principe à présenter [49] correspond au contrôle optimal d'équations de types Folker-Plank :

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nu \Delta m + \operatorname{div}(\alpha m) = 0 \quad \text{dans } Q \times [0, T], \quad m|_{t=T} = m_0 \quad \text{dans } Q. \quad (3.16)$$

Où $\alpha(x, t)$ est le contrôle.

$$\inf_{\alpha} \left[\int_0^T \left\{ \int_Q L(x, \alpha) m dx \right\} dt + \Phi(m) + \Psi(m(0)) \right]. \quad (3.17)$$

Est donc le problème de contrôle optimal qui est convexe dès que L est convexe en α .

Avec $H(x, p) = \sup_{\alpha} [\alpha \cdot p - L(x, \alpha)]$, $[\forall (x, p) \in Q \times \mathbb{R}^d]$.

La solution de (3.12) est formulée en associant le contrôle α à l'état m tel que $\alpha = \frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v)$ où v est l'état adjoint. Ainsi :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + H(x, \nabla v) = \Phi'(m) \quad \text{dans } Q \times [0, T], \quad v|_{t=0} = \Psi'(m(0)) \quad \text{dans } Q. \quad (3.18)$$

Le problème dual s'écrira comme suit, sachant Φ et Ψ convexes :

$$\min_{(\beta, \gamma)} \left\{ \Phi^*(\beta) + \Psi^*(\gamma) - \int_Q m_0 v(T) \right\}. \quad (3.19)$$

Il prend précisément la forme d'un problème de contrôle optimal d'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + H(x, \nabla v) = \beta \quad \text{dans } Q \times [0, T], \quad v|_{t=0} = \gamma \quad \text{dans } Q. \quad (3.20)$$

Cette approche par un problème de contrôle a pour intérêt de pouvoir ramener le problème du jeu à champ moyen à s'écrire sous une forme connue avec des équations solvables.

3.5 Extensions, variantes et résultats

Tenant compte des situations à modéliser, des types d'interactions complexes qui peuvent être posées, multiples variantes et extensions sont possibles par rapport à des dynamiques stochastiques de caractère général.

Selon les travaux de Lions et Lasry [48, 49, 50], ça aboutit en somme à une classe de systèmes de la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - F(x, t, \nabla v, D^2 v; m) = 0 \quad \text{dans } Q \times [0, T], \quad v|_{t=0} = v_0[m]. \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D^2 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial A} m \right) + \left(\operatorname{div} \frac{\partial F}{\partial p} m \right) = 0 \quad \text{dans } Q \times [0, T], \quad m|_{t=T} = m_0. \quad (3.22)$$

Où $F(x, t, p, A; m)$ présente une croissance en A .

D'autres variantes peuvent être construites selon la possibilité d'incorporation dans les équations du système. Ainsi que des termes de seconds membres qui correspondent à la création ou la destruction des joueurs. Ce qui engendre soit des termes de diffusion ou de dérive supplémentaires dans l'équation de la densité m , ou bien l'obtention de développements asymptotiques en N .

Un autre cas se manifeste aussi, celui de l'existence de plusieurs populations d'un grand nombre de joueurs identiques au sein de chaque population.

Pour deux populations, les équilibres de champ moyen s'écrivent par des systèmes de type :

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} - \nu^i \nabla v^i + H^i(x, \Delta v^i) = V^i[m_1, m_2] \quad v^i|_{t=0} = v_0^i[m_1, m_2].$$

$$\frac{\partial m^i}{\partial t} + \nu^i \Delta m^i + \operatorname{div}\left(\frac{\partial H^i}{\partial p}(x, \nabla v^i) m^i\right) = 0 \quad m^i|_{t=T} = m_0^i.$$

Lasry et Lions ne sont pas les seuls à avoir creusé derrière la théorie des jeux à champ moyen, Caines, Huang, et Malhamé ont élaboré la même théorie indépendamment, commençant par le principe d'équivalence certaine de Nash[13].

Dans divers travaux, les auteurs ont présenté les méthodes analytiques dédiées à l'existence et l'unicité des équilibres, à compter " les systèmes linéaires quadratiques ", [33, 34] " les systèmes non linéaires " [48, 49, 50], " l'équation principale et les méthodes d'EDP", " Formulation par EDP basique " [14].

Ceux-ci rassemblent des ressources bibliographiques primaires assez riches pour le lecteur qui voudrait explorer la question d'existence et d'unicité analytiquement en profondeur.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré principalement à la présentation de la théorie des jeux à champ moyen, commençant par un modèle initial simple de jeu à champ moyen, ensuite, des variantes de ce même modèle initial ont été présentées, qui ont fait objet de développement vers une formulation général de ce nouveau type de jeux.

Chapitre 4

Motivation et application de la théorie des jeux à champ moyen

Introduction

La théorie des jeux à champ moyen s'est épanouie dans plusieurs domaines, elle a su s'infiltrer dans diverses disciplines à savoir : la physique, les mathématiques appliquées, l'ingénierie, les sciences sociales et économiques et ceci revient au fait qu'elle s'est nourrie de plusieurs racines motivantes, de plus, elle étudie la situation où l'interaction touche un nombre infiniment grand d'individus, ce qui répond à des questions profondes rencontrées sur le plan réel. Autrement dit, une caractéristique clé de la théorie des jeux à champ moyen est la vaste portée de ses applications potentielles : applications de réseaux intelligents, applications aux systèmes de communications ([58, 4, 38, 3]) application à la dynamique collective [41, 43, 29, 8], modèles de santé publique [45], modèles financiers et applications économiques [16, 15, 17, 20, 22, 27, 30, 29, 33, 43, 42, 48, 51, 61, 36, 55, 35].

Dans ce chapitre, en premier lieu, des domaines problématiques et des exemples ayant motivé cette théorie seront présentés brièvement. La deuxième partie sera consacrée à une sélection d'exemples de modèles où les jeux à champ moyen ont modélisé des situations économiques et financières.

Première partie

Domaines problématiques et
quelques exemples d'applications.

4.1 Ingénierie

La création des systèmes décentralisés de réduction de la charge de pointe du réseau électrique et de compensation des fluctuations provenant de sources renouvelables appliquent une méthodologie de jeux à champs moyen. Les contrôles individuels donnent lieu à une consommation moyenne souhaitée en limitant les flux d'informations nécessaires par une architecture de jeu à champ moyen qui aide à coordonner et décentraliser un grand nombre de chauffe-eau électrique.

D'autre part, dans le domaine des réseaux de communications téléphoniques, là ou dans le spectre des fréquences des signaux codées interfèrent. Lorsque plusieurs utilisateurs sont émetteurs dans la même bande de fréquence, il se peut qu'il y ait une dégradation de la réception individuelle. Du moment où chaque utilisateur cellulaire contrôle sa puissance transmise, un équilibre de Nash se génère dans le cadre d'un jeu dynamique.

Il y a d'autres applications parmi lesquelles on compte l'optimisation énergétique des réseaux sans fils [58], la gestion dynamique de la demande sur les réseaux électriques [4, 38], le contrôle de charges décentralisées de grandes populations de véhicules électriques rechargeables [56].

4.1.1 Contrôle du stockage d'énergie résidentiel par l'intégration des énergies renouvelables

Ce modèle apparait lorsque il y a disposition de millions de dispositifs énergétiques résidentiels capables de stockages (radiateurs électriques, climatiseurs ou chauffe-eau électriques ...) qui agissent comme une batterie virtuelle à potentiel de stockage atténuant l'effet déstabilisant de la pénétration du système à haute puissance des sources d'énergie renouvelables intermittentes (énergie solaire et éolienne), donc son objectif consiste à coordonner les charges de ses dispositifs macroscopiquement en produisant des cibles de suivi de leurs température moyenne, la théorie des jeux à champ moyen s'occupe de générer des lois de contrôle décentralisées au sein du dispositif microscopique [39].

La dynamique de l'espace chauffé individuel est caractérisée par un modèle de diffusion linéaire scalaire avec un état x_i et un bruit généré par l'activité de l'utilisateur ainsi qu'une source de chauffage. Chaque appareil est conçu spécifiquement pour exercer une pression qui dérive les appareils vers z réglé comme suit :

- Si un stockage d'énergie supplémentaire est souhaité alors il est réglé à la température de confort maximale acceptable H .
- Si un report de charge est souhaité, l'effort de commande moyen et les écarts de température initiale sont pénalisés, le réglage est à la température de confort minimale acceptable $L < H$.

4.1.2 Les réseaux de communications

Les signaux des téléphones portables ont la possibilité d'interférer avec un chevauchement dans le spectre de fréquences, ainsi, ils provoquent une dégradation des rapports qui relient le signal et le bruit individuel et par conséquent affectent la qualité de service.

