

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira – Bejaïa



جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique
Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Génie Mécanique

Option : Energétique

Présent par:

- TARZALT Ali
- HARIK Mouloud

Thème :

*Convection mixte dans une cavité carrée ventilée
en présence d'un milieu poreux*

Devant le jury composé de :

Mr F.MENDIL

Mr A .SAHI

Mr D.SADAoui

Président

Examineur

Promoteur

Année universitaire : 2017/2018

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

A Nos parents

Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de nos études.

Aucune dédicace ne pourrait exprimer notre respect, notre considération et nos profonds sentiments envers eux.

Nous prions le bon Dieu de les bénir, en espérant qu'ils seront toujours fiers de nous.

A nos très chers frères et sœurs

On vous dédie ce travail en vous souhaitant un avenir radieux, pleins de bonheur et de succès. Que dieu, le tout puissant, vous préserve et vous procure santé et longue vie.

A nos ami(e)s et nos collègues

En témoignage de l'amitié qui nous unie et des souvenirs de tous les moments que nous avons passé ensemble, on vous dédie ce travail et on vous souhaite une vie pleine de réussite et de bonheur.

A tous nos professeurs qui nous ont enseigné ou aidé.

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu le bon Dieu de nous avoir donné la force et le courage afin de mener à terme ce travail.

*Notre profonde gratitude et sincères remerciements vont à notre promoteur **Mr D.SADAoui** pour son suivi, sa disponibilité, son orientation et ses conseils.*

*Nous tenons à remercier **Mr F.MENDIL** pour avoir accepté de présider le jury. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.*

*Nos sincères remerciements vont également à **Mr A.SAHI** pour nous avoir fait l'honneur d'examiner notre modeste travail.*

Enfin, nos profonds remerciements vont à nos chers parents, frères et sœurs, pour leurs soutiens et leur confiance en nous, sans oublier nos amis et nos camarades en particulier. Et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à la réalisation de notre projet.

Nous remercions également, les membres du jury qui ont accepté d'examiner et de juger ce modeste travail

Table des matières

Dédicaces.....	Erreur ! Signet non défini.
Remerciements	Erreur ! Signet non défini.
Table des matières	iii
Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux	viii
Nomenclature.....	ix
Introduction générale.....	Erreur ! Signet non défini.
CHAPITRE I. GENERALITE ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	2
I.1 Introduction	2
I.2 Transfert de chaleur par convection	2
I.2.1 Convection naturelle.....	3
I.2.2 Convection forcée.....	3
I.2.3 Convection mixte.....	3
I.3 Définition du milieu poreux	3
I.4 Paramètres du milieu poreux	4
I.4.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R)	4
I.4.2 Porosité	5
I.4.3 perméabilité	6
I.5 Caractéristique thermo-physique des milieux poreux	7
I.5.1 Viscosité dynamique effective.....	7
I.5.2 Conductivité thermique effective	8
I.6 Modèle d'écoulement dans le milieu poreux	8
I.6.1 Modèle de Darcy	9
I.6.2 Modèle de Brinkman	9
I.6.3 Modèle de Forchheimer.....	10
I.6.4 Modèle général de Darcy-Brinkman-Forchheimer.....	10

I.7	Equation d'énergie en milieu poreux	11
I.8	Revue bibliographique.....	12
I.9	Conclusion.....	17
CHAPITRE II. DESCRIPTION DU PROBLEME ET FORMULATION MATHEMATIQUE.....		18
II.1	Introduction	18
II.2	Description du problème	18
II.3	Hypothèses simplificatrices.....	19
II.4	Approximayion de Boussinesq-Oberberk	19
II.5	Formulation mathématique	20
II.5.1	Equation de continuité.....	20
II.5.2	Equation de quantité de mouvement	20
II.5.3	Equation d'énergie	20
II.5.4	Conditions limites.....	21
II.6	Formulation adimensionnelle	21
II.6.1	Variable adimensionnelle	21
II.6.2	Equation de continuité.....	22
II.6.3	Equation de quantité de mouvement	22
II.6.4	Equation d'énergie	22
II.6.5	Conditions limites adimensionnelles.....	22
II.7	Nombres adimensionnels.....	23
II.8	Calcul du nombre de Nusselt.....	24
II.9	Conclusion.....	24
CHAPITRE III. METHODE NUMERIQUE		ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.5
III.1	Introduction	25
III.2	Rappel sur la méthode numérique	25
III.2.1	Méthode des éléments finis	25
III.2.2	Méthode des différence finies.....	25
III.2.3	Méthode des volumes finis.....	26
III.3	Choix de la méthode numérique.....	27

III.4	Discrétisation	27
III.4.1	Equation de conservation.....	27
III.4.1	Schémas d'interpolation	29
III.4.2	Schéma aux différences centrées.....	Erreur ! Signet non défini.0
III.4.3	Schéma décentré amont (Upwind)	Erreur ! Signet non défini.0
III.4.4	Schémas hybride.....	30
III.4.5	Schéma exponentiel.....	Erreur ! Signet non défini.0
III.4.6	Schéma en loi puissance (Power-Law).....	Erreur ! Signet non défini.0
III.5	Formulation générale du problème.....	31
III.6	Algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)...	33
III.7	Résolution des systèmes d'équations	34
III.8	Algorithme (TDMA)	34
III.9	Conclusion.....	36
CHAPITRE IV.	RESULTATS ET DISCUSSIONS	37
IV.1	Introduction	37
IV.2	Choix de la grille de simulation.....	37
IV.3	Validation numérique	38
IV.4	Résultats et discussion.....	41
IV.4.1	Effet du nombre de Grashof sur les champs dynamique et thermique.....	41
IV.4.2	Effet du nombre de Richardson sur les champs dynamique et thermique...	46
IV.5	Conclusion.....	51
	Conclusion générale	52
	références bibliographiques.....	53
	Annexes	57
	Résumé	
	Abstract.....	

Liste des figures

Figure I.1 – mécanisme du transfert de chaleur par convection[1].	2
Figure I.2 – Types de milieu poreux : milieu consolidé (b) et non consolidé (a)[3].	4
Figure I.3 - Représentation schématique du volume élémentaire représentatif[4].	5
Figure I.4 – Configuration physique considérée [15]	13
Figure I.5 – Configuration géométrique du système [16]	13
Figure I.6 – Modèle physique étudié [17]	14
Figure I.7 – schéma de la cavité ventilée [18].	15
Figure I.8 – Modèle physique considéré [22].	17
Figure II.1 – Géométrie du problème considéré.	18
Figure III.1 – volume de contrôle bidimensionnel	26
Figure III.2 – variation de la fonction $A(Pe)$ pour différents schémas.	31
Figure IV.1 – Nusselt moyen pour différents maillages $Gr=10^5$, $Da=10^{-5}$.	37
Figure IV.2 – lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-5}$, $Ra=10^6$: a) Lignes de courant b) Isothermes	38
Figure IV.3 – lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-4}$, $Ra=10^6$: a) Lignes de courant b) Isothermes	39
Figure IV.4 – lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-3}$, $Ra=10^6$: a) Lignes de courant b) Isothermes	40
Figure IV.5 – lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-3}$, $Ra=7.10^4$: a) Lignes de courant b) Isothermes	40
Figure IV.6 – : lignes de courant et isothermes pour $Ri=0.1$: a) $Gr=10^2$; b) $Gr=10^3$;c) $Gr=10^4$; d) $Gr=10^5$	42
Figure IV.7 – lignes de courant et isothermes pour $Ri=1$: a) $Gr=10^2$; b) $Gr=10^3$; c) $Gr=10^4$; d) $Gr=10^5$	43
Figure IV.8 – lignes de courant et isothermes pour $Ri=10$: a) $Gr=10^2$; b) $Gr=10^3$; c) $Gr=10^4$; d) $Gr=10^5$	44

Figure IV.9 – Nombre de Nusselt moyen pour différents nombre de Da et Gr : a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$	46
Figure IV.10 – lignes de courant et isothermes pour $Gr=10$: a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$...48	
Figure IV.11– lignes de courant et isothermes pour $Gr=10^3$: a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$...49	
Figure IV.12 – lignes de courant et isothermes pour $Gr=10^5$: a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$..50	
Figure IV.13 – Nombre de Nusselt moyen pour différents Ri et Da : a) $Gr=10$; b) $Gr=10^3$ et c) $Gr=10^5$	51
Figure IV.14 – Nombre de Nusselt moyen pour différents Rapport ks/kf et $Gr= 10^3$: a) $Ri=0.1$ b) $Ri=1$; c) $Ri=10$	53
Figure IV.15 – Nombre de Nusselt moyen pour différents Rapport ks/kf et $Gr= 10^5$: a) $Ri=0.1$ b) $Ri=1$; c) $Ri=10$	54

Liste des tableaux

Tableau I.1 – valeur moyenne de la porosité pour quelques matériaux[9].....	6
Tableau I.2 – Perméabilités de quelques milieux poreux[9]	7
Tableau II.1 - Conditions aux limites	21
Tableau II.2 - Conditions aux limites adimensionnelles	22
Tableau III.1 - variables et coefficients des équations « cas d'un milieu poreux ».....	28
Tableau III.2 - Expressions de A_p correspondant aux différents schémas.	32
Tableau IV.1 - Nusselt moyen pour différentes gilles.....	37

Nomenclature

Lettres latines

C_p	Chaleur spécifique à pression constante [J.kg ⁻¹ .K ⁻¹]
F	Coefficient du terme de Forchheimer..... [-]
g	Accélération de la pesanteur.....[m. s ⁻²]
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection..... [W. m ⁻² . K ⁻¹]
K	Perméabilité du milieu poreux..... [m ²]
L	Largeur dimensionnelle de l'enceinte [m]
p	Pression dimensionnelle [Pa]
P	Pression adimensionnelle [-]
S	Surface de l'enceinte [m ²]
T	Température dimensionnelle.....[K]
t	Temps dimensionnel..... [s]
Dp	Le diamètre de grain d'aluminium [m]
U,V	Composantes des vitesses adimensionnelles [-]
u,v	Composantes des vitesses dimensionnelles.....[m.s ⁻¹]
X,Y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles..... [-]
x,y	Coordonnées cartésiennes dimensionnelles..... [m]
W	Section d'entrée et de sortie..... [m]

Symboles grecs

α	Diffusivité thermique [m ² .s ⁻¹]
β	Coefficient d'expansion thermique à pression constante [K ⁻¹]
ΔT	Différence de température [K]
Δx	Pas d'espace suivant l'axe x [m]

Δy	Pas d'espace suivant l'axe y [m]
ε	La porosité du milieu poreux [-]
θ	Température adimensionnelle [-]
λ	Conductivité thermique [W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
μ	Viscosité dynamique [Pa.s ⁻¹]
ν	Viscosité cinématique..... [m ² .s ⁻¹]
ρ	Masse volumique..... [kg.m ⁻³]
φ	Flux de chaleur [W]

Indices

m.p milieu poreux.

E, W, N, S évalué sur le point correspondant entourant le point P.

e, w, n, s évalué sur le face correspondante du volume de contrôle entourant le point P.

s solide.

f fluide.

c froid.

h chaud.

eff effective.

* valeur adimensionnelle ou estimé.

0 valeur initiale.

Nombres adimensionnels

Nu Nusselt local.

Nu_{moy} Nusselt moyen.

Pr Nombre de Prandtl.

Ra Nombre de Rayleigh.

Gr	Nombre de Grashof.
Ri	Nombre de Richardson.
Re	Nombre de Reynolds.
Da	Nombre de Darcy.

Introduction générale

Les écoulements et les transferts de chaleur par convection dans les milieux poreux ne cesse de susciter l'intérêt de plus en plus de chercheurs vu leurs application dans des domaines variés comme le stockage et le traitement des déchets, la diffusion souterraine des polluants, l'isolation thermique, la métallurgie, l'extraction du pétrole, le séchage et le stockage de certains produits agricoles et refroidissement des composantes électronique...etc.). C'est pourquoi une meilleure connaissance et maîtrise de ces milieux sont vitales à l'avenir.

La présence du milieu poreux permet la modification de l'écoulement et l'amélioration du transfert de chaleur. Toute fois les conditions d'écoulement et de transfert thermique dans de telles structures sont difficilement quantifiables de part les différents phénomènes intervenant et la présence de deux phases solide et fluide.

La présente étude porte la convection mixte dans une cavité carrée en présence d'un milieu poreux saturé. Le principal objectif est de cerner l'influence de certains paramètres jugés essentiels sur la structure de l'écoulement et les transferts de chaleur dans la cavité.

Le présent travail est structuré de la façon suivante :

Le premier chapitre est dédié aux notions de base sur le transfert de chaleur par convection et les principales caractéristiques des milieux poreux. Par la suite nous avons exposé certains travaux expérimentaux, théoriques et numériques antérieurs relatifs à la thématique étudiée et rappeler les principaux modèles rencontré dans la littérature.

Le second chapitre concerne la formulation mathématique du problème, ainsi nous avons posé les équations gouvernantes, les hypothèses simplificatrices, et les conditions aux frontières associées.

Dans le troisième chapitre, nous avons donné un aperçu sur méthode des volumes finis utilisée dans le code de calcul pour la discrétisation et la résolution de ses équations.

Les résultats numériques sont exposés dans le quatrième chapitre. Après une validation sur les résultats numériques disponibles dans la littérature nous avons examiné l'effet de certains paramètres de contrôle sur l'évolution de l'écoulement et le transfert thermique à travers les lignes d'isovaleurs (ligne de courant et isothermes) et le nombre de Nusselt.

Enfin, nous terminons notre étude avec une conclusion générale.

Généralité et étude bibliographique

I.1 Introduction

Le transfert de chaleur par convection est une branche qui étudie la propagation thermique par mouvement de fluide. Ce mouvement peut être induit par une différence de température ou alors par une machine externe. Ce mode de transfert, se retrouve dans plusieurs phénomènes naturels et procédés industriels.

I.2 Transfert de chaleur par convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton [1].

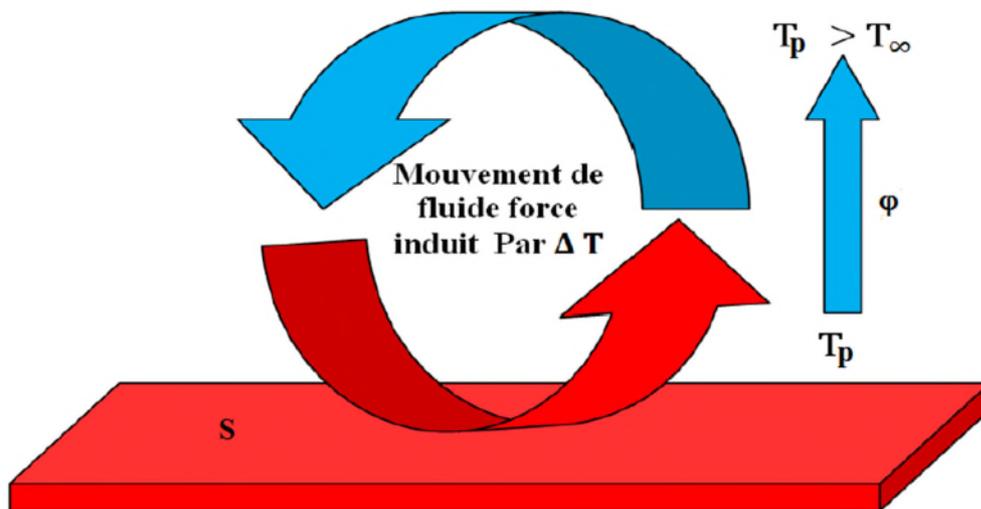


Figure I.1 – mécanisme du transfert de chaleur par convection [1].

Le flux de chaleur mis en jeu s'écrit alors d'après la loi de Newton :

$$\varphi = h S(T_p - T_\infty) \quad (I.1)$$

φ : Flux de chaleur transmis par convection (W).

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($W/m^2 K$).

T_p : Température de la surface du solide (K).

T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide (m^2).

S : Aire de la surface de contact solide/fluide.

La convection est le mécanisme le plus important de transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide. On distingue généralement trois types de convection :

I.2.1 Convection naturelle

La convection naturelle dans laquelle le mouvement du fluide est produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celles froides existant dans un fluide, situées dans un champ de forces massiques.

Cette différence de densité, qui est la plupart du temps provoquée par une différence de température. Elle crée avec la force de gravité une force de flottabilité, qui par conséquent génère une différence de quantité de mouvement [2].

I.2.2 Convection forcée

En convection forcée le mouvement du fluide est provoqué par l'action des forces extérieures (par exemple pompe, ventilateur...etc.), qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement du fluide.

I.2.3 Convection mixte

Elle correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcé) quand les vitesses d'écoulement fictives dues aux deux types de convection sont, considérées séparément sont du même ordre de grandeur. Quel que soit le type de convection considéré, on distingue deux régimes d'écoulement : laminaire et turbulent.

I.3 Définition du milieu poreux

On appelle un milieu poreux toute matrice solide comportant des vides au travers desquelles un ou plusieurs fluides peuvent s'écouler. Ces espaces vides qui peuvent être connectés sont appelés pores. On rencontre plusieurs milieux poreux dans la nature ou l'industrie, on distingue ainsi deux sortes de milieux poreux :

- milieux solides non consolidés : la phase solide est formée de grain (par exemple d'empilement de billes, de panneaux de fibre de verre, de sable ...etc.), Figure (I.2a).
- milieux solides consolidés : tel que les roches, le bois ...etc., Figure (I.2b).

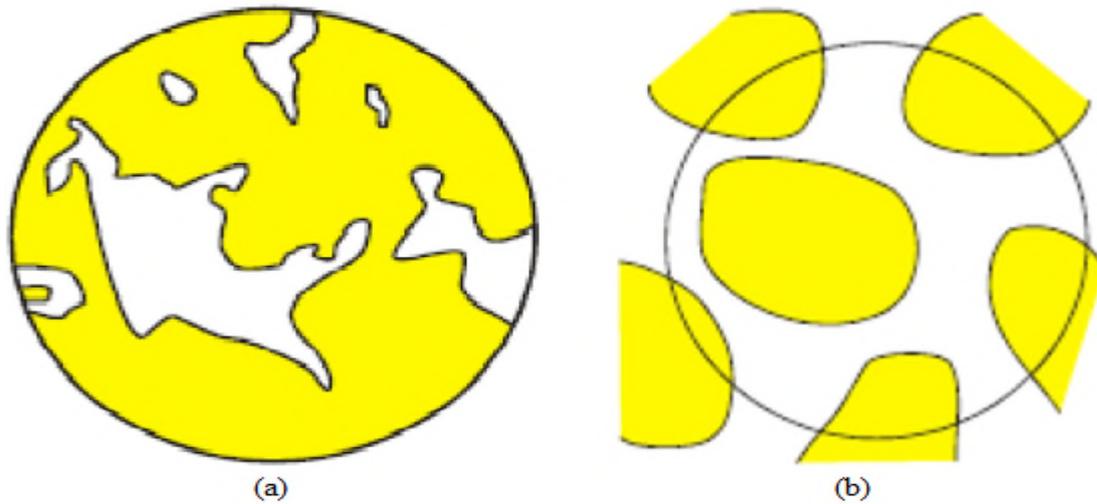


Figure I.2 - Types de milieu poreux : milieu consolidé (b) et non consolidé (a) [3].

