

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : GÉNIE DES MATÉRIAUX

PAR :

NOM PRÉNOM : DJOUMER LYES

NOM PRÉNOM : BENAZOUZ SAMIR

Thème

**Contribution à l'étude des matériaux à gradient de propriétés fonctionnels
(F.G.M)**

Soutenu le 27/06/2018 devant le jury composé de:

Melle ADJOUADI

Président

Mr. BENSLIMANE

Rapporteur

Melle BOUZIDI

Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018

RMERCIEMENTS

Nous remercions les membres de jury qui nous font l'honneur d'examiner ce travail.

Toute notre gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation du début jusqu'à la fin.

C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que nous remercions notre promoteur Mr ABDELHAKIM BENSLIMANE de nous avoir offert un sujet aussi intéressant, à sa disponibilité, orientations, et ses précieux conseils qui nous ont permis d'arriver à accomplir ce travail.

Enfin, tous nous ami(e)s, et ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents pour leur soutien moral et leur encouragements tout le long de mon cursus universitaire ainsi que mes frères et sœurs Koceila, Fahem, Ghilas, Cylia et sont marie Chrif ma petite sœur Fahima sans oublier mes amis en particulier Mouhand akli Loucif, Kaoussane, Said, Billal, Toufik, et Khemisti, et tous les autres.

Finalement à mes beaux-parents et à ma femme chérie pour son affection et sa présence à mes cotes dans les moments sombre.

DEDICACES

Je dédie ce travail :

A ma mère, qui a autant sacrifié pour me voir atteindre ce jour.

A mon père pour le soutien incessant qu'il m'a toujours apporté.

A tous mes frères et sœurs.

A toute ma famille.

A mon binôme pour qui je souhaite une vie pleine de joie et de réussite.

A toute la promo génie des matériaux, et à tous mes amis sans exception.

ABSTRACT

Solutions have been derived for stresses and the displacements in thick cylindrical and spherical shells made of functionally graded materials with exponential-varying properties subjected to internal and external pressure. Poisson's ratio is assumed to be constant. The obtained results show that the inhomogeneity properties of FGM have a significant influence on the displacement and stresses distribution along the radial direction. A numerical solution using finite element method is also presented and good agreement was found between the analytical solutions and the solutions carried out through the FEM. The values used in this study are chosen to demonstrate the effect of inhomogeneity on displacements and stresses distributions

RESUME

L'analyse sur un matériau à gradient fonctionnel sous pression interne et externe à l'état stationnaire est réalisée dans cette étude. Les propriétés du matériau sont supposées varier de façon non linéaire dans la direction radiale et circonférentielle, le module de Young est une fonction de puissance avec un coefficient de non homogénéité ϕ et le coefficient de Poisson est supposé constant. La répartition des contraintes sont supposée être en fonction du rayon, avec des conditions aux limites sur les surfaces intérieures et extérieures du cylindre et de la sphère. Les résultats analytiques pour le cylindre et la sphère en FGM sous l'influence de la pression interne et externe concordent bien avec les résultats d'éléments finis en utilisant des simulations FEM.

LISTE DES SYMBOLES :

E_i : Module de Young homogène(GPa).

$E(\mathbf{r})$: Module de Young non homogène(GPa).

r : Rayon(m).

R_i : Rayon intérieur (m).

R_o : Rayon extérieur(m).

P_i : Pression interne (MPa).

P_o : Pression externe (MPa).

ν : Coefficient de poisson.

σ_{rr} : Contrainte radiale(MPa).

$\sigma_{\theta\theta}$: Contrainte circonférentielle(MPa).

$\sigma_{\phi\phi}$: Contrainte circonférentielle « sphérique » (MPa).

σ_{zz} : Contrainte axial (MPa).

$\sigma_{\theta z}$, σ_{rz} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{r\phi}$ et $\sigma_{\theta\phi}$: Contraintes de cisaillement (MPa).

ϵ_{rr} : Déformation radial.

$\epsilon_{\theta\theta}$: Déformation circonférentielle.

ϵ_{zz} : Déformation axial.

$\epsilon_{\theta z}$, ϵ_{rz} , $\epsilon_{r\theta}$, $\epsilon_{\theta\phi}$ et $\epsilon_{r\phi}$: déformation de cisaillement.

ϵ_{ll} : Trace de déformations.

u_r : Déplacement radial (m).

ϕ : Coefficient de non homogénéité.

λ_1 et λ_2 : Les paramètres de l'équation caractéristique.

μ et λ : Constantes de Lamé.

ξ , η , γ et ψ : Constantes de non homogénéité.

A et **B** : Constante de calcul n°1 et n°2 respectivement.

δ_{ij} : Delta de Kronecker.

LISTE DES FIGURES

Figure (I.1) : Développement des matériaux depuis l'âge de bronze.

Figure (I.2) : A gauche le schéma d'un FGM à porosité graduée, à droite une image montrant la porosité graduelle d'un os.

Figure (I.3) : Schéma d'une microstructure graduée.

Figure(I.4) : Domaines d'application des trois types de matériaux à gradient fonctionnelle.

Figure(I.5) : Schéma de comparaison des FGM avec les composites.

Figure(I.6) : Différentes schématisations de matériaux.

Figure (II.1) : Configuration d'un cylindre FGM sous pression.

Figure(II.2) : Configuration d'une sphère creuse FGM sous pression.

Figure (II.3) : Géométrie 2D d'un demi-cylindre creux.

Figure (II.4) : Zones qui doivent présenter une symétrie représentées sur les bords.

Figure (II.5) : Zone laissée libre définie sur le rayon externe.

Figure (II.6) : Zone qui doit être sous chargement représentée sur le rayon interne.

Figure (II.7) : représentation du maillage utilisé dans le cylindre.

Figure (II.8) : Géométrie 3D d'une demi-sphère creuse.

Figure (II.9) : Zones qui doivent présenter une symétrie représentées sur la zone n°1.

Figure (II.10) : Zone laissée libre définie sur la zone n°2.

Figure (II.11) : Zone qui doit être sous chargement représentée sur la zone n°3.

Figure (II.12) : Représentation du maillage utilisé dans la sphère.

Figure (III.1) : Distribution du module d'élasticité.

Figure(III.2) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre : comparaison des résultats analytiques et numériques

Figure(III.3) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous le chargement de la pression : comparaison des résultats analytiques et numériques.

Figure (III.4) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre : comparaison des résultats analytiques et numériques.

Figure (III.5) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre : comparaison des résultats analytiques et numériques.

Figure(III.6) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite en fonction logarithmique.

Figure(III.7) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite

Figure(III.18) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite

Figure(III.9) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite.

Figure(III.10) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite

Figure(III.11) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite

Figure(III.12): L'évolution du déplacement le long de la paroi de la sphère : comparaison des résultats analytiques et numériques.

Figure(III.13): Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi de la sphère : comparaison des résultats analytiques et numériques.

Figure(III.14): Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi de la sphère : comparaison des résultats analytiques et numériques.

SOMMAIRE

| | |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| ABSTRACT..... | I |
| RESUME | II |
| LISTE DES NOTATIONS..... | III |
| LISTE DES FIGURES..... | V |
| SOMMAIRE..... | VII |
| INTRODUCTION GENERALE..... | 1 |
| CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux FGM | |
| I – 1 INTRODUCTION:..... | 3 |
| I – 2 Historique :..... | 4 |
| I – 3 Types de matériaux FGM :..... | 5 |
| I – 3 – 1 Matériaux à gradient de composition chimique..... | 5 |
| I – 3 – 2 Matériaux à gradient de porosité :..... | 6 |
| I – 3 – 3 Matériaux à gradient microstructural :..... | 7 |
| I – 4 Domaines d’applications des matériaux à gradient fonctionnel:..... | 8 |
| I – 4 – 1 L’industrie aérospatiale :..... | 10 |
| I – 4 – 2 L’industrie Automobile :..... | 10 |
| I – 4 – 3 Biomédical :..... | 10 |
| I – 4 – 4 Défense :..... | 11 |
| I – 4 – 5 Energie :..... | 11 |
| I – 4 – 6 Optoélectronique :..... | 11 |
| I – 4 – 7 Marine:..... | 11 |
| I – 4 – 8 Sport :..... | 11 |
| I – 4 – 9 Autres :..... | 11 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I – 5 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites Traditionnels.... | 12 |
| I – 6 Quelques méthodes d’élaboration des matériaux FGM :..... | 13 |
| I – 6 – 1 Frittage en infiltration :..... | 13 |
| I – 6 – 2 Implantation ionique :..... | 13 |
| I – 6 - 3 Technique de dépôt à la vapeur :..... | 14 |
| I – 6 - 4 Métallurgie des poudres :..... | 14 |
| I – 6 - 5 Méthode centrifuge :..... | 14 |
| I - 6 - 6 Techniques de fabrication par impression 3D :..... | 14 |
| I – 7 Avantages et inconvénients des FGM :..... | 15 |
| I – 7 – 1 Avantages des FGM :..... | 15 |
| I – 7 - 2 Inconvénients des FGM :..... | 15 |
| I – 8 Développements récents et défis des FGM..... | 16 |
| I - 9-Conclusion :..... | 17 |

CHAPITRE II : Calculs analytiques et simulation numérique

| | |
|-------------------------------------------|----|
| I – INTRODUCTION..... | 19 |
| II - Formulation du problème :..... | 20 |
| II – 1 Partie analytique :..... | 20 |
| II – 1 – 1 Coordonnées cylindriques | 20 |
| II – 1 - 2 CAS n°1 « CYLINDRE » :..... | 21 |
| II – 1 – 3 Coordonnées sphériques..... | 27 |
| II – 1 - 4 CAS n°2 « SPHERE » :..... | 28 |
| II – 2 Partie numérique :..... | 33 |
| II – 2 - 1 CAS n°1 « CYLINDRE » :..... | 33 |

| | |
|------------------------------------------------|-----------|
| A) Définitions globales :..... | 33 |
| B) Composant :..... | 33 |
| C) Maillage :..... | 35 |
| II – 2 - 2 CAS n°2 « SPHERE » :..... | 36 |
| A) Définitions globales :..... | 36 |
| B) Composant :..... | 36 |
| C) Maillage :..... | 38 |
| II – 3 CONCLUSION :..... | 39 |
| CHAPITRE III : Résultats et discussions | |
| I – Résultats et discussion :..... | 41 |
| II – 1 Cas du cylindre :..... | 42 |
| II - 2 Cas de la sphère:..... | 51 |
| III – Conclusion :..... | 54 |
| CONCLUSION GENERALE..... | 56 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES | 57 |

INTRODUCTION GENERALE :

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G. M ").

D'autre part, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), une nouvelle génération des matériaux composites homogènes avancés d'abord proposés pour les barrières thermiques, ont été de plus appliqués pour les structures de l'ingénierie moderne dans un environnement à température élevée. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques .Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [2].Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques et même dans des domaines tels que le médical et dans l'armée, etc....

L'objectif est de démontrer que l'inhomogénéité du matériau a une influence significative sur les comportements mécaniques des structures creuses à parois épaisses constituées d'un matériau à gradient fonctionnel exponentiel. Ainsi, en choisissant une bonne valeur, les ingénieurs peuvent concevoir une sphère creuse FGM spécifique qui peut répondre à certaines exigences particulières.

CHAPITRE I

Généralités sur les matériaux FGM

I – 1 INTRODUCTION:

Les matériaux sont continuellement développés au fil du temps comme indiqué sur la figure (I.1), des matériaux purs de l'époque aux matériaux composites qui sont utilisés aujourd'hui. Au tout début, l'utilisation des matériaux purs était plus fréquente mais ils étaient très limités, puisque l'application réelle peut ne pas être satisfaite par l'utilisation d'un seul métal, les alliages peuvent être plus forts et plus polyvalents. Le bronze, qui est l'alliage de cuivre et d'étain, était le premier alliage qui a été développé en 4000 A.J.C (âge de bronze) [1]. Depuis lors, différents mélanges de matériaux ont été réalisés afin de combiner leur forces selon les exigences fonctionnelles.

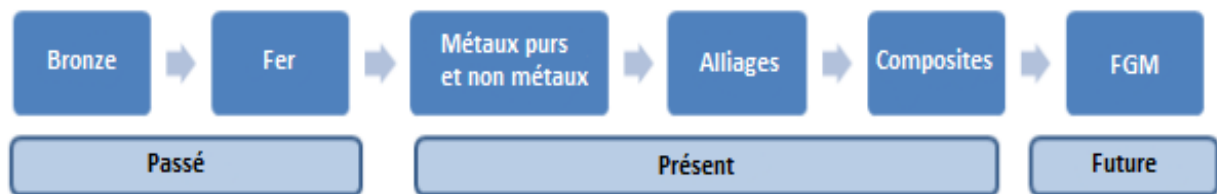


Figure (I.1) : Développement des matériaux depuis l'âge de bronze.

Les matériaux composites sont, pour la plupart, d'une forme avancée des matériaux qui sont faits à partir de deux constituants ou plus avec les propriétés physiques et chimiques sensiblement différentes de chaque matériau. Les matériaux composites permettent d'avoir des combinaisons distinctes comme par exemple une surface dure et résistante à l'usure et un noyau doux selon la condition fonctionnelle d'application. L'hétérogénéité, l'anisotropie et la symétrie sont principales caractéristiques des matériaux composites présentant un intérêt particulier pour diverses applications. Le rapport « résistance/rigidité élevée », la résistance à la fatigue, l'usure et la corrosion, la haute fiabilité, etc... sont les avantages des composites par rapport aux métaux purs ou alliés. En dépit de tous ces avantages, les matériaux composites sont soumis à une forte transition des propriétés à l'interface, ce qui peut entraîner une défaillance des composants (par délamination) dans des conditions de travail extrêmes.

Ces inconvénients présents dans les composites classiques peuvent être éliminés par la forme modifiée des composites appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Les matériaux FGM sont des composites non homogènes effectués à partir de différentes phases de constituants matériels (habituellement en céramique et métal)[2]. Dans les matériaux type FGM, les différentes phases microstructurales ont différentes fonctions, en variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs avec un changement doux et

continu d'une surface à l'autre, ce qui élimine les problèmes d'interface et diminue les concentrations de contraintes thermiques. Par exemple, dans un FGM (métal / céramique), le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté ; doivent être élevée. En revanche, la céramique riche, avec une conductivité thermique faible peut résister aux températures plus élevées, et par conséquent il est utilisé dans les régions fortement exposées à la température. Les FGM permettent l'adaptation de la composition du matériau de manière à en retirer le maximum d'avantages de leur hétérogénéité. En outre, d'autres aspects d'exécution peuvent être améliorés en utilisant un FGM, par exemple, réduction de la température dans la phase de cuivre pour empêcher l'adoucissement thermique excessif du matériau, d'autres applications de FGM incluent des composants trouvés en aéronautique et aérospatiale.

I – 2 Historique :

Le concept d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) a été développé par des chercheurs japonais en 1984. En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Le principal objectif était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de la chaleur important frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps protéger l'intérieur contre les surchauffes. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. [3]

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- ✓ Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- ✓ Ténacité du matériau coté basse température.

✓ Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [4].

L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Côté haute température) et des métaux (Côté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (10 mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

I – 3 Types de matériaux FGM :

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné le développement de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types de FGM qui sont actuellement produits comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM, et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté dans les sections suivantes.

I – 3 – 1 Matériaux à gradient de composition chimique

Il s'agit du type de FGM qu'on va traiter en détail dans ce mémoire, où la composition chimique varie progressivement, en fonction du rayon dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multiphasé. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant

le processus de frittage [5]. Le changement progressif de la distribution des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau à gradient fonctionnel. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté serait soluble dans une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé, mais avec une composition chimique variable en raison de la solubilité.

Ce type de FGM est moins commun. Les matériaux classés de façon fonctionnelle les plus couramment utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multiphasique [6, 7]. Les phases et la composition chimique sont faites pour varier à travers le volume du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideraient à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçue. Les différentes phases qui sont produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions d'élaborations, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. En métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre couche par couche la composition de poudre requise, puis le compactage de la poudre et ensuite le frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieraient en fonction de la position dans le volume du matériau à gradient fonctionnel.