Dans le modèle standard, chaque agent possède deux variables d'état (la puissance transmise $p \in \mathbb{R}_+$ et l'atténuation du canal $\beta \in \mathbb{R}$). Dans les appareils mobiles les algorithmes de contrôles de puissances conventionnelles utilisées sont de type gradient avec une taille de pas limitée pour la puissance transmise qui peut être représentée par un modèle dit ajustement tarifaire :

$$dp^i = u_p^i dt + \sigma_p^i dW_p^i, \quad u_p^i \leq |u_{max}|, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Où N est le nombre d'utilisateurs dans le réseau, W_p^i , $1 \leq i \leq N$ un processus de Wiener¹ standard indépendant.

L'atténuation de canal varie dans le temps par un modèle lognormal où l'agent i acquiert le gain de canal $e^{\beta^i(t)}$ par rapport à la station de base à l'instant t , $0 \leq t \leq T$.

Le produit $e^{\beta^i} \times p^i$ donne la puissance reçu à la station de base à partir du $i^{\text{ème}}$ agent. L'évolution de l'état du canal $\beta^i(t)$ est en fonction de la dynamique d'atténuation de puissance comme suit :

$$d\beta^i = -a^i(\beta^i + b^i)dt + \sigma_\beta^i dW_\beta^i, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Cette situation ouvre le champ à une formulation du problème de contrôle de l'alimentation par un jeu dynamique entre les utilisateurs cellulaire où la fonction coût de chaque agent implique simultanément sa puissance individuelle émise et son rapport signal/bruit. (Le travail d'application des jeux à champ moyen [3] procure un équilibre de Nash avec les lois de contrôles générés par les équations du système MFG. Tenant compte de la faible dimension de l'état du système formulé, et des agents mobiles dans une zone plané, les équations différentielles partielles du jeu à champ moyen sont d'ailleurs susceptibles à une résolution efficace).

4.2 Phénomènes sociaux

La théorie des à champ moyen s'est infiltrée dans les phénomènes sociaux, dans une série de problèmes de la dynamique sociale à savoir la dynamique d'opinion

1. Voir définition dans le Chapitre 2

(analyse de l'évolution de la densité des opinions d'une masse d'agents sous hypothèses sur la dynamique et l'entêtement des agents). D'autre part, les jeux de vaccination ont apparu dans plusieurs travaux (des cas où les coûts sont représentés en fonction des risques courus suite aux effets secondaires, des avantages de la vaccination de même que la proportion de la population vaccinée). En effet, il y a eu des contributions des jeux à champ moyen dans l'étude des foules et d'encombrement, des méthodes numériques ont révélé la possibilité de formation de voies. La nature des problèmes d'optimisation ayant un grand nombre d'agent en interaction a apporté notamment les questions de mouvement de congestion, dans les cas de panique, de répartitions de populations, phénomènes collectifs dans les stades. A titre d'exemples, le travail de Guéant[29] montre que la disposition des spectateurs d'une utilité à s'asseoir et imiter les autres permet d'exhiber du système MFG ergodique des solutions périodiques qu'il a considéré semblable aux ondes mexicaines. De son côté, Lachapelle a étudié les réactions répulsives pouvant apparaître entre deux populations d'individus[41, 43] son intérêt réside dans les problèmes formulés dans une généralisation naturelle des jeux à champ moyen. Dans d'autres contributions précédemment citées dans l'introduction de ce chapitre, une autre idée est celle des chercheurs qui doivent trouver une surface de compromis entre la satisfaction procurée par un travail et son coût de production. La satisfaction étant non-absolue, elle dépend plutôt d'un classement par rapport aux autres chercheurs, sur ce, le formalisme du jeu à champ moyen se relie naturellement depuis l'intervention des distributions respectives de ces chercheurs [8]. De retour au secteur santé, il est à noter que des modèles de propagation d'épidémie et des questions de choix politiques de vaccination ont servi de matière de recherches, notamment les travaux de Turicini et Laguzet [45] où l'évolution d'une épidémie est modélisée par un modèle appelé " SIR ". La situation considère un taux de susceptibilités d'infection au sein d'une population d'individus tel que chaque individu infecté est doté d'une vitesse de guérison. De plus, à une date précise un droit à la vaccination est accordé à chaque individu. Les décisions à prendre dépendent de l'optimisation des coûts engendrés par les choix de vaccination/ infection et de l'observation de l'évolution macroscopiques des populations (" susceptible " / " infecté " / " guéris ").

4.3 Première relation avec l'économie et la finance

La relation de l'économie avec la théorie des jeux à champ moyen ne date pas uniquement de leurs premiers développements. L'histoire souligne qu'il y a eu des idées importantes en économie ayant préparé le chemin à l'émergence des jeux à

champ moyen. D'ailleurs, les jeux à champs moyen sont bien un résultat de progrès partant de contrôle stochastique aux jeux différentiels stochastique au cours des trois dernières décimées. Néanmoins, les idées de modélisation de situation ou un grand nombre de joueurs optimisent reviens à deux siècles d'aujourd'hui.

Le premier aspect d'un grand nombre d'agents qui apparaissent comme étant un seul agent représentatif fut celui d'Adam Smith dans son utilisation de la notion de la " main invisible " [69] qui procure l'équilibre du marché.

Au vingtième siècle, après l'utilisation des notions microéconomie et macroéconomie, un article d'Aumann[2] apparaît sur un marché avec un continuum de commerçants et donne un élan à cette pensée.

Par la suite, John Nash a initié l'étude des jeux avec de nombreux joueurs suite à son théorème² d'existence d'équilibre en stratégie mixte³, et unifié la théorie des jeux à la théorie économique actuelle. Le développement se poursuit par l'étude des jeux à temps continue (différentiels) en utilisant des méthodes de contrôle optimale, se dirigeant vers les jeux différentiels stochastique et enfin les jeux à champ moyen.

Depuis leur conception en 2006, ces jeux ont beaucoup servie l'économie dans des modèles de croissances, de production des ressources épuisables, répartitions des richesses, de même qu'ils ont réussi à répondre à des questions financières concernant la formation des prix sur un marché, la dynamique de la volatilité et l'étude des risques.

La deuxième partie de ce chapitre sera dédié spécifiquement pour présenter cette richesse tout en s'appuyant sur la collection de travaux traitant des exemples de modèles appliqués en économie et en finance.

2. Théorème de Nash (Voir Chapitre 1).

3. Le théorème de Nash atteste que tout jeu fini sous forme normale admet un équilibre en stratégies mixtes, ceci a inspiré des études sur des jeux à un grand nombre de joueurs depuis que des contres-exemples ont été présentés.

Deuxième partie

Economie, Finance, et jeux à champ moyen

4.4 Définitions et vocabulaire économique et financier

Dans cette deuxième partie du présent chapitre, consacrée aux applications des jeux à champ moyen en économie et en finance, des expressions et des notions purement économiques et un vocabulaire financier accompagneront le lecteur, la raison pour laquelle quelques définitions ont été sélectionnées [10, 12, 72, 74] et présentées dans cette section.

Définition 47 (Economie). L'économie est une activité humaine qui engendre la production, la distribution, l'échange ainsi que la consommation des biens et des services. Une distinction de systèmes d'échanges existe, à compter l'économie du troc, l'économie du don et l'économie de marché. Il figure aussi une notion de système économique entre le socialisme qui repose sur la propriété collective des moyens de production et le capitalisme qui inversement au précédent privatise les moyens de production.

Définition 48 (Macroéconomie). La macroéconomie étudie l'économie à travers les relations existantes entre les grands agrégats économiques, le revenu, l'investissement, la consommation, le taux de chômage, l'inflation,... etc. La macroéconomie constitue l'outil essentiel d'analyse des politiques économiques des États ou des organisations internationales. Elle explique les mécanismes de production des richesses à travers le cycle de la production, de la consommation, et de la répartition des revenus au niveau national/international.

Définition 49 (Finance). La finance est un domaine particulièrement large, qui peut se diviser en deux catégories : finance d'entreprise (corporate finance) et finance de marché (market finance). La finance d'entreprise utilise essentiellement des modèles mathématiques simples, alors que la finance de marché s'appuie sur des modèles mathématiques complexes.

Définition 50 (Marché financier). Les marchés financiers (Financial Markets en anglais) sont des marchés où sont effectuées des transactions sur des actifs financiers, et de plus en plus, leurs produits dérivés. Le marché est un lieu où se rencontrent l'offre et la demande d'un certain bien. Les marchés financiers permettent d'échanger des contrats financiers et de produits dérivés sur ses contrats. Sur ces marchés, des intervenants achètent et vendent des biens divers, à un prix qui dans la plupart du temps, semble varier de manière assez aléatoire en fonction de l'offre et de la demande. Ces biens s'appellent de manière générale des actifs qui peuvent être une devise, une action, une obligation..., ou bien encore un produit dérivé.