Un milieu poreux est caractérisé principalement par, deux propriétés macroscopiques liées entre elles et qui sont la porosité et la perméabilité, [3].

I.4 Paramètres du milieu poreux

I.4.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R)

L'échelle du pore (d) varie généralement de $0.05\mu\text{m}$ pour le nano-pores, à 0.5mm pour les macro-pores. La distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. La pression, la vitesse et la température varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. Souvent, on est amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu (L). Cette moyenne s'effectue donc sur des nombreux pores par l'intermédiaire d'un Volume Elémentaire Représentatif (**V.E.R**) du milieu, (Figure II.3). De plus l'échelle l du **V.E.R** doit donc vérifier la condition $d \ll l \ll L$. Les grandeurs macroscopiques moyennées varient d'une manière régulière dans le temps et dans l'espace, ce qui permet un traitement théorique et une formulation mathématique des principes de conservation plus appropriés [4].

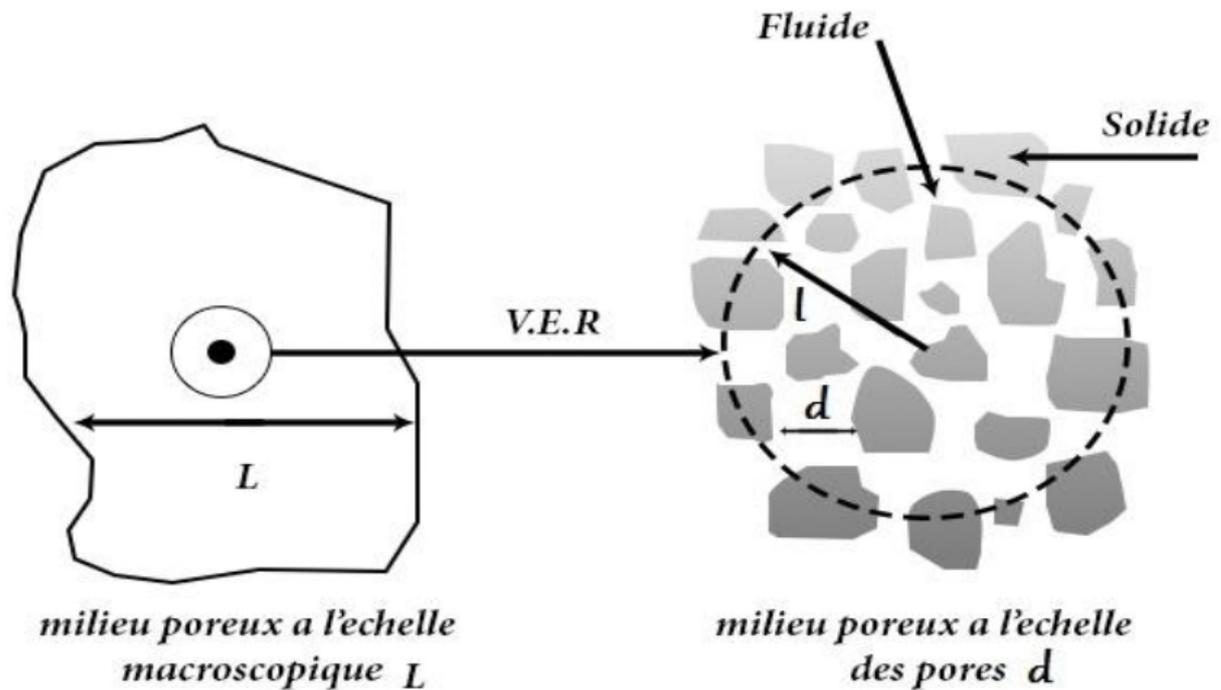


Figure I.3 - Représentation schématique du volume élémentaire représentatif [4].

Le volume élémentaire représentatif doit respecter nécessairement les conditions suivantes :

- Les dimensions du V.E.R sont généralement grandes par rapport à la taille du grain.
- Les V.E.R doivent cependant être suffisamment petits pour que les variations d'un paramètre dans le domaine d'étude puissent être représentées par des fonctions continues.

I.4.2 Porosité

La porosité notée « ε » est une caractéristique intrinsèque d'un milieu poreux, elle est définie comme le rapport du volume vide occupé par les pores sur le volume total du milieu poreux soit :

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{pores}}}{V_{\text{total}}} \quad (\text{I.2})$$

V_{pores} : volume des pores.

V_{total} : volume total de la matrice poreuse.

Puisqu'il s'agit d'un rapport de mêmes propriétés, la porosité est sans unités et elle est souvent exprimée en pourcentage.

Le tableau suivant représente la porosité de quelques milieux poreux [9] :

Tableau I.1 - valeur moyenne de la porosité pour quelques matériaux

Matériaux	Porosité (ϵ)
Matériau mousseux	0,98
Fibre de verre	0,88 – 0,93
Fil à tisser	0,68 – 0,76
Grains de silice	0,65
Poudre d'ardoise noire	0,57 - 0,66
Cuir	0,56 – 0,59
Catalyseur	0,45
Granulé de pierres	0,44 – 0,45
Terre	0,43 – 0,54
Sable	0,37 – 0,50
Poudre de silice	0,37 – 0,49
Sphère bien empilée	0,36- 0,43
Filtre de cigarettes	0,17 – 0,49
Brique	0,12 – 0,34
Poudre de cuivre	0,09 – 0,34
Pierre à chaud dolomite	0,04 – 0,10
Houille	0,02 – 0,07

I.4.3 Perméabilité

La notion de conductance de l'écoulement dans une matrice poreuse est appelée perméabilité. Autrement dit, c'est l'aptitude de circulation qu'offre un milieu poreux à un fluide lors de son écoulement à travers les pores de ce milieu sous l'effet d'un gradient de pression [5].

Par exemple, dans le modèle de Darcy la perméabilité est donnée par :

$$K = - \frac{\mu_f U_D}{dP/dx} \quad (I.3)$$

μ_f : Viscosité dynamique du fluide.

U_D : Vitesse Darcienne.

dP/dx : Gradient de pression.

Le tableau suivant représente la perméabilité de quelques milieux poreux [9] :

Tableau I.2 - Perméabilités de quelques milieux poreux.

Matériaux	Perméabilité (K)
Brique	$4,8.10^{-15} - 2,2.10^{-13}$
Pierre à chaud, Dolomite	$2,0.10^{-15} - 4,5.10^{-14}$
Cuir	$9,5.10^{-14} - 1,2.10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$4,9.10^{-14} - 1,2.10^{-13}$
Terre	$2,9.10^{-13} - 1,4.10^{-11}$
Fibres de verre	$2,4.10^{-11} - 5,1.10^{-11}$
Sable	$2,0.10^{-11} - 1,8.10^{-10}$
Cheveux artificiels	$8,3.10^{-10} - 1,2.10^{-9}$
Plaque de liège	$3,8.10^{-9} - 1,5.10^{-9}$
Fils à tisser	$3,8.10^{-9} - 1,10^{-8}$
Cigarette	$1,1.10^{-9}$

I.5 Caractéristique thermo-physique des milieux poreux

I.5.1 Viscosité dynamique effective

Lorsque l'approche des modèles moyennés sur un VER est adoptée, il est nécessaire de définir les propriétés thermo-physiques évaluées sur le VER incluant les deux phases fluide et solide. Ainsi, la viscosité effective a été introduite par Brinkman [6] afin de mettre en évidence la discontinuité des contraintes aux interfaces fluide-poreux et d'obtenir une expression pour la perméabilité. En combinant l'écoulement de Stokes avec celui de Darcy [7], il a obtenu l'équation suivante :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{\text{eff}}\nabla^2\vec{V} \quad (\text{I.4})$$

Brinkman a considéré la viscosité dynamique effective égale à la viscosité du fluide considéré. Lundgren [8] a donné des justifications à l'équation de Brinkman et a trouvé, de plus, que le rapport entre la viscosité dynamique μ_{eff} et celle du fluide n'est pas toujours égal à l'unité.

Lundgren démontrera aussi que la viscosité effective est une fonction de la viscosité du fluide et de la porosité.

I.5.2 Conductivité thermique effective

Les phases fluide et solide en présence dans le milieu poreux contribuent généralement, avec des proportions différentes, au mode de conduction. De ce fait, la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective. Cette dernière est fortement dépendante de la porosité et des conductivités thermiques des phases solide et fluide de la matrice poreuse. D'une manière générale les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles en série et parallèle basés sur l'analogie électrique [7].

➤ Modèle série

Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du fluide est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases.

$$\frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{\varepsilon}{\lambda_f} + \frac{(1 - \varepsilon)}{\lambda_s} \quad (\text{I.5})$$

➤ Modèle parallèle

Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse les deux phases fluide et solide en même temps. La conductivité thermique effective est alors la somme pondérée des taux d'occupation d'espace des conductivités phasiques.

$$\lambda_{\text{eff}} = \varepsilon\lambda_f + (1 - \varepsilon)\lambda_s \quad (\text{I.6})$$

I.6 Modèles d'écoulements dans le milieu poreux

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les équations régissant les principes de conservation de quantité de mouvement, d'énergie ou de masse ne peuvent être mises en application qu'après passage à une échelle macroscopique qui permet de faire une équivalence entre un milieu réel désordonné et un milieu continu fictif. La formulation des équations macroscopiques de conservation est obtenue à partir d'équations microscopiques auxquelles sont appliquées des procédures de changement d'échelle.

Nous présenterons, dans ce qui suit, les différents modèles de régimes d'écoulements construits à partir du modèle de Darcy avec les différentes extensions tenant compte de certains effets existant dans les milieux poreux [9].

I.6.1 Modèle de Darcy

La dynamique des fluides homogènes dans les milieux poreux est décrite par la loi de Darcy établie en 1856 sur des fondements expérimentaux. Cette, loi mise en évidence à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, fait apparaître la proportionnalité entre le gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques se sont basées, même pour les écoulements multidirectionnels, sur la loi de Darcy [5], elle s'écrit :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \rho\vec{g} \quad (I.7)$$

Où \vec{V} est la vitesse de filtration, ρ et μ sont, respectivement, la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide ; K la perméabilité du milieu poreux, ∇P le gradient de pression appliqué et \vec{g} le vecteur d'accélération de la pesanteur.

La loi de Darcy généralisée est valable pour les écoulements laminaires à faible nombre de Reynolds basé sur le diamètre des pores.

Cette loi, qui reste largement utilisée, se trouve cependant insuffisante. D'une part elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide saturant sur l'écoulement, notamment dans les zones pariétales. Avec ce modèle, la condition de glissement du fluide sur les parois solides est retenue quelle que soit la nature du fluide. D'autre part cette loi ne tient pas compte de l'effet des forces visqueuses dans le cas de milieux poreux fortement perméables et elle ne prend pas en compte, non plus, l'effet d'inertie dans le cas où les vitesses sont importantes. Des termes additionnels ont donc été apportés au modèle de Darcy pour remédier aux insuffisances de ce dernier.

I.6.2 Modèle de Brinkman

Brinkman a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de dissipation visqueuse dans la loi de Stokes [5] :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \rho\vec{g} + \mu_{eff}\vec{\nabla}^2\vec{V} \quad (I.8)$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman. Ce dernier, qui représente les forces visqueuses causées par le cisaillement macroscopique le long des frontières est très significatif dans les régions près des parois solides.

Poulikakos & Renken [10] ont démontré l'influence du terme de Brinkman sur le champ dynamique et sur le transfert de chaleur. Pour l'aspect dynamique, ce terme permet de mettre en évidence l'effet « channeling » près des parois solides et aussi de satisfaire la condition d'adhérence aux parois. Quant à l'aspect thermique, l'omission de ce terme influe considérablement sur la valeur du nombre de Nusselt.

La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_{eff} .

Plusieurs auteurs (Lundgren [8], Durlofsky & Brady [11]) ont montré que le terme de Brinkman n'est valable que pour de faibles valeurs de porosité. Cependant ce terme est retrouvé par la méthode de prise de moyennes en milieu homogène, Whitaker [12].

I.6.3 Modèle de Forchheimer

La loi de Darcy n'est pas adaptée aux écoulements à forte vitesse et aux écoulements des gaz à basse pression. A de faibles pressions de gaz et pour de petites dimensions des pores, le libre parcours moyen des molécules du gaz est du même ordre de grandeur que la dimension des pores et c'est pourquoi, il y a présence d'une vitesse de glissement (Effet Kundsén). Scheidegger [13] a examiné l'effet de glissement de Kundsén, de la rugosité de la surface interne, de l'absorption de la surface, de la condensation capillaire et de la diffusion moléculaire sur la perméabilité, et il a remarqué que les perméabilités aux gaz et liquides d'une même matrice poreuse peuvent être remarquablement différentes.

Dès le début du XX siècle, Forchheimer [14] a mis en évidence expérimentalement qu'il y a apparition de recirculations à l'échelle du pore lorsque le débit de l'écoulement est important. Ces recirculations produisent une chute supplémentaire de pression exprimée sous la forme d'une fonction quadratique de la vitesse de filtration :

$$\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{K} \vec{\nabla} = +\rho \vec{g} + C_f K^{1/2} \rho_f |\vec{\nabla}| \vec{\nabla} \quad (\text{I.9})$$

I.6.4 Modèle général de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Les modifications initialement proposées par Forchheimer et Brinkman conduisent à l'équation suivante :

$$\rho \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \vec{\nabla}}{\varepsilon} \right) \right] = - \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla}(\varepsilon p) + \rho \vec{g} + \frac{\mu_{\text{eff}}}{\varepsilon} \nabla^2 \vec{\nabla} - \frac{\mu}{K} \vec{\nabla} - F \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} |\vec{\nabla}| \vec{\nabla} \quad (\text{I.10})$$

(a) (b) (c) (d) (e) (f)

\vec{V} : est une quantité moyennée à travers un volume élémentaire.

- (a) : Forces inertielles macroscopiques.
- (b) : Gradient de pression.
- (c) : Forces de volumes.
- (d) : Terme visqueux de Brinkman.
- (e) : Terme de Darcy.
- (f) : Terme de Forchheimer (forces inertielles microscopiques).

I.7 Equation d'énergie en milieu poreux

Comme l'équation de Darcy (ou l'équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer) décrivant l'écoulement du fluide au sein du milieu poreux, l'équation de l'énergie (ou les équations de l'énergie selon le concept adopté) traduisant le transfert de chaleur dans le milieu poreux fait appel au concept de milieu continu fictif, équivalent au milieu poreux réel.

A fin d'obtenir une description macroscopique des phénomènes de transfert dans un volume élémentaire représentatif de milieu poreux, il faudrait établir l'équation (ou les équations) de transfert de chaleur .pour cela, on procède à la notion d'équilibre locale. Cette dernière est largement utilisée [9].

$$(\rho C_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla}(\lambda_{eff} \vec{\nabla} T) + q_m''' \quad (I.11)$$

Où :

$$(\rho C_p)_{eff} = (1 - \varepsilon)(\rho C_p)_s + \varepsilon(\rho C_p)_f$$

ρ : Masse volumique du fluide considéré.

ε : Porosité du milieu poreux.

$(\rho C_p)_{eff}$: Capacité calorifique effective.

$(\rho C_p)_s$: Capacité calorifique du solide.

$(\rho C_p)_f$: Capacité calorifique du fluide.

λ_{eff} : Conductivité thermique effective.

$q_m''' = (1 - \varepsilon)q_s''' + \varepsilon q_f'''$: La source d'énergie.

I.8 Revue bibliographique

L'étude du transfert thermique dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux repose sur la détermination des propriétés du milieu (la porosité et la perméabilité). Ainsi les nombreuses études ont porté sur les phénomènes de transfert de chaleur et quantité de mouvement dans les milieux poreux. Ces études sont une modélisation simplifiée de beaucoup de problèmes pratiques (mécanique, chimie ...etc.).

R. Bennacer et al [15], ont réalisés une étude numérique et analytique concernant le transfert combiné de chaleur et de masse dans un milieu poreux, Figure I.4. Ce milieu est globalement homogène et présente une anisotropie thermique. L'équation qui gouverne l'écoulement est celle de Darcy-Brinkman. Le système d'équations couplées est résolu par la méthode classique des volumes finis. Dans le cas d'écoulements d'origine thermique, l'analyse d'échelle est appliquée pour prédire analytiquement l'évolution du transfert de chaleur et de masse en fonction de l'anisotropie thermique. Les simulations numériques sont présentées pour une cavité carrée en faisant varier une large gamme de paramètres. Les résultats numériques sont analysés en termes de transfert moyen de chaleur et de masse sur les parois verticales de la cavité et montrent l'existence d'un maximum de transfert de masse pour un rapport d'anisotropie critique. Cette situation critique dépend de plusieurs paramètres dont le nombre de Lewis du fluide saturant. Ces résultats sont comparés à ceux prédits par l'analyse d'échelle, dans le cas d'un écoulement en couche limite (modèle de Darcy), et une corrélation générale est établie pour le calcul du transfert de masse et de chaleur en fonction des différents paramètres étudiés.

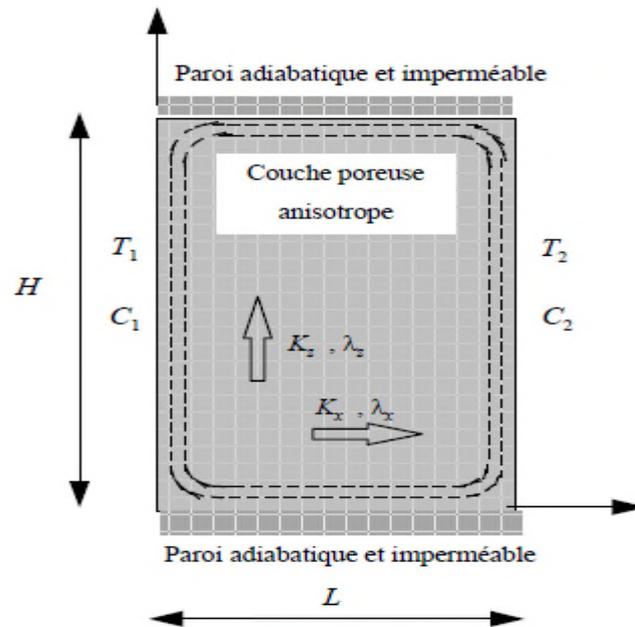


Figure I.4 - Configuration physique considérée [15]

Dalel Helel et al [16], ont tracés comme objectif la simulation des transferts bidimensionnels de chaleur et de masse au cours du séchage d'un milieu poreux non saturé et indéformable exposé à un écoulement convectif forcé laminaire d'air humide dans un canal horizontal, Figure I.5. Le modèle utilisé tient compte d'une part des approximations des couches limites dynamique, thermique et massique et d'autre part de la variabilité des coefficients des transferts thermique et massique.