Il en existe deux autres types qui seront cités ci-dessous.

I – 3 – 2 Matériaux à gradient de porosité :

Le matériau à gradient fonctionnel de gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer par rapport à une direction dans le matériau. La forme et la taille des pores sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnel.

Ce type de matériau fonctionnel est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer consiste en une porosité graduelle fonctionnelle, et la porosité graduelle aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de cicatrisation de cet implant, et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée aide également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module

d'élasticité du matériau de l'implant pour qu'il corresponde à celui du tissu humain. La porosité graduée aide à réduire la densité du bio-implant. Ceci est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain figure (I.2).

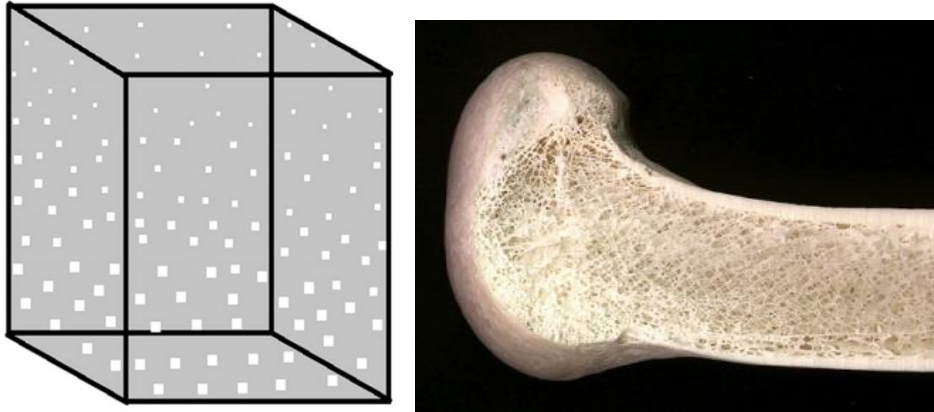


Figure (I.2) : à gauche le schéma d'un FGM à porosité graduée, à droite une image montrant la porosité graduelle d'un os.

I – 3 – 3 Matériaux à gradient microstructural :

Le matériau à gradient fonctionnel microstructural est un autre type de FGM, où la microstructure est adaptée de sorte que les différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer graduellement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue au cours du processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. On laisse refroidir lentement le noyau du même matériau, ce qui aiderait à produire différentes microstructures de celles situées. Un diagramme schématique d'une microstructure typiquement graduée est présenté à la Figure. (I.3).

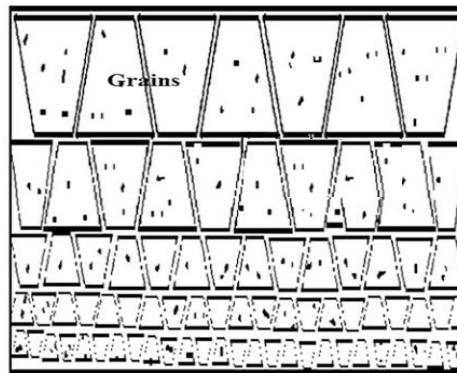


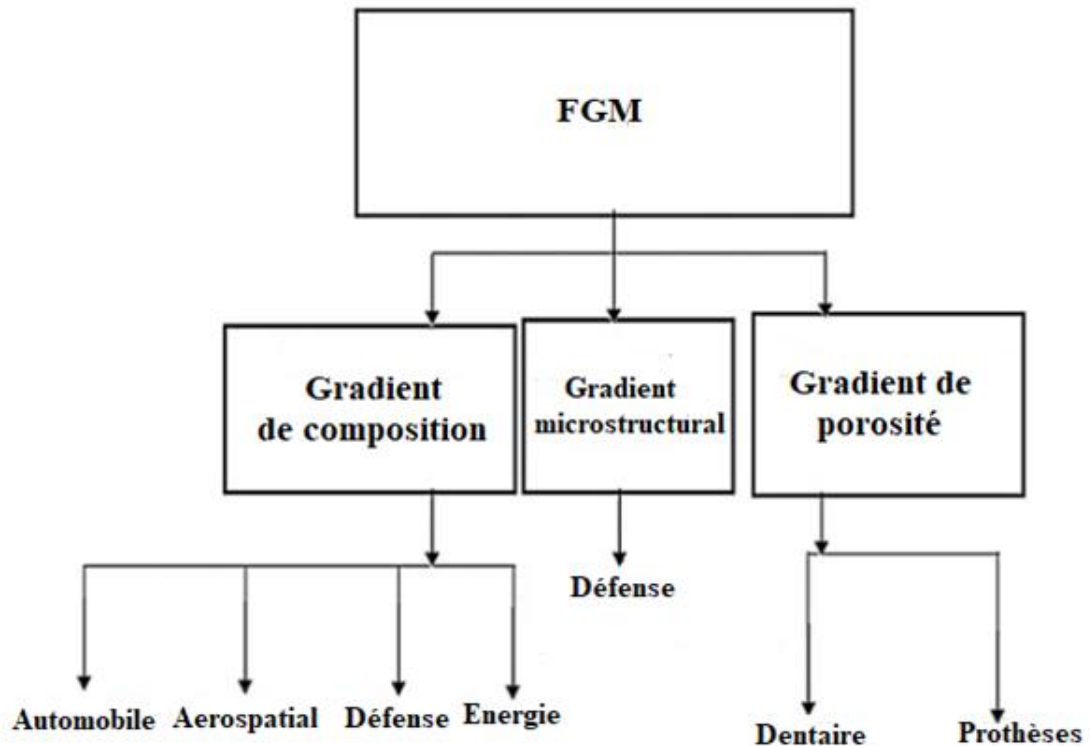
Figure (I.3) : Schéma d'une microstructure graduée.

La microstructure graduée entraînerait un changement progressif des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau.

Les FGM à gradient microstructural trouvent leur application dans des composants qui doivent avoir une surface très dure pour résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact élevé qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau fonctionnellement gradué comprend l'acier cémenté, les cames ou les couronnes, les paliers ou arbres et les applications de turbine [9, 10]. Les domaines d'application des différents types de FGM sont présentés dans la section suivante.

I – 4 Domaines d'applications des matériaux à gradient fonctionnel:

Les caractéristiques importantes des FGM les ont favorisées dans presque tous les domaines d'activité humaine. Des matériaux fonctionnellement calibrés sont actuellement utilisés dans un certain nombre d'industries, avec un potentiel énorme à utiliser dans d'autres applications à l'avenir. Les applications actuelles et l'application futuriste de la MGF sont présentées dans cette section. Les domaines d'application actuels sont l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense, l'électricité / électronique, l'énergie, la marine, l'optoélectronique et la thermoélectronique. La figure (I.4) montre les différents types de FGM et leurs domaines d'application. L'utilisation des FGMs est très prometteuse dans les applications où les conditions de fonctionnement sont difficiles, par exemple pour les revêtements résistants à l'usure utilisés dans l'industrie minière, les boucliers thermiques, les composants des moteurs thermiques, les échangeurs de chaleur, les revêtements de plasma pour les réacteurs de fusion dans les réacteurs nucléaires, et pour les générateurs thermoélectriques et dans les applications d'isolation électrique.



Figure(I.4) : Domaines d'application des trois types de matériaux à gradient fonctionnelle.

Les matériaux à gradation fonctionnel sont également idéaux pour réduire le désaccord entre les propriétés thermomécaniques de la liaison métal-céramique qui aide à prévenir le décollement. Les demandes futures pour des matériaux fonctionnalisés sont dans de telles applications, où des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques extraordinaires sont requises, et qui doivent être capables de supporter des environnements de travail sévères.

Ces futurs domaines d'application potentiels comprennent des applications où les applications structurelles et d'ingénierie nécessitent une combinaison de fonctions incompatibles, telles que la dureté et la ténacité. Les futurs domaines d'application des matériaux fonctionnels seront également étendus, lorsque les coûts de production de ces matériaux d'ingénierie importants sont réduits. Bien que certaines applications soient plus intéressées par la fiabilité du FGM que par le coût de telles matières, ces industries comprennent l'aérospatiale et l'énergie nucléaire. D'autre part, le coût de production de qualité fonctionnelle les matériaux sont importants dans certaines applications telles que les outils de coupe, les pièces de machine et les composants du moteur.

L'utilisation de matériaux fonctionnels est maintenant considérée comme l'un des matériaux les plus importants, efficaces et efficients pour promouvoir le développement durable dans les industries. Certaines de ces applications, telles que l'aérospatiale,

l'automobile, le biomédical, la défense, l'énergie et l'industrie maritime, sont présentées et expliquées dans les sous-sections suivantes.

I – 4 – 1 L'industrie aérospatiale :

L'application initiale, dans laquelle des matériaux à gradient fonctionnel ont été développés, était destinée aux carrosseries planes. L'application de ce nouveau matériau est accrue au fil des années dans l'industrie aérospatiale. La plupart des équipements et des structures aérospatiales sont maintenant faits de matériaux fonctionnels. Ceux-ci comprennent les composants du moteur-fusée, la structure du treillis de l'engin spatial, les panneaux d'échange thermique et certaines structures telles que les réflecteurs, les panneaux solaires, le boîtier de la caméra, les roues de turbine, les pales, le bord d'attaque de missiles, et des navettes spatiales. Des matériaux fonctionnellement calibrés sont également utilisés pour les murs structuraux qui combinent les propriétés d'isolation thermique et acoustique. Les automobiles sont une autre industrie dans laquelle des matériaux fonctionnels ont été utilisés. Ceux-ci seront présentés dans la sous-section suivante

I – 4 – 2 L'industrie Automobile :

L'utilisation de matériaux fonctionnels dans l'industrie automobile est encore limitée en raison du coût élevé de production de matériaux fonctionnels. Cependant, le matériau est utilisé dans des parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé actuel justifie son utilisation. Les présentes applications comprennent les chemises de cylindre de moteur pour les pistons de moteur diesel, les ressorts à lames, les bougies d'allumage, les chambres de combustion, les arbres d'entraînement, les amortisseurs, les volants, certaines pièces de carrosserie, les vitres et les freins de voiture de course. En outre, des matériaux à gradient fonctionnel sont utilisés dans des revêtements corporels améliorés pour automobiles.

I – 4 – 3 Biomédical :

Le corps humain est composé d'un certain nombre de matériaux fonctionnels, qui comprend les os et les dents. Ce sont les parties du corps humain les plus remplacées, à la suite de dommages à ces parties, ou en raison du processus de vieillissement naturel. Les matériaux d'ingénierie qui sont biocompatibles sont utilisés pour leurs remplacements. Les parties naturelles que ces matériaux remplacent sont des matériaux fonctionnels dans la nature. C'est pourquoi la majorité des matériaux fonctionnels utilisés dans l'industrie biomédicale sont utilisés pour les implants. Les matériaux à gradient fonctionnel de porosité sont les plus couramment utilisés dans cette industrie, car leurs propriétés sont très proches de celles des pièces qu'ils ont l'intention de remplacer [11].

I – 4 – 4 Défense :

La capacité des FGM à offrir des propriétés de résistance à la pénétration en inhibant la propagation des fissures est une propriété attrayante qui fait que le matériau est favorisé dans l'industrie de la défense. Les matériaux classés fonctionnellement sont utilisés dans l'industrie de la défense dans des applications telles que les gilets pare-balles et les plaques d'armure. Un autre domaine d'application clé des matériaux fonctionnels est celui des véhicules blindés.

I – 4 – 5 Energie :

Les industries de l'énergie ont constamment besoin de différents types de matériaux fonctionnels, afin d'améliorer l'efficacité de certains de leurs équipements. Parmi les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie de l'énergie, citons la paroi interne des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et récipients sous pression, l'électrode graduée pour la production de le combustible à oxyde solide, les matériaux piézo-électriques à gradient fonctionnel pour le transducteur à ultrasons, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements de pale de turbine, et pour les revêtements à barrière thermique.

I – 4 – 6 Optoélectronique :

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo; support de stockage magnétique, semi-conducteur à bande graduée.

I – 4 – 7 Marine :

Les matériaux fonctionnellement classés trouvent également leur application dans l'industrie maritime. Les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie marine et sous-marine comprennent l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression.

I – 4 – 8 Sport :

Des matériaux fonctionnellement calibrés sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tels que les clubs de golf, les raquettes de tennis et les skis. Ceux-ci sont tous faits de matériaux à gradient fonctionnels.

I – 4 – 9 Autres :

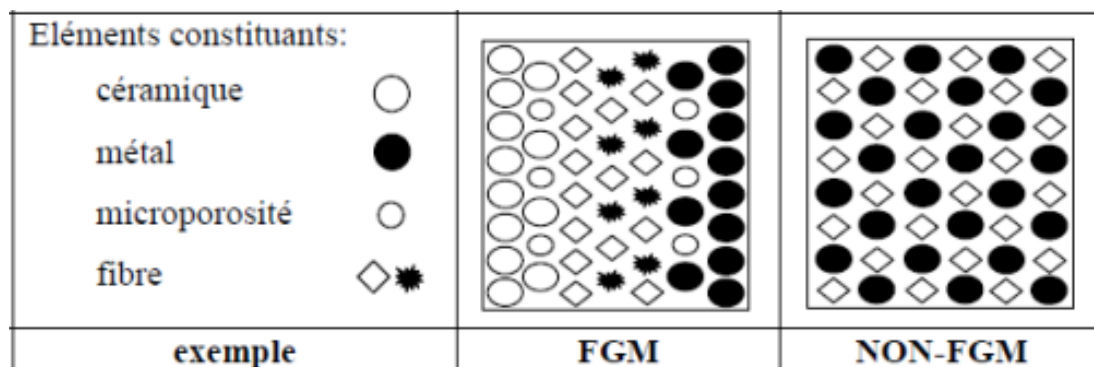
L'application de matériaux classés de manière fonctionnelle comprend également, mais sans s'y limiter, les outils et matrices de coupe pour améliorer la résistance thermique de l'outil de coupe et de la matrice, lames de rasoir en fer-aluminide / acier inoxydable [12]

comme les bouteilles d'air pour la lutte anti-incendie, les portes ignifuges, les montures de lunettes et les casques. D'autres comprennent les tubes cryogéniques de l'IRM, les récipients sous pression, les réservoirs de carburant, les malles pour ordinateurs portables, les instruments de musique et les tables de radiographie. Le domaine d'application des matériaux gradués fonctionnellement devrait augmenter si le coût de production de ce matériau est réduit à l'avenir.

I – 5 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites

Traditionnels :

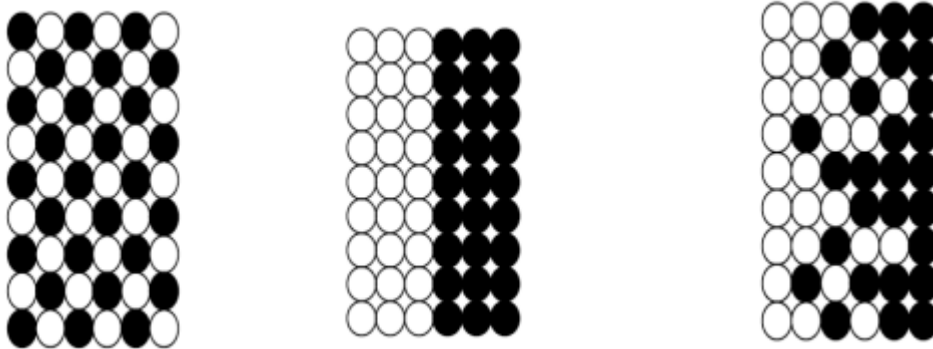
On peut facilement comparer les FGM aux composites car ils partent du même principe, si on prend les FGM on peut généralement dire que ce sont des matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. La différence avec les composites c'est que les FGM sont non homogènes figure(I.5), et leur changement continue dans la composition et donc dans la microstructure. Dans certains cas on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.



Figure(I.5) : Schéma de comparaison des FGM avec les composites.