Définition 51 (Portefeuille financier). [12] Un portefeuille est un ensemble d'actifs financiers détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent provenir de différentes classes : actions, obligations, produits dérivés, matières premières, fonds...

Définition 52 (Actif financier). [74] Un actif financier est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable sur un marché financier, qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus ou un gain en capital en contrepartie d'une prise de risque.

Définition 53 (Volatilité). [74] La volatilité est une mesure de l'ampleur des variations d'un cours d'un actif financier. Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée et plus l'investissement dans cet actif sera considéré comme risqué, et par conséquent plus l'espérance de gain (ou risque de perte) sera important.

Définition 54 (Mesure des risques). [12] En gestion de portefeuille, la mesure classique du risque est la variance ou bien l'écart-type, appelée souvent volatilité, la variance d'une variable aléatoire mesure la dispersion des valeurs autour de sa moyenne.

Définition 55 (Rendement). [12] Le rendement, appelé aussi taux de rentabilité mesure l'appréciation ou la dépréciation relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs pendant un intervalle de temps.

Définition 56 (Option). En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation d'acheter (call) ou de vente (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou à une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance. Si, dans les marchés financiers, les biens échangés sont des actifs financiers (actions, obligations), l'option donne le droit pour l'acheteur d'acheter (call) ou de vendre (put) l'actif financier défini dans le contrat. Les prix fixés à l'avance et la durée de validité de l'option sont définis dans le contrat. Le vendeur s'engage à respecter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option, en contrepartie l'acheteur lui donne de l'argent. Si l'option n'est pas exercée, le vendeur a gagné un montant égal au prix de l'option.

Définition 57 (Actif sous-jacent). C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'option peut être un actif physique (matières premières ou agricoles), un instrument financiers (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore un indice boursier ou climatique.

Définition 58 (Modèle de Black-Schole). Le modèle Black-Scholes est un modèle mathématique du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un

processus stochastique en temps continu; par opposition au "modèle Cox Ross-Rubinstein" qui suit un processus stochastique en temps discret. Ce modèle connaît ce succès car il possède de nombreux avantages : sa simplicité d'application et de formulation, son importante utilisation par les opérateurs du marché mais aussi et surtout parce qu'il permet de calculer un paramètre important en finance : la volatilité. La volatilité mesure la variation moyenne dans le temps d'un actif financier et donne donc une information cruciale sur le risque.

Définition 59 (Croissance économique). La croissance économique désigne la variation positive de la production des biens et services dans une économie sur une période donnée.

Définition 60 (Risque systémique). Le risque systémique s'identifie lorsqu'un nombre de banques atteignent un seuil de défaut (défaillance) en un horizon temporel donné.

Définition 61 (Trader). Un trader est une entité financière qui achète et vend des instruments financiers (des actions, des obligations, des matières premières, des dérivés et des fonds communs de placement en qualité d'agent, de couverture, d'arbitre ou de spéculateur).

4.5 Quelques modèles d'applications issus de l'économie

En réponse à de multiples questions posées par l'économie au fil du temps, la théorie des jeux à champ moyen s'est développée dans l'optique de proposer des applications. Ainsi des auteurs dont Lasry, Lions et Guéant proposent des modèles de croissance économique qui seront traités, variés et repris par la suite [28, 51], tout en modélisant des situations de production des ressources épuisables [29].

De son côté, s'appuyant sur le modèle dit de Solow [70], Gomes [27] se penche sur une formalisation en champ moyen de l'accumulation du capital. Par contre, Achdou et coauteurs contribuent dans des problèmes de répartitions des richesses et la loi de Pareto dans leur article [59]. Dans ce qui suit quelques exemples de ces apports de la théorie des jeux à champ moyen en économie seront exposés.

4.5.1 Modèles de Bertrand et Cournot : une analyse par les jeux à champ moyen de ressources épuisables

Les jeux à champ moyen de Bertrand et Cournot sont une famille de modèles initialement introduit par Guéant, Lasry et Lions [29] de même qu'ils ont été étudiés par Chan et Sircar [17] dans le but de fournir une description en champ moyen à des situations de concurrences des producteurs de ressources épuisables (gaz naturel, huiles, charbon et minéraux).

La production d'une ressource épuisable par un continuum de producteurs est un exemple assez typique de jeu à champ moyen qui permet de montrer le caractère général des équations différentielles partielles des jeux à champ moyen lors de la résolution des problèmes (forward/ backward). D'après les premiers travaux de Hotelling [32], il est connu que cette production implique une rente, sur ce, elle a été sujet d'examen dans le contexte compétitif pour comprendre la dynamique d'épuisement d'une ressource rare. Le travail [29] peut constituer une base pour d'autres modèles, par exemple en tenant compte d'une concurrence à la Stackelberg en considérant l'existence de grands acteurs (OPEP), ou bien l'étude des problèmes importants tels que les entrées de nouveaux concurrents du genre à développer des sources d'énergies alternatives [28, 30, 21].

Sous un régime de production concurrentielle de biens similaires par des entreprises qui fixent des prix ou des quantités respectivement, la continuité des compétitions à la Cournot/Bertrand est sujet d'étude du travail de Chan et Sircar [17] tel que l'analyse des interactions peut prendre la forme d'un jeu à champ moyen dans un sens où la demande qui confronte un producteur est influencée par

les adverses de par leurs prix moyen, voir leurs quantités. Un jeu dynamique avec une demande de marché incertaine est mis en place, en vertu des contraintes des approvisionnements finis (ressources épuisables), et il est caractérisé par un système couplé d'équations différentielles partielles (EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman pour la fonction valeur et EDP de Kolmogorov directe pour la densité des joueurs).

Dans un angle avancé, Mouzouni [61] s'est appuyé sur l'application de la théorie des jeux à champ moyen pour la modélisation des processus de production et commercialisation de produits avec ressources épuisables (énergies fossiles). Il propose une approche variationnelle pour l'étude du système de jeu à champ moyen qui en découle et analyse la limite dans un cadre de ressources renouvelables ou abondantes, partant de l'approximation en MFG des modèles de Cournot et Bertrand lorsque N est grand.

4.5.2 Théorie de la croissance économique

La théorie de la croissance est née aussi par les soins du trio (Guéant, Lasry et Lions). En premier lieu, ils se sont intéressés aux interactions entre la croissance économique dans le sens de l'accumulation du capital humain et les inégalités dynamiques. Principalement, la contribution de ce travail [36] réside dans le mécanisme sous lequel la compétition entre un continuum d'individus mène à une croissance en terme du capital humain. Guéant dans sa thèse doctorale [28], traite deux applications à cette même théorie via deux modèles de croissance (Capital humain et Productivité industrielle) qui s'inscrivent dans l'aspect des jeux à champ moyen déterministes.

Plus tard que ça, un article parut à titre d'exemple, cette fois-ci au Brésil par Lima et al.[53] qui propose une application des résultats obtenues des estimations a priori pour des solution de jeux à champ moyen définies sur un domaine borné à un modèle d'accumulation de capital et richesse.

4.5.3 Modèle de croissance macro-économique

Le problème présenté par Carmona et Delarue [15] est posé pour un horizon de temps infini ($T = \infty$) avec un taux d'actualisation positif $r > 0$ mais pour des raisons de cohérence, il a été encadré avec un horizon fini T . Les états privés des agents individuels ne sont pas soumis à des chocs idiosyncratiques.⁴

Leurs réactions se manifestent selon un processus de Wiener unidimensionnel $W^0 = (W_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ de filtration $\mathbb{F}^0 = (\mathfrak{F}_t^0)_{0 \leq t \leq T}$.

Chaque joueur contrôle la dérive de son état respectif, les volatilités des états

4. Ceci signifie que ces états sont indépendants.

sont linéaires et données par une fonction $x \mapsto \sigma x$ (σ constante positive). D'où la dynamique de l'état du joueur i est :

$$dX_t^i = \alpha_t^i dt + \sigma X_t^i dW_t^0, \quad t \in [0, T]. \quad (4.1)$$

Le modèle se limite à des contrôles markoviens de la forme $\alpha_t^i = \alpha(t, X_t^0)$ pour une fonction déterministe $(t, x) \mapsto \alpha(t, x)$ non négative et Lipchitz pour la variable x .

- Pour tous joueur i , $X_t^i \geq 0, \forall t > 0$, si $X_0^i \geq 0$.
- Pour deux joueur i, j , $X_t^i \leq X_t^j, \forall t > 0$, si $X_0^i \leq X_0^j$ (propriété d'homéomorphisme des équations différentielles stochastiques lipchitziennes).