Les résultats obtenus, ont permis d'évaluer l'influence de la hauteur du canal sur le processus de séchage et sur les comportements spatio-temporels de la température, de la saturation en eau et de la pression du mélange gazeux.

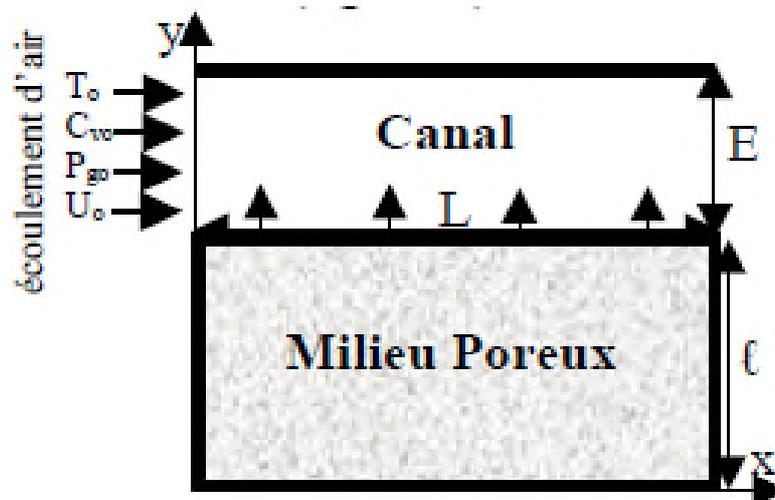


Figure I.5 - Configuration géométrique du système [16]

S. Safi et al [17], ont analysé les transferts de chaleur et de masse dans une enceinte rectangulaire remplie d'une matière poreuse anisotrope en perméabilité saturée par un fluide binaire, Figure I.6. Le modèle mathématique utilisé est celui de Darcy – Brinkman – Forchheimer. Les équations gouvernantes de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie et de masse sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Ils ont étudié l'influence de l'anisotropie en perméabilité et d'autres paramètres sur les transferts de chaleur et de masse. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature et ont montré que les nombres de Nusselt et de Sherwood croissent en augmentant l'anisotropie en perméabilité pour différents Nombre de Darcy.

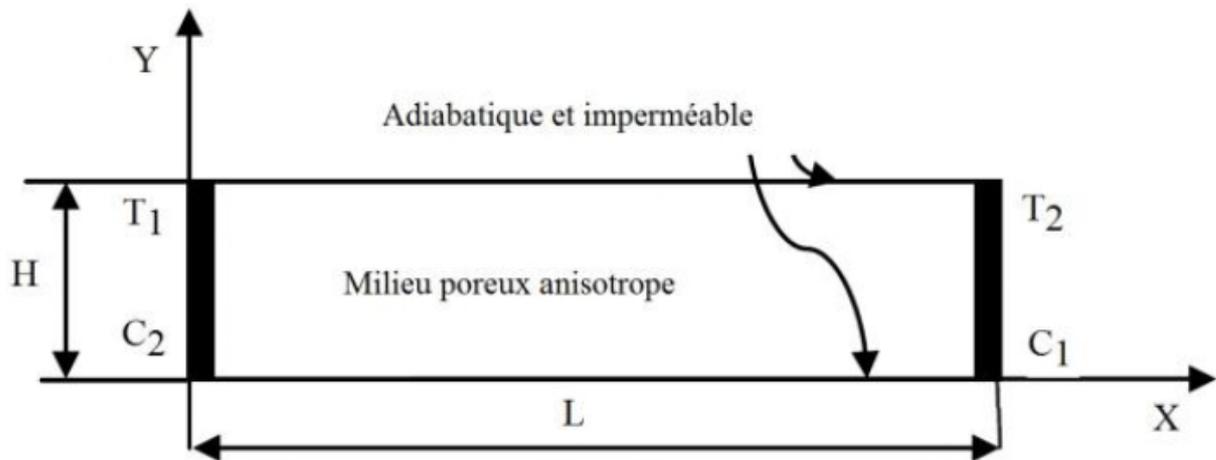


Figure I.6 - Modèle physique étudié [17]

Teimour Behzadi et al [18], ont réalisé une simulation numérique sur le transfert de chaleur par convection mixte dans une cavité carrée ventilée en présence d'un milieu poreux. Le but de cette étude numérique est d'étudier l'effet de l'ajout de milieux poreux dans une cavité carrée ventilée, sur le transfert de chaleur par convection mixte. La paroi supérieure de l'enceinte est maintenue à une température constante, et la paroi inférieure est située à un flux thermique constant, alors que les murs droit et gauche sont adiabatiques, Figure I.7. Un écoulement externe entre dans la cavité à partir d'un orifice de la paroi verticale gauche et sort d'un orifice de la paroi verticale droite. La méthode du volume fini est utilisée pour discrétiser les équations directrices et elles ont été résolues avec un algorithme simple. Dans cet article, l'effet du nombre de Richardson et du nombre de Darcy sur l'écoulement du fluide et le taux de transfert de chaleur ont été étudiés. Les résultats obtenus ont montré qu'un accroissement du nombre de Darcy et du diamètre des particules poreuses provoque une tendance décroissante du taux de transfert de chaleur.

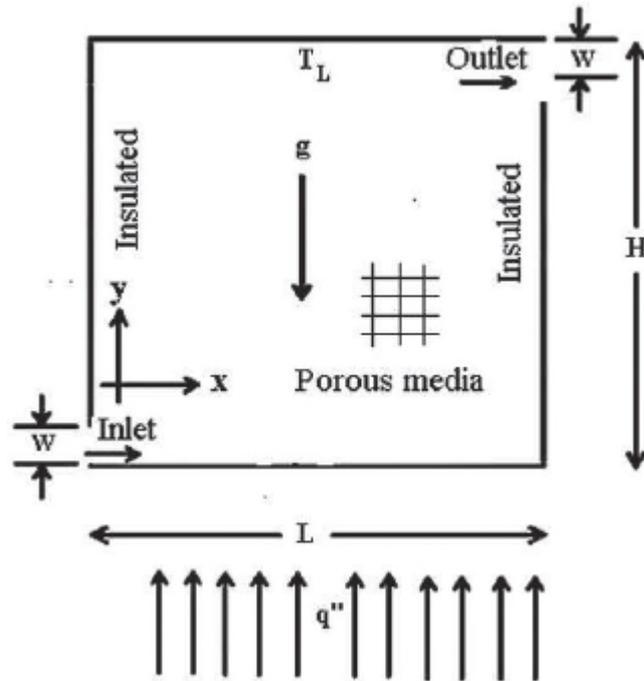


Figure I.7 - schéma de la cavité ventilée [18].

Lattice Boltzmann Simulation de convection forcée dans une cavité ventilée remplie de milieu poreux avec obstruction a été étudiée par **A. Abouei Mehrizi et al [19]**. Dans cet article, l'étude numérique du transfert de chaleur par convection forcée autour d'une plaque chaude placée dans une cavité carrée avec entrée et sortie est conduite avec et sans milieu poreux. Les murs de la cavité dans l'addition des orifices d'entrée et de sortie est thermiquement isolée et l'obstacle est maintenu à une température constante. Un modèle de Boltzmann, pour un écoulement incompressible dans les milieux poreux et le model de Brinkman-Forchheimer est utilisé pour simuler le problème. L'effet du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl sur la distribution de température est analysé pour différentes porosités. Les résultats sont présentés sous forme de lignes de courant, des courbes de température et du nombre de Nusselt moyen. Ils ont montrés qu'un ajout de milieu poreux dans le domaine avec de faibles porosités, augmente le transfert de chaleur.

Le transfert de chaleur par convection naturelle stationnaire conjugué dans une cavité carrée poreuse est étudié numériquement par **A.C. Baytas et al [20]**. La cavité se compose de deux parois conductrices d'épaisseur finie et deux parois verticales à températures uniformes et différentes. L'étude est concentrée sur l'effet du rapport de conductivité thermique sur l'écoulement du fluide et sur le transfert de chaleur sur les parois chaude et froide verticales

de la cavité. Il a été montré que la température de l'interface dans la partie supérieure de la paroi solide diminue avec l'augmentation de la conductivité de la paroi. En outre les valeurs du nombre de Nusselt moyen diminuent avec l'augmentation des valeurs de la conductivité thermique.

H.Nawaf et al [21] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux en régime transitoire. Ils ont utilisé le modèle de Darcy avec l'hypothèse standard de Boussinesq. La température de la paroi chaude (la paroi gauche) oscille dans le temps autour d'une valeur constante, tandis que la paroi froide (la paroi droite) est maintenue à une température constante, les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont présenté des résultats sous forme de variation temporelle des lignes de courant, d'isothermes et du nombre de Nusselt. Lorsque la température de la paroi chaude oscille avec une forme amplitude et une forte fréquence, ils ont remarqué que le nombre de Nusselt devient négatif sur une paroi de la période du nombre de Rayleigh de 10^3 . Les valeurs négatives du nombre de Nusselt ont été trouvées parce qu'il n'y a pas assez de temps pour transférer la chaleur de la paroi chaude vers la paroi froide. La valeur maximum du nombre de Nusselt moyen est observée pour une fréquence adimensionnelle de 450 dans la gamme considérée (1-2000) pour un nombre de Rayleigh de 10^3 .

Y. Outaleb et al [22] ont analysé la convection thermosolutale ayant lieu dans une enceinte munie d'une cloison poreuse et siège d'une injection/extraction de matière, Figure I.8. L'exploration numérique a permis d'observer les effets des paramètres thermo physiques (perméabilité, rapport de poussées, facteur d'injection) et du positionnement de l'arrivée/départ de l'injection/extraction, sur la maîtrise des échanges. L'approche effectuée, a permis aussi de dégager des valeurs critiques de certaines des propriétés caractéristiques et de déterminer les positions optimales et la configuration appropriée pour l'injection/extraction, en fonction de l'application envisagée. Il apparaît, notamment, dans tous les cas considérés, que c'est le phénomène d'extraction qui permis d'accroître les transferts, l'injection étant, pour sa part, réductrice des échanges, qu'il soit thermique ou massique. Ils ont trouvé que les échanges thermiques et solutal augmentent avec l'augmentation du rapport de poussées en valeur absolue et le transfert de masse est amélioré lorsque la matrice poreuse est placée aux extrémités de la cavité.

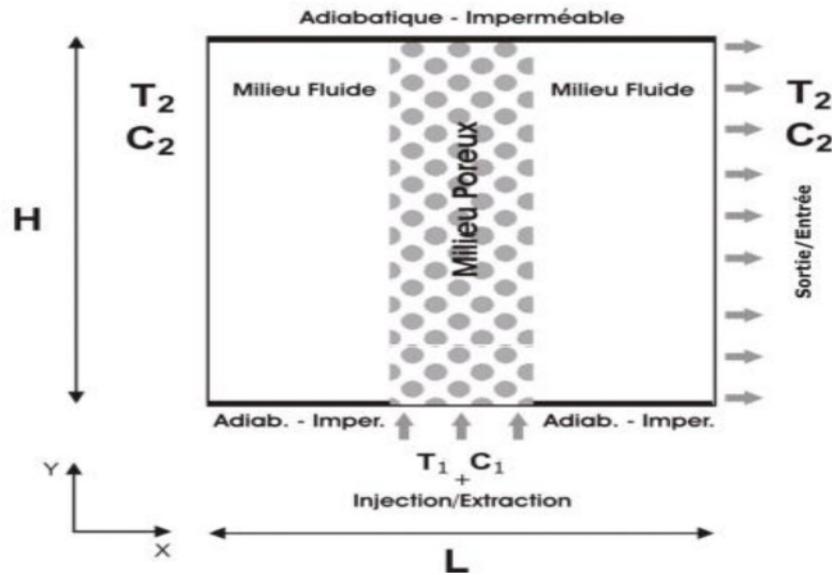


Figure I.8 - Modèle physique considéré [22]

La convection de Darcy-Bénard dans une enceinte poreuse carrée est étudiée numériquement par **A. Alhashash et al** [23]. Une paroi basse d'épaisseur finie est chauffée localement, la paroi supérieure est maintenue à une température inférieure à la température de la paroi basse, alors que les parois latérales sont refroidies. La méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre les équations adimensionnelles gouvernantes. Les paramètres considérés sont la longueur de la source de chaleur, l'épaisseur de la paroi, le rapport de conductivité thermique et le nombre de Biot. Ils ont constaté que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la longueur de la source de chaleur, le rapport de conductivité thermique et l'intensité de refroidissement. Il existe une épaisseur de paroi critique pour une conductivité élevée de la paroi au-dessous de laquelle l'épaisseur de paroi croissante améliore le taux de transfert de chaleur et au-dessus de laquelle l'épaisseur de paroi croissante réduit le taux de transfert de chaleur.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques modèles utilisés pour l'étude des milieux poreux. On a aussi relaté quelques études relatives au transfert de chaleur par convection dans des cavités en présence de milieux poreux pour diverses conditions aux limites. Dans le chapitre suivant on va présenter une description du problème à traiter ainsi que la formulation mathématique associée.

Description du problème et formulation mathématique

II.1 Introduction

A travers ce chapitre, nous présentons le model physique à étudier et les hypothèses simplificatrices considérées. Nous établissons les équations de base régissant l'écoulement d'un fluide dans une cavité carrée remplie par un milieu poreux. Par la suite, nous poserons les conditions limites associées.

II.2 Description du problème

Le problème considéré est schématisé sur la figure (II.1). Il s'agit d'une cavité carrée bidimensionnelle (2D) ventilée (une entrée de fluide par le coté bas gauche et une sortie du fluide coté haut droit), de coté L . Les sections d'entrées et de sorties ont une épaisseur W . la cavité est remplie par un milieu poreux non consolidé.

Les deux parois verticales sont adiabatiques, la paroi horizontale supérieure est à une température T_C (froide) et la paroi horizontale inferieure est à la température chaude T_h .

Le fluide à l'entrée est à une température uniforme T_C et animé d'une vitesse uniforme u_0 .

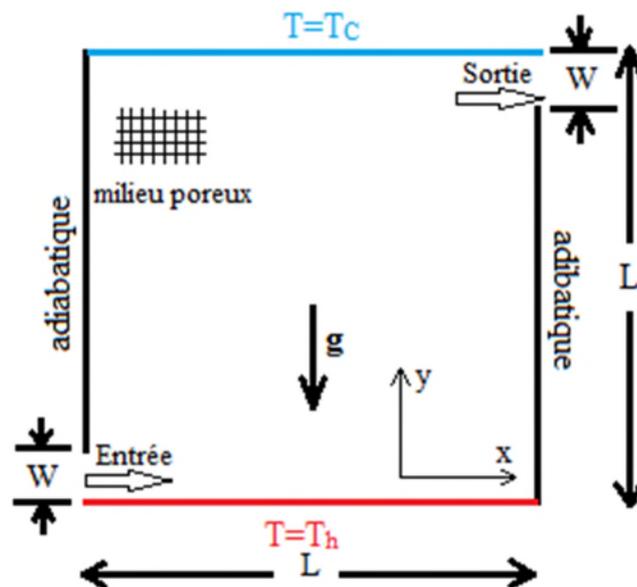


Figure II.1- Géométrie du problème considéré.

II.3 Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses qui permettent une description mathématique relativement simple du phénomène étudié sont :

- L'écoulement est celui d'un fluide, newtonien incompressible en régime laminaire permanent et stationnaire
- La matrice poreuse est homogène, perméable et non déformable.
- La matrice poreuse est complètement saturée par le fluide.
- Absence de réaction chimique et de source de chaleur ou de masse.
- Equilibre thermique local à l'interface solide/fluide.
- On admet que les vitesses mises en jeu sont relativement faibles de sorte que la fonction de dissipation visqueuse dans l'équation d'énergie peut être légitimement négligée.
- La densité du fluide est considérée constante excepté dans le terme des forces de volume contenu dans l'équation de conservation de quantité de mouvement. Cette hypothèse est justifiée en convection mixte est constituée une des hypothèses de l'approximation de Boussinesq.

II.4 Approximation de Boussinesq-Oberberk

L'approximation de Boussinesq repose sur deux hypothèses, d'une part, elle postule que la masse volumique est constante dans tous les termes sauf pour le cas de force de volume, d'autre part, elle suppose un écart de température entre les parois. Les changements de la masse volumique $\Delta\rho$ reste faible par rapport à ρ_0 dans tout l'écoulement à condition que les variations de température soient insuffisantes pour faire varier de façon significative les différentes propriétés du milieu (fluide et solide) [25].

En se limitant, au premier terme du développement de ρ en terme de température, on peut écrire : $\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$

ρ_0 et β étant respectivement la masse volumique à la température de référence T_0 et le coefficient de dilatation volumique à pression constante : $\beta = -\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)$

II.5 Formulation mathématique

En régime de convection, le phénomène met en jeu le mouvement du fluide, par conséquent il faut résoudre les équations générales de la dynamique des fluides. En tenant compte des différentes hypothèses déjà citées, le model mathématique adopté est basé sur les équations liant les variables de pression, vitesse et température.

Les équations en question découlent des lois de conservations de la masse (équation de continuité), de la quantité de mouvement (équations de Navier Stokes) et de l'énergie (équation de la température) et s'écrivent en projection dans le système d'axes cartésien (x, y) comme suite :

II.5.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II. 1})$$

II.5.2 Equation de quantité de mouvement

Suivant l'axe des X :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\nu}{K} u \quad (\text{II. 2})$$

Suivant l'axe des Y :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\nu}{K} v + g\beta(T - T_C) \quad (\text{II. 3})$$

II.5.3 Equation d'énergie

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II. 4})$$

II.5.4 Conditions limites

Les conditions aux limites dimensionnelles sont définies dans le tableau ci-dessous :

Tableau II.1 - Conditions aux limites

	x	y	Condition	
			Dynamique	Thermique
Entrée	$x=0$	$0 \leq y \leq W$	$u=u_0 ; v=0$	$T=T_c$
Sortie	$x=L-W$	$0 \leq y \leq L-W$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
Paroi supérieure	$0 \leq x \leq L$	$y=L$	$u=0 ; v=0$	$T=T_c$
Paroi inférieure	$0 \leq x \leq L$	$y=0$	$u=0 ; v=0$	$T=T_h$
Paroi droite	$x=0$	$0 \leq y \leq L$	$u=0 ; v=0$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
Paroi gauche	$x=L$	$0 \leq y \leq L$	$u=0 ; v=0$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

II.6 Formulation adimensionnelle

II.6.1 Variables adimensionnelles

Pour mettre le système d'équations précédent sous une forme adimensionnelle, nous avons choisi comme longueur de référence la longueur L de l'enceinte et comme vitesse de référence pour la vitesse u_0 . En effet, pour ramener les équations phénoménologiques sous une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir, moyennant ces grandeurs caractéristiques du problème des variables sans dimension dites aussi variables réduites.