Yoshihisa [13] a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels figure (I.6). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié, a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la

céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué(c).

Figure(I.6) : Différentes schématisations de matériaux

I – 6 Quelques méthodes d’élaboration des matériaux FGM :

Plusieurs techniques sont disponibles pour produire des matériaux fonctionnalisés (FGM). Quelques un d'entre eux sont décrits ci-dessous en détail.

I – 6 – 1 Frittage en infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d’un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [14]. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I _ 6 – 2 Implantation ionique :

C’est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines (sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement d’effectue par les faisceaux énergétiques d’ions eu via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé

I – 6 - 3 Technique de dépôt à la vapeur :

Les techniques de dépôt à la vapeur décrivent une variété de méthodes de dépôt sous vide qui peuvent être utilisées pour produire des films minces sur les matériaux de base. Toutes ces techniques peuvent être utilisées pour produire des FGM minces uniquement.

Différents types de techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ils consomment beaucoup d'énergie et produisent des jauges toxiques comme sous-produits [15].

D'autres techniques basées sur le dépôt qui peuvent déposer des revêtements minces fonctionnellement dégradés sont le dépôt par faisceau d'électrons (EBD), le dépôt par faisceau ionique (IBD) et la synthèse à haute température auto-propagatrice (SHS) [16]. Toutes les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont pas économiques pour produire des MGF de type en vrac.

I – 6 - 4 Métallurgie des poudres :

La technique basée sur la métallurgie des poudres peut être utilisée pour produire des MGF de type en vrac avec une structure discontinue (par étapes). Le procédé est réalisé en utilisant des étapes comprenant le pesage et le mélange de poudre selon la distribution spatiale préconçue selon les exigences fonctionnelles, l'empilage et l'éperonnage des poudres pré mélangées, et enfin le frittage [17].

I – 6 - 5 Méthode centrifuge :

La méthode centrifuge est capable de produire des FGM de type en vrac à structure continue. Il utilise la force de gravité par filage de la moisissure pour produire des matériaux fonctionnels [18]. La différence de densité des matériaux et le filage des moules produisent des FGM. Cette méthode a deux inconvénients: cette méthode ne peut produire que des FGM de forme cylindrique et il existe une limite à laquelle le type de gradient peut être produit.

I - 6 - 6 Techniques de fabrication par impression 3D :

En anglais : Solid freeform fabrication (SFF)/Additive manufacturing (AM), également appelée impression 3D, est un processus de jonction de matériaux pour fabriquer des objets à partir de données de modèles 3D, généralement couche par couche, par opposition à la technologie de fabrication soustractive [19]. Cet outil sans procédé de

fabrication peut produire des pièces métalliques denses en peu de temps, avec une grande précision.

I – 7 Avantages et inconvénients des FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

I – 7 – 1 Avantages des FGM :

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement [20] et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- ✓ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- ✓ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- ✓ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- ✓ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- ✓ Suppression de délaminage.
- ✓ Augmentation de la ténacité à la rupture.
- ✓ Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les sur faces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I – 7 - 2 Inconvénients des FGM :

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion

(T1) et une céramique avec une température de fusion (T2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T1 \ll T2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [20].

I – 8 Développements récents et défis des FGM

Dans le cas de la plupart des MGF, une propriété matérielle varie dans le sens de l'épaisseur [21]. Cependant, les applications modernes peuvent exiger des matériaux FG dans lesquels les propriétés matérielles dans l'épaisseur et les directions axiales [22]. Récemment, un matériau de gradient dans lequel les propriétés varient dans les deux directions sont également développés et étudiés en profondeur [23, 24]. Ces matériaux intelligents sont connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel bidirectionnel (BDFGM). La technique AM basée sur le dépôt de métaux au laser est la plus appropriée pour produire de tels BDFGM [25]. Bien que d'importants progrès technologiques aient été réalisés dans le domaine des FGM, quelques problèmes critiques doivent encore être résolus. Une base de données correcte des FGM en termes de paramètres et de tests n'est toujours pas disponible. La méthode d'essai et de mesure conventionnelle peut ne pas convenir pour évaluer les performances des MGF modernes, de sorte que des développements de méthodes d'essai avancées sont nécessaires [25]. La plupart des techniques de traitement des FGM sont très coûteuses, de sorte qu'une technique de traitement à faible coût qui peut produire en masse des MGF de grande taille et complexes reste encore un défi. Le choix du matériau approprié pour l'application prévue est le défi immédiat et direct pour le développement futur de la technologie dans le domaine de la recherche sur les FGM.

I - 9-Conclusion :

Les FGM, pour la plupart, sont des matériaux constitués des composants différents le plus connu étant les céramiques et les métaux. Ce sont donc des composites améliorés présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition est donc dans la microstructure des matériaux, distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente ou d'une porosité graduelle.

CHAPITRE II

Calculs analytiques et simulation numérique

I – INTRODUCTION :

Les formes creuses à paroi épaisse sont des éléments structuraux communs à de nombreuses applications d'ingénierie, notamment les réservoirs sous pression, les coques de navires, les ailes et les fuselages d'avions, les structures de confinement des centrales nucléaires, les tuyaux, les roquettes, les missiles, les toits en béton, les cheminées, les tours de refroidissement, les réservoirs de stockage de liquide et de nombreuses autres structures. La coquille sphérique et le cylindre à paroi épaisse soumis à la pression sont des problèmes classiques du génie mécanique étudiés par plusieurs chercheurs dans le passé.

Une classe de nouveaux matériaux composites avancés comprend des matériaux fonctionnels (FGM) avec des propriétés de matériau variant en continu. Ces matériaux ont reçu une attention considérable dans de nombreuses applications d'ingénierie depuis leur apparition en 1984 au Japon [26, 27].

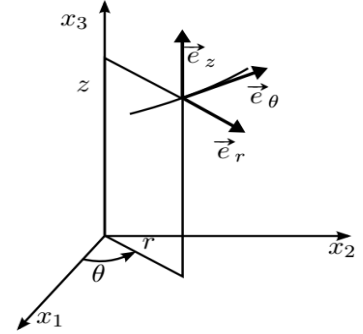
Dans ce travail, on a utilisé la méthode des éléments finis pour analyser les déformations finies axisymétriques d'un cylindre et d'une sphère creux pressurisés. La sphère et le cylindre sont composés d'un matériau élastique, linéaire à gradient de propriétés fonctionnelles.

Le module d'Young est représenté par une loi de puissance et le coefficient de Poisson est constant. L'équation d'équilibre se transforme en une équation différentielle non linéaire que nous avons résolue analytiquement.

Une étude numérique par méthode des éléments finis a été présentée, les résultats sont présentés sous forme d'évolution des différentes contraintes dans la direction radiale. Les résultats analytiques sont ensuite comparés au numérique pour trouver un bon accord entre les deux. [28]

II - Formulation du problème :**II – 1 Partie analytique :****II – 1 – 1 Coordonnées cylindriques :**Repère local : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$



Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.3})$$

Définition des déformations :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right\}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\}$$

Equation d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0$$

II – 1 - 2 CAS n°1 « CYLINDRE » :

Considérons un cylindre creux à paroi épaisse axisymétrique et infiniment long, c'est-à-dire, sa longueur est grande devant son diamètre. Ainsi les effets de bords sont négligeables.

Le cylindre est constitué d'un matériau à gradient de propriétés fonctionnelles FGM avec un rayon intérieur R_i et un rayon extérieur R_o . Il est soumis à une pression intérieure P_i et une pression extérieure P_o . On suppose que le matériau est élastique isotrope linéaire avec un coefficient de Poisson ν constant et que le module d'Young $E(r)$ est une fonction de la direction radiale.

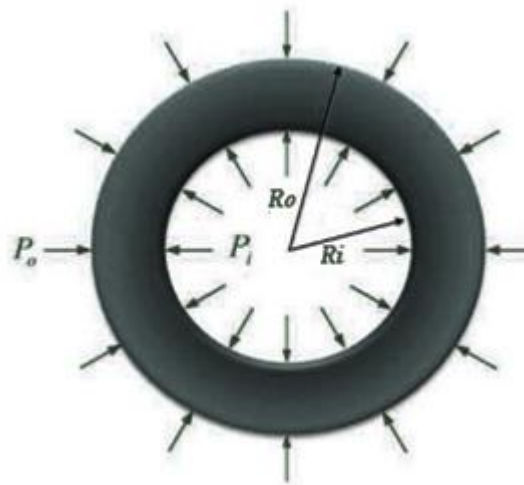


Figure (II.1) : configuration d'un cylindre FGM sous pression.

En l'absence des forces de volume, l'équation d'équilibre en coordonnées cylindriques (r, θ, z) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (1)$$

Où σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont, respectivement, les composantes radiale et circonférentielle du tenseur des contraintes de Cauchy.

Le vecteur de déplacement s'écrit : $\bar{u}(r, \theta, z) = u_r(r)\bar{e}_r$.

Les composantes du tenseur des déformations sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{u}{r} \end{cases} \quad (2)$$

La loi de Hooke est définie pour un matériau FGM par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu(r)\varepsilon_{ij} + \lambda(r)\varepsilon_{ll}\delta_{ij} \quad (3)$$

$$\text{Où : } \mu(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda(r) = \frac{\nu E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ sont les constantes de Lamé et } \nu$$

le coefficient de Poisson.

On suppose que le module d'Young $E(r)$ est une fonction en loi de puissance [29]:

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{R_i} \right)^\phi \quad (4)$$

Les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \end{aligned} \quad (5)$$

On pose :

$$\lambda = \xi(\nu)E(r), \quad 2\mu(r) + \lambda(r) = \psi(\nu)E(r)$$

$$\text{Avec : } \xi(\nu) = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \psi(\nu) = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \gamma(\nu) = \frac{\xi(\nu)}{\psi(\nu)} \quad (6)$$

En substituant les équations (2) dans (5) nous obtenons les résultats suivants:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= (2\mu + \lambda) \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right)\end{aligned}\quad (7)$$

En remplaçant (7) dans (1) nous obtenons :

$$(2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{u_r}{r} = 0 \quad (8)$$

On multiplie l'équation (8) par $\frac{r^2}{(2\mu + \lambda)}$, pour avoir :

$$\left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r \right) + \frac{r^2}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial (2\mu + \lambda)}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{r}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial \lambda}{\partial r} u_r = 0 \quad (9)$$

En remplaçant (6) et les constantes de Lamé dans l'équation (9) on obtient :

$$\left(r^2 \frac{du_r}{dr^2} + r \frac{du_r}{dr} - u_r \right) + r^2 \frac{dE(r)}{E(r)dr} \frac{du_r}{dr} + \gamma(v) \frac{dE(r)}{E(r)dr} r u_r = 0 \quad (10)$$

Avec :

$$\gamma(v) = \frac{v}{1-v} \quad (11)$$

On dérive (4) on obtient :

$$\frac{dE(r)}{dr} = \frac{\phi E_i}{R_i} \left(\frac{r}{R_i} \right)^{\phi-1} \quad (12)$$

Ce qui nous permet d'obtenir les calculs suivant :

$$\frac{1}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} = \frac{\phi}{r} \quad (13)$$

En remplaçant (13) dans l'équation (10) on obtient l'EDO suivante :

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r(1 + \phi) \frac{du_r}{dr} + (\gamma(v)\phi - 1)u_r = 0 \quad (14)$$

Afin de réécrire l'équation (14) nous procédons au changement de variables suivant :

$$t = \ln r \quad (15)$$

$$\frac{d^2 u_t}{dt^2} + \phi \frac{du_t}{dt} + (\phi\gamma(v) - 1)u_t = 0 \quad (16)$$

La solution de l'EDO peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_t = Ae^{t^{\lambda_1}} + Be^{t^{-\lambda_2}} \quad (17)$$

Avec comme solution de l'équation caractéristique:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-\phi + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-\phi - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad (18)$$

Et :

$$\Delta = \phi^2 - 4(\phi\gamma(v) - 1) \quad (19)$$

On remplace (15) et (18) dans (17), on obtient :

$$u_r = Ae^{\ln r^{\lambda_1}} + Be^{\ln r^{\lambda_2}} \quad (20)$$

$$u_r = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} \quad (20.1)$$

A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites ; λ_1 et λ_2 sont les paramètres de l'équation caractéristique :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\phi^2 - 4(\gamma(v)\phi - 1)} \\ \lambda_2 = -\frac{\phi}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\phi^2 - 4(\gamma(v)\phi - 1)} \end{cases} \quad (21)$$

En remplaçant les solutions obtenues dans (5), on obtient :

$$\sigma_{rr} = (\lambda_1\psi(v) + \xi(v))\frac{E_i}{R_i^\phi} Ar^{\phi+\lambda_1-1} + \lambda_2\psi(v) + \xi(v))\frac{E_i}{R_i^\phi} Br^{\phi+\lambda_2-1} \quad (22)$$

La même procédure nous conduit aux contraintes, respectivement, circonférentielle et axiale :

$$\sigma_{\theta\theta} = (\psi(v) + \lambda_1\xi(v))\frac{E_i}{R_i^\phi} Ar^{\phi+\lambda_1-1} + \psi(v) + \lambda_2\xi(v))\frac{E_i}{R_i^\phi} Br^{\phi+\lambda_2-1} \quad (23)$$

$$\sigma_{zz} = \xi(v)(\lambda_1 + 1)\frac{E_i}{R_i^\phi} Ar^{\phi+\lambda_1-1} + \xi(v)(\lambda_2 + 1)\frac{E_i}{R_i^\phi} Br^{\phi+\lambda_2-1} \quad (24)$$

Dans le cas d'un cylindre soumis à des pressions interne et externe, les constantes A et B peuvent être obtenues à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R_i} = -P_i \quad ; \quad (25)$$

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R_o} = -P_o$$

L'équation (22) conduit à un système linéaire de deux équations à deux inconnues A et B suivant :

$$(\lambda_1 \psi(v) + \xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} A R_i^{\phi+\lambda_1-1} + \lambda_2 \psi(v) + \xi(v) \frac{E_i}{R_i^\phi} B R_o^{\phi+\lambda_2-1} = -P_i \quad (26)$$

$$(\lambda_1 \psi(v) + \xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} A R_i^{\phi+\lambda_1-1} + \lambda_2 \psi(v) + \xi(v) \frac{E_i}{R_i^\phi} B R_o^{\phi+\lambda_2-1} = -P_o$$

La résolution de l'équation (26) conduit aux solutions suivantes :

$$A = \left[(\lambda_1 \psi(v) + \xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} (R_i^{\phi+\lambda_2-1} - R_o^{\phi+\lambda_2-1}) \right]^{-1} \times$$

$$\left[P_o - P_i - (\lambda_2 \psi(v) + \xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} B (R_i^{\phi+\lambda_2-1} - R_o^{\phi+\lambda_2-1}) \right] \quad (27)$$

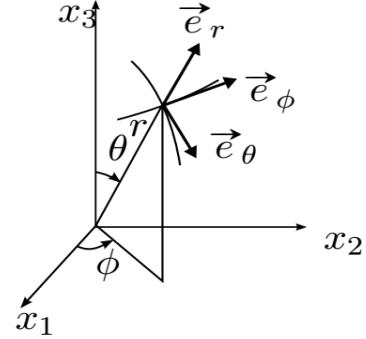
$$B = \left(\frac{(P_i - P_o) R_i^{\phi+\lambda_1-1}}{(R_i^{\phi+\lambda_1-1} - R_o^{\phi+\lambda_1-1})} - P_i \right) \times$$

$$\left[\frac{(\lambda_2 \psi(v) + \xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} R_i^{\phi+\lambda_2-1} - (\lambda_2 \psi(v) + \xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} (R_i^{\phi+\lambda_2-1} - R_o^{\phi+\lambda_2-1}) R_i^{\phi+\lambda_1-1}}{(R_i^{\phi+\lambda_1-1} - R_o^{\phi+\lambda_1-1})} \right]^{-1} \quad (28)$$

II – 1 – 3 Coordonnées sphériques :

Repère local : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{r\phi} & \sigma_{\theta\phi} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$



Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.8})$$

Définition des déformations :

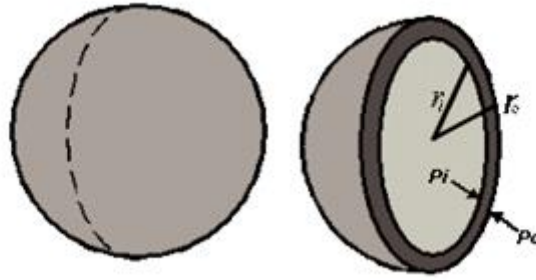
$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{\theta\phi} &= \frac{1}{2r} \left\{ \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right\} + \frac{1}{2r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ \varepsilon_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right\} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Equation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta}{r} + f_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \sigma_{\theta\phi} \right) + \frac{1}{r} \left[(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta} \right] + f_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\theta\phi} \cot \theta) + f_\phi = 0$$

II – 1 - 4 CAS n°2 « SPHERE » :



Figure(II.2) : configuration d'une sphère creuse FGM sous pression.