Soit l'écriture :

$$X_t^j = X_t^i + (X_0^j - X_0^i) e^{\int_0^t \gamma_s ds - (\sigma^2/2)t + \sigma W_t^0}. \quad (4.2)$$

A noter dans le cas où le contrôle markovien est de la forme :

$$\alpha(t, x) = \gamma_t x. \quad (4.3)$$

4.5.4 Modèle de croissance stochastique

Dans ce modèle, une version à grande population des soi-disant jeux d'accumulation de capital [13] a été décrite en considérant N agents (entités économiques) où le capital social de l'agent i est modélisé par :

$$dx_t^i = [A(x_t^i)^\alpha - \delta x_t^i] dt - c_t^i dt - \sigma x_t^i dW_t^i, \quad t \geq 0. \quad (4.4)$$

Avec $A > 0, 0 < \alpha < 1, x_0^i > 0$, et $\{W_t^i, 1 \leq i \leq N\}$ sont des processus de Wiener standards, indépendants et identiquement distribués (iid).

$F(x) := Ax^\alpha$ est la fonction de production Cobb-Douglas⁵ où x est le capital avec un volume de travail constant. Le taux d'amortissement stochastique capital est donné par :

$$(\delta dt + \sigma dW_t^i).$$

Où c_t est le taux de consommation.

Ainsi, l'utilité fonctionnelle de l'agent i s'écrit sous la forme suivante :

$$J_i(c^1, \dots, c^N) = \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\rho t} U(c_t^i, c_t^{(N,\gamma)}) dt + e^{-\rho T} S(X_T)\right], \quad (4.5)$$

$c_t^{(N,\gamma)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (c_t^i)^\gamma$ est l'utilité moyenne de la population par rapport à la consommation.

La fonction d'utilité $U(c_t^i, c_t^{(N,\gamma)})$ est prise telle qu'elle est donnée dans [35] :

5. La fonction de Cobb-Douglas est une fonction utilisée en économie comme modèle de fonction de production. Elle représente les effets de la technologie sur deux ou plusieurs facteurs de production (notamment le capital physique et le capital travail).

$$U(c_t^i, c_t^{(N,\gamma)}) = \frac{1}{\gamma} (c_t^i)^{\gamma(1-\lambda)} \left(\frac{(c_t^i)^\gamma}{c_t^{(N,\gamma)}} \right)^\lambda, \quad \lambda \in [0, 1], \quad \text{Avec } \gamma \in (0, 1). \quad (4.6)$$

4.6 Quelques modèles d'applications issus de la finance

De l'économie, l'impact s'est automatiquement propagé à la finance aussi, d'ailleurs les premières publications de Lions et Lasry proposent des mécanismes de formation des prix sur un marché financier [50], une modélisation de la dynamique de la volatilité d'un actif prenant compte de l'influence des stratégies de couverture de manière auto-cohérente [55], ce dernier était consacré à étendre le modèle standard de Black-Scholes à la situation de modification de la dynamique de l'actif sous-jacent par le taux de trading, sachant que la volatilité est considérée dépendante du gain d'une option fictive. D'autres auteurs à mentionner (Guéant, Fatone et Jaimungal) se sont concentrés plus sur les portefeuilles d'actifs financier [28] et sur l'exécution optimale d'ordre de trading [22] dont l'objectif pour un grand investisseur (Banque, assurance, . . .) est de lui déterminer l'exécution optimale d'une transaction ayant un impact sur les prix par son volume. De même, la question de la modélisation d'un carnet d'ordre sous diversité des profils des traders [42] a été abordé par Lehalle, Lachapelle et d'autres où ce carnet d'ordre est présenté par un axe de prix, avec les listes d'acheteurs et vendeurs, à gauche et à droite respectivement, séparés par le prix du marché. Le principe est qu'un agent décide d'acheter, donc il diminue la liste des vendeurs ou bien de patienter et figurer dans la liste des acheteurs. Un autre axe d'étude est celui du risque systémique qui se déroule entre les banques effectuant des opérations de prêt et d'emprunt avec une banque centrale [16].

4.6.1 Gestion d'un portefeuille financier et gestion d'actifs sous effet de classement

Ce modèle est un modèle financier qui tache de comprendre l'influence de la concurrence entre les gérants d'actifs sur les choix de portefeuille. A la différence des autres modèles, celui-ci est modélisé par un jeu à champ moyen sans composante dynamique et donc simplement rétrograde (backward). Le but principal de ce modèle est de souligner l'importance des effets de la concurrence entre les agents et de montrer que le modèle de Markowitz [57] n'est pas aussi vigoureux qu'il en a l'air, notamment, le traitement des choix de portefeuille opéré par des firmes de gestion d'actifs. Cet exemple sera visité plus

amplement au creux du chapitre prochain.

Une autre situation souvent redondante dans le domaine financier est celle des individus souhaitant confier leurs épargnes à des gestionnaires de fortune cherchant le plus souvent le gestionnaire d'actifs qui possède des stratégies de gestion proches des siennes à l'égard de leurs profils (risques/rendements). En contrepartie, le gestionnaire ne vise pas uniquement la satisfaction de ses clients, il souhaite augmenter sa clientèle et son bonus au passage.

De retour au modèle classique de Markowitz [57], le modèle proposé par Guéant [28] ajoute une dimension de classement à travers les gérants d'actifs où chaque gérant optimise, de plus que ses critères, une fonction dépendante de son classement en terme de rendement parmi ses concurrents.

4.6.2 Processus de formation des prix, de la volatilité sur les marchés et surpeuplement commercial

Parmi les sujets bénéficiant des atouts de la théorie des jeux à champ moyen, depuis leur première formulation, la formation des prix et de la volatilité figurent en tête de liste. Le travail de Lasry et Lions [50] dévoile deux exemples d'applications. Le premier conduit à une classe nouvelle de problèmes à frontières libres, dans un cadre unidimensionnel où ils énoncent et résolvent le problème en montrant l'existence et l'unicité d'une solution fluide, tout en discutant explicitement quelques problèmes stationnaires sous l'angle d'une dynamique de formation des prix. La situation compte une population idéalisée qui reflète la nature des marchés financiers, scindée en deux groupes, un groupe d'acheteurs et un autre de vendeurs d'un même bien, sous un effet d'aléa exogène dans les préférences des prix.

Le deuxième exemple traite la formation de la volatilité sur les marchés financiers, un contexte où l'approche du champ moyen mène à une équation différentielle non linéaire en dimension infinie. La solvabilité locale de cette dernière est induite par une propriété des solutions d'équations aux dérivées partielles paraboliques, et il est montré que le modèle est doté de propriétés d'invariance qui permettent de résoudre l'équation de manière globale semi-explicite.

Dans le trading, un autre travail notable est celui de Cardaliaguet et Lehalle [14]. Ce travail formule un problème devenu classique de la négociation (liquidation) optimale dans un jeu à champ moyen. Il contient une modélisation de l'aspect où le trader fait face à l'incertitude des variations juste des prix, également, les variations de prix générés par d'autres acteurs du marché similaires, impactant les prix en permanence et agissant stratégiquement. Ce modèle

appartient à un type de jeux à champ moyen appelés " jeux à champ moyen étendus ", il résout le problème généré par la fonction de coût du trading optimal en traitant le cas des préférences hétérogènes. Enfin, mes auteurs proposent les conditions dans lesquelles les participants ne requièrent pas la connaissance de l'état de l'ensemble du système, il leur suffit de l'apprendre au fur et à mesure de l'observation des comportements des autres.

4.6.3 Modèle d'impact sur les prix de marché

Dans le domaine de l'ingénierie financière moderne le modèle présenté dans cette section est utilisé comme moteur d'exécution optimale sur les marchés de l'électronique haute fréquence. L'intérêt de ce modèle réside dans l'existence d'une instance de jeu différentiel stochastique où les interactions des individus se produisent suivant une distribution empirique des contrôles à la place des distributions empiriques des états privés.

Le travail présenté par Caines et al.[13]consiste en l'analyse des interactions entre N commerçants. Chaque commerçant i contrôle son inventaire X_t^i de sorte que le nombre d'actions détenues à l'instant t par son taux de négociation α_t^i se décrit par une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX_t^i = \alpha_t^i dt + \sigma^i dW_t^i, \quad t \in [0, T]. \quad (4.7)$$

$W^i = (W_t^i)_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener standard indépendant et $\sigma^i \geq 0$ sont des volatilités supposées constantes pour simplifier le modèle et égale à un nombre positif $\sigma > 0$ (pour des raisons de symétrie). Les commerçants marchandent le même stock à un prix moyen S_t à l'instant t . K_t^i représente le montant de liquidité détenant par l'agent i à l'instant t qui évolue ainsi :

$$dK_t^i = -[\alpha_t^i S_t + c(\alpha_t^i)]dt \quad (4.8)$$

Sachant que $\alpha \mapsto c(\alpha)$ est une fonction convexe non négative et $c(0) = 0$ qui représente le coût de négociation à un taux α .

La formule suivante comprend l'impact réel sur les prix pour l'évolution du prix moyen dans le temps :

$$dS_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\alpha_t^i) dt + \sigma_0 dW_t^0, \quad t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

Dans ce travail, il est supposé une fonction déterministe connue $\alpha \mapsto h(\alpha)$ et une constante $\sigma_0 > 0$ avec un processus $W^0 = (W_t^0)_{t \geq 0}$ de Wiener standard et indépendant de la famille $(W^i)_{1 \leq i \leq N}$.

Il est à souligner que chaque agent interagit avec la distribution empirique des

contrôles de ses adverses, due à la dérive du prix moyen qui est intégrale de la fonction h respectivement à la mesure empirique $\bar{\mu}_{\alpha_t}^N$ des commandes α_t^i . En effet, h se nomme parfois fonction d'impact instantané sur le marché et doit vérifier $h(\alpha)\alpha \geq 0$ étant donné qu'un achat est sensé entrainer l'augmentation du prix de l'action et qu'une vente entraine la diminution de ce prix. De plus, S_t suit un mouvement brownien arithmétique avec une dérive dépendante des impacts cumulés des négociations précédentes.

4.6.4 Jeux de timing dans les banques et risque systémique

Dans le travail de Carmona et Delarue [15] après la présentation d'une approche probabiliste d'un jeu à champ moyen, les jeux de chronométrages (game of timing) ont été traduit comme modèle de jeux stochastiques où les interventions des joueurs affectaient des temps aléatoires, avec une simplification qui limite les actions des joueurs aux choix des moyennes de ces temps aléatoires.

Par deux exemples, la question de la stabilité du système financier a pu être abordée (la liquidité et les pannes bancaires), le premier étant stationnaire (de nature statique), donne les principes fondamentaux d'équilibre économique qui sous-tendent l'analyse de la liquidité et des ruptures bancaires dans le système financier.

Le deuxième exemple est réglé en temps continu, il porte les faits stylisés du modèle statique dans lequel la décision de synchronisation est une difficulté technique.

En ce qui concerne le risque systémique, qui est très répondu dans le milieu d'applications, les auteurs Carmona et al. [16] proposent un modèle simple de prêt et d'emprunt interbancaire où les réserves log-monétaires de N banques sont décrites par un système de processus de diffusions couplés à leurs dérivées tel qu'il y aura une dépendance entre la stabilité du système et le taux d'emprunt et prêt interbancaire.

Une fonction de jeu est intégrée pour permettre à chaque banque de contrôler son taux de prêt/emprunt au niveau d'une banque centrale. Lorsque sa réserve monétaire frôle un seuil critique, l'optimisation reflète une volonté d'emprunt, par contre cette volonté se dirige vers le prêt si elle dépasse ce seuil critique choisi comme réserve monétaire moyenne. Ces deux opérations prêt/emprunt au sein de la banque centrale induit un coût quadratique à un taux fixé.

L'étude faite consiste en une résolution explicite des équilibres de Nash à un nombre fini de joueurs où il est montré que la banque centrale ajoute de la liquidité sans pour autant affecter son risque systémique, suivis par un jeu à champ moyen correspondant à la limite d'un grand nombre de banques en présence d'un bruit commun.

4.6.5 Modélisation initiale du risque systémique

Le modèle présenté [15] se décrit comme un réseau de N banques, X_t^i désignes les réserves log-monétaires de la banque $i \in \{1, \dots, N\}$ à l'instant t . C'est un modèle simple d'emprunt et de prêt entre banques par les dérivées de leurs réserves de trésorerie logarithmiques. Pour un processus de Wiener $W^i = (W_t^i)_{t \geq 0}$ indépendant pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et une constante $\sigma > 0$ il est supposé que :

$$dX_t^i = \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (X_t^j - X_t^i) dt + \sigma dB_t^i = a(\bar{X}_t - X_t^i) dt + \sigma dB_t^i, \quad i = \{1, \dots, N\}. \quad (4.10)$$

Où $dB_t^i = \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^i + \rho dW_t^0$, pour un $\rho \in [-1, 1]$.

Autrement dit, il est supposé que les réserves log-monétaires reviennent à leurs moyennes d'échantillon \bar{X}_t à un taux $a > 0$, où cette moyenne d'échantillon représente l'interaction entre les différentes banques tout en considérant un seuil critique de responsabilité constant, négatif $D < 0$ en dessous duquel une banque est considérée en état de défaut.

La présence du processus de Wiener W^0 dans la dynamique des processus des réserves log-monétaires X^i est une caractéristique qui crée une source supplémentaire de dépendance qui rend la solution du jeu à champ moyen encore plus difficile.

D'après les équations (4.10) la moyenne de l'échantillon $(\bar{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus de Wiener de volatilité $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ (l'augmentation du taux d'emprunt et de prêt procure la stabilité du système, et ceci peut être montré simplement par une simulation de Monte Carlo).

Ici, la distribution des pertes (nombres de banques ayant des réserves qui franchissent le seuil D) ainsi que l'estimation des écarts (simple estimation des queues gaussiennes) montrent que le risque systémique augmente avec l'augmentation du taux de prêt et d'emprunts a ce qui est compris comme étant la défaillance d'un grand nombre de banques simultanément.

Une nouvelle dynamique est considérée par les auteurs en soumettant le modèle à une modification pouvant conduire aux mêmes conditions, telle que :

$$dX_t^i = [a(\bar{X}_t - X_t^i) + \alpha_t^i] dt + \sigma dB_t^i, \quad i = \{1, \dots, N\}. \quad (4.11)$$

Où α^i est le contrôle de la banque i (le montant de prêt et d'emprunt en dehors du N -réseau bancaire). La fonction à minimiser par la banque i dans ce cas s'écrit :

$$J^i(\alpha^1, \dots, \alpha^N) = \mathbb{E} \left[\int_0^t \left(\frac{1}{2} |\alpha_t^i|^2 - q \alpha_t^i (\bar{X}_t - X_t^i) + \frac{\epsilon}{2} (\bar{X}_t - X_t^i)^2 \right) dt + \frac{c}{2} (\bar{X}_T - X_T^i)^2 \right]. \quad (4.12)$$

Pour des constantes positives ϵ et c qui permettent un équilibre entre les coûts individuels d'emprunt et de crédit selon le comportement moyen des autres banques

au sein du réseau.

Les contributions des tailles relatives de ces composantes qui imposent le signe de α_t^i et la décision entre le prêt et l'emprunt sont mesurées par le paramètre q positif. La banque i va préférer l'emprunt et choisira $\alpha_t^i > 0$ lorsque X_t^i est inférieure à la moyenne empirique, et elle choisira $\alpha_t^i < 0$ et effectuera un prêt dans le cas contraire.

Conclusion

Ce chapitre témoigne sur l'impact de la théorie des jeux à champ moyen en commençant par un survol des domaines et problématiques qui ont motivés ses applications, passant à la présentation de quelques apports de ce type de jeux à l'ingénierie, les phénomènes sociaux, notamment, des modèles d'applications en finance et en économie ont pu être cités.

Chapitre 5

Gestion de portefeuille et compétition entre gérants d'actifs

Introduction

La théorie moderne de portefeuille est née en 1952 avec la publication de l'article fondateur d'Harry Markowitz. Ce dernier formalise le dilemme fondamentale de la finance moderne qui persiste à augmenter la rentabilité, tout en prenant un certain risque, et traite aussi la diversification d'une combinaison d'actifs dans un portefeuille. Néanmoins, en pratique, un effet de compétition se manifeste et affecte le modèle usuel. Les problèmes principaux-agents ont toujours existé entre les investisseurs et les gérants des actifs et ont souvent été sujet d'étude. En effet, les investisseurs visent la maximisation du rendement espéré à risque ajusté de leur portefeuille. De plus que la satisfaction des clients courants, une compagnie de gestion d'actifs financiers se fixe un objectif en pariant ou en sécurisant un gain annuel, de même qu'elle voudrait augmenter sa valeur (plus de clients attirés signifie encore plus d'actifs sous sa gestion, autrement dit plus de tarifs).

Le modèle présenté dans ce chapitre est une modification théorique de la structure du modèle de Markowitz [57] à deux période basé sur le travail de Guéant [28] en insérant la volonté des gérants d'actifs à l'attraction des clients potentiels. La modélisation comprend un effet compétitif dans un sens de classement des agents selon leur performance. Ainsi, une première formulation générale du modèle sera introduite suivie d'une résolution qui généralise la situation où la fonction d'utilité est de type CARA.¹

1. Fonction d'utilité CARA (constant absolute risk aversion) est une fonction d'utilité qui donne des valeurs spécifiques des coefficients d'aversion au risque.

5.1 Présentation du modèle

La situation présente un continuum de gérants d'actifs financiers ayant un même montant d'actifs à gérer à l'instant 0. Les gérants sont soumis au choix d'un portefeuille d'investissement d'entre toutes les combinaisons connexes de deux actifs disponibles constituant un portefeuille.

Le modèle considère un marché à deux actifs financiers, un actif sans risque de rendement r et de poids $(1 - \theta)$ dans le portefeuille, et un actif risqué de rendement $r + \epsilon$ où ϵ est une variable aléatoire centrée avec un poids θ .

La prise de décision du portefeuille à choisir dépend d'un critère à deux composantes. La première est une optimisation de la fonction d'utilité dépendante des rendements, purement de Markowitz. La seconde est reliée directement à la compétition entre les gérants sachant que chaque gérant souhaite maximiser le nombre total d'actifs sous sa gestion (similairement le nombre de clients). Par conséquent, chaque gérant maximise son rang (vise un classement plus haut que ses concurrents) dans la communauté des gérants d'actifs et montre qu'il est meilleur.

Alors, de plus que le critère d'utilité, chaque gérant va maximiser l'expression suivante :

$$\mathbb{E}[\mu(X) + \beta C]. \quad (5.1)$$

- La richesse à la date (instant) 1 s'écrit :

$$X = 1 + r + \theta\epsilon.$$

- β est une constante qui modélise l'importance relative de l'effet de compétition.
- C est une v.a qui assure le classement des gérants d'actifs, elle prend ses valeurs dans $[0, 1]$ de la plus mauvaise performance des gérants (0) à la meilleure (1). Autrement dit, C est exactement la fonction de distribution cumulative des rendements dans la population des gérants d'actifs.

Les gérants sont supposés similaires et ayant le même montant d'actifs à gérer à l'instant 0. Néanmoins, il est supposé qu'ils ont des croyances différentes par rapport à la v.a ϵ donc un gérant qui croit que $\epsilon \sim \mathcal{N}(\varepsilon, \sigma^2)$ il est dit de type ε . La variance σ^2 est considérée la même pour tous les gérants (ceci signifie que les gérants prennent en compte une même volatilité pour l'actif risqué, mais qu'ils ont des avis divergents concernant son rendement espéré).

Soit la fonction f symétrique autour de 0 et paire (garantir autant d'acheteurs que de vendeurs pour les deux actifs), et pour des raisons de simplification f est supposé la distribution d'une variable normale de variance s^2 . Dans ce qui suit, f est prise comme la distribution du type ε .

5.2 Résolution du modèle

Afin de résoudre le modèle et permettre l'obtention d'un résultat comparable à un cas sans compétition, Guéant dans sa thèse [28] considère la situation d'une fonction d'utilité CARA de la forme :

$$\mu(x) = -\exp(-\lambda x).$$

Et il introduit quelques propositions.

Soit un gérant d'actifs de type ε , en premier lieu, il a fallut dériver une condition de premier ordre qui caractérise le θ optimal sachant que le gérant d'actif minimise :

$$\mathbb{E}[\mu(1 + r + \theta\varepsilon) + \beta C].$$

Proposition 10 (Condition de premier ordre). [28] La condition de premier ordre associée à un gérant d'actifs de type ε est :

$$(CPO_\varepsilon) : -\lambda^2 \sigma^2 \left(\theta - \frac{\varepsilon}{\lambda \sigma^2} \right) \exp \left(-\lambda(1+r) - \lambda \theta \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2 \right) + \beta m(\theta) c(\varepsilon) = 0. \quad (5.2)$$

Avec m la fonction distribution de probabilité du θ à l'équilibre, où $c(\cdot) = 2[\mathcal{N}(\frac{\cdot}{\sigma}) - \frac{1}{2}]$ est une fonction impaire, positive sur \mathbb{R}^+ et \mathcal{N} est la fonction distribution cumulative d'une variable gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 11 (Equation différentielle pour $\varepsilon \mapsto \theta(\varepsilon)$). [28] Considérer la fonction $\varepsilon \mapsto \theta(\varepsilon)$ qui donne le θ optimal pour chaque type. Si θ est de \mathcal{C}^1 alors elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$-\lambda^2 \sigma^2 \left(\theta - \frac{\varepsilon}{\lambda \sigma^2} \right) \exp \left(-\lambda(1+r) - \lambda \theta \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2 \right) \frac{d\theta}{d\varepsilon} + \beta f(\varepsilon) c(\varepsilon) = 0. \quad (5.3)$$

De plus, θ doit vérifier $\theta(0) = 0$.

Le passage de la distribution des types f à la distribution m des θ se fait par la fonction de cohérence $m(\theta)\theta'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$.

Proposition 12. [28] Soit θ une solution de l'EDO (équation différentielle ordinaire) (5.3). Alors, $\bar{\theta}$ définie par $\bar{\theta}(\varepsilon) = -\theta(-\varepsilon)$ est aussi une solution de (5.3).

Cette proposition offre une propriété qui permet de travailler avec un $\varepsilon > 0$ et simplifier l'analyse.

De retour à l'analyse économique, d'abord, le θ devrait être une fonction croissante de ε car l'optimisme concernant le rendement risqué mène à l'achat de

cet actif plus que le pessimisme.
 Pour $\varepsilon > 0$ l'EDO implique que :

$$\theta(\varepsilon) > \frac{\varepsilon}{\lambda\sigma^2}.$$

Soit $\varepsilon \rightarrow \theta_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\lambda\sigma^2}$ la solution usuelle du problème de Markowitz sans classement, ε devrait donc vérifier symétriquement que :

- $\forall \varepsilon > 0, \quad \theta(\varepsilon) > \theta_0(\varepsilon) > 0.$
- $\forall \varepsilon < 0, \quad \theta(\varepsilon) < \theta_0(\varepsilon) < 0.$

Sur ce, l'effet de classement subi par le modèle de Markowitz provoque un niveau de risque plus élevé.

Le problème à résoudre en effet est de chercher la fonction $\varepsilon \mapsto \theta(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ qui vérifie :

$$\theta'(\varepsilon) = \frac{\beta c(\varepsilon) f(\varepsilon)}{\lambda^2 \sigma^2 \exp[-\lambda(1+r+\theta(\varepsilon)\varepsilon) + 1/2\lambda^2\sigma^2\theta(\varepsilon)^2]} \cdot \frac{1}{\theta(\varepsilon) - \theta_0(\varepsilon)}.$$

Proposition 13 (Existence et unicité). [28] Il existe une unique fonction qui vérifie l'équation (5.3) avec les deux contraintes supplémentaires :

- $\theta(\varepsilon) > \theta_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\lambda\sigma^2}.$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(\varepsilon) = 0.$

Après avoir trouvé la fonction $\theta(\varepsilon)$ qui satisfait l'équation différentielle et donc une distribution m qui convient à la condition de premier ordre, il ne restera plus que la vérification de la condition de second ordre afin de garantir que le maximum du critère d'optimisation soit vraiment atteint.

Proposition 14. (Condition de second ordre)[28] Soit à introduire :

$$\Gamma(\varepsilon, \theta) = -\lambda^2\sigma^2 \left(\theta - \frac{\varepsilon}{\lambda\sigma^2} \right) \exp \left(-\lambda(1+r) - \lambda\theta\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda^2\theta^2\sigma^2 \right) + \beta m(\theta) c(\varepsilon) = 0.$$

En vertu de l'unique fonction $\theta(\varepsilon)$ donnée par les propositions précédentes, qui satisfait $\forall \varepsilon, \quad \Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) = 0$, ainsi que les conditions citées dans la proposition ci-dessus, il est à conclure que :

$$\partial_\theta \Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) < 0. \tag{5.4}$$

5.3 Exemple numérique illustratif

Dans la section précédente, le modèle a été présenté et joint d'une méthode de résolution, mais un calcul numérique de la solution reste nécessaire pour visualiser la forme de la courbe. Cependant, il faut calculer $\theta(\varepsilon)$ pour un exemple puis effectuer une comparaison entre la solution calculée et la fonction linéaire $\theta_0(\varepsilon)$ qui résulte usuellement dans le cas non-compétitif.

Les choix du portefeuille seront illustrés en considérant les données comme suit :

- Le rendement $r = 2\%$ avec un risque de $\sigma = 20\%$, $\lambda = 1$ et $s = 1\%$.
- Le coefficient β est pris très petit : $\beta = 5 \times 10^{-5}$.

Les résultats présentés dans la figure suivante sont obtenus par Guéant en utilisant une méthodologie d'éléments finis avec un processus de dichotomie pour trouver la seule solution satisfaisant : $\theta(0) = 0$

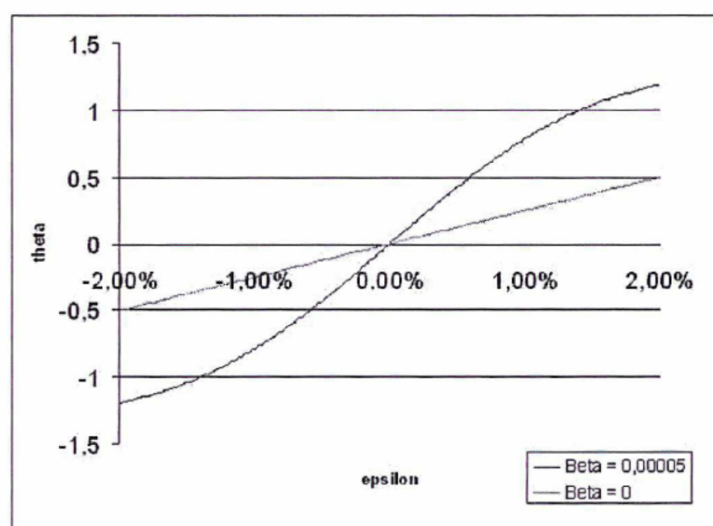


FIGURE 5.1 - $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $r = 2\%$, $\sigma = 20\%$, $\lambda = 1$ et $s = 1\%$.

Il est remarquable qu'une valeur très petite de β réussisse à modifier complètement la structure du modèle de Markowitz. Les incitations, aussi faibles soient elles, elles peuvent affecter globalement la structure d'un portefeuille.

Conclusion

Ce chapitre expose une généralisation de la théorie classique de la gestion de portefeuille dans laquelle le conflit d'intérêt qui existe entre les deux agents (gérants d'actifs/ investisseurs individuels) en raison de la concurrence des gérants d'actifs entre eux est modélisé sous forme d'un jeu à champ moyen, étant donné que ce type de jeux permet de considérer la situation d'un grand nombre d'agents en interaction.

Les gestionnaires d'actifs sont en concurrence dans le but d'augmenter leur montant d'actifs à gérer, ceci implique aux portefeuilles une exposition à des risques plus élevés.

Les motivations des gérants d'actifs peuvent effectivement induire des portefeuilles éloignés de l'optimalité pour les investisseurs. Autrement dit, les choix de portefeuille ont une sensibilité à la présence d'effets concurrentiels compétitifs ou de classement. Par ailleurs, ces effets ne peuvent être négligés.

Conclusion générale

Arrivé à la fin de ce travail, la première remarque scintillante à souligner est sa richesse et son intérêt issus de la multidisciplinarité de la théorie des jeux à champ moyen. Partant de la physique statique ainsi que ses champs d'applications aux problèmes mathématiques approfondis, et passant par des conflits socio-économiques, cette théorie inspire à la fois des lueurs d'espoir vers de nouvelles attributions sur le plan réel, encourage d'avantages la résolution de problèmes ardues mais annonce des difficultés contraignantes qui résulte de la nécessité de maîtriser et d'assimiler une multitude d'approches voisines sans lesquelles l'étude des jeux à champ moyen sera une tâche exaspérante voir sans aboutissements.

La sensibilité du point touché par ce type de jeux, sa particularité à pouvoir éclaircir les interactions figurantes au sein d'une population à nombre tendant vers l'infini et sa faculté à s'immiscer dans des applications et y fournir des atouts considérables seront-ils des appuis suffisant pour s'attendre que cette théorie déclenche une révolution socio-économique ?

Le taux d'effort misé pour s'approfondir dans les instances d'applications citées au cours de ce travail, pour aspirer les idées qu'elles dégagent et maîtriser les outils qu'elles évoquent, sera-t-il orné et récompensé par des résultats pouvant instaurer une nouvelle ère, un régime économique et social novice, une issue de secours pour sauver les pays, ainsi que les individus de la crise, de la ruine certaine ? Si la notion d'équilibre en théorie des jeux signifie une situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier, alors l'étendre au cas du champ moyen à un nombre très grand de joueur voir infini, procurera-t-il pour des conflits quotidiens qui font face à l'humanité des terrains d'ententes et des surfaces de compromis de spécificité égalitaire, autrement dit, obtenir des solutions où il n'y aura pas de perdants ? Les applications futures s'occuperont de répondre à ces questions et à tant d'autres, car, chaque réponse trouvée n'est autre que le début d'une nouvelle question.

Bibliographie

- [1] M. Albouy. Régulation dynamique conflictuelle. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte*, 4(3) :89–118, 1970.
- [2] R. J. Aumann. Markets with a continuum of traders. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 39–50, 1964.
- [3] M. Aziz and P. E. Caines. A mean field game computational methodology for decentralized cellular network optimization. *IEEE transactions on control systems technology*, 25(2) :563–576, 2016.
- [4] F. Bagagiolo and D. Bauso. Mean-field games and dynamic demand management in power grids. *Dynamic Games and Applications*, 4(2) :155–176, 2014.
- [5] T. Başar and G. J. Olsder. *Dynamic noncooperative game theory*. SIAM, 1998.
- [6] A. Bensoussan and J. Lions. Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique. *Méthodes Mathématiques de l'Informatique*, (6), 1982.
- [7] S. Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2010.
- [8] D. Besancenot, J.-M. Courtault, and K. El Dika. Piecework versus merit pay : A mean field games approach to academic behavior. *Revue d'économie politique*, 122(4) :547–563, 2012.
- [9] K. Bouchebah. Statistiques mathématiques. *Cours 2^{ème} année Licence Recherches opérationnelles et aide à la décision*, UAMB, 2017.
- [10] K. Bouchebah. Techniques de simulation et applications. *Cours Master 1 Mathématiques financières*, UAMB, 2019.
- [11] N. Boudrahem. Systèmes et EDP linéaires. *Cours Master 1 Mathématiques financières*, UAMB, 2018.

- [12] B. Brahma. Optimisation de portefeuilles financiers. *Cours Master 1 Mathématiques financières, UAMB*, 2019.
- [13] P. E. Caines, M. Huang, and R. P. Malhamé. Mean field games. 2015.
- [14] P. Cardaliaguet and C.-A. Lehalle. Mean field game of controls and an application to trade crowding. *Mathematics and Financial Economics*, 12(3) :335–363, 2018.
- [15] R. Carmona and F. Delarue. Learning by examples : What is a mean field game? In *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I*, pages 3–65. Springer, 2018.
- [16] R. Carmona, J.-P. Fouque, and L.-H. Sun. Mean field games and systemic risk. *SSRN 2307814*, 2013.
- [17] P. Chan and R. Sircar. Bertrand and cournot mean field games. *Applied Mathematics & Optimization*, 71(3) :533–569, 2015.
- [18] E. Dieulesaint and D. Royer. *Automatique appliquée*. Number BOOK. Masson, 1987.
- [19] B. Djehiche, A. Tcheukam, and H. Tembine. Mean-field-type games in engineering. *arXiv preprint arXiv :1605.03281*, 2016.
- [20] H. Dogguy. *Applications de la théorie des jeux à champ moyen*. PhD thesis, 2014.
- [21] I. Ekeland. Le pétrole sera-t-il bradé. *Pour la Science*, 2007.
- [22] L. Fatone, F. Mariani, M. C. Recchioni, and F. Zirilli. A trading execution model based on mean field games and optimal control. *Applied Mathematics*, 5(19) :3091, 2014.
- [23] H. Föllmer. Calcul d’Itô sans probabilités. In *Séminaire de Probabilités XV 1979/80*, pages 143–150. Springer, 1981.
- [24] D. Fudenberg and J. Tirole. Game theory mit press. *Cambridge, MA*, page 86, 1991.
- [25] R. S. Gibbons. *Game theory for applied economists*. Princeton University Press, 1992.
- [26] P. Giraud, O. Guéant, J. Lasry, and P. Lions. A mean field game model of oil production in presence of alternative energy producers. *Technical report*, 2010.
- [27] D. A. Gomes, L. Nurbekyan, and E. Pimentel. Economic models and mean-field games theory. In *30o Co16quio Brasileiro de Matemática.[30th Brazilian Mathematics Colloquium]*, 2015.
- [28] O. Guéant. *Théorie des jeux à champ moyen et applications économiques : second sujet : Taux d’escompte et développement durable*. PhD thesis, Paris 9, 2009.

- [29] O. Guéant, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions. Mean field games and applications. In *Paris-Princeton lectures on mathematical finance 2010*, pages 205–266. Springer, 2011.
- [30] O. Guéant, J. M. Lasry, P. L. Lions, et al. Mean field games and oil production. Technical report, 2010.
- [31] P. J.-J. Herings, R. J. Peeters, et al. Stationary equilibria in stochastic games : Structure, selection, and computation. *Journal of Economic Theory*, 118(1) :32–60, 2004.
- [32] H. Hotelling. The economics of exhaustible resources. *The Journal of Political Economy*, 39(2), 1931.
- [33] M. Huang, P. E. Caines, and R. P. Malhamé. Individual and mass behaviour in large population stochastic wireless power control problems : Centralized and Nash equilibrium solutions. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, volume 1, pages 98–103. IEEE, 2003.
- [34] M. Huang, P. E. Caines, and R. P. Malhamé. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents : Individual-mass behavior and decentralized ε -Nash equilibria. *IEEE transactions on automatic control*, 52(9) :1560–1571, 2007.
- [35] M. Huang and S. Nguyen. Mean field games for stochastic growth with relative utility. *ApplMath Optim* 74 :643-668, 2016.
- [36] O. G. Jean-Michel Lasry, Pierre Louis Lions. *Application of Mean Field Games to Growth Theory*. hal-00348376, 2008.
- [37] N. Khimoum. Calcul de probabilités. *Cours 2ème année Licence Recherches opérationnelles et aide à la décision*, UAMB, 2017.
- [38] A. C. Kizilkale and R. P. Malhamé. *Load shaping via grid wide coordination of heating-cooling electric loads : A mean field games based approach*. Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions, 2015.
- [39] A. C. Kizilkale and R. P. Malhamé. Collective target tracking mean field control for Markovian jump-driven models of electric water heating loads. In *Control of Complex Systems*, pages 559–584. Elsevier, 2016.
- [40] S. Konieczny. Introduction à la théorie des jeux. *Notes de cours CRIL-CNRS Université d'Artois - Lens*.
- [41] A. Lachapelle. Human crowds and groups interactions : A mean field games approach, 2010.
- [42] A. Lachapelle, J.-M. Lasry, C.-A. Lehalle, and P.-L. Lions. Efficiency of the price formation process in presence of high frequency participants : a mean

- field game analysis. *mathematics and financial economics*, 10(3) :223–262, 2016.
- [43] A. Lachapelle and M.-T. Wolfram. On a mean field game approach modeling congestion and aversion in pedestrian crowds. *Transportation research part B : methodological*, 45(10) :1572–1589, 2011.
- [44] D. Lacker and T. Zariphopoulou. Mean field and n-agent games for optimal investment under relative performance criteria. *Mathematical Finance*, 29(4) :1003–1038, 2019.
- [45] L. Laguzet and G. Turinici. Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model with application to the 2009–2010 influenza A (H1N1) epidemic in France. *Bulletin of Mathematical Biology*, 77(10) :1955–1984, 2015.
- [46] R. Laraki, J. Renault, and S. Sorin. *Bases Mathématiques de la théorie des jeux*. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2013.
- [47] R. Laraki and S. Sorin. Advances in zero-sum dynamic games. In *Handbook of game theory with economic applications*, volume 4, pages 27–93. Elsevier, 2015.
- [48] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Jeux à champ moyen. i–le cas stationnaire. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(9) :619–625, 2006.
- [49] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Jeux à champ moyen. ii–horizon fini et contrôle optimal. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(10) :679–684, 2006.
- [50] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Mean field games. *Japanese journal of mathematics*, 2(1) :229–260, 2007.
- [51] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, and O. Guéant. Application of mean field games to growth theory, 2008.
- [52] C.-A. Lehalle. L’utilisation des jeux à champ moyen en finance de marché. *Linkedin*, 2017.
- [53] L. F. Lima. A mean-field game model of economic growth : an essay in regularity theory. *Universidade Federal de São Carlos*, 2016.
- [54] P.-L. Lions. Cours au College de France. *Available at www.college-de-france.fr*, 2007.
- [55] P.-L. Lions and J.-M. Lasry. Towards a self-consistent theory of volatility. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 86(6) :541–551, 2006.
- [56] Z. Ma, D. S. Callaway, and I. A. Hiskens. Decentralized charging control of large populations of plug-in electric vehicles. *IEEE Transactions on control systems technology*, 21(1) :67–78, 2011.
- [57] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. pp. 77–91., 1952.

- [58] F. Mériaux, V. Varma, and S. Lasaulce. Mean field energy games in wireless networks. In *2012 conference record of the forty sixth Asilomar conference on signals, systems and computers (ASILOMAR)*, pages 671–675. IEEE, 2012.
- [59] B. Moll, Y. Achdou, F. J. Buera, J.-M. Lasry, and P.-L. Lions. Partial differential equation models in macroeconomics, 2014.
- [60] O. Morgenstern and J. Von Neumann. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1953.
- [61] C. Mouzouni. *Topics in Mean Field Games Theory & Applications in Economics and Quantitative Finance*. PhD thesis, Ecole Centrale Leon, 2019.
- [62] Y. Murat. Introduction à la théorie des jeux. *Paris, Dunod*, 2004.
- [63] H. N. Nagaraja. Order statistics from independent exponential random variables and the sum of the top order statistics. In *Advances in Distribution Theory, Order Statistics, and Inference*, pages 173–185. Springer, 2006.
- [64] J. F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1) :48–49, 1950.
- [65] B. A. Neumann. Stationary equilibria of mean field games with finite state and action space. *Dynamic Games and Applications*, pages 1–27, 2020.
- [66] T. Pénard. La théorie des jeux répétés : Application à la concurrence oligopolistique. *Note de cours*, 2008.
- [67] R. Sait. Application de la théorie des jeux dans l’organisation industrielle. *Mémoire de Magister, UAMB*, 2008.
- [68] L. S. Shapley. Stochastic games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 39(10) :1095–1100, 1953.
- [69] A. Smith. The wealth of nations [1776], 1937.
- [70] R. M. Solow. A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, No 1, p. 65-94, 1956.
- [71] I. Swiecicki. *Étude de quelques modèles issus de la théorie des jeux en champ moyen*. PhD thesis, Cergy-Pontoise, 2016.
- [72] B. Takhedmit. Calcul stochastique et modèles financiers. *Cours Master 2 Mathématiques financières, UAMB*, 2019.
- [73] S. Touati. Jeux dynamiques et applications. *Cours Master 2 Mathématiques financières, UAMB*, 2019.
- [74] N. Touche. Analyse et fouille de données financières. *Cours Master 2 Mathématiques financières, UAMB*, 2019.
- [75] T. Vasiliadis. An introduction to mean field games using probabilistic methods. Master’s thesis, Athens, 2019.
- [76] B. Ziliotto. Une introduction à la théorie des jeux. *Cours Mathématiques, ENPC*, 2017.

Résumé

La théorie des jeux a pris beaucoup d'ampleur en termes d'applications dans diverses disciplines. Cependant, les situations d'interaction extirpées des problèmes conflictuels réels présentent le plus souvent, un grand nombre d'agents pouvant tendre vers l'infini ; par conséquent, il a fallu qu'une nouvelle théorie nommée " théorie des jeux à champ moyen " remédie à ce désagrément et ouvre un horizon de possibilité d'aboutir à des solutions. Ce mémoire est justement un état de l'art sur les jeux à champ moyen partant du modèle initial simple " l'heure de début de la réunion " à d'autres formulations inspirées par le contrôle optimal et l'analyse stochastique. Par la suite, une synthèse bibliographique des domaines principaux d'applications de ces jeux a été réalisée, notamment en économie et en finance. Un exemple en gestion de portefeuille financier sous effet de concurrence a été pris afin d'illustrer l'intérêt des jeux à champ moyen.

Mots clés

Jeux à champ moyen, Jeux à un grand nombre de joueurs, Equation Hamilton-Jacobi-Bellman, Jeux différentiels et stochastiques, Equilibre de Nash à N joueurs, Applications des jeux à champ moyen.

Abstract

Game theory's applications were enclosed in various disciplines. In fact, the actual conflict situations present most of the time a large number of agents interacting. Therefore, a new theory called "mean-field game theory" was developed in order to solve games modeling this kind of complicated cases. This dissertation is precisely a state of the art on mean-field games starting from a first toy model "When does the meeting start?" to other formulations inspired by optimal control and stochastic analysis. Subsequently, it exposes a bibliographical summary of the main fields where these games were applied, particularly in economics and finance. An example of financial portfolio management under the effect of competition was taken to illustrate the use of mean-field games.

Keywords

Mean-field games, Games with large number of players, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Differential and stochastic games, Nash equilibrium with N players, Mean-field games applications.