Variables réduites du problème

- Coordonnées adimensionnées : $X = x/L , Y = y/L$
- Température adimensionnée : $\theta = \frac{T-T_c}{\Delta T}$ avec $\Delta T = T_h - T_c$
- Vitesses adimensionnées : $V = v/u_0 \quad U = u/u_0$
- Pression adimensionnée : $P = p/\rho u_0^2$
- conductivité adimensionnée : $\lambda^* = \lambda_{eff}/\lambda_f$

II.6.2 Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II. 5})$$

II.6.3 Equation de quantité de mouvement

Suivant l'axe des X :

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{\text{ReDa}} U \quad (\text{II. 6})$$

Suivant l'axe des Y :

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{\text{ReDa}} V + \varepsilon^2 \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta \quad (\text{II. 7})$$

II.6.4 Equation d'énergie

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II. 8})$$

II.6.5 Conditions limites adimensionnelles

Tenant compte de ces variables réduites, les conditions aux limites associées au problème (Figure II.2) sont résumées dans le tableau ci-dessous:

Tableau II.2 - Conditions aux limites adimensionnelles

	X	Y	Condition	
			Dynamique	Thermique
Entrée	X=0	0 ≤ Y ≤ 1	U=1 ; V=0	θ=0
Sortie	X=1	0 ≤ Y ≤ 1	∂U/∂x = ∂V/∂x = 0	∂θ/∂x = 0
Paroi supérieure	0 ≤ X ≤ 1	Y=1	U=0 ; V=0	θ=0
Paroi inférieure	0 ≤ X ≤ 1	Y=0	U=0 ; V=0	θ=1
Paroi droite	X=0	0 ≤ Y ≤ 1	U=0 ; V=0	∂θ/∂x = 0
Paroi gauche	X=1	0 ≤ Y ≤ 1	U=0 ; V=0	∂θ/∂x = 0

II.7 Nombres adimensionnels

Cette adimensionalisation a mis en évidence six paramètres de contrôle qui caractérisent le problème à savoir, respectivement, le nombre de Prandtl **Pr**, le nombre de Grashof **Gr**, le nombre de Reynolds **Re** et le nombre de Darcy **Da**. On définit aussi un nombre de Richardson **Ri** à partir de Re et Gr comme suit : $Ri = Gr/Re^2$.

➤ Nombre de Prandtl :

C'est un nombre qui est le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement et la diffusivité thermique.

$$Pr = \nu/\alpha \quad (II.9)$$

➤ Nombre de Grashof :

Il caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide. Il est le rapport entre l'effet de flottabilité par la force motrice d'Archimède et l'effet résistif de l'écoulement.

$$Gr = \frac{g \beta \Delta t L^3}{\nu^2} \quad (II.10)$$

➤ Nombre de Reynolds :

C'est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides, défini par le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité.

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu} \quad (II.11)$$

➤ Nombre de Richardson :

C'est un nombre sans dimension utilisé notamment en thermodynamique, qui a été développé par Lewis Fry Richardson, physicien et mathématicien anglais. Il est le rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une parcelle du fluide et son énergie cinétique.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (II.12)$$

➤ Nombre de Darcy :

Il est le rapport entre la perméabilité du milieu et l'aire de section transversale (généralement de diamètre de pore au carré).

$$Da = \frac{K}{L^2} \quad (\text{II. 13})$$

II.8 Nombre de Nusselt :

Le coefficient moyen de transfert de chaleur pour la convection peut être représenté sous forme adimensionnelle par le nombre de Nusselt. Le nombre de Nusselt local et moyen sont calculés à l'interface solide-liquide et aux parois par les relations suivantes [27].

$$Nu = \frac{\phi_{\text{total}}}{\lambda \frac{\Delta T}{L}} \quad (\text{II. 14})$$

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu dY \quad (\text{II. 15})$$

II.9 conclusion

Une fois les équations régissant le problème posées avec les conditions aux limites associées, elles ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe. Nous avons donc opté pour une résolution numérique, l'explication de la méthode des volumes finis, utilisée par Fluent, fera l'objet du prochain chapitre.

Méthodes numériques

III.1 Introduction

Les équations de conservation régissant le phénomène de la convection mixte sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires couplées. En raison de leur complexité, ces équations sont résolues à l'aide des techniques numériques disponibles dans la littérature.

III.2 Rappel sur la méthode numérique

La résolution par les méthodes dites numériques consiste à discrétiser des équations différentielles gouvernantes pour obtenir un système d'équations algébriques. Ces équations sont alors mises sous forme matricielle généralement linéaire facilement solvable par des méthodes directes ou indirectes (itératives) [9].

Il existe plusieurs méthodes numériques de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles, à savoir : la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis. On présentera dans ce qui va suivre, la méthode des volumes finis, vu que le code de calcul utilisé (ANSYS Fluent) pour la résolution de ces équations utilise cette méthode.

III.2.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis, bien connue aujourd'hui, est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode réside principalement dans sa formulation, réunit les principes les plus forts de la méthode des différences finies et ceux de la méthode des équations intégrales, respectivement la discrétisation du domaine d'intégration et le principe de construction de l'approximation et sa formulation.

III.2.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation locale des dérivées apparaissant dans les équations différentielles. En se basant sur le développement de Taylor,

les fonctions dérivées sont approchées par plusieurs types de schéma aux différences finies (avant ou à droite, arrière ou à gauche et centrées). La précision du résultat varie d'un schéma à l'autre (ordre de troncature utilisée). La méthode utilise un maillage, ou grille du domaine.

III.2.3 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis (MVF) a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding [28] et publiée en 1980 par Patankar [29]. La méthode des volumes finis est une méthode intégrale basée sur une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volume de contrôle (VC). Chacun de ces derniers englobe un nœud dit nœud principal, comme indiqué dans la figure (III.1). La MVF consiste à intégrer des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir des équations discrètes qui conservent toutes les grandeurs physique sur un VC. Les différentes étapes de la méthode des volumes finis peuvent être résumées comme suite :

- Discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle.
- Formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles.
- Ecriture des équations algébriques aux nœuds du maillage.
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

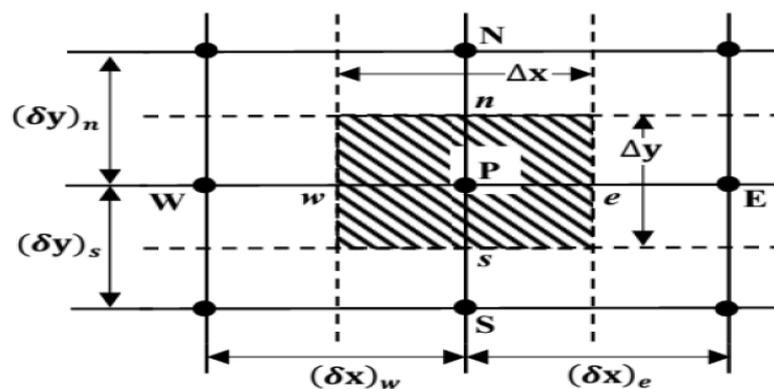


Figure III.1- Volume de contrôle bidimensionnel.

Le volume de contrôle montré sur la figure (III.1), comporte un nœud principal P, les points E et W (Est et Ouest) sont des voisins dans la direction x, tandis que N et S (Nord et Sud) sont ceux dans la direction y. Les limites du VC sont définies par les facettes e et w dans la direction x, n et s dans la direction y.

III.3 Choix de la méthode numérique

Pour notre présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis pour sa simplicité à mailler des géométries même complexes. Au même titre, elle garantit la conservation de masse et de quantité de mouvement dans tout le domaine de calcul.

III.4 Discrétisation

III.4.1 Equation de conservation

La conservation d'une quantité Φ dans un écoulement de fluide (V , enthalpie) et dans un volume de contrôle (VC) est décrite par des équations de conservation (de la masse, quantité de mouvement, flux massique, énergie etc.). On écrira les équations de conservation sous la forme générale suivante [3] :

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}}_I + \underbrace{\text{div}(\rho \Phi \bar{V})}_{II} = \underbrace{\text{div}(\Gamma \text{grad}(\Phi))}_{III} + \underbrace{S_\Phi}_{IV} \quad (\text{III.1})$$

Les différents termes représentent respectivement :

I : taux d'accroissement de la quantité Φ dans le VC pendant un temps dt : terme transitoire

II : contribution des flux externes à travers les surfaces délimitant le VC (terme de convection)

III : taux d'accroissement de la quantité Φ dû à la diffusion dans le VC (terme de diffusion)

IV : taux d'accroissement de la quantité Φ dû à la source (terme source)

Les grandeurs : Φ , Γ et S peuvent représenter différentes quantités selon le phénomène considéré :

Φ (1 ; u, v, w, T ou C) ; $\Gamma(\lambda, \mu)$; S (source de chaleur q, dissipation visqueuse etc..)

Dans le cas stationnaire bidimensionnel, l'équation de transport peut s'écrire :

$$\frac{(\partial \rho U \phi)}{\partial X} + \frac{(\partial \rho V \phi)}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \left[\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \right] - \frac{\partial}{\partial Y} \left[\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right] = S_\phi \quad (\text{III.2})$$

Avec :

U : Composante de la vitesse adimensionnelle suivant X.

V : Composante de la vitesse adimensionnelle suivant Y.

Γ : Coefficient de diffusion.

Nous donnons ci-dessous dans le tableau III.1 les quantités ϕ , Γ_ϕ et S dans le cas des équations gouvernant notre problème (chapitre II).

Tableau III.1 - variables et coefficients des équations « cas d'un milieu poreux ».

Equation	ϕ	Γ_ϕ	$S_\phi = S_P\phi_P + S_C$	
			S_P	S_C
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement selon x	U	$\frac{\varepsilon}{Re}$	$-\varepsilon^2 \left[\frac{1}{Re \cdot Da} \right]$	$-\frac{\varepsilon^2 \partial P}{\partial X}$
Quantité de mouvement selon y	V	$\frac{\varepsilon}{Re}$	$-\varepsilon^2 \left[\frac{1}{Re \cdot Da} \right]$	$-\frac{\varepsilon^2 \partial P}{\partial Y} + \varepsilon^2 \frac{Gr}{Re^2} \theta$
Energie	θ	$\frac{1}{Re \cdot Pr}$	0	0

Soit en définissant le flux sous la forme:

$$\begin{cases} J_X = \rho U \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \\ J_Y = \rho V \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \end{cases} \quad (III. 3)$$

J_X ; J_Y sont les flux totaux (convection et diffusif). L'équation (III.3) s'écrit alors:

$$\frac{\partial J_X}{\partial X} + \frac{\partial J_Y}{\partial Y} = S_\phi \quad (III. 4)$$

L'intégration de l'équation III.4 sur un volume de contrôle s'exprime par :

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial J_X}{\partial X} \right] dX dY + \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right] dX dY = \int_w^e \int_s^n S_\phi dX dY \quad (III. 5)$$

(A) (B)

a) Intégration du flux total

L'intégration des différents flux conduit directement à :

$$A = \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial J_X}{\partial X} \right] dX dY + \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial J_Y}{\partial Y} \right] dX dY \quad (\text{III. 6})$$

$$A = [(J_X)_e - (J_X)_w] \int_s^n dY + [(J_Y)_n - (J_Y)_s] \int_w^e dX \quad (\text{III. 7})$$

$$A = (J_X)_e \Delta Y - (J_X)_w \Delta Y + (J_Y)_n \Delta X - (J_Y)_s \Delta X \quad (\text{III. 8})$$

$$(A) = J_e - J_w + J_n - J_s \quad (\text{III. 9})$$

$$\text{Avec: } J_e = (J_X)_e \Delta Y \quad J_w = (J_X)_w \Delta Y \quad (\text{III. 10})$$

$$J_n = (J_Y)_n \Delta X \quad J_s = (J_Y)_s \Delta X$$

b) Intégration du terme source

L'intégration du terme source (B) de l'équation (III.5) sur tout le volume de contrôle est :

$$(B) = \int_w^e \int_s^n S_\phi dX dY = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \quad (\text{III. 11})$$

$\overline{S_\phi}$: est la valeur moyenne du terme source sur ce volume de contrôle. Si le terme source est dépendant de la variable ϕ , cette dépendance est alors exprimée par une relation linéaire :

$$\overline{S_\phi} = S_P \phi_P + S_C \quad (\text{III. 12})$$

Où S_C : est la partie constante qui ne dépend pas explicitement de ϕ_P .

Il faudra exprimer les termes des flux convectifs et diffusifs aux interfaces des volumes de contrôles. Ainsi on fait appel à différents schémas de discrétisations (différence centrées, loi de puissance, hybride,...).

III.4.2 Schémas d'interpolation

Afin d'évaluer le flux sur une interface du volume de contrôle, une analyse des différents schémas d'approximation est nécessaire pour définir les expressions en fonction du

nombre de **Peclet**. Le choix du schéma d'interpolation joue un rôle très important dans la précision de la solution du problème de convection-diffusion.

III.4.2.1 schéma aux différences centrées

La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par :

$$\begin{aligned} A(|Pe|) \\ = 1 - 0.5|Pe| \end{aligned} \quad (III. 13)$$

Etant donné que les coefficients a_e , a_w , a_n et a_s dépendent du nombre de PECLET, ce dernier doit être positif pour satisfaire la deuxième règle de base, qui exige que les coefficients a_i soient tous positifs. De cela on déduit, pour ce schéma, que : $|Pe| \leq 2$. Son utilisation est donc limitée.

III.4.2.2 schéma décentré amont (Upwind)

La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par :

$$A(|Pe|) = 1 \quad (III. 14)$$

Ce schéma ne présente aucune difficulté du fait que les quatre règles de bases sont respectées.

III.4.2.3 schéma hybride

Ce schéma est une combinaison des deux schémas précédents ; il se réduit à l'approximation centrée lorsque $|Pe| < 2$ et il devient identique au schéma Upwind lorsque $|Pe| > 2$. La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par :

$$A(|Pe|) = \max[0, 1 - 0.5|Pe|] \quad (III. 15)$$

III.4.2.4 schéma exponentiel

La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par :

$$A(|Pe|) = \frac{|Pe|}{\exp|Pe| - 1} \quad (III. 16)$$

Ce schéma s'adapte mieux à un écoulement monodimensionnel. Par contre, son utilisation pour des écoulements bidimensionnels et tridimensionnels n'est pas souhaitable, de plus la présence du terme exponentiel rend le temps de calcul élevé.

III.4.2.5 schéma en loi puissance (Power-Law)

La fonction d'interpolation de ce schéma est donnée par :

$$A(|Pe|) = \max[0, (1 - 0.1|Pe|)^5] \quad (III. 17)$$

Pour contourner les difficultés citées précédemment, on utilise le schéma d'approximation en loi puissance qui est plus précis pour n'importe quelle valeur du nombre de Peclet. En effet, ce schéma s'avère très efficace puisqu'il approche mieux la solution exacte (figure III.2). Il sera donc adopté dans la présente étude.

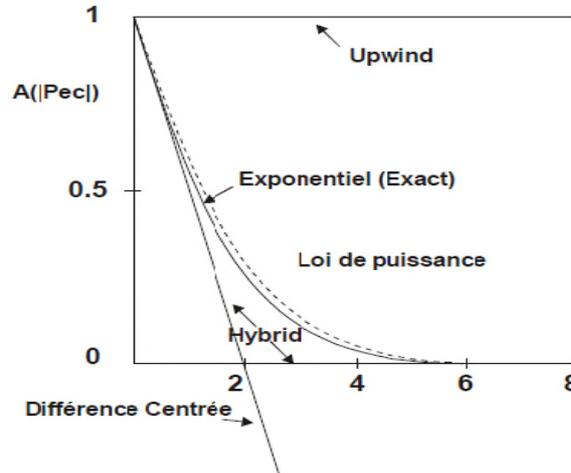


Figure III.2 - Variation de la fonction $A(|Pec|)$ pour différents schémas.

III.5 formulation générale du problème

L'intégration de l'équation générale de transport III.5 donne :

$$(j_e - j_w + j_n - j_s) = (S_C + S_P \phi_p) \Delta X \Delta Y \quad (\text{III. 18})$$

Nous intégrons aussi, de la même façon l'équation de continuité sur le volume de contrôle :

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial \rho U}{\partial X} \right] dX dY + \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial \rho V}{\partial Y} \right] dX dY = 0 \quad (\text{III. 19})$$

Ce qui conduit à :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (\text{III. 20})$$

Avec :

$$F_e = (\rho U)_e \Delta Y \quad F_n = (\rho V)_n \Delta X \quad (\text{III. 21})$$

$$F_w = (\rho U)_w \Delta Y \quad F_s = (\rho V)_s \Delta X$$

F_e, F_w, F_n et F_s sont les flux massique traversant les interfaces. Nous multiplions cette dernière équation par la variable et l'en soustrayant de l'équation générale :

$$(J_e - F_e \phi_e) - (J_w - F_w \phi_w) + (J_n - F_n \phi_n) - (J_s - F_s \phi_s) = (S_C + S_P \phi_p) \Delta X \Delta Y \quad (\text{III. 22})$$

On peut écrire les termes entre parenthèses de l'équation (III.22) comme suit :

$$J_e - F_e \phi_e = a_e (\phi_e - \phi_p)$$

$$J_w - F_w \phi_w = a_w (\phi_p - \phi_w) \quad (\text{III. 23})$$

$$J_n - F_n \phi_n = a_n (\phi_n - \phi_p)$$

$$J_s - F_s \phi_s = a_s (\phi_p - \phi_s)$$

Avec : les grand A_E A_W et ... sont définis ou

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \|F_e, 0\|$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \quad (\text{III. 24})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \|F_n, 0\|$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\|$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta Y}{\delta X_e}; \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta Y}{\delta X_w}; \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta X}{\delta Y_n}; \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta X}{\delta Y_s}$$

$$P_e = \frac{F_e}{D_e}; \quad P_w = \frac{F_w}{D_w}; \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}; \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

L'équation de discrétisation devient :

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (\text{III. 25})$$

Où :

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S - S_p \Delta X \Delta Y \quad , \quad b = S_c \Delta X \Delta Y \quad (\text{III. 26})$$

A_p, A_E, A_W, A_N et A_S sont les coefficients correspondant, respectivement aux nœuds Est, Ouest, Nord, Sud et centre du volume.

b : est un terme source supposé être constant dans le volume de contrôle.

$F_e, F_w, F_n, F_s, D_e, D_w, D_n, D_s$ sont respectivement les termes convectifs et diffusifs aux faces Est, Ouest, Nord, Sud.