Considérons une sphère creuse en FGM avec un rayon interne R_i et un rayon externe R_o , soumis respectivement à la pression interne et externe P_i et P_o (Fig. x). On suppose que le coefficient de Poisson ν , prend une valeur constante et que le module d'élasticité E est supposé varier radialement selon la forme exponentielle [29] comme suit:

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{R_i} \right)^\phi \quad (4)$$

Le déplacement dans la direction r est noté u . Deux composants de la déformation peuvent être exprimés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{\theta\phi} = 0 \end{array} \right. \quad (29)$$

Où ε_r et ε_θ sont des déformations radiales et circonférentielles.

L'équation d'équilibre de la sphère à paroi épaisse de MGF, en l'absence de forces corporelles, est exprimée :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (30)$$

Les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu(r)\varepsilon_{rr} + \lambda(r)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu(r)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(r)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2\mu(r)\varepsilon_{\phi\phi} + \lambda(r)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}) \end{aligned} \quad (31)$$

On pose :

$$\lambda = \xi(\nu)E(r), \quad 2\mu(r) + \lambda(r) = \psi(\nu)E(r)$$

$$\text{Où : } \mu(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda(r) = \frac{\nu E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ sont les constantes de Lamé et } \nu$$

le coefficient de Poisson.

$$\text{Avec : } \xi(\nu) = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \psi(\nu) = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \gamma(\nu) = \frac{\xi(\nu)}{\psi(\nu)} \quad (6)$$

En substituant les équations (29) dans (31) nous obtenons les résultats suivants:

$$\sigma_{rr} = (2\mu(r) + \lambda(r))\varepsilon_{rr} + \lambda(r)(2\varepsilon_{\theta\theta}) \quad (32)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = (2\mu(r) + 2\lambda(r))\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(r)\varepsilon_{rr}$$

On remplace (32) dans (30) on obtiendra les calculs suivants :

$$(2\mu + \lambda) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left(\frac{d}{dr} (2\mu + \lambda) + \frac{2\lambda}{r} + \frac{4\mu}{r} \right) \frac{d\lambda}{dr} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \right) u = 0 \quad (33)$$

On multiplie l'équation (33) fois $\frac{r^2}{(2\mu + \lambda)}$, pour avoir :

$$(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r) + \frac{r^2}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial(2\mu + \lambda)}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{r}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial \lambda}{\partial r} u_r = 0 \quad (34)$$

En remplaçant (6) et les constantes de Lamé dans l'équation (34) on obtient :

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left(\frac{r}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} + 2 \frac{\eta(\nu)}{\psi(\nu)} + 2 \frac{\gamma(\nu)}{\psi(\nu)} \right) r \frac{du_r}{dr} + 2 \left(\frac{\eta(\nu)}{\psi(\nu)} \frac{r}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} - \frac{\eta(\nu)}{\psi(\nu)} - \frac{\gamma(\nu)}{\psi(\nu)} \right) u_r = 0 \quad (35)$$

Avec :

$$\gamma(\nu) = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (11)$$

On dérive (4) on obtient :

$$\frac{dE(r)}{dr} = \frac{\phi E_i}{R_i} \left(\frac{r}{R_i} \right)^{\phi-1} \quad (12)$$

Ce qui nous permet d'obtenir les calculs suivant :

$$\frac{1}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} = \frac{\phi}{r} \quad (13)$$

En remplaçant (13) dans l'équation (35) on obtient l'EDO suivante :

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r(\phi + 2) \frac{du_r}{dr} - \frac{2(\nu\phi + \nu - 1)u_r}{-1 + \nu} = 0 \quad (36)$$

Afin de réécrire l'équation (36) nous procédons au changement de variables suivant :

$$t = \ln r ; \quad (15)$$

$$\frac{d^2 u_t}{dt^2} + (\phi + 1) \frac{du_t}{dt} - \frac{2(\nu\phi + \nu - 1)u_t}{-1 + \nu} = 0 \quad (37)$$

La solution de l'EDO peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_t = Ae^{t^{\lambda_1}} + Be^{t^{-\lambda_2}} \quad (38)$$

Avec :

$$\lambda_1 = \frac{-(\phi+1) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (39)$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\phi+1) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Et :

$$\Delta = (\phi+1)^2 - 4 \left(-\frac{2(\nu\phi + \nu - 1)}{-1 + \nu} \right) \quad (40)$$

On remplace (15) et (39) dans (38), on obtient :

$$u_r = Ae^{\ln r^{\lambda_1}} + Be^{\ln r^{\lambda_2}} \quad (41)$$

$$u_r = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} \quad (42)$$

A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites ; λ_1 et λ_2 sont les paramètres de l'équation caractéristiques :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{(\phi+1)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\phi+1)^2 - 4 \left(-\frac{2(\nu\phi + \nu - 1)}{-1 + \nu} \right)} \\ \lambda_2 = -\frac{(\phi+1)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\phi+1)^2 - 4 \left(-\frac{2(\nu\phi + \nu - 1)}{-1 + \nu} \right)} \end{cases} \quad (43)$$

En remplaçant les solutions obtenues dans (31), on obtient :

$$\sigma_{rr} = (\lambda_1 \psi(\nu) + 2\xi(\nu)) \frac{E_i}{R_i^\phi} Ar^{\phi+\lambda_1-1} + (\lambda_2 \psi(\nu) + 2\xi(\nu)) \frac{E_i}{R_i^\phi} Br^{\phi+\lambda_2-1} \quad (44)$$

La même procédure nous conduit aux contraintes tangentielles :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = (\psi(v) + \xi(v)(\lambda_1 + 1)) \frac{E_i}{R_i^\phi} A r^{\phi+\lambda_1-1} + (\psi(v) + 2\xi(v)(\lambda_2 + 1)) \frac{E_i}{R_i^\phi} B r^{\phi+\lambda_2-1} \quad (45)$$

Dans le cas d'un cylindre soumis à des pressions interne et externe, les constantes A et B peuvent être obtenues à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R_i} = -P_i \quad ; \quad (25)$$

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R_o} = -P_o$$

L'équation (44) conduit à un système linéaire de deux équations à deux inconnues A et B suivant :

$$(\lambda_1 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} A r^{\phi+\lambda_2-1} + (\lambda_2 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} B r^{\phi+\lambda_2-1} = -P_i \quad (46)$$

$$(\lambda_1 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} A r^{\phi+\lambda_2-1} + (\lambda_2 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} B r^{\phi+\lambda_2-1} = -P_o$$

La résolution de l'équation (46) conduit aux solutions suivantes :

$$A = \left[(\lambda_1 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} (R_i^{\phi+\lambda_2-1} - R_o^{\phi+\lambda_2-1}) \right]^{-1} \times \left[P_o - P_i - (\lambda_2 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} B (R_i^{\phi+\lambda_2-1} - R_o^{\phi+\lambda_2-1}) \right] \quad (47)$$

$$B = \left(\frac{(P_i - P_o) R_i^{\phi+\lambda_1-1}}{(R_i^{\phi+\lambda_1-1} - R_o^{\phi+\lambda_1-1})} - P_i \right) \times \left[\frac{(\lambda_2 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} R_i^{\phi+\lambda_2-1} - (\lambda_2 \psi(v) + 2\xi(v)) \frac{E_i}{R_i^\phi} (R_i^{\phi+\lambda_2-1} - R_o^{\phi+\lambda_2-1}) R_i^{\phi+\lambda_1-1}}{(R_i^{\phi+\lambda_1-1} - R_o^{\phi+\lambda_1-1})} \right]^{-1} \quad (48)$$

II – 3 Partie numérique :

Une méthode de résolution numérique à base d'éléments finis est utilisée pour étudier le comportement mécanique et la distribution des contraintes d'une sphère et d'un cylindre FGM, soumis à des pressions internes et externes, ce qui nous mène à des résultats qu'on compare avec la méthode analytique.

II – 3 - 1 CAS n°1 « CYLINDRE » :

Les étapes de l'étude numérique se font comme suit :

A) Définitions globales :

Dans cette section on définit les variables.

La seule variable à définir dans ce cas est $r=(x^2+y^2)^{0.5}m$

B) Composant :

Dans cette section on doit donner la géométrie, implémenter un matériau à la géométrie, définir les conditions aux limites et lui donner un maillage

- **Géométrie :**

On travaille sur un model 2D, dans lequel on trace 2 cercles pleins. Le premier aura un rayon $r=0.2m$ dans lequel on va soustraire un autre cercle plein de rayon $r=0.1m$ pour arriver à la forme qui suit dans la figure (II.3) :

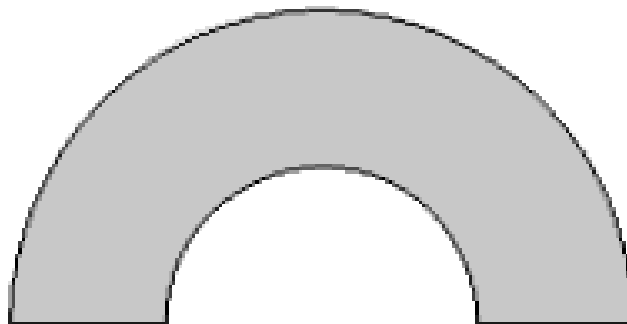


Figure (II.3) : Géométrie 2D d'un demi-cylindre creux

- **Matériau :**

On travaille dans le domaine de la mécanique du solide. Le matériau utilisé est de type élastique linéaire, avec :

- Module d'Young une fonction en loi de puissance : $E(r) = E_i \left(\frac{r}{R_i} \right)^\phi$
- Coefficient de Poisson constant $\nu = 0.3$

- **Conditions aux limites :**

Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

1. Nous supposons un demi-cylindre pour des raisons de symétrie. Pour cela nous imposons sur les deux bords du cylindre la condition de symétrie figure(II.4).

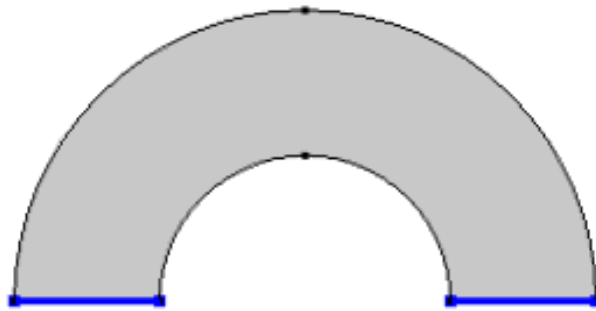


Figure (II.4) : Zones qui doivent présenter une symétrie représentées sur les bords.

2. Le cylindre a un chargement $P_o=0$ Pa pour $R_o= 0.2$ m ce qui correspond à une frontière non chargée (libre sur sa partie extérieure) voir figure (II.5)

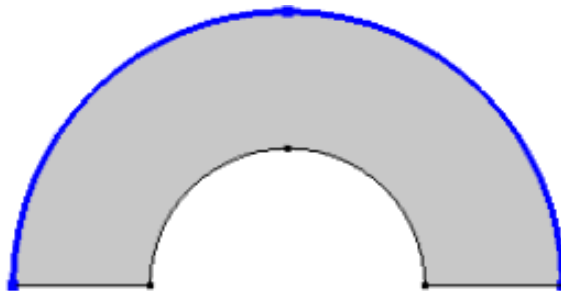


Figure (II.5) : Zone laissée libre définie sur le rayon externe.

3. Et enfin, Un chargement $P_i=1$ GPa est imposé au niveau de la frontière interne $R_i=0.1$ m, Figure (II.6) :

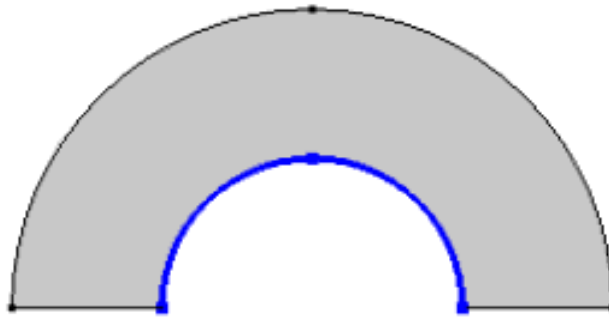


Figure (II.6) : Zone qui doit être sous chargement représentée sur le rayon interne.

C) Maillage :

Un maillage est la discrétisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés fins et bien définis. L'objet d'un maillage est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système et, éventuellement, son environnement (le milieu), dans l'optique de simulations de calculs ou de représentations graphiques. Pour ce cas on utilisera un maillage quadrilatère structuré, Sachant que plus le maillage est fin, plus les résultats obtenus seront précis. Figure (II.7) :

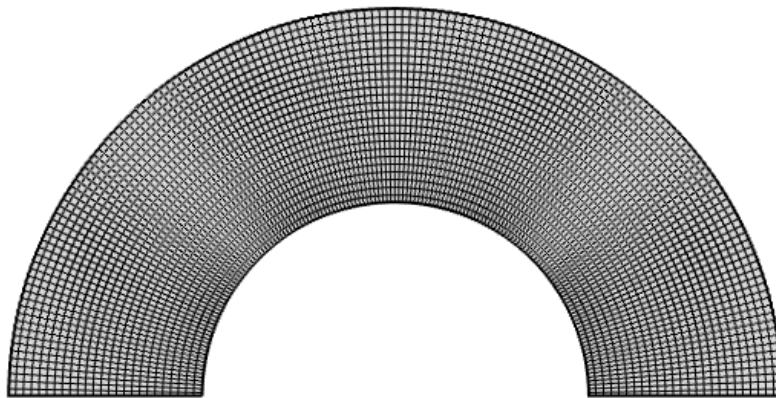


Figure (II.7) : représentation du maillage utilisé dans le cylindre.

II – 3 - 2 CAS n°2 « SPHERE » :

Les étapes de l'étude numérique se font comme suit :

A) Définitions globales :

Dans le cas de la sphère qui sera un corps 3D la variable r est définie comme suit :
 $r=(x^2+y^2+z^2)^{0.5}$ m.

B) Composant :

Dans cette section on donne la géométrie, implémente un matériau à la géométrie, définit les conditions aux limites et lui donne un maillage.