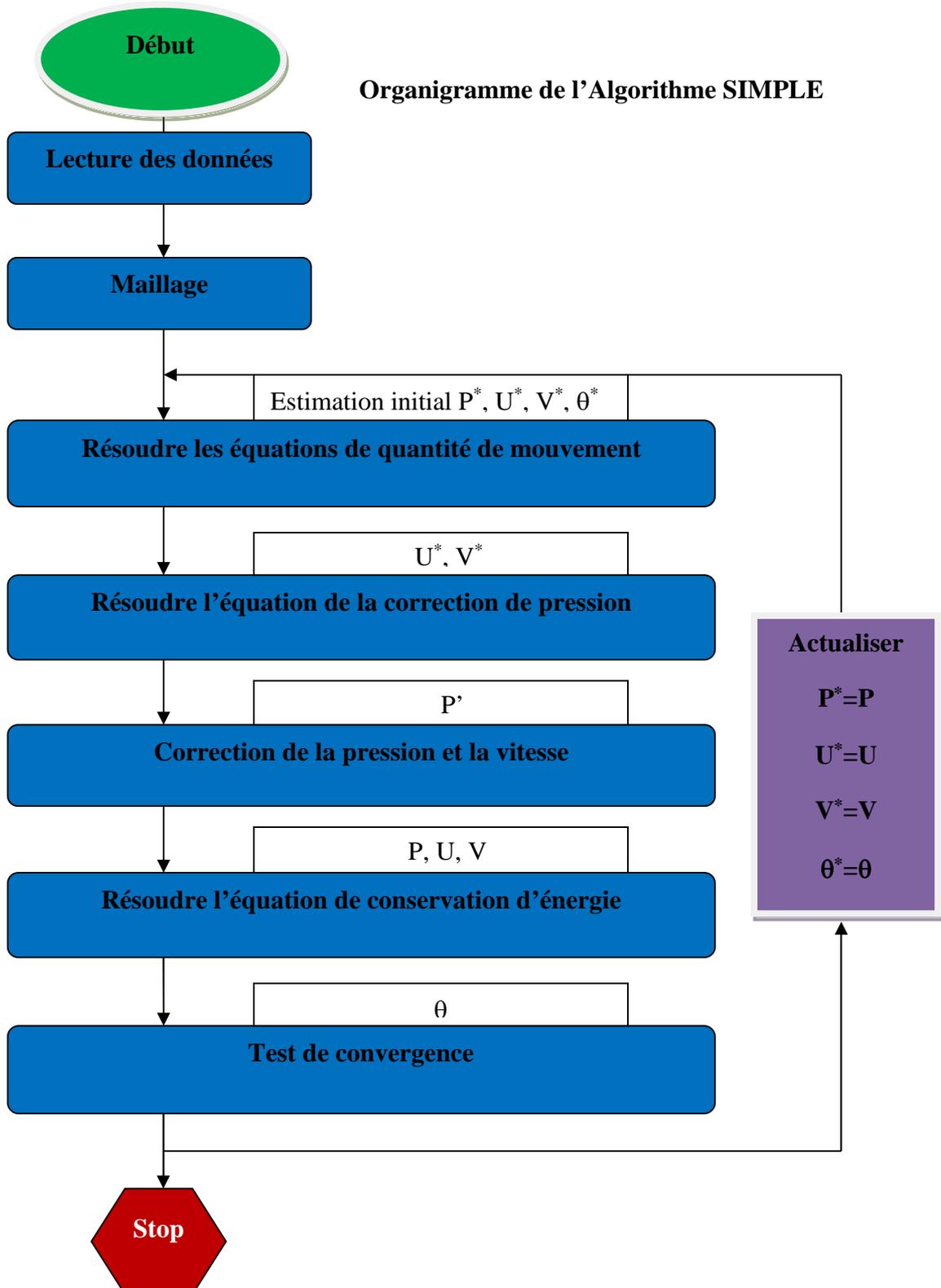
P_e, P_w, P_n et P_s désignent le rapport flux convectif aux flux diffusif aux différentes faces du volume de contrôle. Les expressions de A_p correspondant aux différents schémas sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Tableau III.2 - Expressions de A_p correspondant aux différents schémas.

schéma	La fonction $A(Pe)$
Différences centrées	$1 - 0.5 Pe $
Upwind	1
Hybride	$\max[0, 1 - 0.5 Pe]$
Loi de puissance	$\max[0, 1 - 0.1 Pe]^5]$

III.6 Algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)

Les équations de quantité de mouvement sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression. Cette difficulté de couplage vitesse-pression vient de l'absence d'équations explicites qui gouvernent le champ de pression. Pour cette raison, on utilise des méthodes indirectes dont la plus répandue est l'algorithme « SIMPLE ».



III.7 Résolution des systèmes d'équations

Dans les chapitres précédents, nous avons discuté des méthodes de discrétisation des équations régissant le flux de fluide et le transfert thermique. Ce processus engendre un système d'équations algébriques linéaires qui a besoin d'être résolu. La complexité et la taille de l'ensemble des équations dépendent de la dimensionnalité du problème, du nombre de nœuds de grille et de la pratique en matière de discrétisation. Bien que n'importe quel procédé valide puisse être employé pour résoudre ces équations algébriques, les ressources d'informatique disponibles placent une contrainte puissante.

Il y a deux familles de techniques de solution pour des équations algébriques linéaires, les méthodes directes et les méthodes indirectes ou itératives. Parmi les méthodes directes on citera l'inversion, la diagonalisation et la triangularisation de matrice.

Les méthodes itératives sont basées sur l'application répétée d'un algorithme relativement simple menant souvent à la convergence après un grand nombre de répétitions (itérations). Les exemples bien connus sont les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss Seidel.

La méthode des volumes finis rapporte habituellement des systèmes d'équations tri-diagonales (un système avec seulement trois coefficients différents de zéro par équation). Pour la résolution de tels systèmes, on utilise un algorithme dit de Thomas ou l'algorithme (TDMA). Le TDMA (Algorithme pour Matrices Tridiagonales) est réellement une méthode directe pour des situations unidimensionnelles, mais il peut être appliqué itérativement, pour résoudre des problèmes multidimensionnels, ce qui est largement répandu dans les programmes de CFD.

III.8 Algorithme (TDMA)

Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcl}
 \varphi_1 & & = C_1 \\
 -\beta_2\varphi_1 + D_2\varphi_2 - \alpha_2\varphi_3 & & = C_2 \\
 -\beta_3\varphi_2 + D_3\varphi_3 - \alpha_3\varphi_4 & & = C_3 \\
 -\beta_4\varphi_3 + D_4\varphi_4 - \alpha_4\varphi_5 & & = C_4 \\
 & \bullet & \\
 & \bullet & \\
 & \bullet & \\
 -\beta_n\varphi_{n-1} + D_n\varphi_n - \alpha_n\varphi_{n+1} & = & C_n \\
 & \varphi_{n+1} & = C_{n+1}
 \end{array} \tag{III.27}$$

Où ϕ_1 et ϕ_{n+1} sont les valeurs connues aux limites du domaine. Chaque équation peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$-\beta_j \phi_{j-1} + D_j \phi_j - \alpha_j \phi_{j+1} = C_j \quad (\text{III.28})$$

Le système d'équation (III.28) peut être réécrit :

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (\text{III.28.a})$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3} \phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3} \phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \quad (\text{III.28.b})$$

$$\phi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4} \phi_5 + \frac{\beta_4}{D_4} \phi_3 + \frac{C_4}{D_4} \quad (\text{III.28.c})$$

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n} \phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n} \phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

Ces équations peuvent être résolues en commençant par l'élimination de ϕ_2 dans l'équation (III.28b), en la remplaçant par l'équation (III.28.a) pour obtenir :

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \phi_4 + \left(\frac{\beta_3 \left(\frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \quad (\text{III.29.a})$$

$$\text{Si on pose : } A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad \text{et} \quad C'_2 = \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2}$$

L'équation (III.29.a) peut être réécrite sous la forme :

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left(\frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (\text{III.29.b})$$

$$\text{Où : } \quad \phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3 \quad (\text{III.30})$$

$$\text{Avec : } A_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad \text{et} \quad C'_3 = \left(\frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right)$$

La formule (III.30) peut être utilisée pour éliminer ϕ_3 de l'équation (III.28.c). La procédure peut être répétée jusqu'à la fin des équations. La dernière équation aura alors uniquement une seule inconnue ϕ_{n-1} . Les autres inconnues $\phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2, \phi_1$, sont donc calculées par substitution successive en faisant le chemin inverse (substitution arrière).

III.9 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode des volumes finis. L'analyse numérique est faite pour simuler et déterminer les champs de vitesses et de températures dans le domaine géométrique étudié.

Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la convection mixte dans une cavité carrée ventilée en présence d'un milieu poreux.

En premier lieu, nous présentons une optimisation du maillage dans le but de bien choisir la grille convenable pour la suite de l'étude. Puis nous procédons à la validation du modèle adopté par comparaison avec le travail de **Tanmay Basak [29]**.

Les résultats sont présentés en termes de lignes de courant, d'isothermes et du nombre de Nusselt (local et moyen) pour un nombre de Prandtl de 0.71.

IV.2 Choix de la grille de simulation

Le maillage utilisé dans la présente étude est un maillage uniforme dans les deux directions X et Y. Afin d'illustrer l'influence du maillage (nombre de points) sur les profils des lignes de courants, nous avons testé plusieurs grilles dont le nombre de nœuds varie entre 20×20 à 180×180 . Le tableau IV.1 et la figure IV.1, montrent que le nombre de Nusselt moyen obtenu pour les différents cas varie peu à partir d'une grille de 120×120 . De ce fait, pour des raisons de précision et du coût (temps de calcul) nous avons adopté dans la présente étude un maillage de 120×120 points.

Tableau IV.1- Nusselt moyen pour différentes grilles

Maillage	Nu_{moy}
20×20	1,805871
40×40	1,883163
60×60	1,903274
80×80	1,910523
100×100	1,9133292
120×120	1,914282
140×140	1,914445
160×160	1,9142756
180×180	1,913965

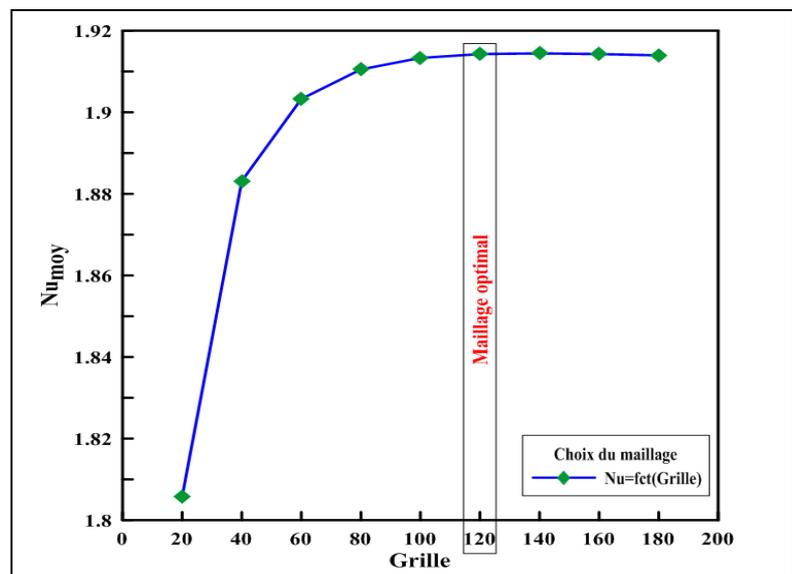


Figure IV.1- Nusselt moyen pour différents maillages $Gr=10^5$, $Da=10^{-5}$.

IV.3 Validation numérique

Dans cette validation, les résultats sont comparés avec ceux de **Tanmay Basak [29]**. Les lignes de courant sont représentées pour: $Pr=0.71$, $Ra=10^6$, $Ri=0.1$, $\varepsilon=1$, $Da=10^{-2}$ à 10^{-5} , $T_h=313.15K$ et $T_c=293.15K$. Les propriétés thermo-physiques de l'air sont prises à température de référence 293.15K (voir annexe A.1). Les comparaisons montrent un bon accord entre les résultats des simulations et de la référence [29], Figures IV.2 à IV.5.

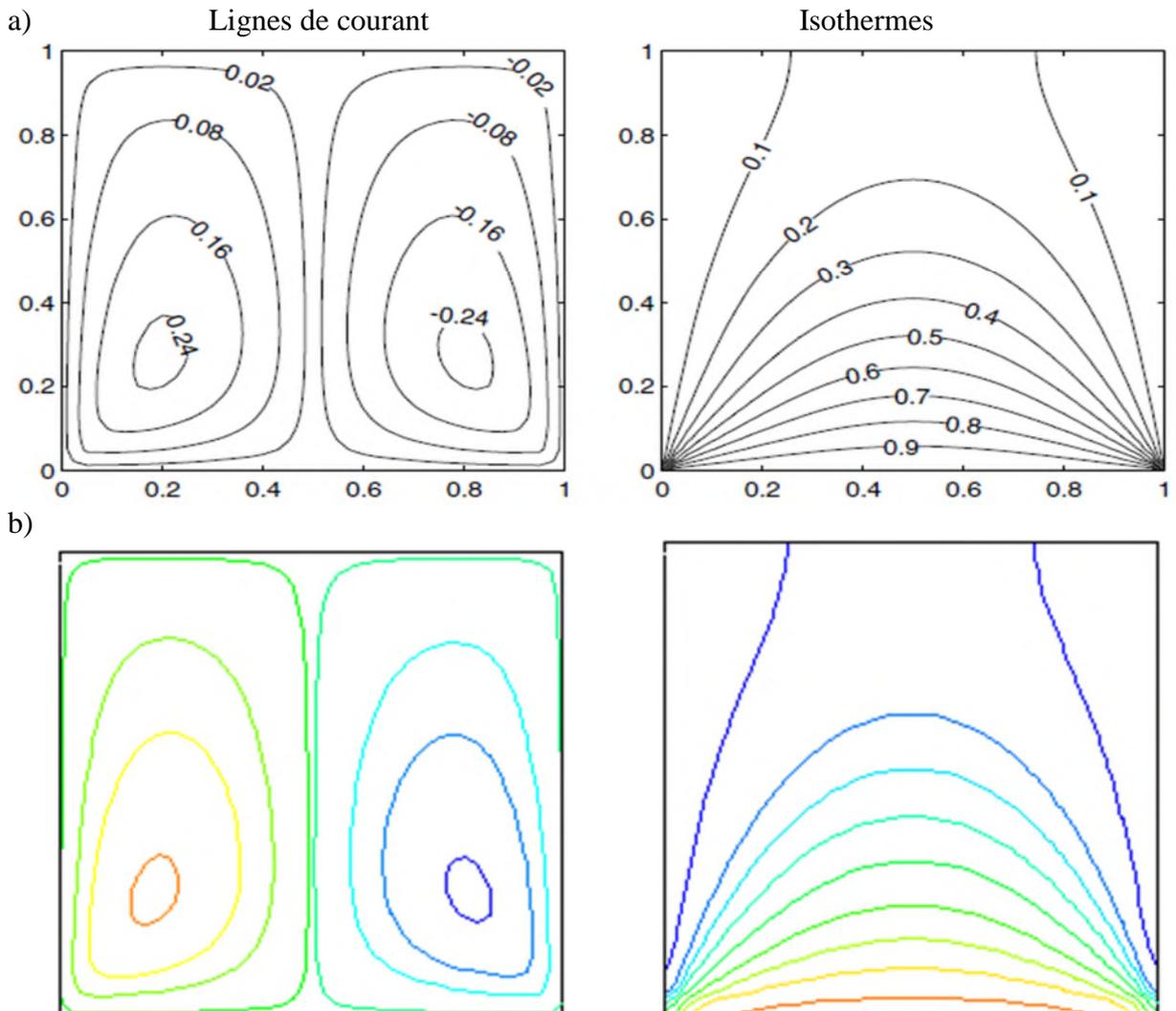


Figure IV.2 - lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-5}$, $Ra=10^6$:

a) Lignes de courant b) Isothermes

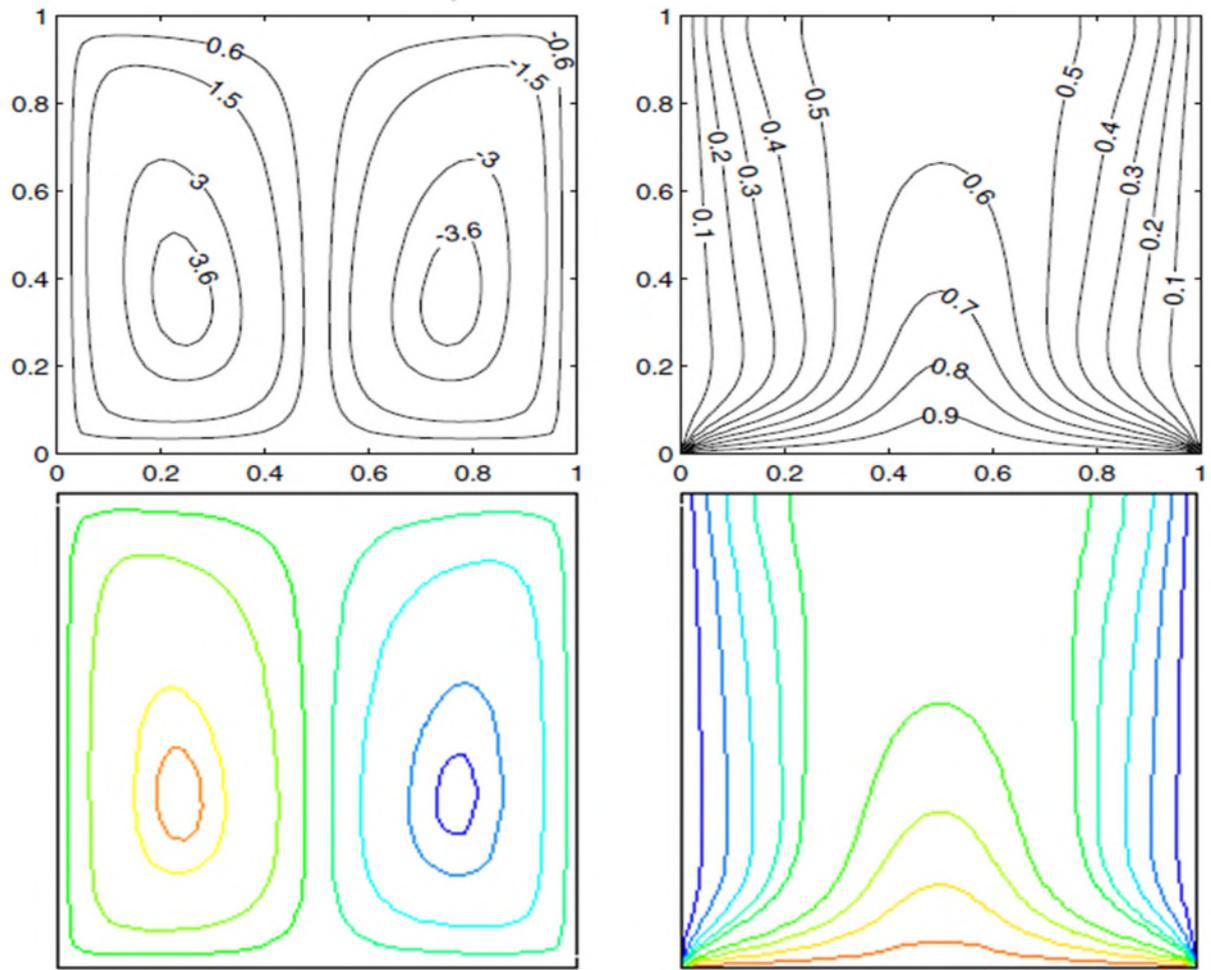
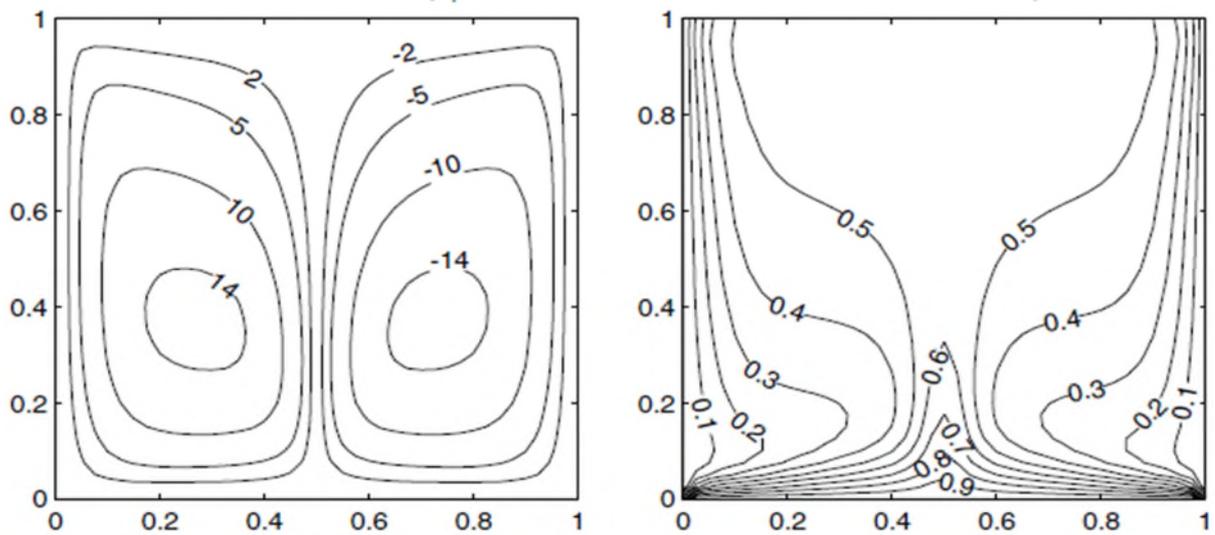


Figure IV.3 - lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-4}$, $Ra=10^6$:
 a) Lignes de courant b) Isothermes



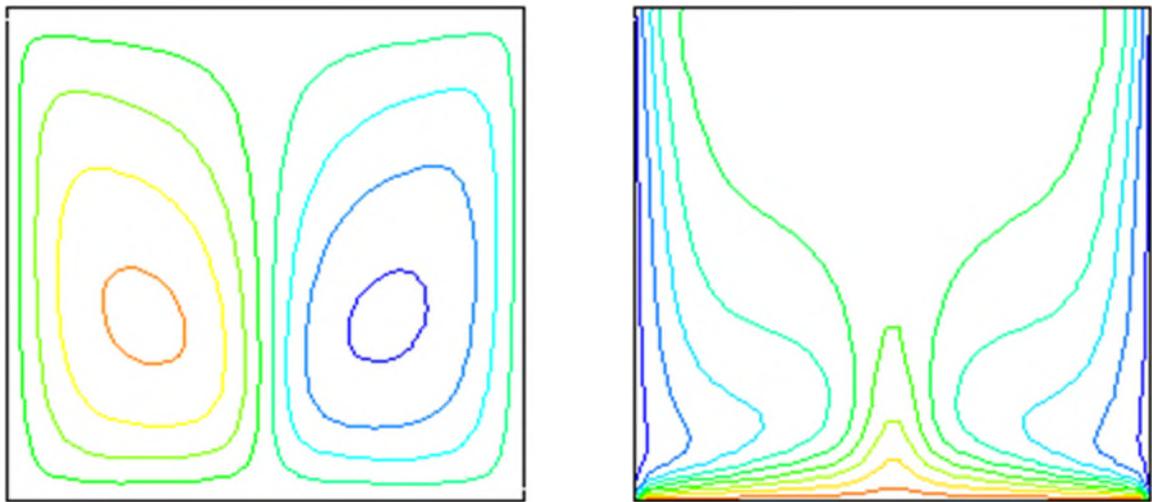


Figure IV.4 - lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-3}$, $Ra=10^6$:
 a) Lignes de courant b) Isothermes

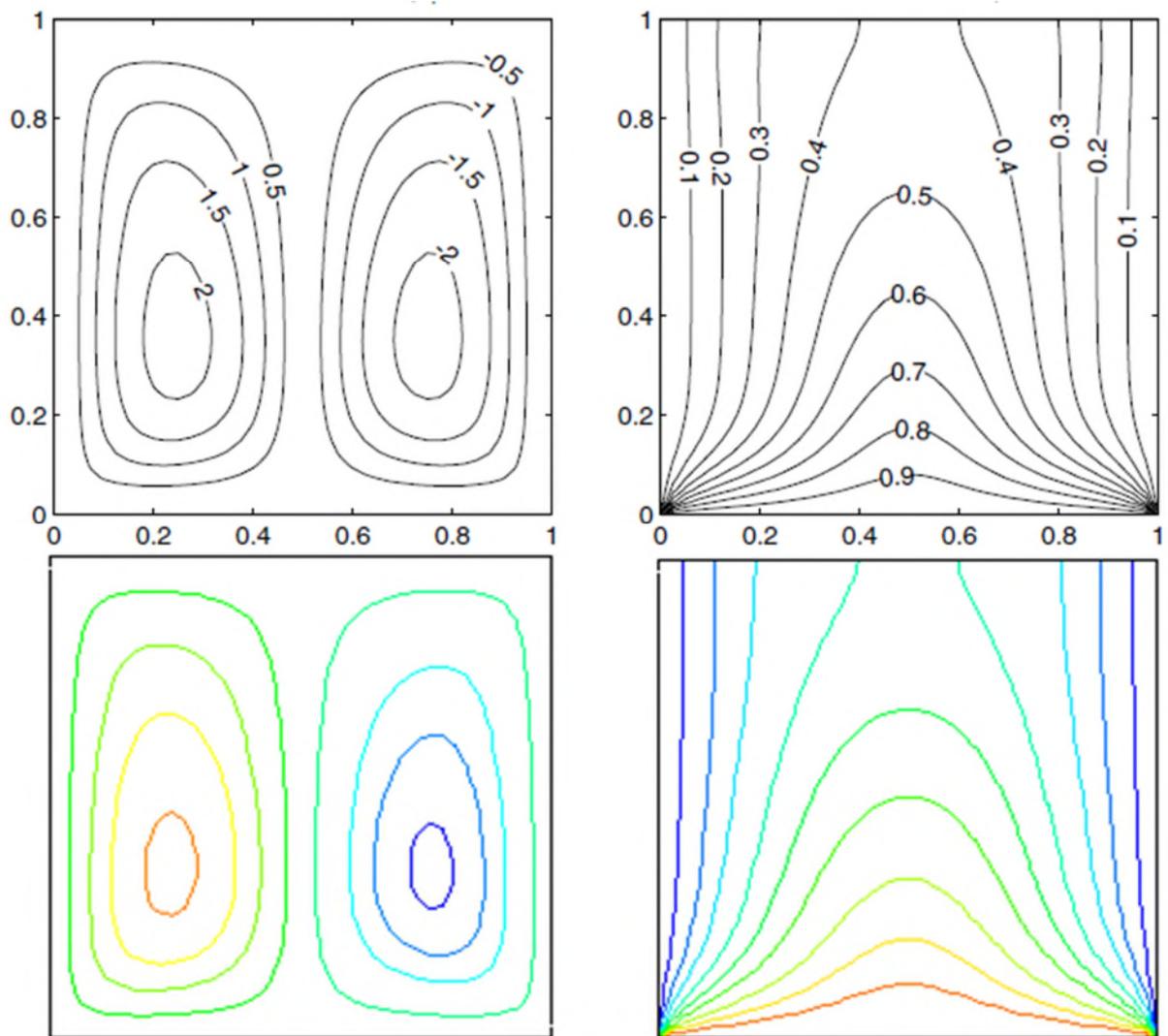


Figure IV.5 - lignes de courants et isothermes pour $Da=10^{-3}$, $Ra=7.10^4$:
 a) Lignes de courant b) Isothermes

IV.4 Résultats et discussion :

IV.4.1 Effet du nombre de Grashof sur les champs dynamique et thermique

Les résultats représentés ci-dessous illustrent les isothermes et les lignes de courant, ainsi que l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Grashof et Richardson, respectivement $Gr=10^2 ; 10^3 ; 10^4$ et 10^5 ; $Ri = 0.1, 1$ et 10 pour $Da=10^{-2}$, $\varepsilon=1$.

Les figures IV.6- IV.7 et IV.8 illustrent montrent les lignes de courant et les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Grashof et différents nombres de Richardson.

Il ressort de ses figures que le nombre de Grashof joue un rôle déterminant dans la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité. Ainsi, quand les forces de flottabilité sont faibles $Gr \leq 10^3$, l'écoulement n'est pas affecté, cela quelque soit le nombre de Richardson. On observe une stratification thermique dans toute la cavité et les isothermes sont perpendiculaires aux surfaces adiabatiques.

A mesure, que ces forces augmentent en intensité dues à un fort gradient de température on observe l'apparition d'une cellule sur le côté gauche de la cavité. Cette dernière grossit pour des Gr importants. Les isothermes sont alors tordues avec des gradients thermiques importants sur la face droite de la cavité. La convection forcée est dominante.

Pour des Ri importants, ($Ri=10$), les courants de convection apparaissent et deviennent dominant pour $Gr=10^5$. Dans ce cas c'est le mode de convection naturelle qui domine le transfert.

Ces variations ont un effet sur le transfert de chaleur dans la cavité, c'est ce qui est illustré sur les figures 10a –b et c. Ces dernières mettent en évidence les variations du nombre de Nusselt moyen estimé sur la paroi chaude pour diverses valeurs des nombres de Grashof et de Darcy. On constate que ces évolutions diffèrent suivant la valeur prise par Ri . Pour $Ri = 0.1$ & 1 on observe des évolutions paraboliques alors que pour $Ri=10$ les évolutions sont presque linéaires. Pour des nombres de Grashof $Gr \leq 10^3$, le nombre de Darcy n'a aucun effet. A mesure que ce dernier diminue (la porosité diminue) le transfert de chaleur est de plus en plus ralenti. D'autre part, à mesure que Da diminue ($Da=10^4$ et 10^5) et Ri augmente l'effet de la porosité devient insignifiant (les courbes sont confondues).

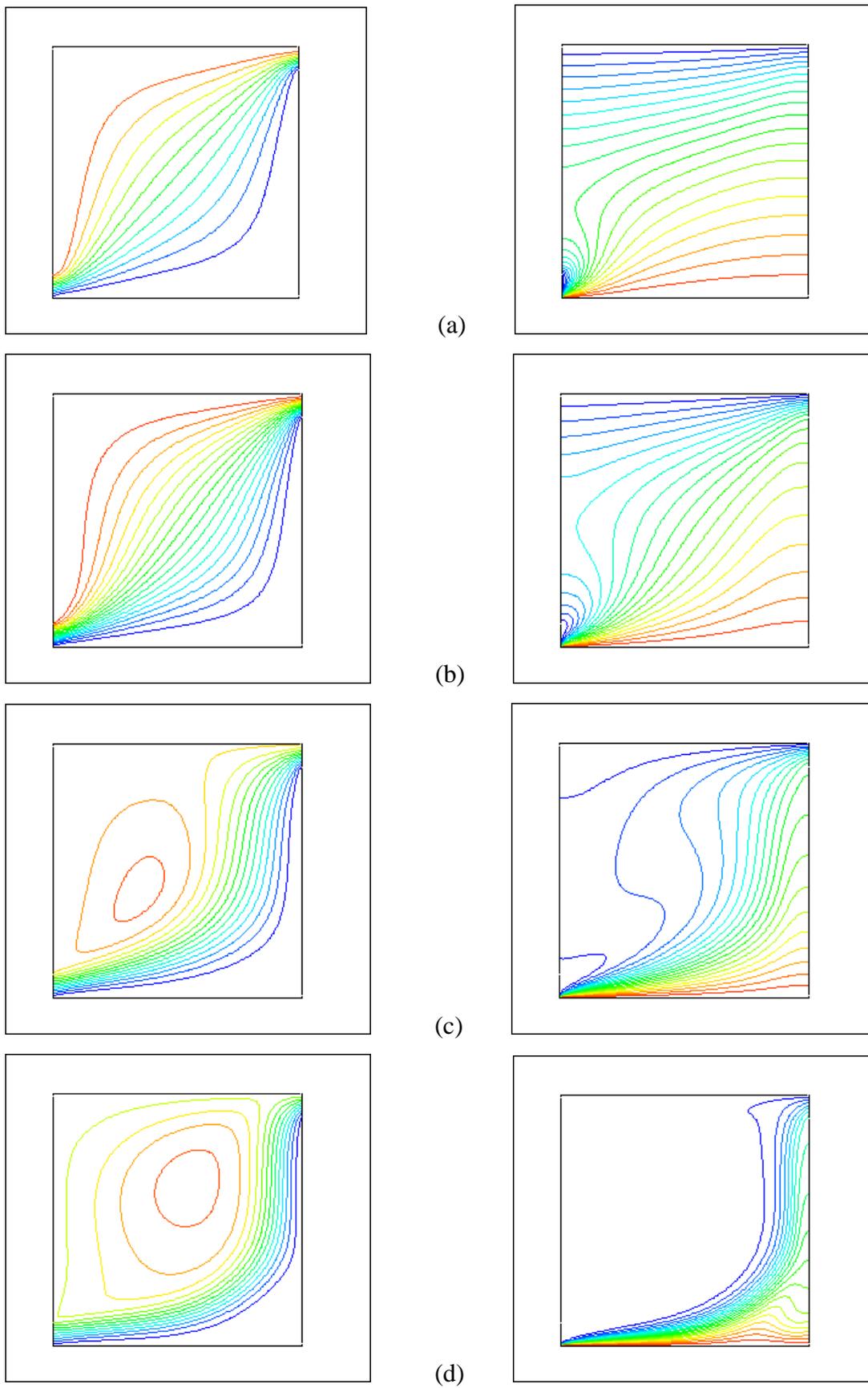


Figure IV.6 : lignes de courant et isothermes pour $Ri=0.1$
a) $Gr=10^2$; b) $Gr=10^3$; c) $Gr=10^4$; d) $Gr=10^5$.

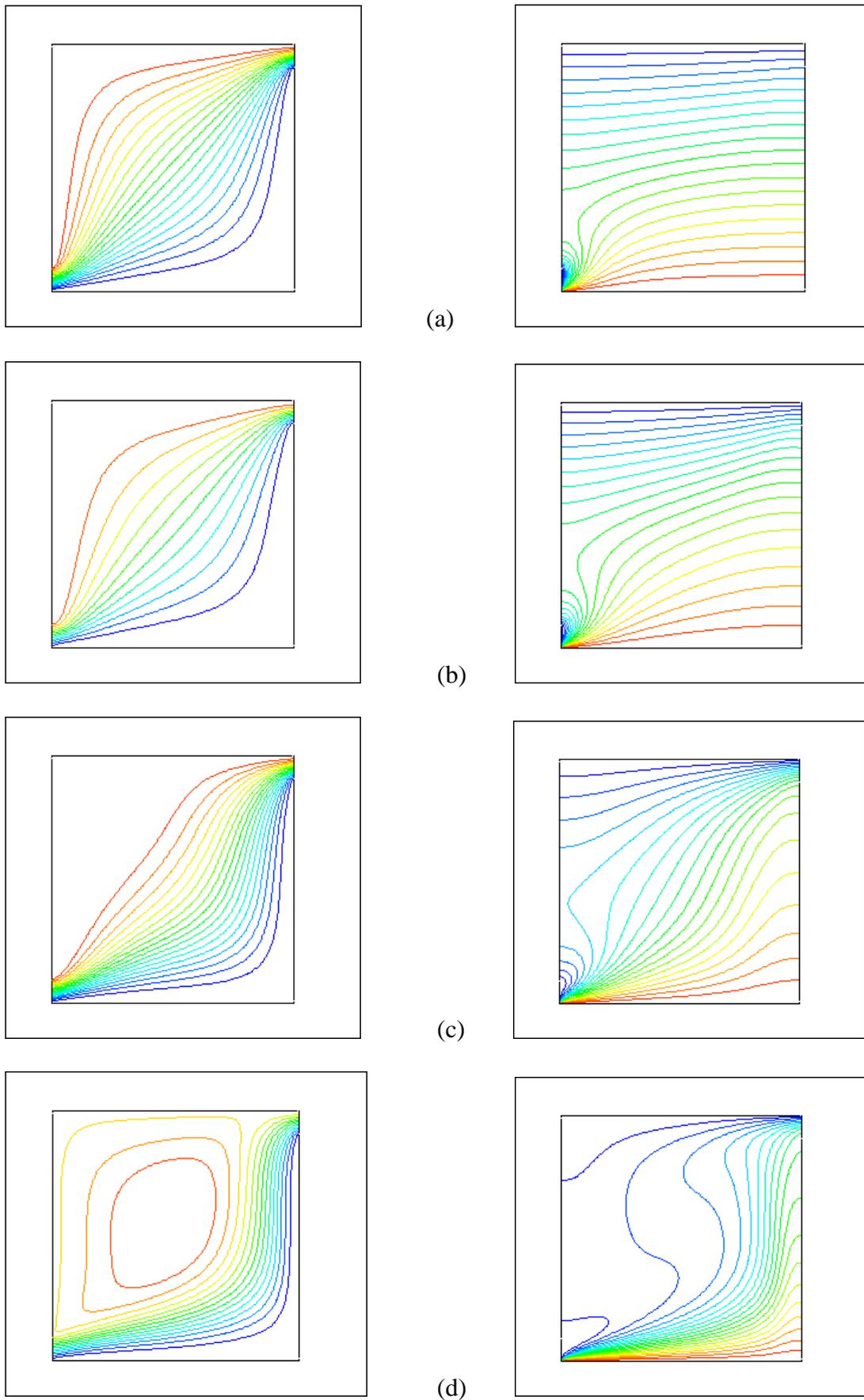


Figure IV.7 : lignes de courant et isothermes pour $Ri=1$
 a) $Gr=10^2$; b) $Gr=10^3$; c) $Gr=10^4$; d) $Gr=10^5$