- **Géométrie :**

Nous construisons un model 3D, dans lequel une demi sphère creuse est représentée en raison des symétries que présente la géométrie. La partie pleine a un rayon externe $R_0=0.2$ m et la partie interne a un rayon $R_i=0.1$ m. La géométrie est présentée sur la figure (II.8) :

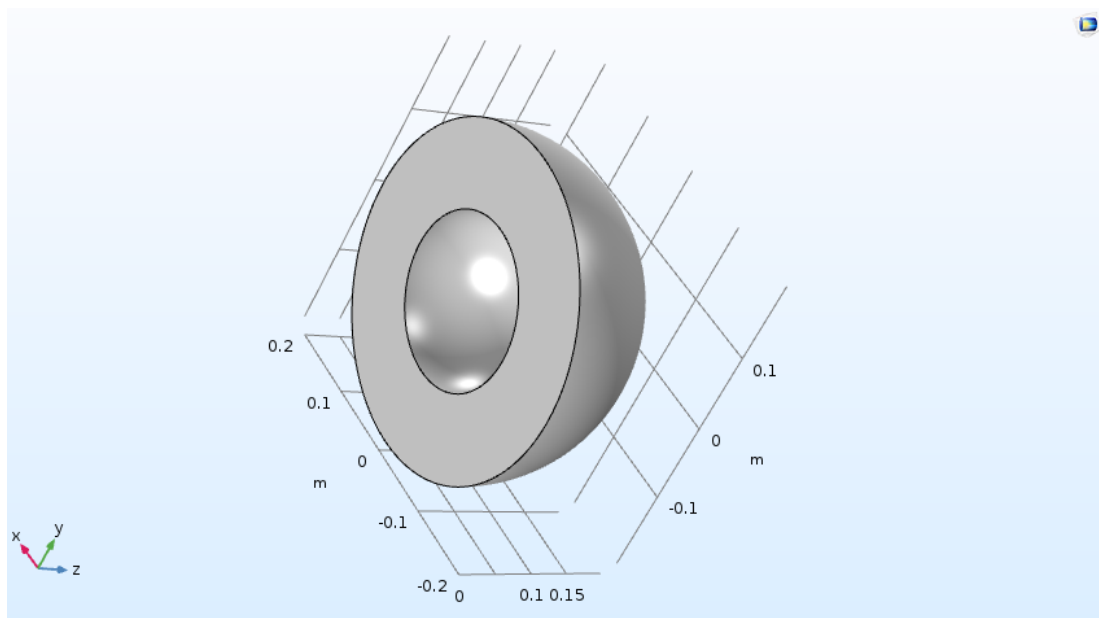


Figure (II.8) : Géométrie 3D d'une demi-sphère creuse

- **Matériau :**

On travaille dans le domaine de la mécanique du solide. Le matériau utilisé est de type isotrope, élastique et linéaire, avec :

- Module d'Young une fonction en loi de puissance : $E(r) = E_i \left(\frac{r}{R_i} \right)^\phi$
- Coefficient de Poisson constant $\nu = 0.3$

- **Conditions aux limites :**

Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

1. En raison de la symétrie du problème, nous considérons une demi-sphère. Une condition de symétrie est imposée aux bords de celle-ci, figure(II.9).

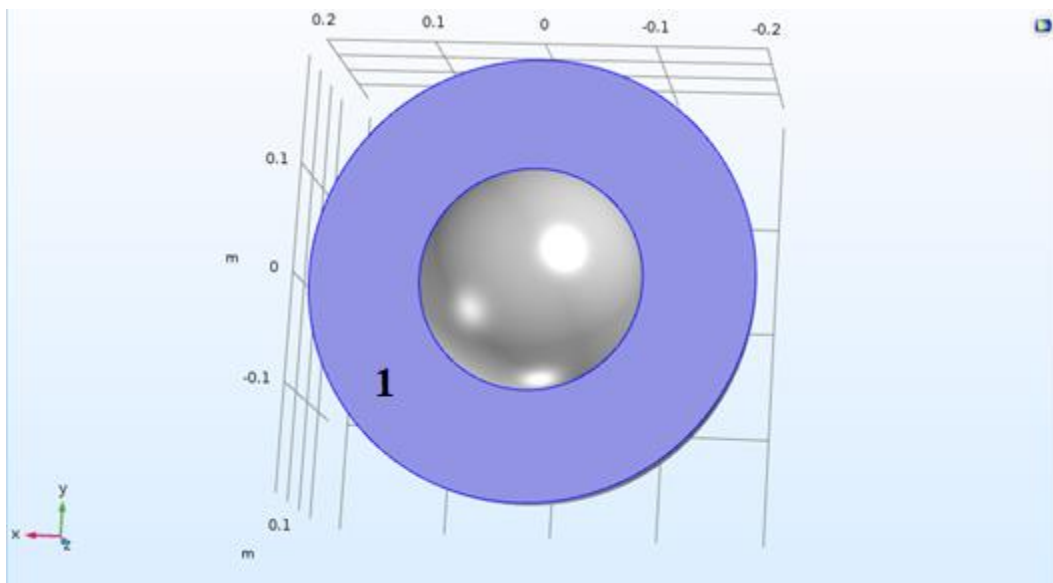


Figure (II.9) : Zones qui doivent présenter une symétrie représentées sur la zone n°1.

2. Un chargement $P_o=0$ MPa est imposé sur la frontière externe $R_o=0.2$ m et donc sans chargement ou frontière externe libre, figure (II.10).

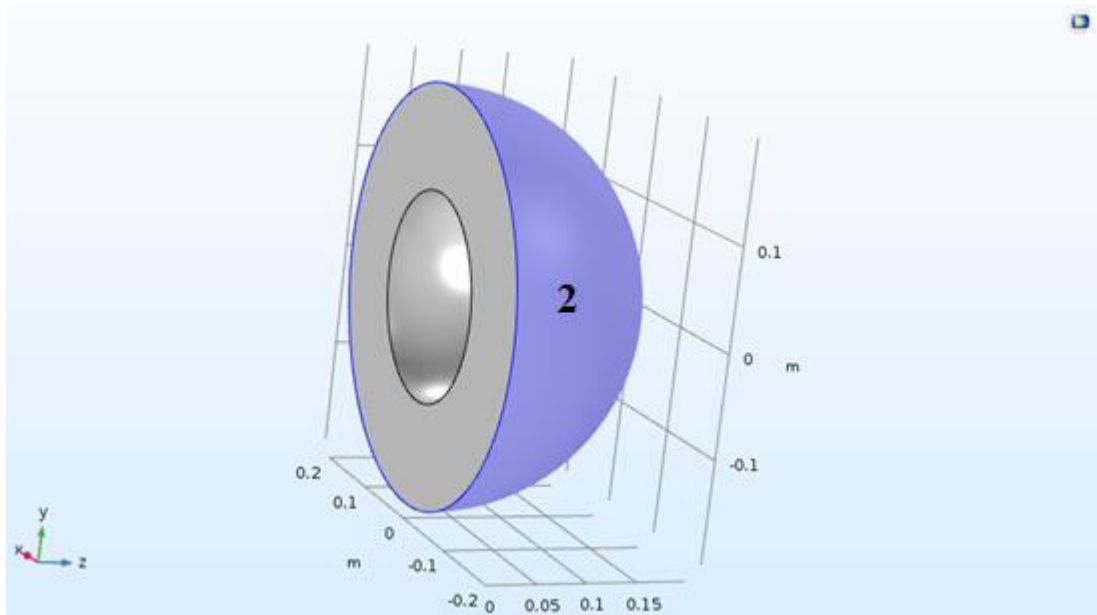


Figure (II.10) : Zone laissée libre définie sur la zone n°2.

3. Un chargement $P_i=1GPa$ est imposé sur la frontière interne au niveau de $R_i=0.1$ m, Figure (II.11) :

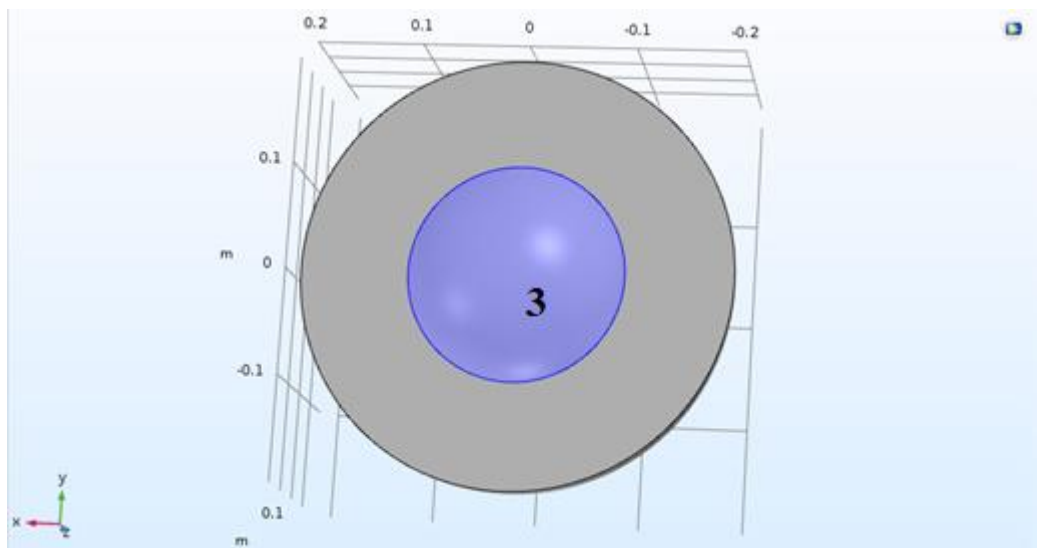


Figure (II.11) : Zone qui doit être sous chargement représentée sur la zone n°3.

C) Maillage :

Pour ce cas on utilise un maillage tétraèdre libre, Figure (II.12) :

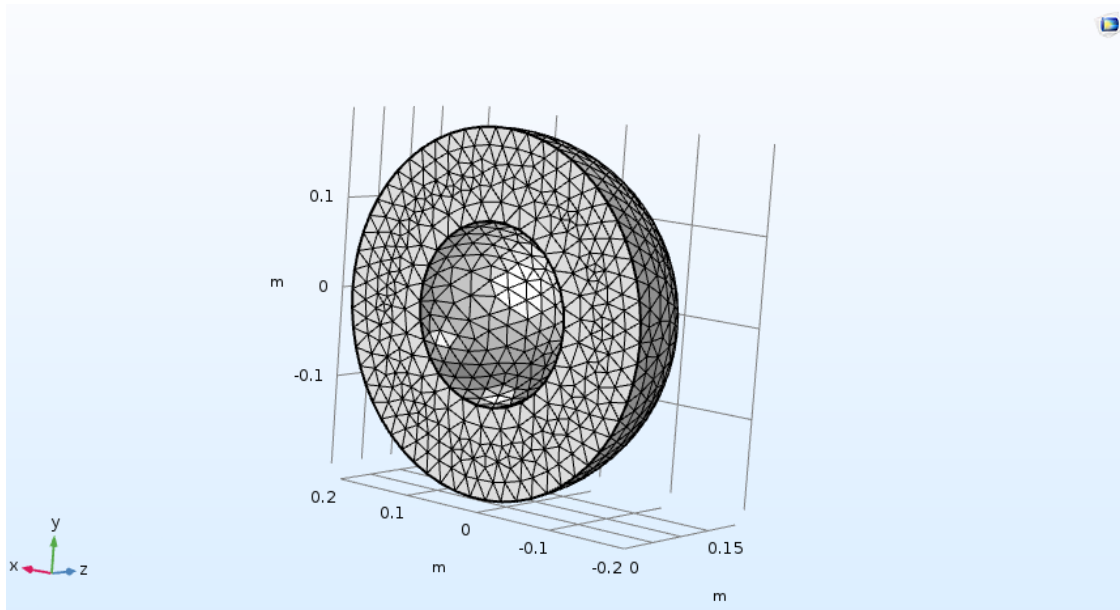


Figure (II.12) : Représentation du maillage utilisé dans la sphère.

III - CONCLUSION :

Dans ce chapitre, les deux méthodes (analytique et numérique), utilisées pour analyser le comportement du matériau FGM pour deux géométries de formes différentes (cylindrique et sphériques) sont présentés.

Les paramètres entre le cylindre et la sphère sont prises sous les mêmes conditions afin de pouvoir comparer entre les deux géométries dans le chapitre qui suit.

Les résultats obtenus sont présentés dans le chapitre III sous forme d'évolution des contraintes et déplacements.

CHAPITRE III

Résultats et discussions

I – Résultats et discussion :

Considérons un cylindre à gradient fonctionnel creux de rayon intérieur $R_i = 0,1$ m et le rayon extérieur $R_0 = 0,2$ m. Le module d'élasticité à la paroi interne est $E_i = 200$ GPa. On suppose également que le coefficient de Poisson a une valeur constante $\nu = 0,3$. Les pressions internes et externes appliquées sont de 100MPa et 0MPa respectivement.

Dans une seconde partie, un modèle numérique est construit à l'aide d'un code de calcul d'éléments finis (FEM). Ensuite, la loi de comportement du matériau FGM est implémentée dans le code de calcul FEM. Le modèle numérique construit peut être validé analytiquement dans un premier cas étudié (cylindre).

Dans un premier temps, pour différentes valeurs de ϕ , le module d'élasticité est tracé en fonction du rayon à travers la paroi du cylindre.

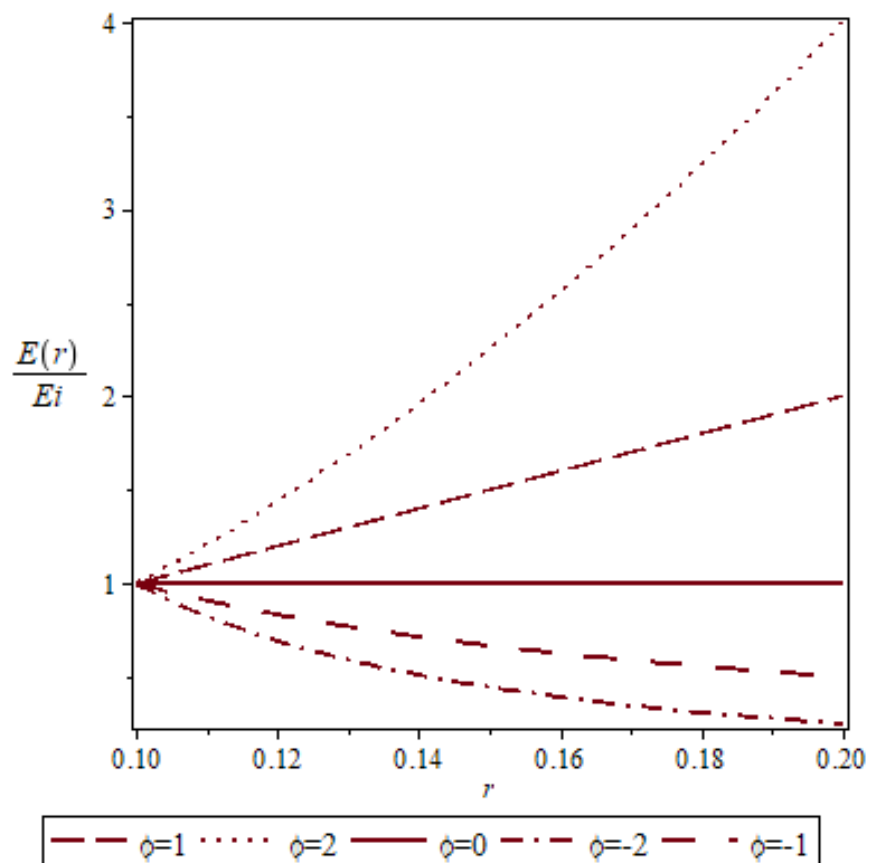


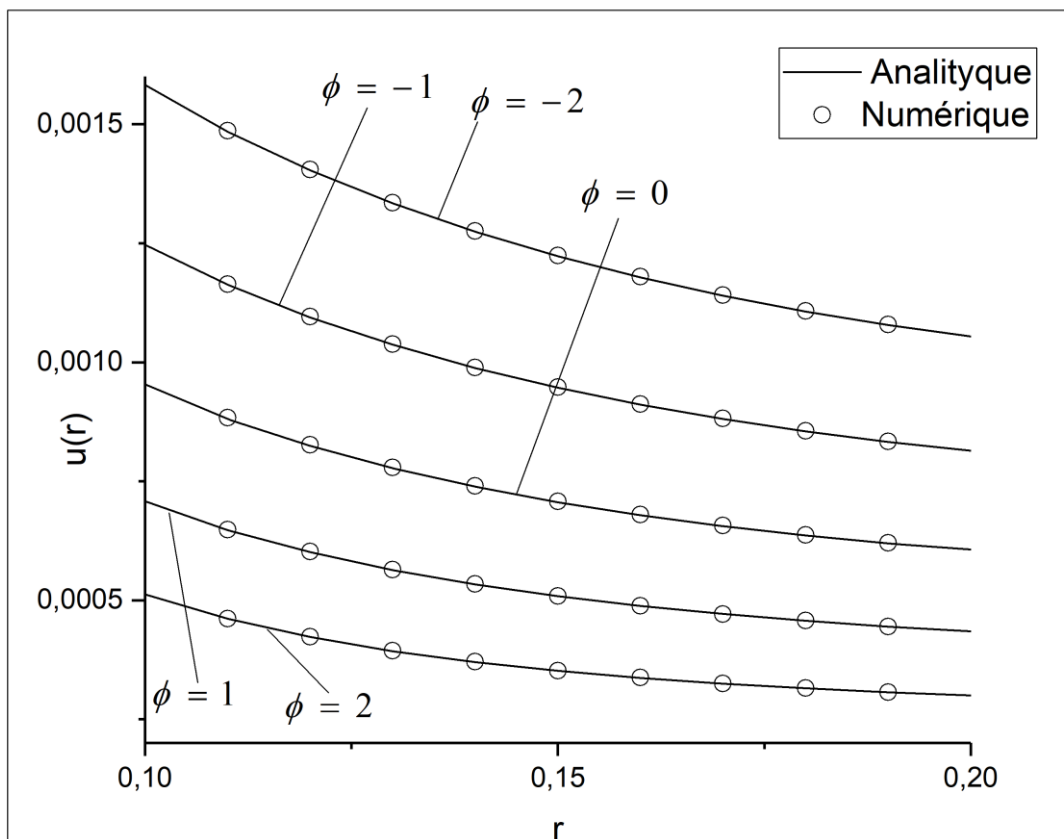
Figure (III.1) : Distribution du module d'élasticité.

La figure (III.1) illustre la distribution du module d'Young pour différentes valeurs du coefficient de non homogénéité $\phi \in [-2, -1, 0, 1, 2]$ à travers l'épaisseur du cylindre.

Pour des valeurs de ϕ positives, le module d'élasticité est croissant en fonction de la position radiale, tandis que pour des valeurs négatives de ϕ le module d'élasticité est décroissant.

Il ressort qu'une augmentation positive de ϕ signifie une rigidité croissante alors qu'une valeur négative de ϕ entraîne une diminution de la rigidité dans la direction radiale.

II – 1 Cas du cylindre :



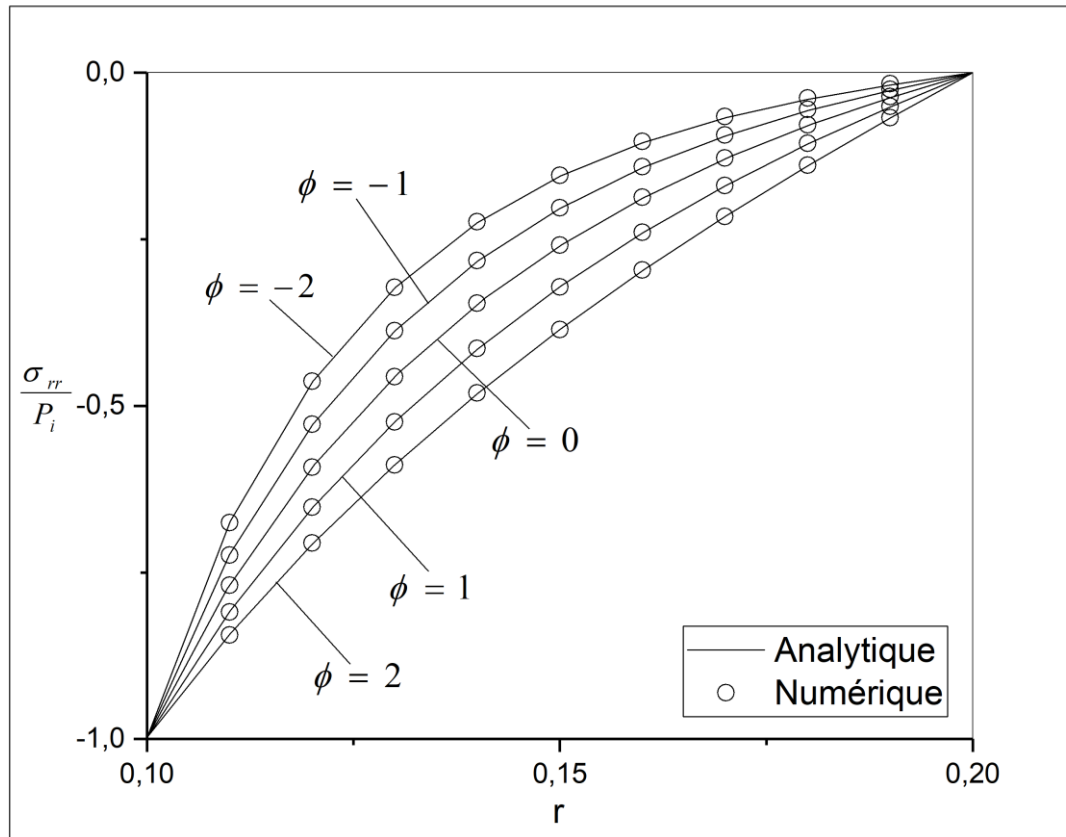
Figure(III.2) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre : comparaison des résultats analytiques et numériques

La figure (III.2) illustre l'évolution des déplacements $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi du cylindre et cela pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéités $\phi \in [-2,2]$.

Il est à observer dans la figure (III.2) que les déplacements sont maximum sur la paroi interne $r=R_i$ et sont minimum sur la paroi externe du cylindre $r=R_0$. L'intensité des déplacements diminue de la paroi interne à la paroi externe du cylindre. Cette observation est faite pour toutes les valeurs du paramètre de non homogénéité $\phi \in [-2,-1,0,1,2]$.

Pour des valeurs négatives de ϕ , le déplacement radial est plus important, tandis que pour des valeurs positives de ϕ , le déplacement est plus faible. C'est-à-dire qu'en augmentant la valeur du paramètre de non homogénéité, qui n'est autre qu'une augmentation dans la rigidité du matériau, il en résulte une diminution des déplacements à travers la paroi du cylindre.

Dans la même figure, le déplacement dans le cas d'un cylindre homogène ($\phi = 0$) est présenté pour comparaison.



Figure(III.3) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression : comparaison des résultats analytiques et numériques.

La figure (III.3) représente la répartition de la contrainte radiale adimensionnelle $\frac{\sigma_{rr}}{P_i}$, suivant le rayon à travers la paroi du cylindre $R_i \leq r \leq R_0$ pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\phi \in [-2, 2]$. Les lignes solides représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique. Dans la même figure, la distribution de la contrainte radiale adimensionnelle dans le cas d'un cylindre homogène ($\phi = 0$) est présentée pour comparaison.

Pour des valeurs négatives de ϕ , la contrainte radiale adimensionnelle est plus importante, tandis que pour des valeurs positives de ϕ , la contrainte est plus faible.

Il est observé que les solutions analytiques sont en parfait accord avec les solutions du modèle numérique construit.

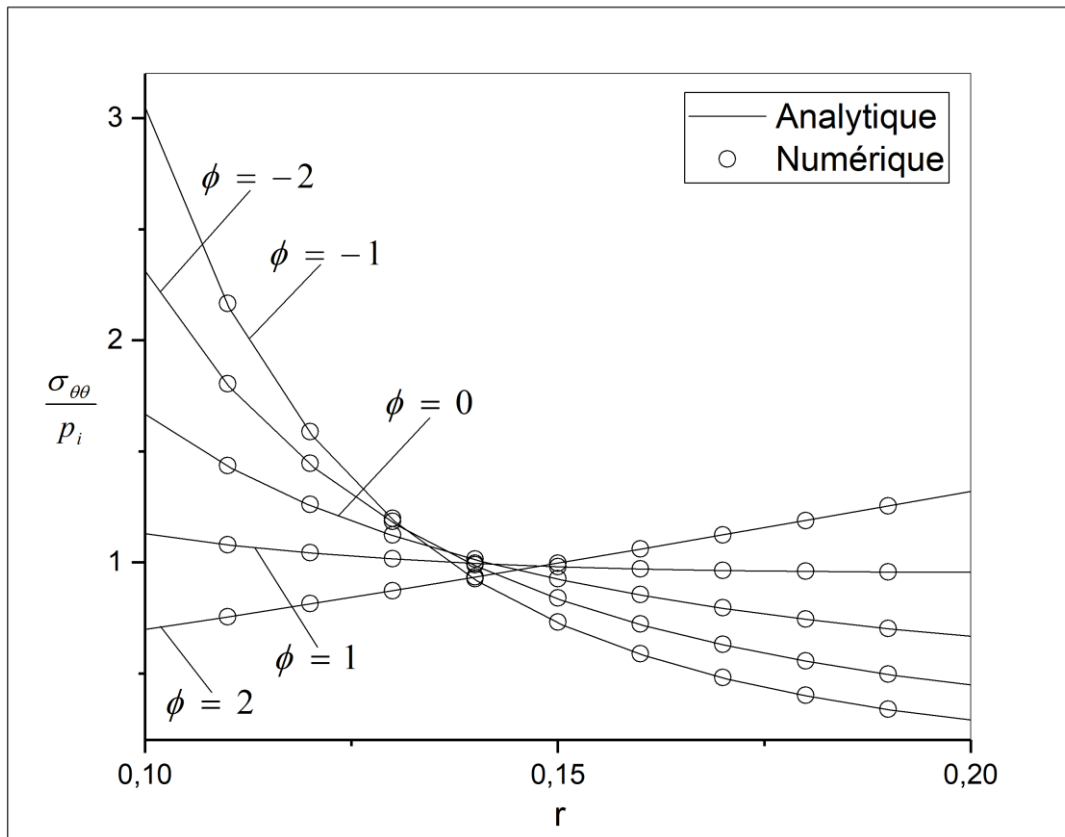


Figure (III.4) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre : comparaison des résultats analytiques et numériques.

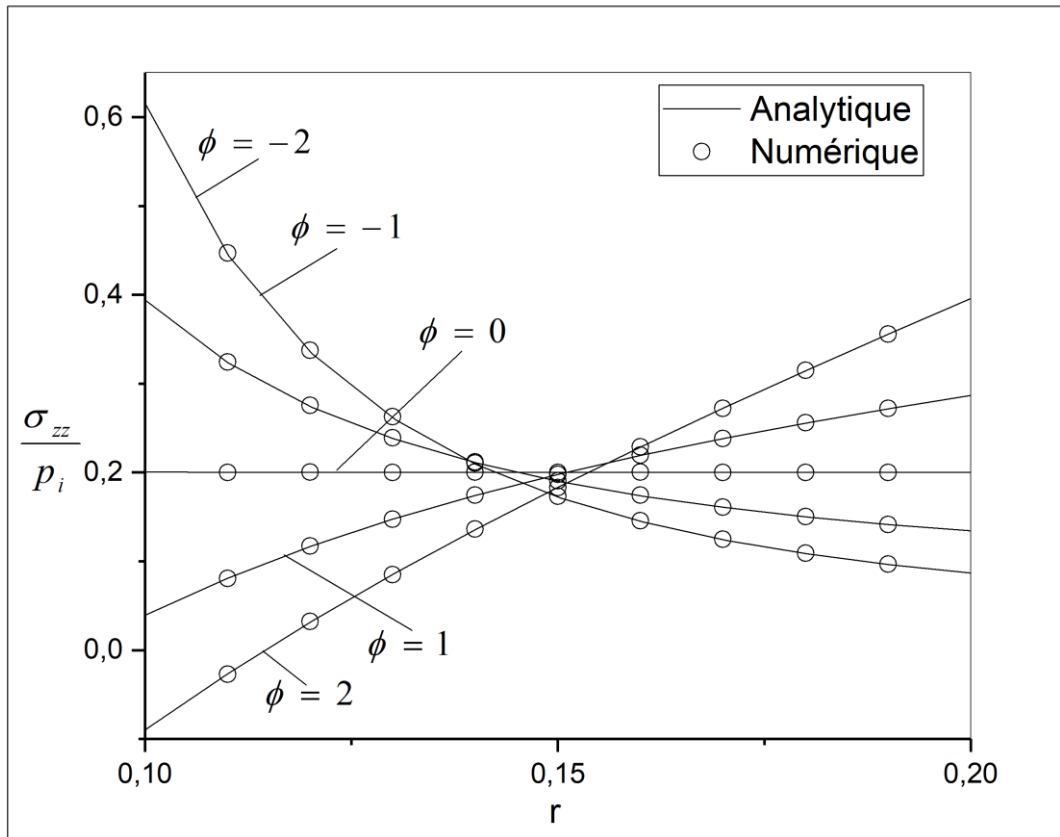


Figure (III.5) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre : comparaison des résultats analytiques et numériques.

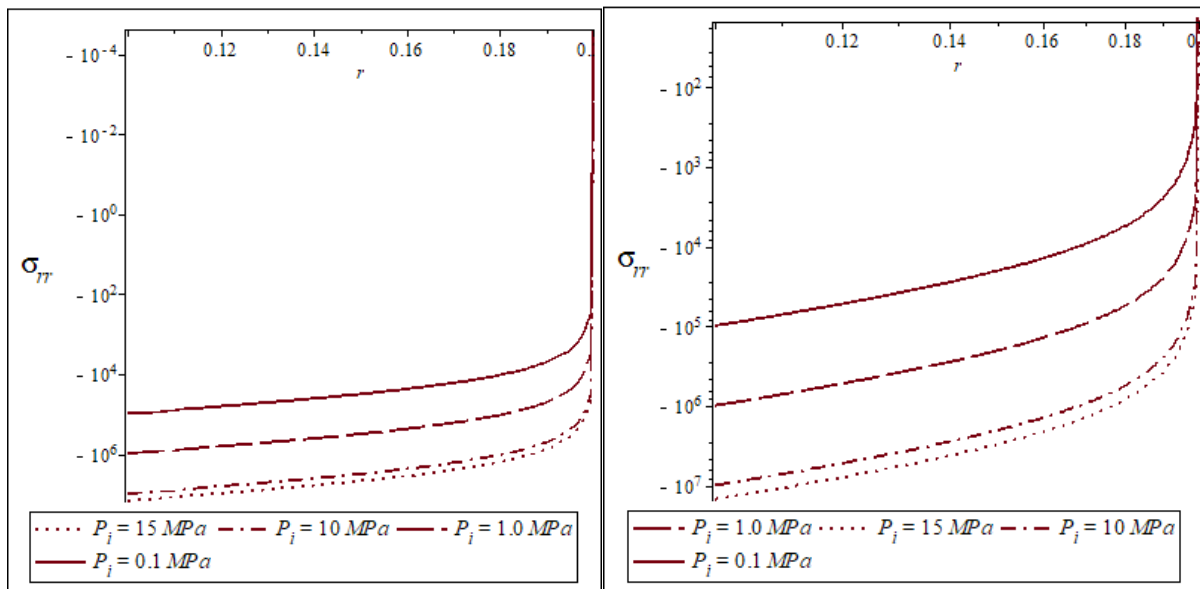
Les figures (III.4 et 5) représente, respectivement, la répartition des contraintes adimensionnelles circonférentielle $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{p_i}$ et axiale $\frac{\sigma_{zz}}{p_i}$, suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre $R_i \leq r \leq R_o$ pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\phi \in [-2,2]$. Les lignes solides représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique. Sur chacune des figures, respectivement, la distribution des contraintes adimensionnelles circonférentielle et axiale dans le cas d'un cylindre homogène ($\phi = 0$) est présentée pour comparaison.

Pour des valeurs positives de ϕ les contraintes circonférentielle et axiale ont des valeurs moins importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

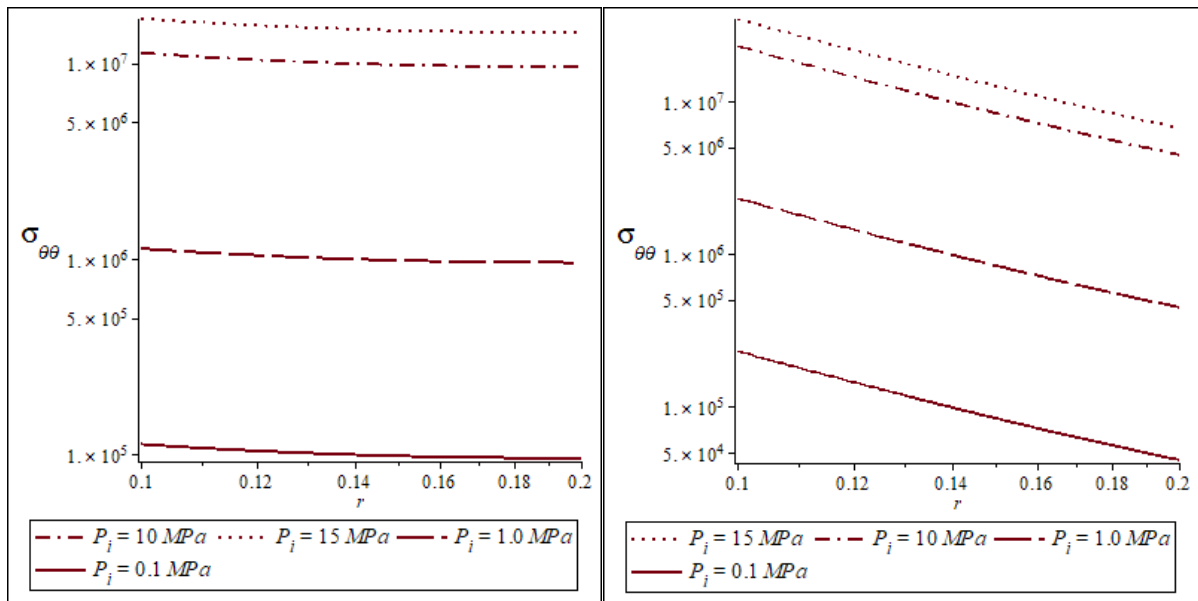
Pour des valeurs négatives de ϕ la contrainte circonférentielle et axiale ont des valeurs plus importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe. A noter que dans l'intervalle $r = [0.14, 0.15]$, les courbes de contraintes pour chaque valeurs de ϕ se croisent.

Les résultats obtenus numériquement à l'aide du code de calcul FEM sont comparés aux résultats analytiques précédemment décrits. Il est a observé que les solutions analytiques sont en parfait accord avec les solutions du modèle numérique construit.

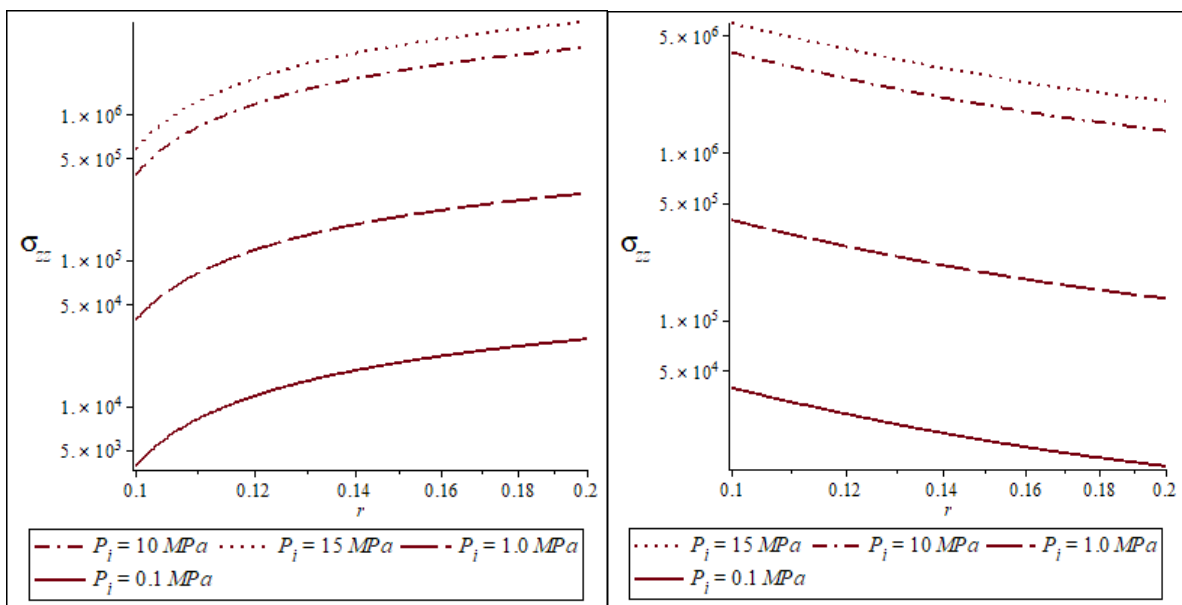
❖ Variation de la pression interne pour $\phi = 1$; $\phi = -1$



Figure(III.6) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite en fonction logarithmique.



Figure(III.7) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite

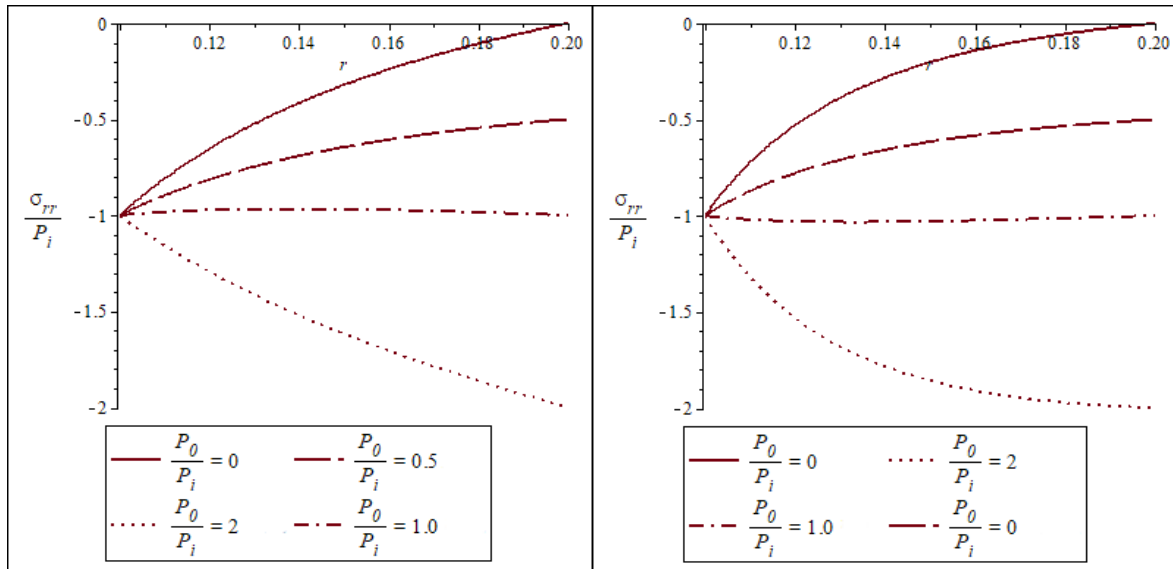


Figure(III.8) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite

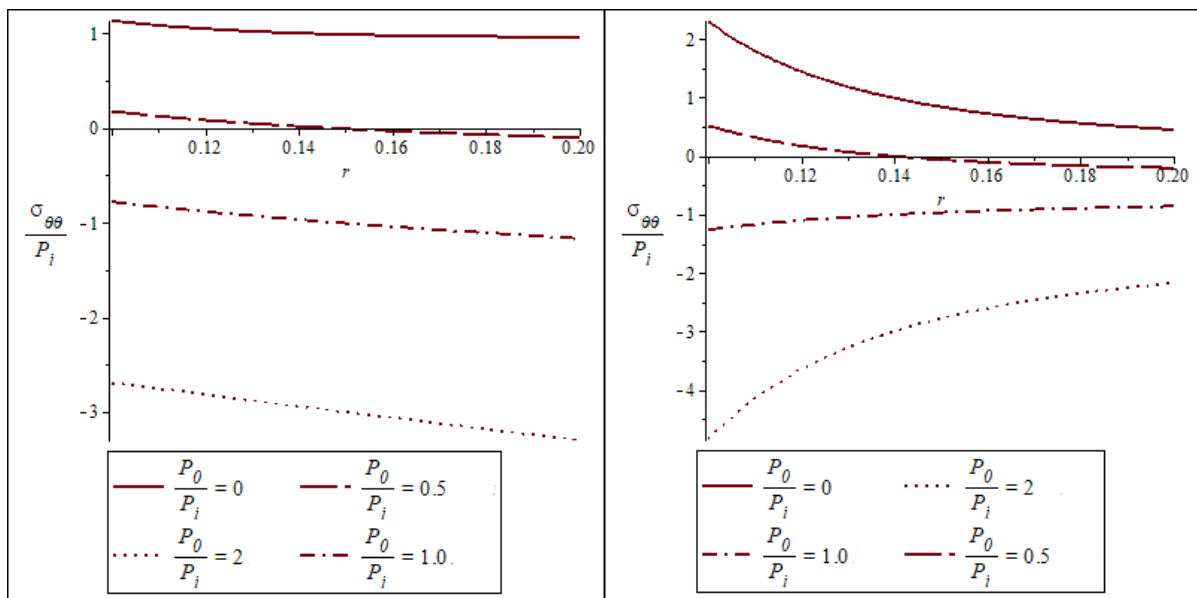
Des figures (III.6) (III.7) (III.8) montrent la répartition de la contrainte radiale circonférentielle et axiale respectivement, en variant la pression interne appliquée et pour deux différentes valeurs de ϕ positive à droite et négative à gauche pour chaque figure tandis

que la pression externe reste nulle. Une augmentation de la pression interne se traduit par une augmentation de la contrainte radiale.

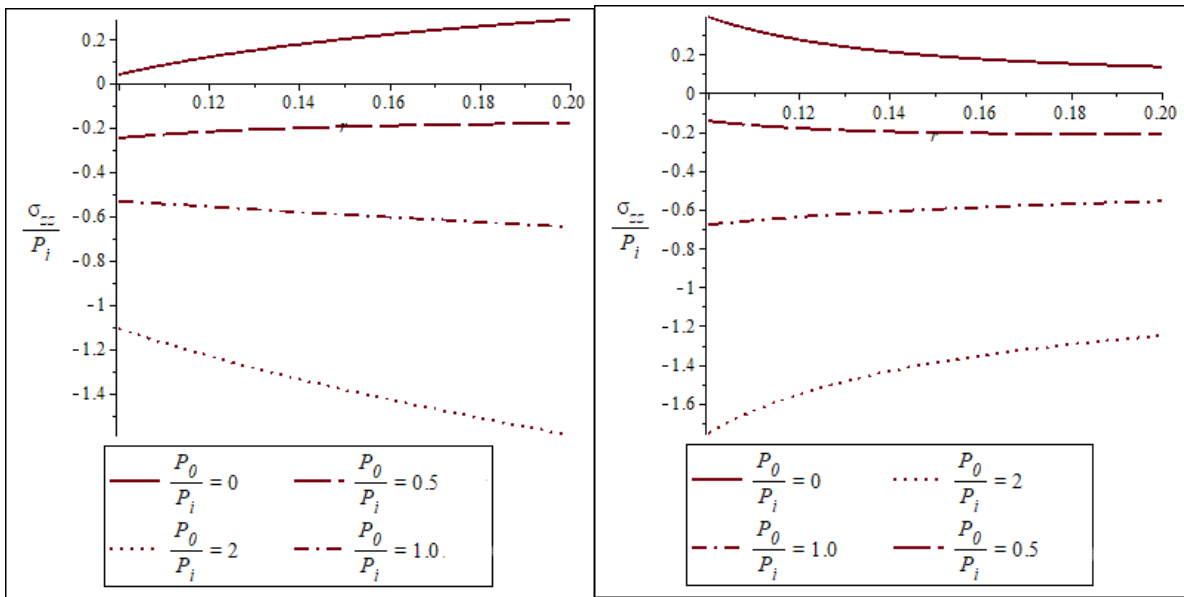
❖ Variation de la pression externe pour $\phi = 1$; $\phi = -1$



Figure(III.9) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite.



Figure(III.10) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite



Figure(III.11) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre pour $\phi = 1$ à gauche et $\phi = -1$ à droite

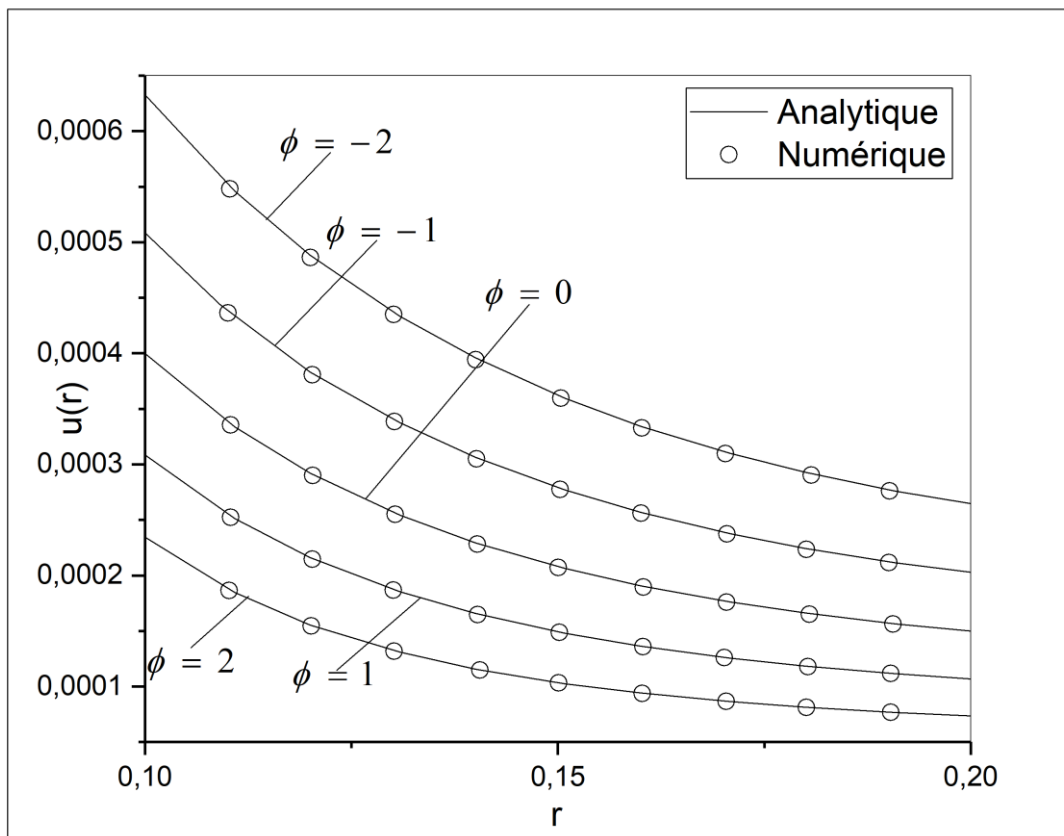
Des figures (III.9) (III.10) (III.11) montrent la répartition de la contrainte radiale circonférentielle et axiale, respectivement, en variant la pression externe appliquée et pour deux différentes valeurs de ϕ positive à droite et négative à gauche pour chaque figure tandis que la pression interne reste constante $P_i=1\text{Gpa}$.

De la figure (III.9) on constate une divergence dans les courbes des différentes pressions externes à travers la paroi. Une augmentation de la pression externe se traduit par une augmentation de la contrainte radiale pour des valeurs au-dessus de 1MPa. Et une diminution pour des valeurs au-dessous de 1MPa.

Pour les contraintes circonférentielles et axiales, on constate une divergence des résultats le long de la paroi pour $\phi = 1$ et une convergence des courbes pour $\phi = -1$

II- 2 Cas de la sphère:

Dans cette partie, de la même manière que le premier cas nous suivons la même démarche mais cette fois ci, le cas d'une sphère sous pression est considéré, en raison de la symétrie que présente la sphère il n'est pas nécessaire de prendre la géométrie complète. Nous nous contenterons de mener l'étude sur une demi-sphère.



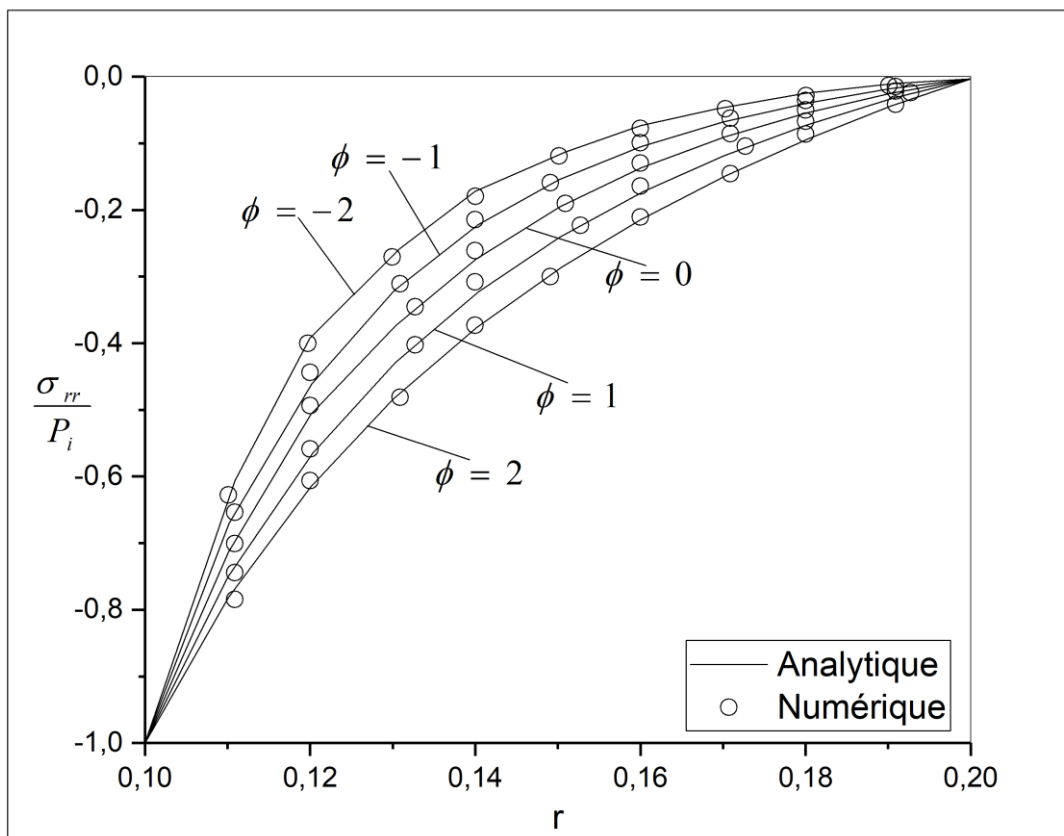
Figure(III.12):L'évolution du déplacement le long de la paroi de la sphère :comparaison des résultats analytiques et numériques.

La figure (III.12) illustre l'évolution des déplacements $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi de la sphère et cela pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\phi \in [-2,2]$.

Il est observé dans la figure (III.16) que les déplacements sont maximum sur la paroi interne $r=R_i$ et sont minimum sur la paroi externe de la sphère $r=R_0$. L'intensité des déplacements diminue de la paroi interne à la paroi externe de la sphère. Cette observation est faite pour toutes les valeurs du paramètre de non homogénéité $\phi \in [-2, -1, 0, 1, -1]$.

Pour des valeurs négatives de ϕ , le déplacement radial est plus important, tandis que pour des valeurs positives de ϕ , le déplacement est plus faible. C'est-à-dire qu'en augmentant la valeur du paramètre de non homogénéité, qui n'est autre qu'une augmentation dans la rigidité du matériau, il en résulte une diminution des déplacements à travers la paroi du cylindre.

Dans la même figure, le déplacement dans le cas de la sphère homogène ($\phi = 0$) est présenté pour comparaison.

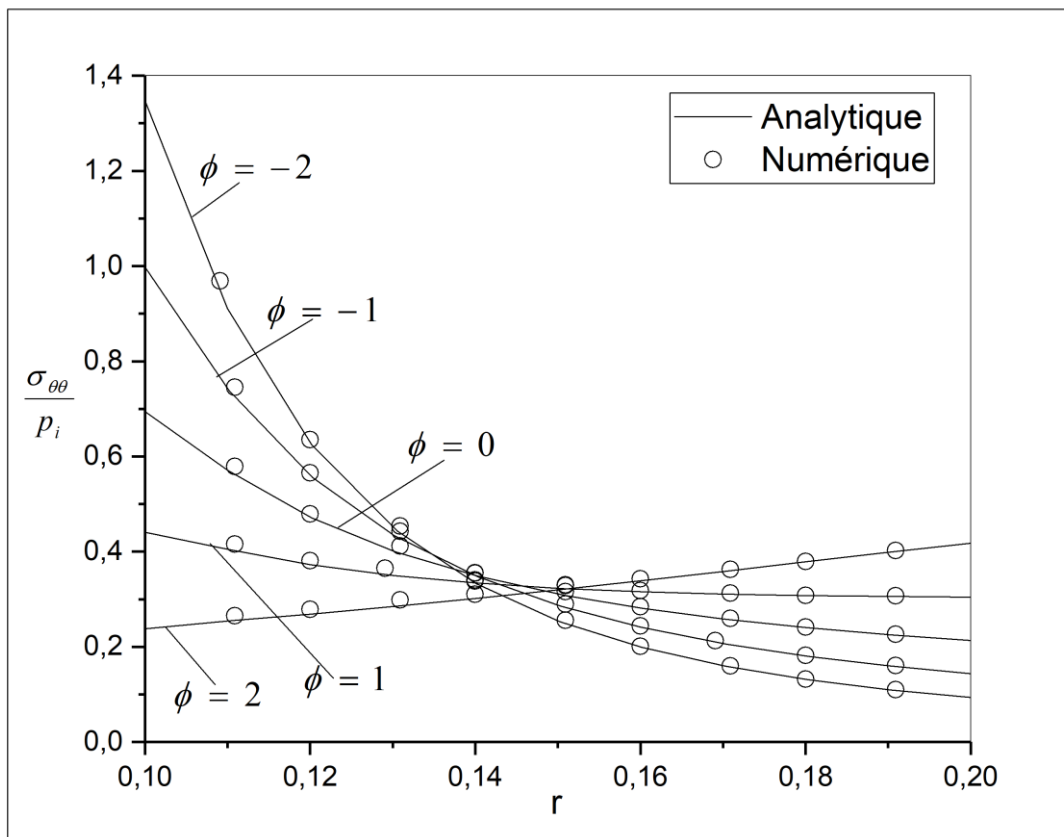


Figure(III.13):Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi de la sphère : comparaison des résultats analytiques et numériques.

La figure (III.13) représente la répartition de la contrainte radiale adimensionnelle $\frac{\sigma_{rr}}{P_i}$, suivant le rayon à travers la paroi de la sphère $R_i \leq r \leq R_0$ pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\phi \in [-2,2]$. Les lignes solides représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique. Dans la même figure, la distribution de la contrainte radiale adimensionnelle dans le cas de la sphère homogène ($\phi = 0$) est présentée pour comparaison.

Pour des valeurs négatives de ϕ , la contrainte radiale adimensionnelle est plus importante, tandis que pour des valeurs positives de ϕ , la contrainte est plus faible.

Il est à observer que les solutions analytiques sont en parfait accord avec les solutions du modèle numérique construit.



Figure(III.14):Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi de la sphère : comparaison des résultats analytiques et numériques.

La figure (III.14) représente, la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{P_i}$ suivant le rayon et à travers toute la paroi de la sphère $R_i \leq r \leq R_o$ pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\phi \in [-2,2]$. Les lignes solides représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique. Sur la figures, la distribution de la contrainte adimensionnelle circonférentielle dans le cas d'un cylindre homogène ($\phi = 0$) est présentée pour comparaison.

Pour des valeurs positives de ϕ le contraintes circonférentielle a des valeurs moins importantes sur la paroi intérieur de la sphère puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives de ϕ la contrainte circonférentielle a des valeurs plus importantes sur la paroi intérieur de la sphère puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe. A noter que dans l'intervalle $r = [0.14, 0.15]$, les courbes de contraintes pour chaque valeurs de ϕ se croisent.

Les résultats obtenus numériquement à l'aide du code de calcul FEM sont comparés aux résultats analytiques précédemment décrits. Il est à observer que les solutions analytiques sont en parfait accord avec les solutions du modèle numérique construit.

Les résultats obtenus dans l'étude numérique sont comparés aux résultats analytiques précédemment décrits. Les figures (III.12) (III.13) (III.14) montrent les résultats pour $\phi \in [-2,2]$. On peut voir que les erreurs sont faibles et, que nous avons un bon accord entre les solutions analytiques et numériques dans tous les cas.

III - Conclusion

Les distributions de déplacement et de contraintes sont comparées aux solutions de la méthode des éléments finis (FEM) et un bon accord est trouvé. Pour montrer l'effet de l'inhomogénéité sur les distributions de contraintes, différentes valeurs de ϕ ont été considérées pour le paramètre de non-homogénéité de matériau.

On compare les résultats analytiques des déplacements, des contraintes radiales, des contraintes circonférentielles et des contraintes axiales pour chacune des 2 structures pour une

pression interne de 1Gpa et pour différentes valeurs de ϕ Puis on continue nôtre étude analytiquement pour le cas du cylindre pour différentes pressions internes et externes pour 2 valeurs de $\phi = [1, -1]$

Les résultats présentés montrent que l'inhomogénéité du matériau a une influence significative sur les comportements mécaniques des structures creuses épaisses tels que le cylindre et la sphère constituées de matériaux à gradient fonctionnel exponentiel. Ainsi, en utilisant ces données et en choisissant une bonne valeur, les ingénieurs peuvent concevoir ces structures FGM spécifique qui peut répondre à certaines exigences particulières.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire on a présenté les matériaux FGM, comme étant des composites améliorés permettant de subvenir aux besoins des structures dans d'extrêmes conditions. Leur importance et leurs domaines d'applications ne cesse de s'élargir au fil des décennies, néanmoins leur fabrication reste un défi. Pour pouvoir concevoir et généraliser un tel matériau il faut d'abords passer par une étude analytique et numérique afin de pouvoir le faire et c'est ce qu'on a proposé dans ce document.

Une solution analytique et un modèle numérique ont été développés permettant d'obtenir les déplacements et les contraintes mécaniques dans une sphère et un cylindre creux constitués d'un matériau fonctionnellement gradué sous la charge de pressions. Les propriétés du matériau sont supposées être graduées le long de la direction radiale selon une fonction de loi de puissance.

Pour montrer l'effet de l'inhomogénéité sur les distributions de contraintes, différentes valeurs de ϕ ont été considérées pour le paramètre de non-homogénéité de matériau. D'après les résultats obtenus, on peut conclure que l'indice de loi de puissance a un grand effet sur les contraintes et les distributions du déplacement radial dans ces deux cas FGM. Les distributions de déplacement et de contraintes sont comparées aux solutions de la méthode des éléments finis (FEM) et un bon accord est trouvé.

Les résultats présentés montrent que l'inhomogénéité du matériau a une influence significative sur les comportements mécaniques des structures creuses épaisses tels que le cylindre et la sphère constituées de matériaux à gradient fonctionnel exponentiel. Ainsi, en utilisant ces données et en choisissant une bonne valeur, les ingénieurs peuvent concevoir ces structures FGM spécifique qui peut répondre à certaines exigences particulières.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Shahistha A, Varghese B, Baby A 2014 A review on functionally graded materials *The International Journal Of Engineering And Science (IJES)*, Volum e 3, Issue 6, Pages 90-101, ISSN (e): 2319 – 1813 ISSN (p): 2319 – 1805.
- [2] Valmik Bhavar et al IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 229 page 2 (2017) 012021
- [3] Koizumi M. the concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally graded materials* (1992) 34, 3-10.
- [4] ABDIZADEH, H., Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex, «Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'alumine », Thèse Docteur D'état, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon Et L'université Claude Bernard Lyon IFrance, 1997, 212p.
- [5] Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M.: Novel applications of functionally graded nano, opto-electronic and thermo-electric materials. *Int. J. Mater. Mech. Manuf.* 1, 221–224 (2013).
- [6] Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T.: Laser-metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC. *Mater. Des.* 84, 402–410 (2015).
- [7] Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana, S.: Functionally graded material: An overview. In: *Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012*, vol. 3, pp. 1593– 1597 (2012).
- [9] Schneider, M.J.: The Timken Company, and Madhu S. Chatterjee, bodycote introduction to surface hardening of steels. In: *Dossett, J., Totten, G.E. (eds) ASM Handbook, Steel Heat-Treating Fundamentals and Processes*, vol. 4 (2013).
- [10] Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V., Villain, G.: Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT and E Int.* 44(2), 169–177 (2011).
- [11] Thieme, M., Wieters, K.P., Bergner, F., Scharnweber, D., Worch, H., Ndop, J., Kim, T.J., Grill, W.: Titanium-powder sintering for preparation of a porous functionally graded material destined for orthopaedic implants. *J. Mater. Sci.* 12, 225–231 (2001).
- [12] Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G.: *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Kluwer Academic, Boston (1999).
- [13] Yoshihisa Uchida (2004), —Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39-51-B, Vol. 39-B.
- [14] TAKAHASHI. M.ITOH. Y KASHIWAYA fabrication and evaluation of w/cu gradient material by sintering and infiltration technique , in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials Japan 1990.
- [15] J. F. Groves, and H. N. G. Wadley 1997 Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition *Composites Parts B* 28B, (1997), 57-69.

- [16] R. Knoppers, J. W. Gunnink, J. Van den Hout, and W. Van Vliet The reality of functionally graded material products *TNO ScienceandIndustry*, The Netherlands, pp 38-43.
- [17] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, and Lee S Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy *Materials Chem. Phys.* 68 130. Crossref.
- [18] Watanabe Y, Inaguma Y, Sato H, and Miura-Fujiwara E 2009 Novel fabrication method for functionally graded materials under centrifugal force: the centrifugal mixed-Powder method *Materials*, Vol. 2, No. 4, pp.2510-2525.
- [19] Bhavar V, Kattire P, Patil V, Khot S, Gujar K, Singh R 2014 A Review on Powder bed fusion technology of metal additive manufacturing *AMSI Conference 2014*, Bangalore, India.
- [20] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi , "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons;page 110, 4 août ,(2011).
- [21] Hao D, Wei C 2016 Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams *Composite structures (Sciencedirect)*, 141, (2016), 253-263.
- [22] Simsek M 2015 Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions *Composite structures (Sciencedirect)*, 133, (2015), 968-978.
- [23] Qian LF, Batra RC 2005 Design of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies. *J Sound Vib* 2005;280:415–24.
- [24] Enab T Performance improvement of total knee replacement joint through bidirectional functionally graded material *International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering IJMME-IJENS* Vol:14 No:02.
- [25] Udupa G, Rao S, Gangadharan K 2014 Functionally graded composite materials: An overview”, *International conference on advances in manufacturing and material engineering, AMME 2014*.
- [26]. Marur, P.R., Tippur, H.V.: Evaluation of mechanical properties of functionally graded materials. *J. Test. Eval.* **26**, 539–545 (1998)
- [27]. Mohammadi, M., Dryden, J.R.: Influence of the spatial variation of Poisson’s ratio upon the elastic field in nonhomogeneous axisymmetric bodies. *Int. J. Solids Struct.* **46**, 788–795 (2009)
- [28]. Li, X.F., Peng, X.L.: A pressurized functionally graded hollow cylinder with arbitrarily varying material properties. *J. Elast.* **96**, 81–95 (2009)
- [29]. Tutuncu, N.: Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentiallyvarying properties. *Eng. Struct.* 29, 2032–2035 (2007)