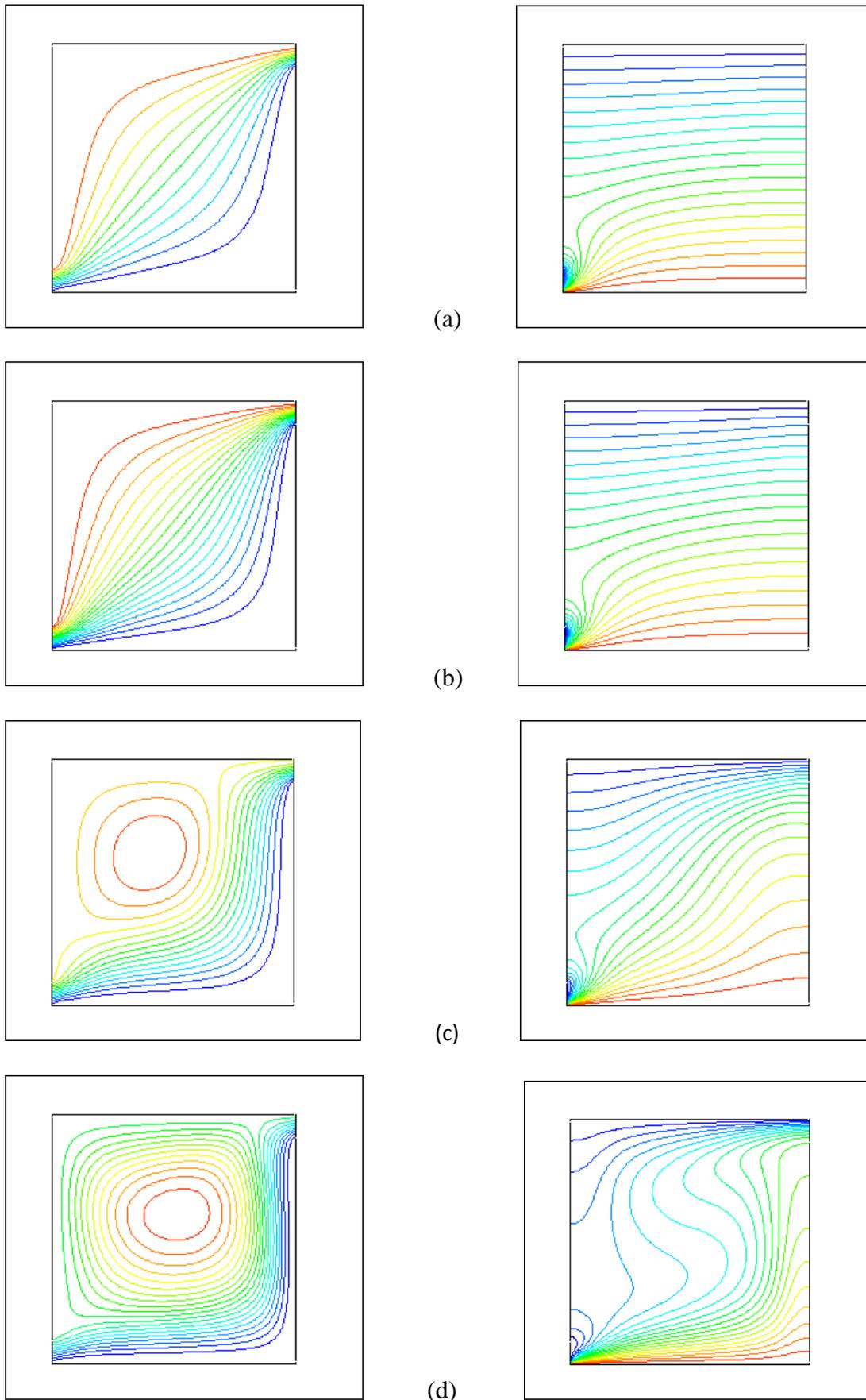


Figure IV.8 : lignes de courant et isothermes pour $Ri=10$
a) $Gr=10^2$; b) $Gr=10^3$; c) $Gr=10^4$; d) $Gr=10^5$

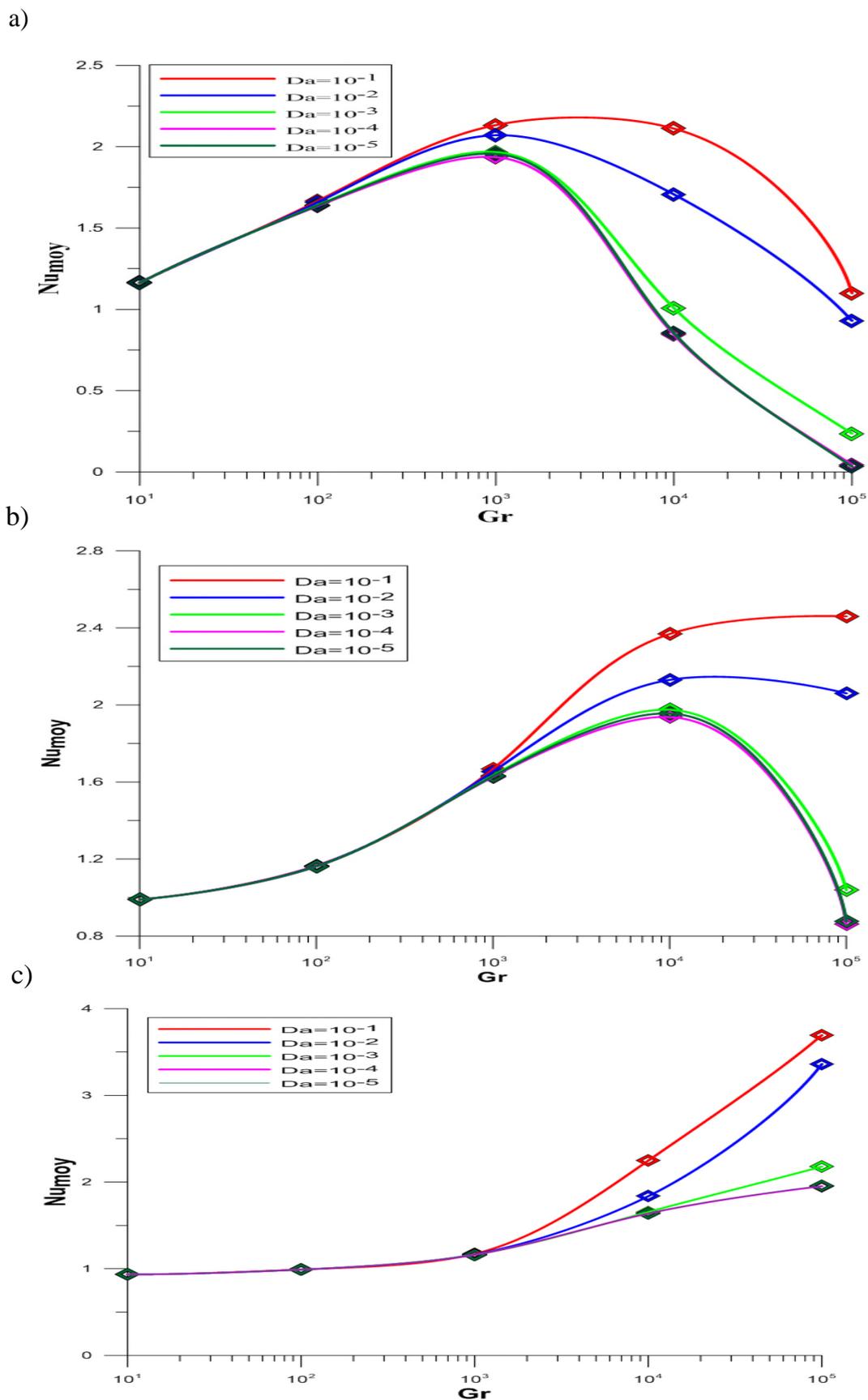


Figure IV.9 : Nombre de Nusselt moyen pour différents nombre de Da et Gr
 a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$ et $\epsilon=1$

IV.4.2 Effet du nombre de Richardson sur les champs dynamique et thermique

Les résultats représentés ci-dessous illustrent les isothermes, les lignes de courant, ainsi que l'évolution de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson $Ri=0.1, 1$ et 10 pour différents intensité des forces de flottabilité $Gr=10, 10^3$ et 10^5 . Nous avons maintenu : $Pr=0.71, Da=10^{-2}, \lambda^*=1, \varepsilon=1$.

Les figures IV.11- IV.12 et IV.13 illustrent montrent les lignes de courant et les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Richardson et différents nombres de Grashof.

On remarque que pour un nombre de Grashof très faible ($Gr=10$), les forces d'inertie dues au mouvement forcée du fluide n'ont aucun effet notable ($Ri=0.1, 1$ et 10). Les isothermes sont parfaitement parallèles et les lignes de courant sont obliques. Le transfert se fait principalement par conduction.

Cette tendance n'est pas respectée à mesure que Gr devient important ($Gr=10^3$ $Ri=0.1$ et 1 ; $Gr=10^5$ et tous les Ri). Dans ces cas, l'écoulement est dominé par les courants de convection caractérisés par des isothermes distordues et une structure de l'écoulement cellulaire.

Le transfert de chaleur dans la cavité est particulièrement sur la paroi chaude est représenté par le nombre de Nusselt moyen, Figures IV.14a, b et c. Pour des nombres de Grashof faibles $Gr=10$ et 10^3 , les courbes ont une allure hyperbolique. Dans ces cas de figure, le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du nombre de Richardson. D'autre part, le milieu poreux à travers de le nombre de Darcy ne joue aucun rôle (toutes les courbes sont confondues).

A mesure que les forces de flottabilités donc de la convection naturelle dominant ($Gr=10^5$), les courbes du Nusselt moyen changent d'allure et prennent une forme parabolique. Dans ces cas, le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson et le milieu poreux joue un rôle important. En diminuant le nombre de Darcy ($Da=10^{-1}$ à 10^{-5}) le transfert de chaleur est réduit. De plus, pour des milieux poreux caractérisés par une faible perméabilité donc des nombres de Darcy très faibles, les courbes se confondent pour constituer une courbe limite.

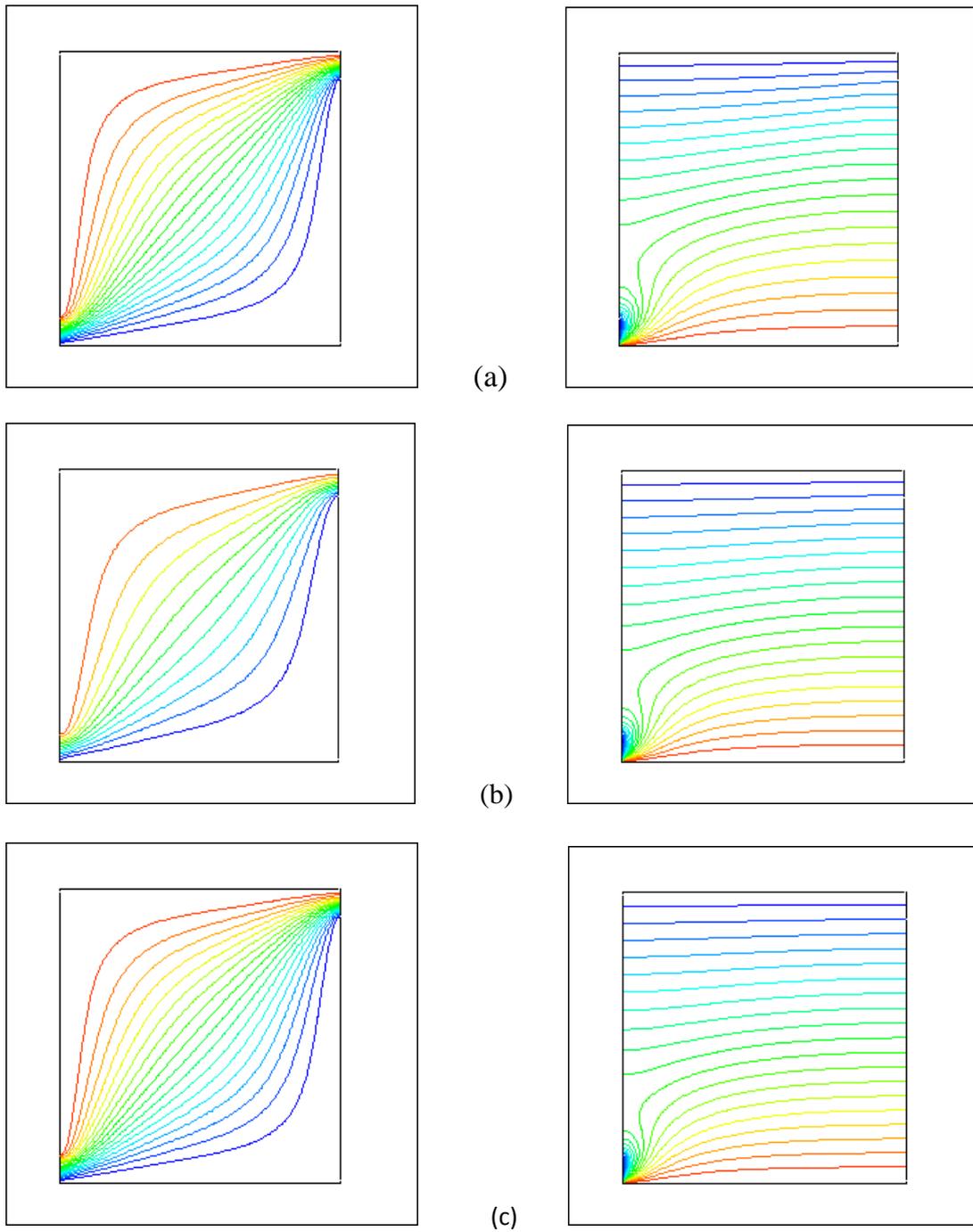


Figure IV.10 : lignes de courant et isothermes pour $Gr=10$
a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$

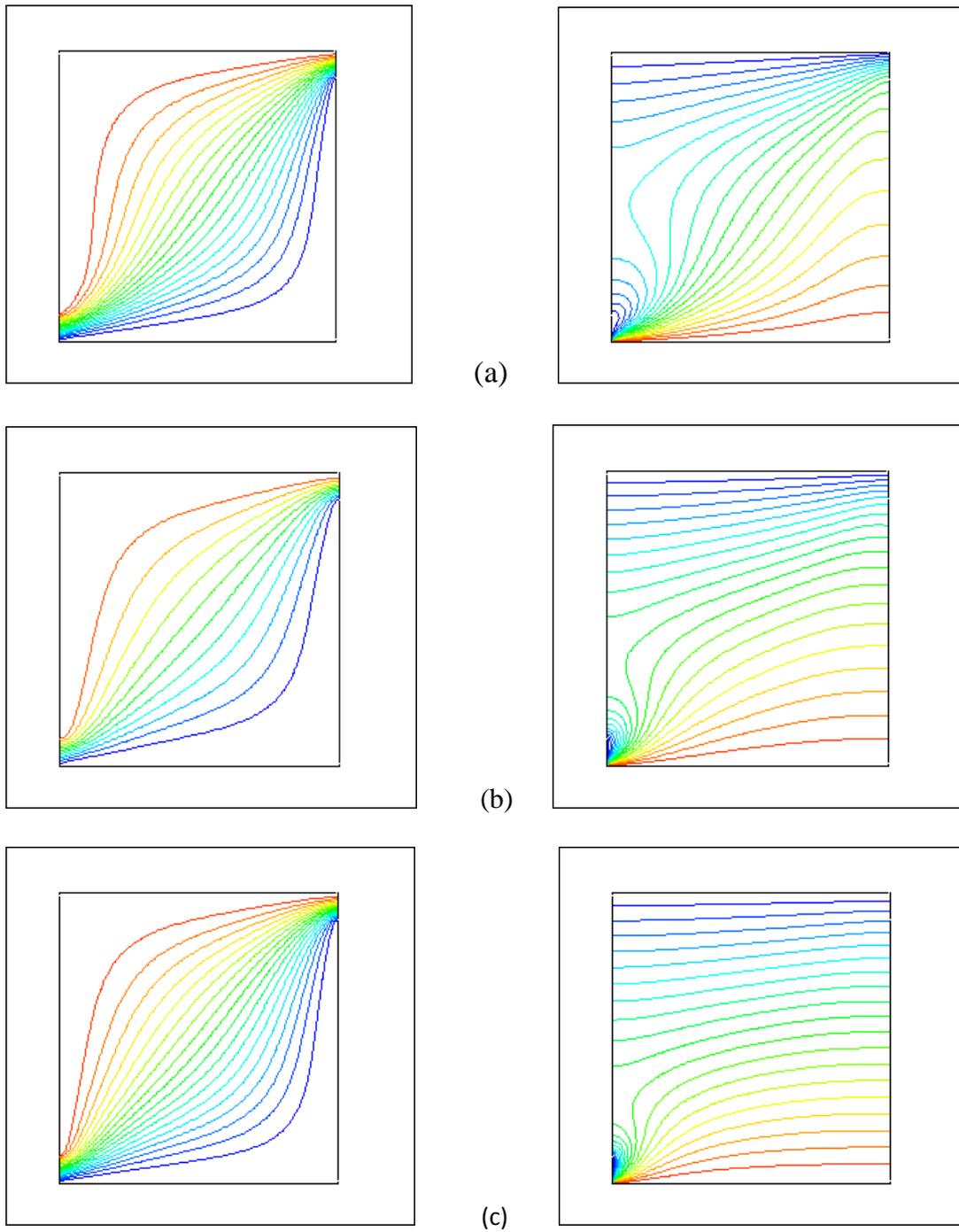


Figure IV.11 : lignes de courant et isothermes pour $Gr=10^3$
a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$

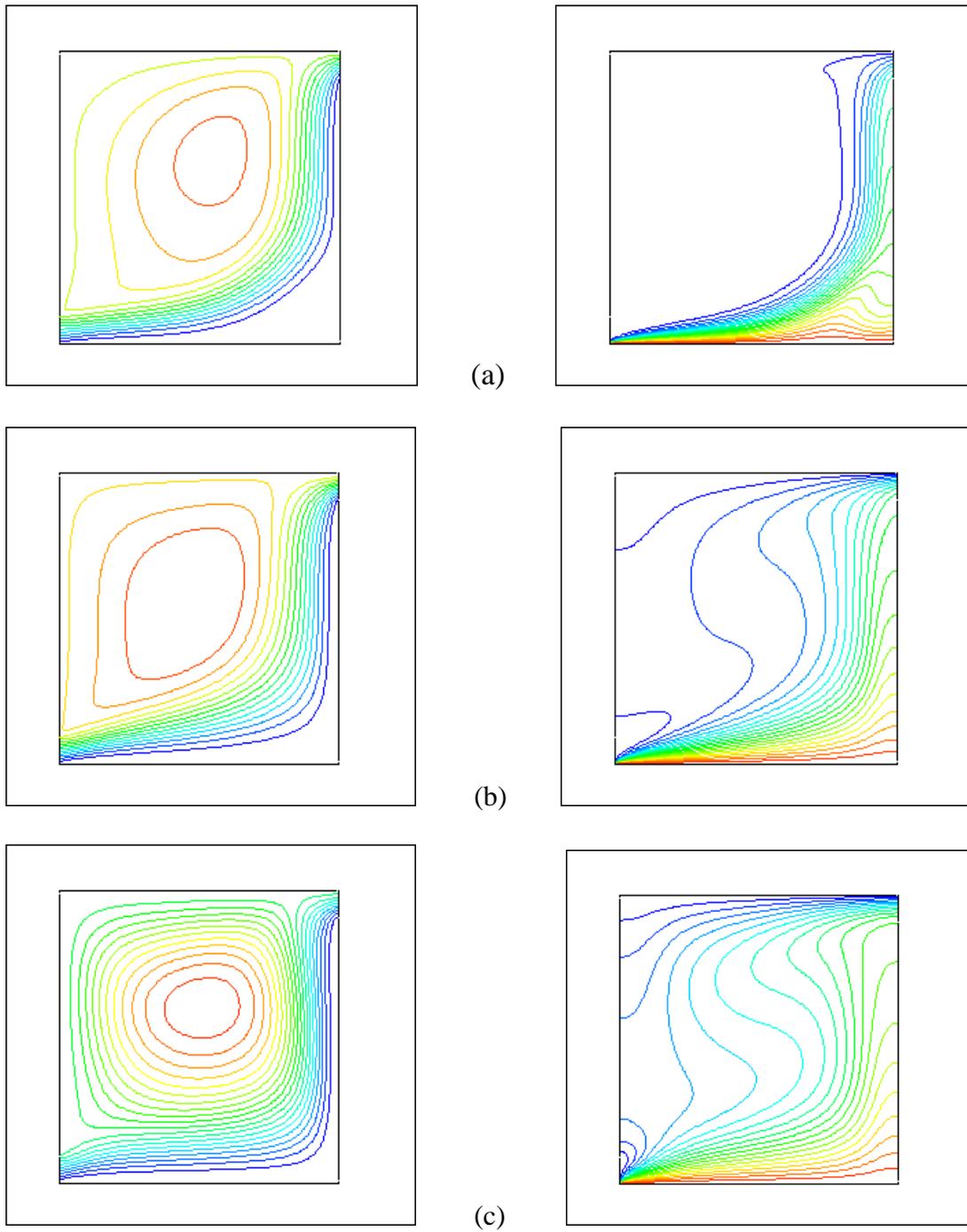


Figure IV.12 : lignes de courant et isothermes pour $Gr=10^5$
a) $Ri=0.1$; b) $Ri=1$; c) $Ri=10$

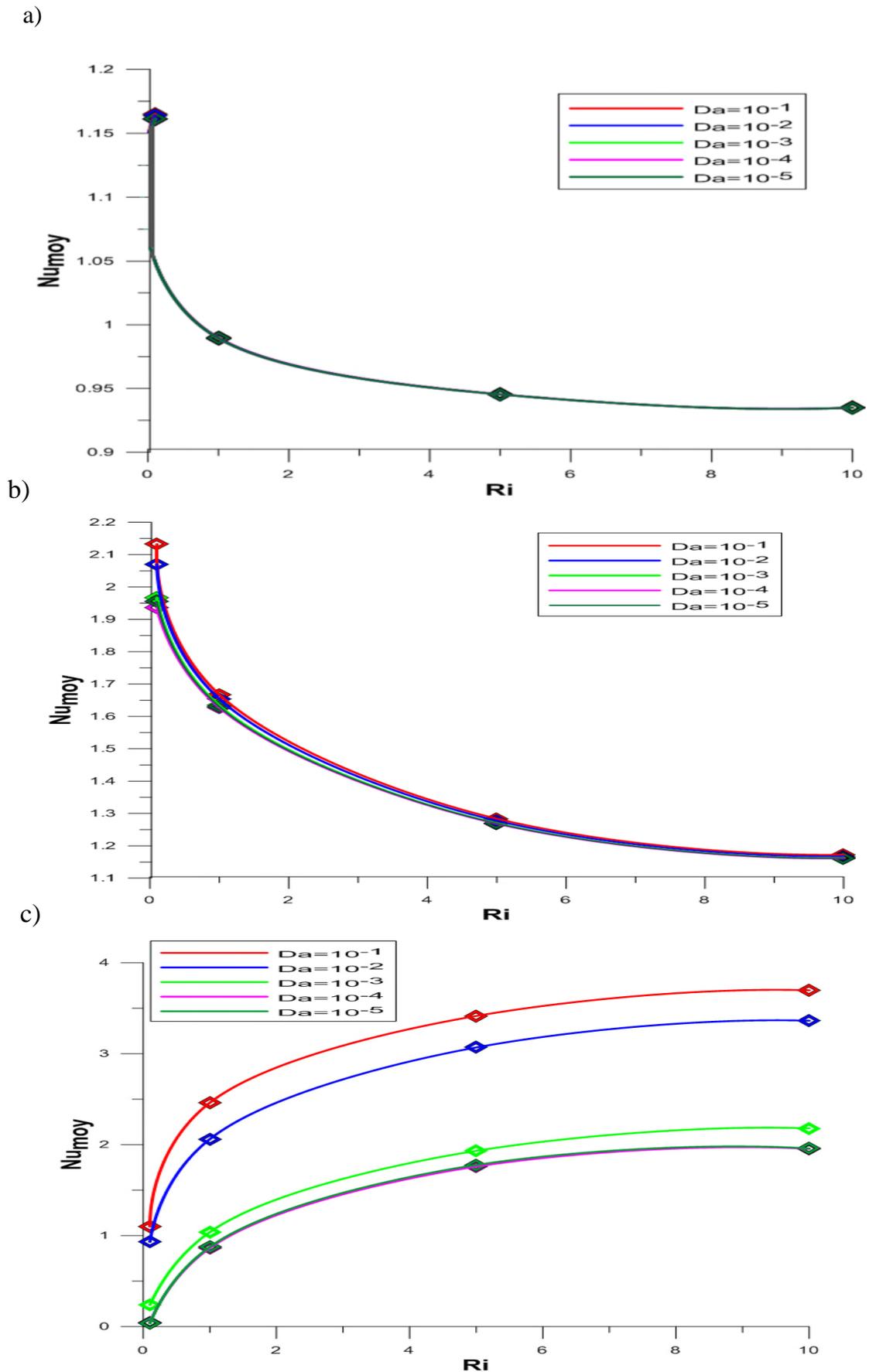


Figure IV.13 – Nombre de Nusselt moyen pour différents Ri et Da
 a) $Gr=10$; b) $Gr=10^3$ et c) $Gr=10^5$ et $\epsilon=1$

IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressées aux écoulements et aux transferts dans les milieux poreux. Dans nos simulations, nous avons étudié l'influence du nombre de Grashof et de Richardson. Nous avons constaté que chacun des paramètres joue un rôle important sur le transfert thermique.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, notre travail consiste en l'étude de la convection mixte dans une cavité carrée ventilée en présence d'un milieu poreux, dont le but d'étudier l'influence des paramètres intervenants sur la structure de l'écoulement et le champ thermique.

Nous avons, au cours de ce travail, élaboré un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie qui gouvernant le transfert de chaleur et l'écoulement dans une cavité carrée.

En premier lieu, nous avons examiné l'effet du nombre de Grashof sur la structure des champs dynamique et thermique, nous avons constaté que le nombre de Grashof joue un rôle capital dans le transfert de chaleur, ou nous avons remarqué une stratification thermique dans toute la cavité pour $Gr \leq 10^3$, mais en augmentant le Grashof à $Gr = 10^5$ le transfert devient dominant en convection forcée.

Ensuite, nous avons étudié l'effet du nombre de Richardson, et les résultats nous montrent qu'avec $Gr = 10$ et $Gr = 10^3$, l'échange thermique diminue avec l'augmentation du nombre de Richardson, et le nombre de Darcy n'a aucune influence sur le transfert. Contrairement à $Gr = 10^5$, le transfert thermique augmente avec l'augmentation du Richardson, et le transfert aussi devient important en augmentant le nombre de Darcy.

Références bibliographiques

- [1] Y. Jannot, Transferts thermiques, Cours 2eme année, Ecole des Mines Nancy, 2011.
- [2] T. Amel, Etude de l'échange thermique dans une cavité rectangulaire avec deux côtés partiellement actifs, Mémoire de Magister, Université Kasdi Merbah Ouargla, 2011.
- [3] B. Lyes, Etude Numérique de la Convection Mixte en Milieu Poreux dans un Canal Contenant des Composants électronique, thèse de Doctorat, Université Constantine 1, 2014.
- [4] N. Maxime, Ecoulements dans les milieux poreux, Cours Ecole Doctorale Mécanique, Physique et Modélisation, Université de Provence Marseille, France, (2003).
- [5] Z. Hamid, T. Yacine, Etude de la convection mixte dans un canal semi poreux, Mémoire de Master, Université Abderrahmane Mira de Bejaia. 2013.
- [6] J. Ali Salim, Apport de l'équation de Brinkman à la Modélisation de l'écoulement d'eau et du transport de soluté dans l'aquifère karstique du Val d'Orléans Hydrologie, Université d'Orléans. 2009, Français, (tel-00417805).
- [7] B. Lyes, Transfert thermique en convection naturelle dans une cavité partiellement poreuse, Mémoire de Master, Université Abderrahmane Mira de Bejaia, 2013.
- [8] G. Lundgren, G. Magnusson, E. Moller, H. Nordenstam, B. Werner and G. West berg , Rejection of an HL-A Identical Renal Transplant, Department of Surgery, Medicine, Pathology and Roentgenology, and Transplantation Laboratory, Serafimerlasarettet, Stockholm, Sweden, Tissue Antigens (1972),2 ,32-40.
- [9] M. Djilali, H. Sabrina, contribution à l'étude de la convection naturelle conjuguée en milieu poreux, Mémoire de Master, Université Kasdi Merbah-ouargla, 2015.

- [10] D. Poulikahos, K. Renken, Forced convection un a channel Filled With Porous Medium, Including the Effects of Flow Inertia, Variable Porosity, and Brinkman Friction, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago, Chicago, IL 60680. *J. Heat Transfer*, 109(4), 880-888, (Nov 01, 1987), (9 Pages).
- [11] B. L. Durlofsky, J. F. Brady, Dynamic simulation of hydrodynamically interacting particles, Chemical Engineering California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA, *J. Fluid Mech.* (1987), Vol. 180, pp.21-49.
- [12] S. Whitaker, Theoretical Derivation of Darcy's law, Department of chemical Engineering, University of California, Davis, CA 95616, U.S.A, *Transport in Porous Media* 1, (1986), 3-25.
- [13] E. Gerber and, A. Scheidegger, On the Dynamics of scree slopes, *Rock Mechanics* 6, 25-38 (1974).
- [14] V. A. Jambheke, Forchheimer Porous-media Flow Models-Numerical Investigation and Comparison With Experimental Data, Lehrstuhl für Hydromechanik Und Hydrosystemmodellierung.
- [15] R. Bennacer, A. Tobbal, H. Beji, Convection naturelle Thermosolutale dans une Cavité Poreuse Anisotrope:Formulation de Darcy-Brinkman, Laboratoire Environnement, Energie, Valorisation, Matériaux, Université de Cergy-Pontoise, 5 Mail Gay Lussac Neuville sur Oise, 95031 Cergy-Pontoise cedex, France (2002).
- [16] D. Helel, B. Noureddine, Transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé soumis à une convection forcée laminaire, 13èmes Journées Internationales de Thermique manuscrit auteur, publié dans "JITH 2007, Albi : France (2007)".
- [17] S. Safi et S. Benissaad, Effet de la perméabilité sur la convection thermosolutale en milieu poreux anisotrope, Département de Génie Climatique, Université de Constantine1 Route El Bey, Constantine, Algérie. *Revue des Energies Renouvelables* Vol. 16 N°1 (2013).
- [18] T. Behzadi, Kamel M. Shirvan, S. Mirzakhani, A. Alaie Sheikhrabat, Numerical Simulation on Effect of Porous Medium on Mixed Convection Heat Transfer in a Ventilated Square Cavity, *International Conference on Computational Heat and Mass Transfer-2015*.

- [19] A. Abouei Mehrizi, K. Sedighi, H. Afrouzi et A. Latif Aghili, Lattice, Boltzmann Simulation de convection forcée dans une cavité ventilée remplie de milieu poreux avec obstruction, *World Applied Sciences Journal* 16, (Special Issue of Applied Math), 2012.
- [20] A. C. Baytas, A. Liaqat, T. Grosan et I. Pop, Conjugate natural Convection in a square porous cavity, *J. Heat and Mass transfer* 37 (2001).
- [21] H. Nawaf, A. Saeid, A. Mohamad, Natural convection in a square porous cavity with anoscillating wall temperature, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol 15, Issue 6, pp. 555-566. (2005).
- [22] Y. Outaleb, K. Bouhadeb et O. Rahli, Effet du positionnement d'une ijection/extraction sur la convection thermosolutale dans une enceinte partiellement poreuse, 18ème Congrès Français de Mécanique Grenoble, 27-31 Août 2007.
- [23] H. Saleh, I. Hashim, Conjugate Natural Convection in a porous Enclosure with Non-Uniform Heat Generation, Springer DOI 10.1007/s11242-012-0023-z (2012).
- [24] A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Third Edition, Springer, United States of America, (2006).
- [25] Module : CFD et Logiciels. Convection naturelle en cavité carrée. Université de Bejaia.
- [26] A. Belazizia, S. Benissaad, S. Abboudi, Effect of Wall Conductivity on Conjugate Natural Convection in a Square Enclosure with Finite Vertical Wall Thickness, *Adv. Theory. Appl. Mesh*, 5, 179-190 (2012).
- [27] S. V. Patankar, D.B. Spalding, (1972), A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, 1787.
- [28] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Taylor & Francis Group, New York. (1980).
- [29] T. Basak, S. Roy, T. Paul I, Pop, Natural convection in a square cavity filled with a porous medium: Effects of various thermal boundary conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49 (2006) 1430–1441.

Annexes

Annexe A :

Tableau A.1 – Propriétés thermo-physique de l'air à pression atmosphérique [25].

T	C _p	ρ	μ	ν	k	Pr
°C	J/kg°C	kg/m ³	kg/s·m	m ² /s	W/m°C	
-40	1006.0	1.5141	15.17x10 ⁻⁶	10.02x10 ⁻⁶	0.02086	0.731
-30	1005.8	1.4518	15.69x10 ⁻⁶	10.81x10 ⁻⁶	0.02168	0.728
-10	1005.6	1.3414	16.71x10 ⁻⁶	12.46x10 ⁻⁶	0.02329	0.721
0	1005.7	1.2923	17.20x10 ⁻⁶	13.31x10 ⁻⁶	0.02408	0.718
10	1005.8	1.2467	17.69x10 ⁻⁶	14.19x10 ⁻⁶	0.02487	0.716
20	1006.1	1.2042	18.17x10 ⁻⁶	15.09x10 ⁻⁶	0.02564	0.713
30	1006.4	1.1644	18.65x10 ⁻⁶	16.01x10 ⁻⁶	0.02638	0.712
40	1006.8	1.1273	19.11x10 ⁻⁶	16.69x10 ⁻⁶	0.02710	0.710
50	1007.4	1.0924	19.57x10 ⁻⁶	17.92x10 ⁻⁶	0.02781	0.709
60	1008.0	1.0596	20.03x10 ⁻⁶	18.90x10 ⁻⁶	0.02852	0.708
80	1009.5	0.9995	20.92x10 ⁻⁶	20.92x10 ⁻⁶	0.02991	0.706
90	1010.3	0.9721	21.35x10 ⁻⁶	21.96x10 ⁻⁶	0.03059	0.705
100	1011.3	0.9460	21.78x10 ⁻⁶	23.02x10 ⁻⁶	0.03127	0.704
120	1013.4	0.8679	22.62x10 ⁻⁶	25.19x10 ⁻⁶	0.03261	0.703
130	1014.6	0.8756	23.02x10 ⁻⁶	26.31x10 ⁻⁶	0.03328	0.702
140	1015.9	0.8544	23.44x10 ⁻⁶	27.44x10 ⁻⁶	0.03349	0.702
150	1017.2	0.8342	23.84x10 ⁻⁶	28.58x10 ⁻⁶	0.03459	0.701
160	1018.6	0.8150	24.24x10 ⁻⁶	29.75x10 ⁻⁶	0.03525	0.701
170	1020.1	0.7966	24.63x10 ⁻⁶	30.93x10 ⁻⁶	0.03589	0.700
180	1021.7	0.7790	25.03x10 ⁻⁶	32.13x10 ⁻⁶	0.03654	0.700
190	1023.3	0.7622	25.41x10 ⁻⁶	33.34x10 ⁻⁶	0.03718	0.699

: Résumé

Cette étude concerne la simulation numérique de la convection mixte dans une cavité carrée . bidimensionnelle, l'enceinte est remplie d'un milieu poreux homogène est isotrope

Les parois verticales sont adiabatiques. Et les parois horizontales sont soumises à des lieux températures constantes. Le fluide utilisé est l'air. Le modèle d'écoulement dans les m . poreux est le modèle Darcy-Brinkman

La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations qui . gouvernent le problème

On a étudié l'influence du nombre de Grashof et le nombre de Richardson

Les résultats obtenus montrent que les paramètres précédents ont une influence sur le transfert de chaleur, ce dernier s'améliore en augmentant le Grashof, Richardson, Darcy et la . conductivité thermique du solide-fluide

: Abstract

This study concerns the numerical simulation of mixed convection in a two-dimensional square cavity, the enclosure is filled with a homogeneous porous medium is . isotropic

The vertical walls are adiabatic. And the horizontal walls are subjected to constant temperatures. The fluid used is air. The flow model in porous media is the Darcy-Brinkman . model

The numerical method of finite volumes is used to solve the equations that govern the . problem

The influence of the Grashof number, the Richardson number and the thermal conductivity . ratio of the solid-fluid were studied

The results obtained show that the preceding parameters have an influence on the heat transfer, the latter improves by increasing Grashof, Richardson, Darcy and the thermal conductivity of . the solid-fluid

Chapitre I

GENERALITE ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre II

DESCRIPTION DU PROBLEME ET FORMULATION MATHEMATIQUE

Chapitre III

METHODES NUMERIQUES

Chapitre IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS