

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTÉ DE TECHNOLOGIE**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
**MASTER**

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

PAR :

**BOUDJELIDA SARA**

**BOUDJIT SARA**

**Thème**

---

**Etude comparative des lois de comportement hyperélastique  
des matériaux élastomères**

---

Soutenu le 28/06/2018 devant le jury composé de:

Mr. BECHIR Hocine	Président
Mr. BENSLIMANE	Invité
Mr. YAYA	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018

# ***REMERCIEMENT***

*Nous tenons tout d'abord à remercier dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.*

*Nous tenons à remercier nos parents qui nous ont soutenus durant toute la période de mes études, leurs encouragements.*

*En second lieu, nous tenons à remercier notre promotrice M<sup>elle</sup> BOUZIDI, son précieux conseil et son aide durant toute la période de travail.*

*Nos vifs remerciement vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.*

*Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste mémoire à :*

*Mes parents :*

*Ma mère qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tout les sacrifices consentis et ses précieux conseil pour toute son assistance et sa présence dans ma vie,*

*Mon père qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie.*

*Puisse dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; merci pour les valeurs noble, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.*

*Mon cher frère Massina et mes chères sœurs Celine, Amira et ma petite Liti.*

*A mon chère amie et binôme Sara.*

*À mes chères amis (es) : Wassou, Kenza, Lyes, Issam, Hayat*

*Ferhat*

*BONDJ17 Sara*



# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents.*

*A mes frères (Fouad, Lamine, Firas).*

*A toute ma famille.*

*A mon Homme Fateh et ma belle famille.*

*A ma chers binôme et amis Sara.*

*A mes chers amis (Djahida, Lyes et Issam).*

*A Mes camarades de promo.*

*A tous ceux qui ont sacrifié leur temps pour la science et a tous ceux qui utilisent la science pour le bien et la prospérité de l'humanité.*

*BOUDJELIDA sara*

## *Liste des figures*

---

### Liste des figures

<b>Figure I.1</b> : Représentation schématique d'une chaîne et d'un réseau élastomère .....	4
<b>Figure I.2</b> : Courbe de traction à rupture.....	5
<b>Figure I.3</b> : Essai de traction de type charge/décharge.....	6
<b>Figure I.4</b> : Représentation de l'Effet Mullins.....	8
<b>Figure II.1</b> : Configurations Lagrangienne et Eulérienne et mouvement d'un milieu continu.....	11
<b>Figure II.2</b> : Configurations initial et déformée.....	11
<b>Figure II.3</b> : Etat de contrainte dans les différentes configurations.....	14
<b>Figure II.4</b> : représentation schématique du Modèle à 3-chaîne.....	20
<b>Figure II.5</b> : Représentation schématique du modèle à 8-chaînes.....	22
<b>Figure III.1</b> : éprouvette en 2D .....	25
<b>Figure III.2</b> : éprouvette en 3D .....	25
<b>Figure III.3</b> : modèle maillé en 2D.....	26
<b>Figure.III.4</b> : modèle maillé en 3D.....	26
<b>Figure.III.5</b> : Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytique et numérique du modèle (Néo Hookien) aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.....	28
<b>Figure III.6</b> : Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 3D, Potentiel Néo-hookien). .....	29
<b>Figure III.7</b> : Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 3D, Potentiel Néo hookien). .....	29
<b>Figure III.8</b> : Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytique et numérique du modèle (Mooney-Rivlin) aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.....	30
<b>Figure III.9</b> : Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 2D, Potentiel Mooney Rivlin).....	31
<b>Figure III.10</b> : Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 3D, Potentiel Mooney Rivlin). .....	32

## *Liste des figures*

---

<b>Figure III.11:</b> Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytique et numérique du modèle (Arruda-Boyce) aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uniaxiale.....	33
<b>Figure III.12:</b> Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 2D, Potentiel Arruda-Boyce).....	34
<b>Figure.III. 13:</b> Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 3D, Potentiel Arruda-Boyce). ....	34
<b>Figure.III.14:</b> Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytique et numérique du modèle (Ogden) aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.....	35
<b>Figure III .15 :</b> Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 2D, Potentiel Ogden).....	36
<b>Figure III .16 :</b> Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 3D, Potentiel Ogden).....	36
<b>Figure.III.17:</b> Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytique et numérique du modèle (Gent) aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.....	37
<b>Figure III .18 :</b> Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 2D, Potentiel Gent).....	38
<b>Figure III .19:</b> Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation $\lambda = 3$ (Modélisation 3D, Potentiel Gent).....	38
<b>Figure.III.20 :</b> Déformation de la pièce pour une élongation $\lambda = 6.5$ (Modélisation 3D, Modèle d'Ogden).....	39
<b>Figure III.21 :</b> Confrontation des résultats théoriques des différents modèles avec les résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.....	40
<b>Figure III.22</b> Courbes Contraintes– Elongations pour $\lambda \in [1, 5]$ .....	41
<b>Figure III.23</b> Courbes Contraintes – Elongations pour $\lambda \in [5, 7.4]$ .....	41

## *Liste des figures*

---



## *Liste des figures*

---

**Liste des tableaux**

**Tableau III.1** : Etude qualitative des résultats obtenus en traction uni-axiale (++ Très bons résultats, + bons résultats, -mauvais résultats) .....55

## *Nomenclature*

---

### **Nomenclature**

$c_0$  : Configuration initiale ;

$c_t$  : Configuration actuelle ;

$d\vec{X}$  : Vecteur élémentaire dans la configuration initiale ;

$d\vec{x}$  : Transformation de  $d\vec{X}_1$  dans la Configuration actuelle ;

$\mathbf{F}$  : Opérateur gradient de la transformation ;

$\mathbf{F}^T$  : Transposé opérateur gradient de la transformation ;

$\mathbf{C}$  : Tenseur des déformations Green-Lagrange droit ;

$\mathbf{E}$  : Tenseur des déformations Green-Lagrange ;

$\mathbf{B}$  : Tenseur des déformations Green-Lagrange ;

$\mathbf{A}$  : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi ;

$\mathbf{L}$  : Tenseur gradient des vitesses ;

$\mathbf{D}$  : Tenseur des taux de déformation ;

$\mathbf{W}$  : Tenseur des taux de rotation ;

$\boldsymbol{\sigma}$  : Tenseur des contraintes de Cauchy ;

$\boldsymbol{\pi}$  : premier Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.1) ;

$\mathbf{S}$  : Deuxième Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.2) ;

$P$  : la pression hydrostatique introduite par l'hypothèse d'incompressibilité ;

$S$  et  $\phi$  : sont respectivement l'entropie et l'énergie interne du matériau ;

$T$  : Température ;

$Q$  : Transporté du flux de chaleur dans la Configuration initiale ;

$W$  : Potentiel élastique ;

$L$  : Désignant la fonction de Langevin ;

$\Omega$  : Nombre d'états quantiques de la chaîne ;

## *Nomenclature*

---

$k$  : Constante de Boltzmann ;

$N$ : Nombre moyen de segments par chaine ;

$\lambda$  : L'élongation ;

$\delta$  : Paramètre d'inextensibilité des chaines

# Sommaire

---

Liste des figures

Liste des tableaux

Nomenclature

Sommaire

Introduction générale .....1

## Chapitre I : Généralités sur les élastomères

<b>Introduction</b> .....	3
I.1 Notion fondamentale .....	3
I.1.1 Signification du terme polymère .....	3
I.1.2 la macromolécularité .....	3
I.2 Présentation des élastomères .....	3
I.3 comportement mécanique des élastomères.....	4
I.3.1 Elasticité non- linéaire .....	4
I.3.2 Viscoélasticité .....	6
I.3.3 Incompressibilité.....	7
I.3.4 Effet Mullins .....	7
I.3.5 Effet Payne .....	8
<b>Conclusion</b> .....	9

## Chapitre II : Loi de comportement hyperélastique des élastomères

<b>Introduction</b> .....	10
II.1 Définition d'un milieu hyperélastique.....	10
II.2 rappels de mécanique des milieux continus .....	10
II.2.1 Cinématique.....	10
II.2.2 Description du mouvement .....	11
II.2.3 Tenseurs des déformations.....	13
II.2.4 Description des efforts .....	13
II.2.4.1 Description eulérienne.....	14
II.2.4.2 Description mixte .....	14
II.2.4.3 Description lagrangienne .....	15

## *Sommaire*

---

II.3 Les matériaux hyperélastiques .....	15
II.4 Modèle hyperélastique .....	16
II.4.1 Modèle phénoménologique .....	16
II.4.1.1 Le modèle de Mooney-Rivlin .....	16
II.4.1.2 Le modèle de Biderman.....	16
II.4.1.3 Le modèle de Gent et Thomas .....	16
II.4.1.4 Le modèle de Hart-Smith.....	17
II.4.1.5 Le modèle d'Ogden.....	17
II.4.1.6 Le modèle de Gent .....	17
II.4.2 modèles physiques.....	18
II.4.2.1 modèle de Néo-Hooke .....	18
II.4.2.2 Le modèle de James-Guth (3-chaines) .....	18
II.4.2.3 Modèle d'Arruda-Boyce (8-chaines).....	19
<b>Conclusion</b> .....	21

### **Chapitre III : Comparaison des cinq modèles hyperélastiques en chargement uni-axial**

<b>Introduction</b> .....	22
III.1 Présentation des modèles hyperélastiques utilisés dans l'étude .....	22
III.1.1 Modèle Néo-Hooke .....	22
III.1.2 Modèle Mooney Rivlin.....	23
III.1.3 Modèle d'Arruda-Boyce.....	23
III.1.4 Modèle d'Ogden .....	23
III.1.5 Modèle Gent.....	23
III.2 Détermination analytique de la relation contrainte – déformation dans le cas d'un chargement de traction uni-axiale.....	23
• Modèle Neo hookéen .....	24
• Modèle Mooney Rivlin .....	24
• Modèle d'Arruda-Boyce .....	24
• Modèle d'Ogden.....	24
• Modèle Gent.....	24

# *Sommaire*

---

III. 3 Simulation numérique de la traction uni-axiale .....	25
III .3.1 Présentation de la géométrie .....	25
III .3.2. Maillage .....	26
III .3.3. Contrainte équivalente de Von-Mises .....	27
III.4 Résultat de la simulation numérique de la traction uniaxiale .....	27
III.4.1 Modèle Néo-hookien .....	28
III.4.2 Modèle de Mooney Rivlin .....	30
III. 4.3 Modèle d'Arruda-Boyce (8-chaines) .....	32
III.4.4 Modèle d'Ogden .....	34
III.4.5 Modèle de Gent .....	36
Comparaison des résultats théoriques obtenus en traction pour les cinq modèles.....	39
III.5 Etude comparative des différents modèles .....	40
<b>Conclusion</b> .....	43
<b>Conclusion générale</b> .....	44

## **Bibliographies**

## **Annexes**

### **Introduction générale**

Du fait de la grande richesse de leurs comportements, l'utilisation du matériau élastomère, ou plus généralement de milieux dont le comportement peut être considéré en première approximation comme hyperélastique, et de plus en plus répandue dans de nombreux domaines industriels, notamment dans l'industrie des loisirs à l'aérospatiale passant par l'automobile et l'aéronautique.

Les élastomères ont des propriétés mécaniques qui en font des matériaux à part. Leurs propriétés sont utilisées pour diverses applications comme l'étanchéité, l'amortissement, l'isolation, etc.

En particulier, ils ont une grande capacité de déformabilité de l'ordre de quelques centaines de pourcent associé à un comportement élastique quasi-réversible.

Les élastomères sont des matériaux difficiles à étudier car leur caractéristique de déformation est essentiellement non linéaire et fortement influencée par de nombreux paramètres comme la température et la vitesse de sollicitation ce qui fait que les hypothèses de calcul doivent être formulées judicieusement avec beaucoup de précautions.

L'objectif de notre travail est de faire une étude comparative des différentes lois de comportement hyperélastique des matériaux élastomères, pour cela nous avons divisé ce travail en trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions de base sur les élastomères, leurs propriétés mécaniques, ensuite nous abordons les phénomènes de dissipation d'énergie (effet Mullins, effet Payne).

Le deuxième chapitre sera consacré à définir quelques lois de comportement hyperélastique passant d'un bref rappel de mécanique des milieux continus.

Le troisième chapitre est composé de deux parties :

La première partie consistera à étudier les contraintes dans une éprouvette en élastomère soumise à des grandes déformations dans le cas de la traction. Deux modélisations numériques seront considérées, l'une en 2D et l'autre en 3D. Le but est de comparer les résultats obtenus numériquement aux résultats calculés analytiquement. Les modèles utilisés sont les modèles de Néo-Hookeen, Mooney Rivlin, Arruda-Boyce, Ogden et Gent.



## *Introduction générale*

---

Dans la deuxième partie, une étude comparative des cinq modèles cités ci-dessus sera discutée. Les résultats expérimentaux utilisés sont ceux de Treloar sur le Latex en traction uni-axiale.

Enfin nous terminons par une conclusion générale.

## Introduction

Les élastomères font partie de la famille des polymères et désignent aujourd'hui d'une façon générale, tous les caoutchoucs (naturels ou synthétiques) possédant l'élasticité caoutchoutique. Au cours de ce chapitre nous allons présenter les principales caractéristiques des matériaux élastomères qui expliquent leurs nombreuses utilisations dans divers domaines industriels.

## I. Généralités sur les élastomères

### I.1. Notion fondamentales [1]

#### I.1.1. Signification du terme polymère

Du point de vu étymologique le terme polymère est à l'origine composée de deux mots grecs ; « polus » qui signifié nombreux ou plusieurs « mero » qui signifié parties ou unités, et en chimie un concept qui peut être confondu a la macromolécule [1]

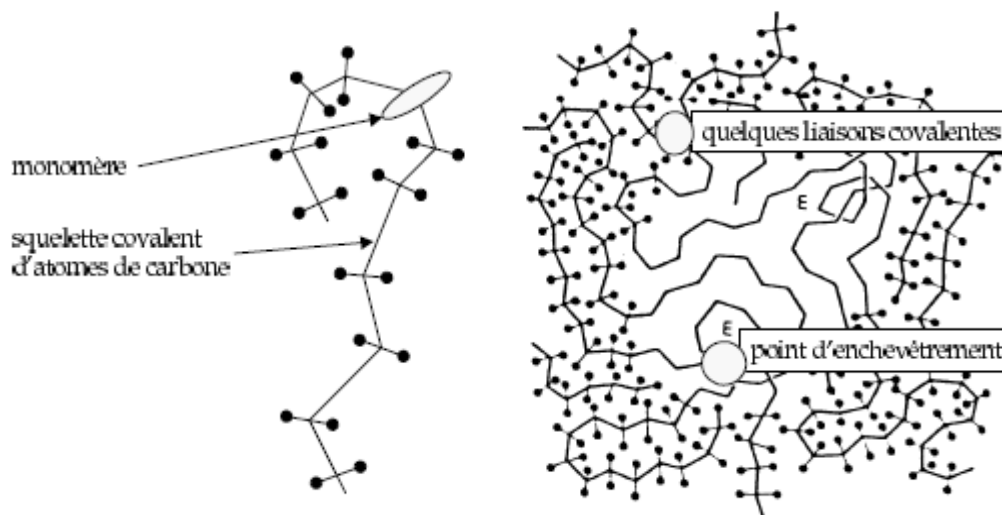
#### I.1.2. La macromolécularité

Qu'ils soient d'origine naturelle ou synthétique, les polymères organiques sont composés de longues chaînes d'atomes de carbone. Ces longues chaînes moléculaires sont appelées macromolécules ; Une macromolécule est constitué d'un ensemble de plusieurs molécules (généralement organique) liées entre elles par des liaisons covalentes [1]

### I.2.Présentation des élastomères [2] [3]

**Elastomère :** le préfixe « elasto » rappelle les grandes déformations élastiques possibles, tandis que le suffixe « mere » évoque leur nature de polymère et donc leur structure macromoléculaire [2]

Les élastomères constitués de longues chaines liées entre elles avec des liaisons covalentes occasionnelles, des points de réticulations et des points d'enchevêtrement. Une chaine est un assemblage de molécule monomère jointe par un squelette covalent d'atome de Carbone. Elle est généralement composée de milliers de monomères. A une échelle intermédiaire, le matériau peut être vu comme une pelote statistique ou les chaines sont dans une position très rempliée et ou les points de jonction (réticulation et enchevêtrement) forment des nœuds entre les chaines. La représentation symbolique d'une chaine et du réseau élastomère est présenté dans la figure ci-dessous [3]



**Figure I.1** : Représentation schématique d'une chaîne et d'un réseau élastomère [3]

La composition du caoutchouc naturel non vulcanisé est un hydrocarbure que le monomère de base est  $(C_5H_8)_n$ , nommé l'isoprène.

On appelle vulcanisation le processus de création de liaisons chimiques entre les chaînes macromoléculaires pour former un réseau tridimensionnel stable

Sous sollicitation, les élastomères ont la possibilité de s'allonger d'une façon significative en supportant très grandes déformations.

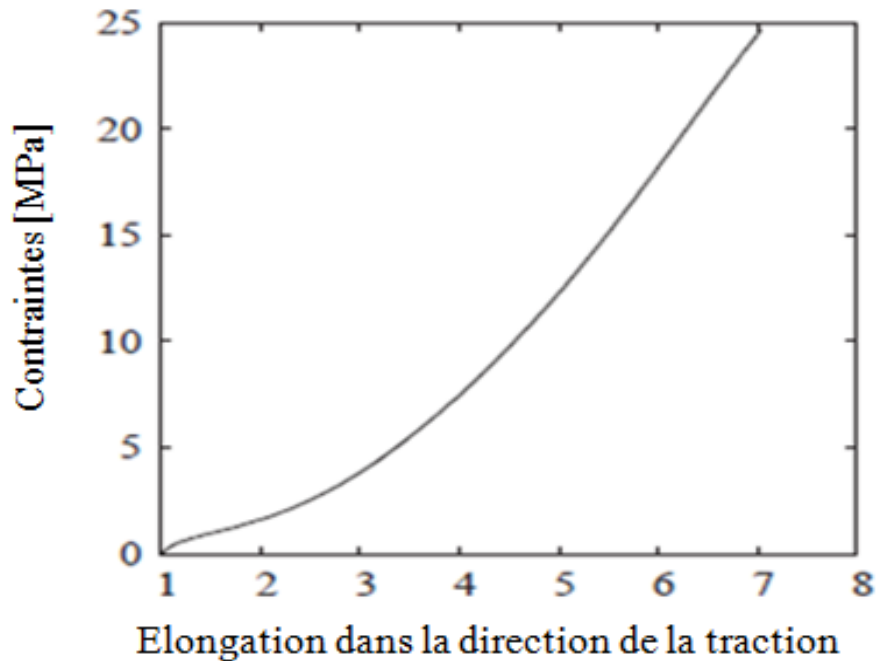
### I.3. Comportement mécanique des élastomères [4], [5]

Les élastomères présentent un comportement complexe qu'il serait ambitieux de vouloir représenter dans sa totalité ; nous allons voir par la suite cette complexité et comment ils ont développés leurs différentes spécificités :

#### I.3.1. Elasticité non- linéaire

La première caractéristique d'un élastomère est sa capacité à subir de grandes déformations. Par exemple les caoutchoucs naturels peuvent s'étendre jusqu'à 10 fois leur taille d'origine avant de rompre [4]

La figure (I.2) représente un essai de traction d'un élastomère jusqu'à la rupture. Cette courbe montre la non-linéarité de comportement et la grande capacité à se déformer, sa déformation à rupture est d'environ 600% [4]

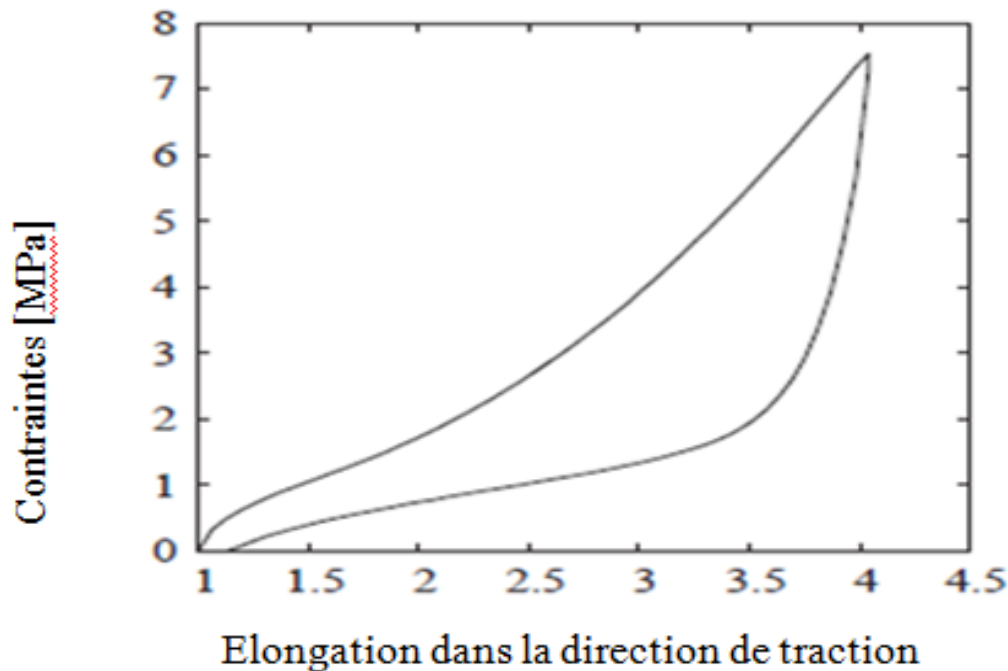


**Figure I.2 :** Courbe de traction à rupture [4]

La deuxième caractéristique du comportement est sa non linéarité. On verra par la suite que les modèles physiques permettent d'expliquer et de simuler cette particularité en décrivant l'évolution de la conformation des chaînes macromoléculaires. En particulier, la rigidification du comportement aux grandes déformations s'explique par deux phénomènes :

- lorsque les chaînes sont suffisamment stéréo-régulières (c'est le cas des caoutchoucs naturels), elles peuvent en s'alignant former des motifs ordonnés appelés cristallites qui agissent comme des charges renforçantes ;
- les chaînes atteignent leur extension maximale [4]

La troisième caractéristique importante du comportement mécanique des élastomères est leur capacité à retrouver leur géométrie initiale presque intégralement. C'est la raison pour laquelle on parle souvent « d'élasticité caoutchoutique ». Cependant, ceci n'est vrai que pour les élastomères non chargés et soumis à de faibles déformations. La figure (I.3) représente un essai de traction du type charge/décharge sur le matériau [4]



**Figure I.3 :** Essai de traction de type charge/décharge [4]

A l'échelle de la structure microscopique, un élastomère vulcanisé est constitué de longues chaînes moléculaires comportant des points de jonctions. Ces macromolécules forment ainsi un réseau tridimensionnel dont les segments de chaînes sont orientés de façon aléatoire. Outre ces points de jonctions de type liaisons covalentes, il existe des liaisons à très faible énergie appelées liaisons secondaires ou enchevêtrements. L'élasticité caoutchoutique est le résultat de cette faible interaction entre les macromolécules [5].

Ainsi, sous l'action d'une sollicitation mécanique, ces chaînes moléculaires peuvent glisser les unes sur les autres et changer ainsi la configuration microstructurale du réseau moléculaire qui passe d'un arrangement aléatoire à un arrangement orienté suivant la direction de sollicitation. L'élasticité caoutchoutique est donc de nature entropique [5].

### I.3.2 Viscoélasticité [6]

Les élastomères présentent des phénomènes dissipatifs que l'on peut traduire globalement par une viscosité. On entend par un milieu visqueux un milieu continu dans lequel la dissipation volumique intrinsèque n'est fonction que du tenseur des vitesses des déformations. Une première caractéristique des matériaux viscoélastiques est l'effet de la

déformation antérieure sur le comportement de l'état actuel. L'état de contrainte dépend de la déformation ou/et de l'histoire du taux de déformation.

Le comportement viscoélastique des élastomères peut être caractérisé par deux types d'essais classiques :

- Essais statiques : Essais de retard à la déformation (ou de fluage) ou l'essai de relaxation.
- Essais dynamiques : Essai vibratoire.

### **I.3.3 Incompressibilité [3]**

La plupart des élastomères (caoutchoucs) sont considérés comme incompressibles, c'est-à-dire qu'il se déforme à volume constant. Il est convenu de considérer que pour des sollicitations ne faisant pas intervenir d'efforts hydrostatiques trop importants, la déformation du matériau se fait sans variation de volume. En fait, cette caractéristique est une idéalisation de la réalité, puisqu'on montre expérimentalement que les élastomères sont compressibles.

La prise en compte de l'hypothèse d'incompressibilité des caoutchoucs (sous les conditions définies précédemment) est très intéressante du point de vue analytique et notamment pour le dépouillement des mesures expérimentales. En revanche, d'un point de vue numérique (méthode des éléments finis), elle pose certaines difficultés maintenant bien identifiées.

### **I.3.4 Effet Mullin [6]**

Le comportement mécanique des élastomères chargés est modifié après l'application d'une première extension. Cette extension entraîne une perte de rigidité pour les déformations suivantes et une déformation rémanente (**I-4**). Ce phénomène appelé effet Mullins est recouvrable partiellement à température ambiante sur des temps très longs (plusieurs jours) ou en quelques heures à des températures proches de celle de la vulcanisation, n'excluant pas une rigidité retrouvée par la réactivation du processus de vulcanisation.

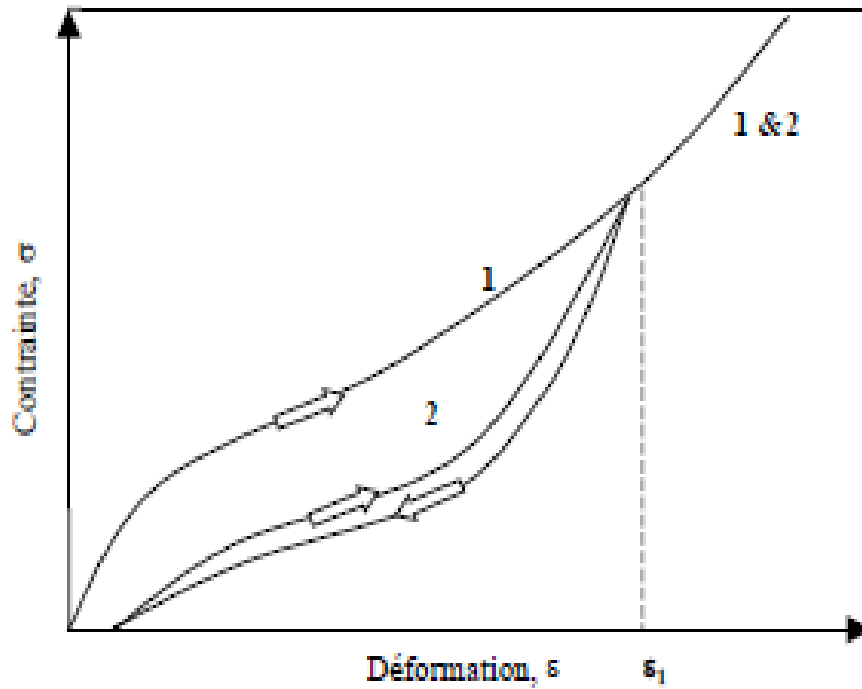


Figure I.4 : Représentation de l'Effet Mullins

### I.3.5 Effet Payne [7]

Un autre phénomène qui caractérise les élastomères, qui nous donne à titre indicatif, concerne la variation du module complexe en fonction de l'amplitude de déformation et de la proportion de charges dans la matrice. Il est désigné sous le terme d'effet Payne.

Ce phénomène est surtout étudié dans le domaine vibratoire. Il sort du cadre d'étude que nous nous sommes fixés et ne sera pas détaillé davantage.

**Conclusion**

Cette première partie nous a permis de présenter des généralités sur le comportement mécanique des élastomères, alors la maîtrise des mécanismes de comportement de tels matériaux nécessite une bonne connaissance de sa micro- structure et des procédés de sa mise en œuvre.



### **Introduction**

Pour décrire le comportement statique ou quasi-statique des élastomères, les modèles les plus couramment utilisés sont les modèles hyperélastiques. Afin de déterminer l'évolution d'un système déformable, il est nécessaire d'établir une relation entre contrainte et déformation : la loi de comportement. Elle doit en outre obéir aux critères suivants :

- le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle : la loi de comportement doit être invariante par tout changement de référentiel,
- la compatibilité avec les symétries matérielles : dans le cas d'un matériau isotrope, la loi de comportement doit être invariante dans toute rotation de la configuration de référence.

Le but de ce chapitre est de donner une vision panoramique sur les modèles du comportement hyperélastique en distinguant les modèles phénoménologique et les modèles physiques, en partant de la définition d'un milieu hyperélastique, et un rappel sur la mécanique des milieux continus grandes déformations, ensuite nous donnons les différentes écritures des loi de comportement.

### **II.1. Définition d'un milieu hyperélastique [4]**

Un milieu est dit hyperélastique s'il vérifie les critères suivants :

- l'existence d'une configuration de référence libre de contrainte,
- le matériau ne dissipe pas d'énergie,
- le comportement du matériau est décrit par une densité d'énergie libre spécifique, fonction des déformations et de la température.

### **II.2. Rappels de mécanique des milieux continus**

#### **II.2.1 Cinématique [8]**

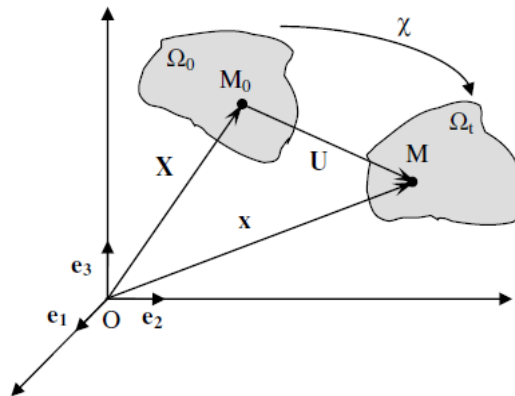
Dans le cadre des transformations finies, le mouvement d'une particule d'un milieu continu peut être décrit soit en :

- description Lagrangienne : elle est repérée par sa position  $O$ , ou plus généralement par une position de référence
- description eulérienne : la particule est repérée par sa position  $X$  à l'instant  $t$ .

Les coordonnées Lagrangiennes (ou matérielles) sont celles qui définissent la position du point matériel  $M_0(X_1, X_2, X_3)$  du milieu continu  $\Omega_0$ , le repérage se faisant dans la configuration initiale.

## Chapitre II Lois de comportement hyperélastique des élastomères

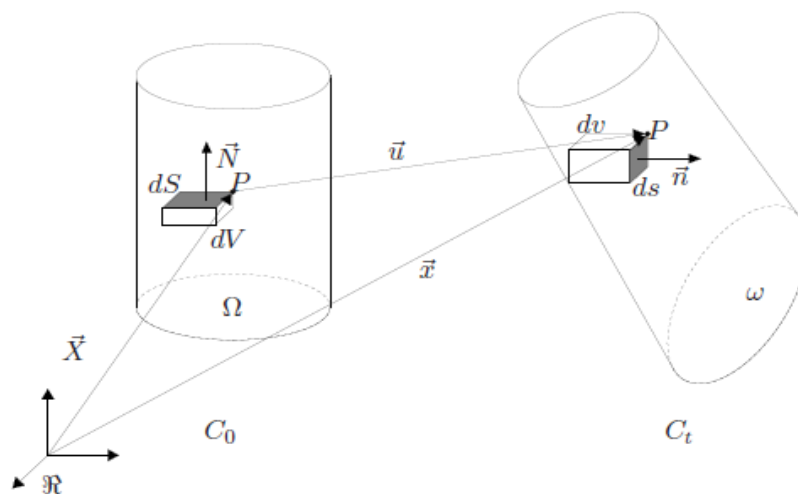
Les coordonnées Eulériennes (ou spatiales) sont celles qui définissent la position du point matériel  $M(x_1, x_2, x_3)$  du milieu continu à l'instant  $t$  courant, le repérage se faisant dans la configuration actuelle (ou déformée). Notons que dans le cas d'une transformation infinitésimale, les deux configurations sont confondues.



**Figure II.1 :** Configurations Lagrangienne et Eulérienne et mouvement d'un milieu continu [8]

### II.2.2 Description du mouvement [9]

Soit un solide (S) évoluant dans un référentiel (R). Il occupe le domaine  $\Omega$  dans la configuration ( $C_0$ ) que nous considérons comme la configuration initiale. Il occupera à l'instant  $t$  le domaine ( $\omega$ ) dans la configuration ( $C_t$ ) (Figure II.2).



**Figure II.2 :** Configurations initial et déformée [9]

## ***Chapitre II Lois de comportement hyperélastique des élastomères***

Le mouvement du milieu continu est alors défini par la donnée de la fonction  $\mathbf{X}$  et cette équation (II.1) définit la transformation faisant passer de la configuration de référence  $C_0$  à la configuration  $C_t$

$$\vec{x} : \begin{cases} (C_0) \rightarrow C_t \\ \vec{X} \rightarrow \vec{x}(\vec{X}, t) \end{cases} \quad (\text{II. 1})$$

En introduisant  $\mathbf{u}$ , le vecteur déplacement, (II.2) peut se mettre sous une forme équivalente :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (\text{II.2})$$

Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, ou tenseur tangent (figure II.2). Considérons un vecteur  $\overrightarrow{dX}$  dans la configuration initiale, son transformé dans la configuration actuelle s'obtient par la relation (II.3) :

$$\overrightarrow{dx} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{dX} \quad (\text{II.3})$$

Et de manière indicielle, en utilisant l'équation :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \quad (\text{II.4})$$

$\mathbf{F}$  (Appelé aussi gradient de la transformation) représente la cinématique de mouvement de la configuration initiale ( $C_0$ ) vers la configuration actuelle ( $C_t$ ). Au niveau local, les lois de transformation, liant un élément de volume  $dv$  ou de surface  $\vec{N}ds$  de ( $C_0$ ) à leurs images respectives  $dv$  et  $\vec{n}ds$  dans ( $C_t$ ), se déclinent comme suit :

Pour un élément de volume :

$$dv = JdV \quad (\text{II.5})$$

$$\text{où } J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (\text{II.6})$$

Pour un élément de surface :

$$\vec{n} = Jds\mathbf{F}^{-t}\vec{N} \quad (\text{II.7})$$

Cette condition est couramment utilisée dans la modélisation des élastomères qui sont considérés comme incompressibles.

### II.2.3 Tenseurs des déformations [7]

Des tenseurs de déformations généralisées peuvent être construits de façon systématique. Leur utilisation sera abordée ultérieurement, lors de la construction de lois de comportement et de l'établissement des équations d'équilibre sous des sollicitations données.

On considère le vecteur  $d\vec{X}_1$  dans la configuration de référence sa transformation respectivement en  $d\vec{x}_1$  après déformation donné par la forme suivante :

$$d\vec{x}_1 = \mathbf{F}d\vec{X}_1 \quad (\text{II.8})$$

On introduit alors le tenseur des déformations symétrique de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$ , appelé également tenseur des dilatations défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{II.9})$$

Et  $\mathbf{B}$  le tenseur Eulérien de Cauchy-Green gauche :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{II.10})$$

A partir de ces deux tenseurs, deux mesures classiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{A}$  appelé tenseur de Green-Lagrange :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{II.11})$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{II.12})$$

Où  $\mathbf{I}$  représente la tenseur identité.

Considérons le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$ , ses invariants principaux  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , apparaissent dans l'expression caractéristique de  $\mathbf{C}$  soit :

$$I_1 = \text{tr} (\mathbf{C})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr} (\mathbf{C}))^2 - \text{tr} (\mathbf{C}^2)) \quad (\text{II.13})$$

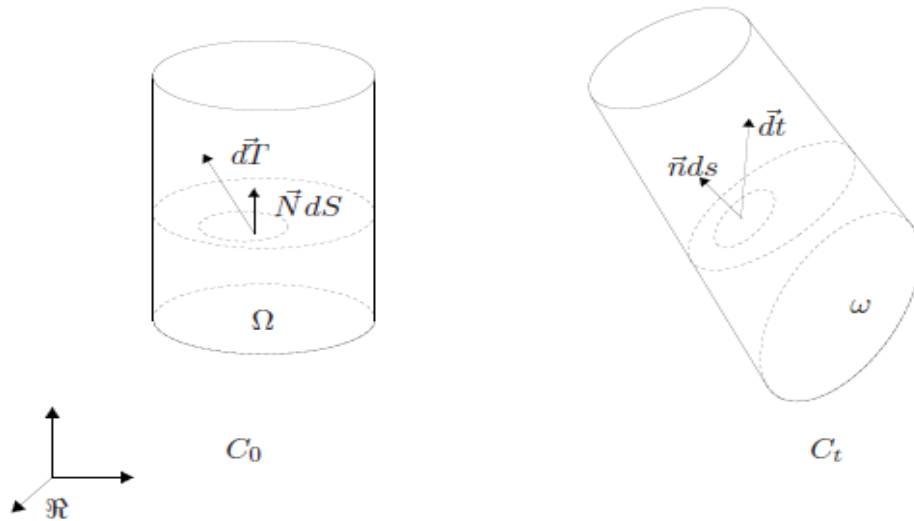
$$I_3 = \det (\mathbf{C})$$

### II.2.4 Description des efforts [10]

Trois descriptions peuvent être utilisées pour définir l'état de contrainte dans un solide, suivant que l'on considère :

- les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle ( $\vec{dt}$ ) à travers un élément de surface déformé  $(\vec{n}ds)$ ,
- les mêmes efforts à travers un élément de surface non déformé  $(\vec{N}dS)$ ,
- Ou encore le transport des efforts de cohésion ( $d\vec{T}$ ) à travers un élément de surface non déformé  $(\vec{n}ds)$ .

On pourra avoir une description eulérienne, mixte, ou lagrangienne des contraintes.



**Figure II.3** : Etat de contrainte dans les différentes configurations [11]

#### II.2.4.1 Description eulérienne

Comme nous l'avons expliqué précédemment, on considère les efforts intérieurs de cohésion exercés par une partie du solide sur l'autre, à travers un élément de surface  $\vec{n}ds$ . On définit  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy de façon analogue aux petites déformations comme étant :

$$\vec{dt} = \sigma \cdot \vec{n}ds \quad (\text{II.14})$$

$\sigma$  Représente les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée et par unité de surface déformée. Ce tenseur est symétrique.

$$\sigma : \begin{cases} (C_t) \rightarrow C_t \\ \vec{n}ds \rightarrow dt = \sigma \vec{n}ds \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

#### II.2.4.2 Description mixte :

Il peut être utile de pouvoir raisonner sur la configuration de référence, par exemple pour l'application de conditions aux limites. Le transport de l'élément de surface  $\vec{n}ds$  dans cette configuration donnée par (II.7), permet d'obtenir :

$$\vec{d}\vec{t} = \sigma \cdot \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}ds \quad (\text{II.16})$$

Soit, en définissant  $\pi$  le premier tenseur de Piola-Kirchoff :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ d\vec{t} = \boldsymbol{\pi} \cdot \vec{N}dS \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

$\boldsymbol{\pi}$  est non symétrique.

On parle de description mixte des contraintes car  $\boldsymbol{\pi}$ , tout comme  $\mathbf{F}$ , n'est ni lagrangien, ni eulérien, il définit une application de  $C_0$  dans  $C_t$ . Physiquement, il représente les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée par unité de surface non déformée.

$$\boldsymbol{\pi} : \begin{cases} (C_0) \rightarrow (C_t) \\ \vec{N}dS \rightarrow dt = \boldsymbol{\pi} \vec{N}dS \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

### II.2.4.3 Description lagrangienne

L'obtention d'une description complètement lagrangienne de l'état de contrainte nécessite le transport de l'effort réel de cohésion  $d\vec{t}$  dans la configuration de référence

$$d\vec{T} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{t} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}dS = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\pi} \vec{N}dS \quad (\text{II.19})$$

On introduit ainsi  $\mathbf{S}$  le second tenseur de Piola-Kirchoff tel que :

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{\pi} d\vec{T} = \mathbf{S} \cdot \vec{N}dS \quad (\text{II.20})$$

$\mathbf{S}$  n'a pas de signification physique mais présente la particularité d'être symétrique.

$$\mathbf{S} : \begin{cases} (C_0) \rightarrow (C_0) \\ \vec{N}dS \rightarrow d\vec{T} = \mathbf{S} \cdot \vec{N}dS \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

### II.3 Matériaux hyperélastique [11]

Les matériaux hyperélastiques sont caractérisés par l'existence d'une énergie de déformation  $W$  dépendant uniquement de l'état de déformation  $\mathbf{F}(t)$  et dont dérivent les contraintes, les différents tenseurs de contraintes peuvent s'écrire en fonction de  $W$  :

- En écriture lagrangienne :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \quad (\text{II.22})$$

- En écriture eulérienne :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} - p\mathbf{I} \quad (\text{II.23})$$

- En écriture mixte :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-t} \quad (\text{II.24})$$

## ***Chapitre II Lois de comportement hyperélastique des élastomères***

Le principe d'objectivité nous impose d'écrire  $W$  sous la forme d'une fonction scalaire exprimée en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$ . En faisant, de plus, l'hypothèse d'isotropie,  $W$  peut s'exprimer en fonction des seuls invariants  $I_1$  et  $I_2$  ( $I_3 = 1$ ) de  $\mathbf{C}$

$$W = W(I_1, I_2) \quad (\text{II.25})$$

Ces trois invariants ne sont cependant pas les seuls invariants possibles. En conservant les notations  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  pour les extensions principales (racines carrées des valeurs propres de  $\mathbf{C}$ ), on peut écrire sans perte de généralité :

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{II.26})$$

### **II.4 Modèles hyperélastiques [7] [12]**

Les modèles hyperélastiques décrivent un comportement réversible, non-linéaire. Il en existe deux grandes familles pour les élastomères : les modèles physiques et les modèles purement phénoménologiques.

#### **II.4.1 Modèles phénoménologiques [7]**

##### **II.4.1.1 Modèle de Mooney Rivlin [7]**

Ce modèle, établi par Mooney part du constat que le comportement du caoutchouc est linéaire en cisaillement simple. Mooney écrit alors  $W$  sous la forme :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (\text{II.27})$$

Ce modèle reste de loin le plus utilisé pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%.

##### **II.4.1.2 Modèle de Biderman [7]**

Biderman néglige les termes croisés du modèle précédent et prend une forme tronquée du modèle de Mooney –Rivlin de l'ordre 3 en  $I_1$  et de l'ordre 1 en  $I_2$ .

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (\text{II.28})$$

##### **II.4.1.3 Modèle de Gent et Thomas [7]**

Gent et Thomas proposent la forme empirique présentant l'avantage de ne contenir que deux constantes matérielles et vérifiant la forme générale de Rivlin et Saunders :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{II.29})$$

Ce modèle démontre que la variation de l'énergie de déformation est linéaire en  $I_1$  et à dérivée décroissante en  $I_2$ . Il traduit convenablement le comportement des élastomères pour des déformations de moins de 200%.

#### II.4.1.4 Modèle de Hart-Smith [7]

Dans les années 60, Hart-Smith propose un modèle empirique sous la forme d'une énergie de déformation  $W$  reproduisant le raidissement final des matériaux élastomères dans le domaine des grandes déformations ; la forme de  $W$  est la suivante :

$$W_{\text{HS}} = C_1 \int \exp[C_3(I_1 - 3)^2] dI_1 + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{II.30})$$

Où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont trois paramètres matériels.

#### II.4.1.5 Modèle d'Ogden [7]

En 1972 Ogden introduit l'idée que  $W$  peut s'exprimer en terme de déformations généralisée et introduit une forme mathématique en série de puissances réelles :

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (\text{II.31})$$

Les constantes  $\mu_n$  et  $\alpha_n$  sont les paramètres matériaux.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les valeurs propres des teneurs d'élongation principales. Les puissances mises en jeu dans le potentiel d'Ogden sont réelles qui lui confère un intérêt particulier.

#### II.4.1.6 Modèle de Gent [7]

Gent reprend l'idée que l'élongation des chaînes de molécules n'est pas infinie et fait l'hypothèse que  $I_1$  admet une valeur maximale  $I_m$ . Il propose alors un modèle empirique à deux constantes ayant un sens physique. Il compare ainsi son modèle au modèle physique d'Arruda et Boyce en justifiant son approche par le fait que le réseau de chaînes réel ne suit pas exactement la forme obtenue statistiquement et que son modèle est une approximation possible :

$$W = -\frac{E}{6} (I_m - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right] \quad (\text{II.32})$$

$I_1$  est le premier invariant de Cauchy Green donné par la relation suivante dans le cas de la traction :

$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \quad (\text{II.33})$$



$I_m$  représente la valeur maximale que peut atteindre  $I_1 - 3$  lors de la déformation.

### II.4.2 Modèles physiques [7] [12]

#### II.4.2.1 Modèle Néo-Hookien [7]

C'est le modèle hyperélastique le plus simple. Il correspond au modèle de Mooney-Rivlin à un seul terme, mais sa justification est plus moléculaire que phénoménologique

Le modèle Néo-Hookéen est donné par l'expression suivante :

$$W = \frac{1}{2}nkT (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (\text{II.34})$$

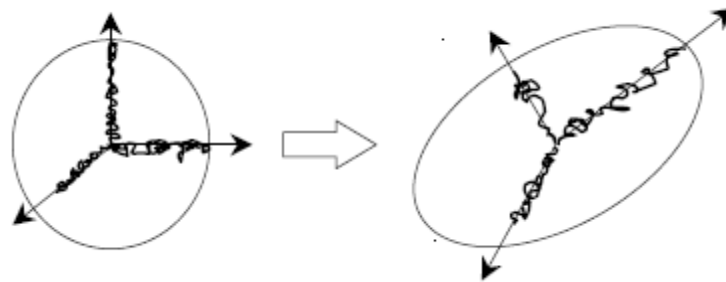
Qui peut encore s'écrire :

$$W = \frac{1}{2}nkT (I_1 - 3) = \frac{\mu_0}{2}(I_1 - 3) \quad (\text{II.35})$$

Avec:  $\mu_0 = nKT$

#### II.4.2.2 Modèle de James-Guth (3-chaines) [12]

Le modèle simplifié de James et Guth suppose que le réseau est représenté par trois chaînes parallèles aux trois directions de l'espace. Le modèle construit ainsi est illustré par la figure suivante :



**Figure II.4 :** représentation schématique du modèle à 3-chaines [7]

Le module du vecteur reliant les deux extrémités d'une chaîne est :

$$r_0 = \sqrt{N_3}L_{03} \quad (\text{II.36})$$

Dans l'hypothèse de la déformation affine, on a :

$$r_{j\text{chaîne}} = \lambda_j r_0 \quad (\text{II.37})$$

Où  $\lambda_j$  représente la dilatation principale macroscopique dans la j<sup>ème</sup> direction.

La dilatation relative d'une chaîne est définie par :

$$\lambda_{jr} = \frac{\lambda_{\text{chaîne}}}{\lambda_L} = \frac{\lambda_j}{\sqrt{N_3}}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.38})$$

Ce modèle suppose que la densité des chaînes est équivalente dans les trois directions, par conséquent :

$$n_j = \frac{n}{3},$$

Et la densité d'énergie s'exprime par :

$$W^{3\text{chaîne}} = \frac{nKT}{3} N_3 \sum_{j=1}^3 \left( \lambda_{jr} \beta_j + \ln \left( \frac{\beta_j}{\sinh \beta_j} \right) \right) - c_3^* \quad (\text{II.39})$$

Où  $\beta_j = L^{-1}(\lambda_{jr})$  est la fonction inverse de Langevin,

$$\left( L(\beta_j) = \lambda_{jr} = \coth \beta_j - \frac{1}{\beta_j} \right).$$

Et  $c_3^*$  est une constante arbitraire.

La loi constitutive du modèle à 3-chaîne est la suivante :

$$\sigma_j = -p + \frac{\mu_0}{3} N_3 \beta_j \lambda_{jr}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.40})$$

$\mu_0 = nKT$  est le module de cisaillement.

En éliminant la pression hydrostatique, la loi de comportement s'exprime par :

$$\sigma_i - \sigma_k = \frac{\mu_0}{3} N_3 \left( \beta_j \lambda_{jr} - \beta_k \lambda_{kr} \right), \quad j \neq k = 1, 2, 3 \quad (\text{II.41})$$

#### II.4.2.4 Modèle d'Arruda-Boyce (8-chaînes) [12]

Le modèle simplifié de Arruda-Boyce suppose que l'élément de volume de référence contient 8-chaîne situées sur les diagonales du cube d'arrête  $a_0$

Le module du vecteur reliant les deux extrémités d'une chaîne est :

$$r_0 = \sqrt{N_8} L_{08} = \frac{a_0}{2} \sqrt{3} \quad (\text{II.42})$$

Le vecteur reliant les deux extrémités d'une chaîne dans d'une chaîne dans l'état déformé s'exprime par

$$\vec{r} = \frac{a_0}{2} (\vec{\lambda}_1 + \vec{i} + \vec{\lambda}_2 + \vec{j} + \vec{\lambda}_3 + \vec{k}) \quad (\text{II.43})$$

Le module du vecteur  $\vec{r}$  est :

$$r = r_{\text{chaîne}} = \frac{a_0}{2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \quad (\text{II.44})$$

On en déduit :

$$r_{\text{chaîne}} = r_0 \sqrt{\frac{I_1}{3}} \quad (\text{II.45})$$

$I_1 (C)$  représente le premier invariant scalaire du tenseur de déformation de Cauchy-Green  $C$ .

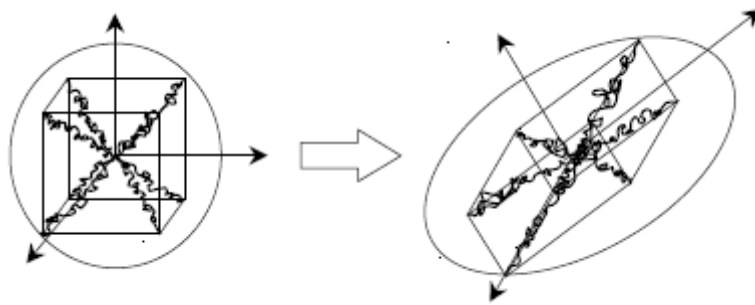
La dilatation d'une chaîne définie par :

$$\lambda_{\text{chaîne}} = \frac{r_{\text{chaîne}}}{r_0} = \sqrt{\frac{I_1}{3}} \quad (\text{II.46})$$

Ce qui donne :

$$\lambda_r = \frac{\lambda_{\text{chaîne}}}{\lambda_L} = \sqrt{\frac{I_1}{3N_8}} \quad (\text{II.47})$$

Avec  $\lambda_L = \sqrt{N_8}$



**Figure II.5** : Représentation schématique du modèle à 8-chaines [7]

Le modèle d'Arruda-Boyce (1993) est basé sur l'hypothèse de la déformation non affine.

La densité d'énergie du modèle à 8-chaîne est donnée par :

$$W^{8\text{chaîne}} = nKTN_8 \left( \lambda_r \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right) - c_8^* \quad (\text{II.48})$$

$$\text{Où } \beta = L^{-1}(\lambda_r) \quad (\text{II.49})$$

est la fonction inverse de Langevin

$$\left( L(\beta) = \coth \beta - \frac{1}{\beta} = \lambda_r \right)$$

$c_8^*$  est une constante arbitraire.

La loi constitutive du modèle à 8-chaîne est :

$$\sigma_j = -p + \frac{\mu_0 \beta}{3\lambda_r} \lambda_j^2, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.50})$$

Afin d'éliminer la pression hydrostatique, on peut écrire :

$$\sigma_i - \sigma_k = \frac{\mu_0 \beta}{3\lambda_r} (\lambda_j^2 - \lambda_k^2) \quad j \neq k = 1, 2, 3 \quad (\text{II.51})$$

### **Conclusion**

Partant de la définition d'un milieu hyperélastique nous avons passé en revue, dans ce chapitre quelques outils nécessaires à une formulation en grandes déformations d'un problème, c'est ainsi que sont définis les différentes mesures de déformation et les trois différentes descriptions de l'état de contrainte (eulérienne, lagrangienne et mixte), par la suite, nous avons rappelé les différentes écritures de la loi de comportement. Enfin nous avons présenté quelques modèles hyperélastiques de la littérature.

Plusieurs travaux ont été développés dans la littérature présentant une comparaison des modèles hyperélastiques, citons par exemple la comparaison de vingt modèles hyperélastiques pour plusieurs types de chargement présentée par Marckmann et Verron [13], d'autres travaux Tobajas [14] ou encore Lateefi [15] ont été publiés dans le même contexte.

## Introduction

Nous avons évoqué précédemment quelques lois du comportement hyperélastique des élastomères. Nous allons simuler l'essai de traction à l'aide du logiciel d'élément fini en considérant une modélisation 2D et 3D. Les modèles utilisés dans cette étude sont : Néo Hookien, Mooney Rivlin, Gent, Ogden et Arruda Boyce. Une comparaison entre les contraintes déterminées analytiquement et numériquement est faite. Une autre étude comparative de ces cinq modèles est discutée. Les résultats expérimentaux de Treloar (1949) effectués sur le latex ont été utilisés et les paramètres de chaque modèle sont donnés dans la publication de Marckmann.

### III.1 Présentation des modèles hyperélastiques utilisés dans l'étude

On peut séparer les modèles hyperélastiques qui s'expriment en fonction des invariants et ceux qui s'expriment en fonction des élongations principales :

$$W = (I_1, I_2, I_3) \quad \text{ou} \quad W = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Où  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants du tenseur de Cauchy Green droit  $\mathbf{C}$ , et  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont les élongations principales.

Dans toute notre étude, nous avons supposé que le milieu est incompressible, ce qui implique que  $I_3 = 1$ .

La loi de comportement pour un milieu incompressible s'exprime par :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{B}} - p\mathbf{I} \quad (\text{III.1})$$

Le potentiel hyperélastique de chaque modèle est donné par les relations suivantes :

#### III.1.1 Modèle Néo Hookien

$$W = C_1 (I_1 - 3) = \frac{\mu_0}{2} (I_1 - 3) \quad (\text{III.2})$$

Où  $\mu_0$  est le module de cisaillement

**III.1.2 Modèle Mooney Rivlin**

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (\text{III.3})$$

**III.1.3 Modèle d'Arruda-Boyce**

$$W = \mu_0 N_8 \left( \lambda_r B + \ln \left( \frac{B}{\sinh B} \right) \right) - C_8^* \quad (\text{III.4})$$

**III.1.4 Modèle d'Ogden**

Le modèle d'Ogden s'exprime en fonction des élongations principales

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (\text{III.5})$$

**III.1.5 Modèle de Gent**

$$W = -\frac{E_0}{6} (I_m - 3) \ln \left[ 1 - \frac{I_m - 3}{I_m - 3} \right] \quad (\text{III.6})$$

**III.2 Détermination analytique de la relation contrainte – déformation dans le cas d'un chargement de traction uni-axiale**

Dans le cas d'un chargement uni-axial suivant la direction  $x$ , le tenseur gradient de la déformation est :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}$$

Le tenseur de Cauchy Green droit est défini par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites de l'essai de traction uni-axiale sont :

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (\text{III.7})$$

La relation contraintes – déformations de chaque modèle est déterminée à partir de la relation (III.1) où la pression hydrostatique est éliminée à partir des conditions aux limites :

- **Modèle de Néo-Hookien**  $\sigma = \mu_0 (\lambda^2 - \lambda^{-1})$  (III.8)

Avec :  $\frac{\mu_0}{2} = \frac{1}{2}nkT = C_1 = 0.2$  donc  $\mu_0 = 0.4$  (pour le latex [13])

- **Modèle de Mooney Rivlin**  $\sigma = 2 \left( C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-1})$  (III.9)

Les paramètres du modèle sont  $C_1$  et  $C_2$

Pour le matériau utilisé, on a [13] :  $C_1 = 0.162\text{MPa}$  et  $C_2 = 0.0059\text{MPa}$

- **Modèle d'Arruda-Boyce**

Utilisant l'approximation de Padé :

$$\beta = L^{-1}(\lambda_r) = \frac{\lambda_r(3-\lambda_r^2)}{1-\lambda_r^2}$$

On trouve que :  $\sigma = \frac{\mu_0}{3} \left( \frac{3-\lambda_r^2}{1-\lambda_r^2} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-1})$  (III.10)

Où  $\lambda_r = \frac{\lambda_{chaîne}}{\lambda_l} = \sqrt{\frac{I_1}{3N_8}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 + 2\lambda^{-1}}{3N_8}}$

Avec :

$\lambda_r$ : Dillatation relative d'une chaîne,

$\lambda_l$ : Allongement limite du réseau  $\lambda_l = \sqrt{N_8}$ .

$\mu_0$  et  $N_8$  Sont les paramètres qui définissent ce modèle.

On a [13]:  $\mu_0 = 0.28$  et  $N_8 = 25.4$

- **Modèle d'Ogden**  $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\frac{\alpha_i}{2}})$  (III.11)

Les paramètres du modèle d'Ogden utilisés sont [13]

$$\begin{cases} \mu_1 = 0.63 \\ \mu_2 = 0.0012 \\ \mu_3 = -0.01 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1.3 \\ \alpha_2 = 5 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

- **Modèle de Gent :**

$$\sigma = \frac{E_0}{3} \left( \frac{(I_m - 3)(\lambda^2 - \lambda^{-1})}{I_m - I_1} \right) \quad (III.12)$$

Les paramètres du modèle pour notre matériau sont [13] :

$$\mu_0 = \frac{E_0}{3} = 0.326 \quad (E_0 = 0.978) \quad \text{et} \quad I_m = 96.4$$

### III. 3 Simulation numérique de la traction uni-axiale :

#### III. 3.1 Présentation de la géométrie

On considère une éprouvette de longueur 150mm et de largeur 20mm ; nous avons pris deux géométries l'une en 2D et l'autre en 3D, les figures sont présentées ci-dessous :



Figure III.1 : Epreuve en 2D

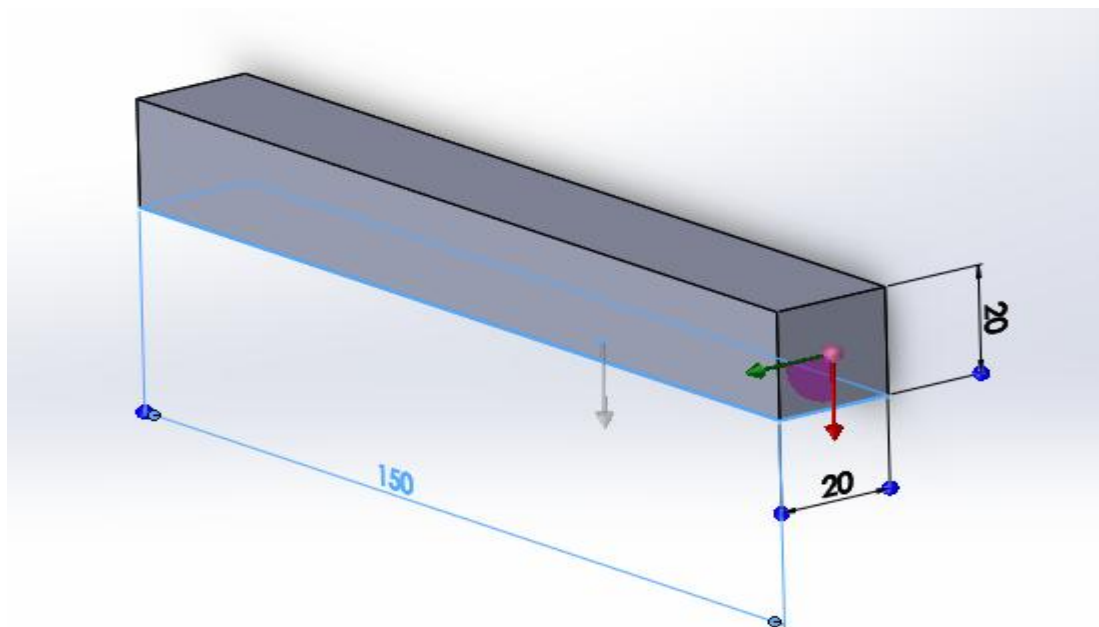
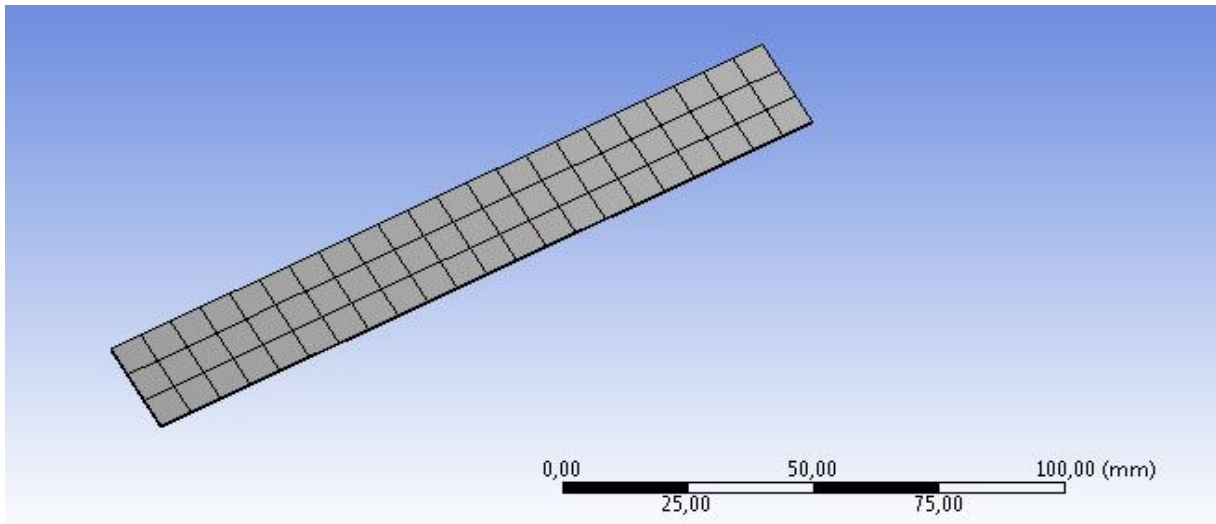


Figure III.2 : Epreuve en 3D



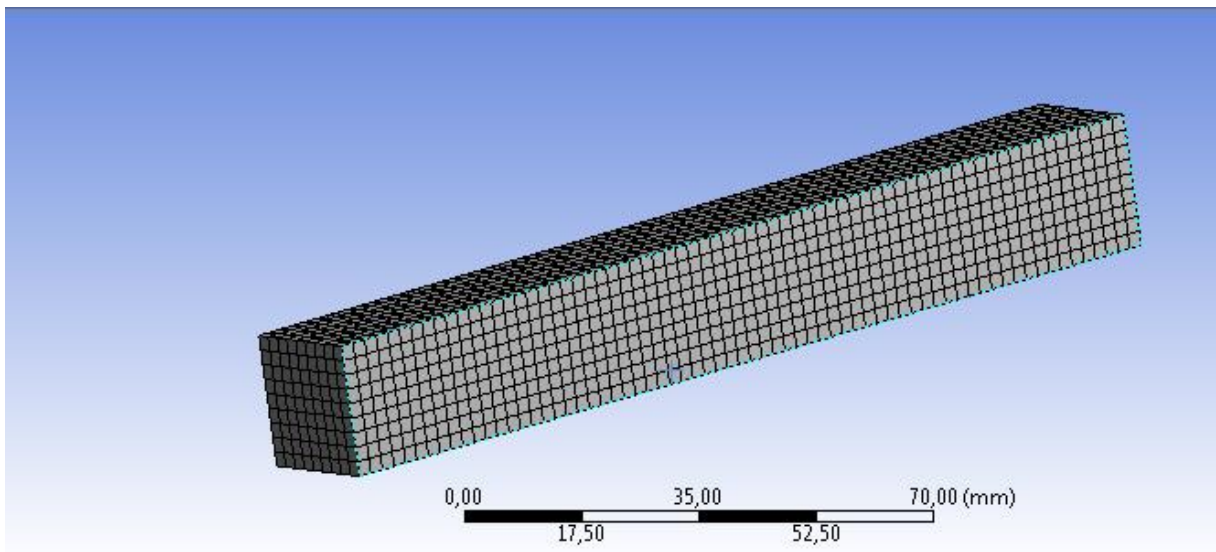
### III .3.2 Maillage

Après l'introduction des paramètres dans le logiciel d'éléments fini, nous avons généré le maillage pour les deux modèles (2D et 3D), (voir Figs III.3 et III.4).



**Figure III.3 :** Modèle maillé 2D

Nœuds	249
Eléments	66



**Figure.III.4 :** Modèle maillé 3D

Nœuds	26120
Éléments	5508

### III.3.3 Contrainte équivalente de Von Mises

C'est très intéressant de comparer les contraintes obtenues sur une structure soit numériquement ou théoriquement aux caractères du matériau qui la constitue. Pour cela le critère le plus utilisé est le critère de Von Mises. Dans le cas de la traction uni-axiale (compression uni-axiale), la contrainte équivalente de Von Mises est égale à la contrainte de traction (compression) :

$$\sigma^{\text{vm}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{D}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{D}}} = \sigma \quad (\text{III.13})$$

Où  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{D}} = \boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\right) \mathbf{I}$  est le déviateur du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$ .

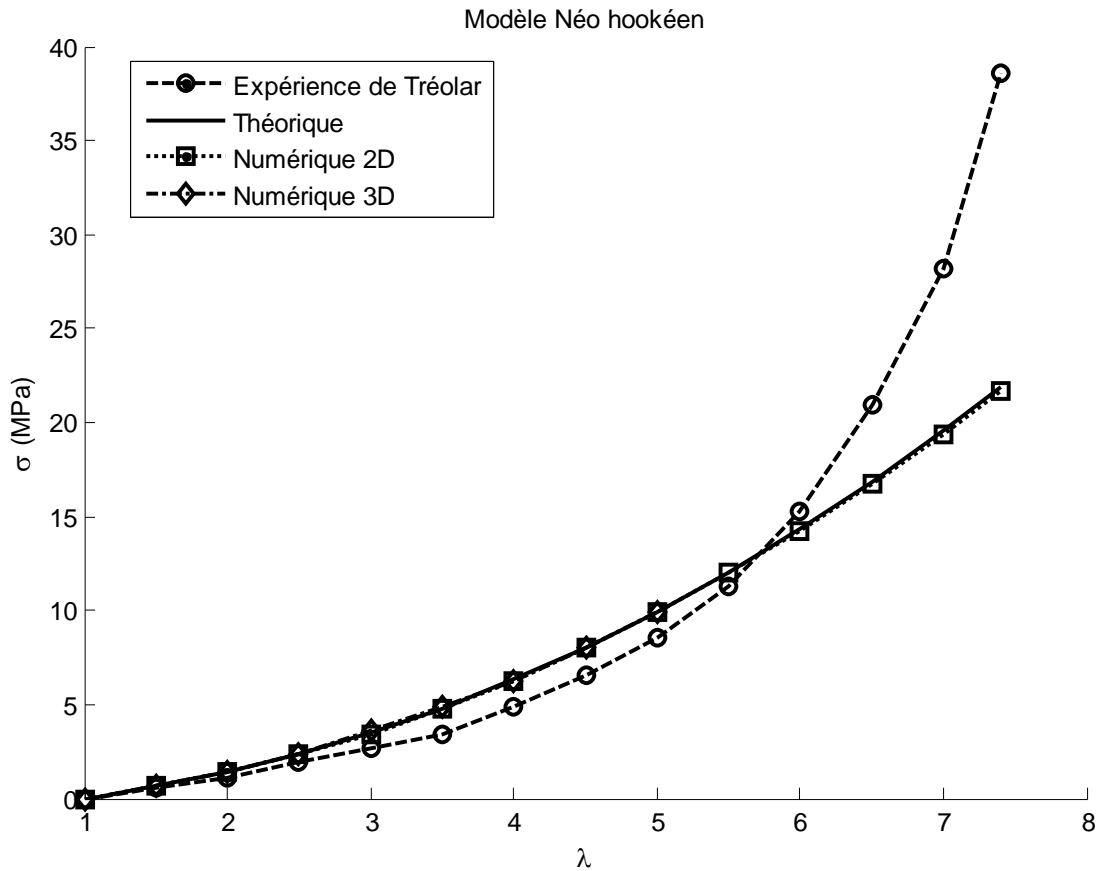
### III.4 Résultats de la simulation numérique de la traction uni-axiale

Nous présentons ici les résultats des simulations numériques. Notons que le milieu est supposé quasi-incompressible avec un coefficient de Poisson très proche de 0.5,

Soit  $\nu = 0.4995$  ce qui donne  $D = 0.0015 \text{MPa}^{-1}$

Avec :  $D = \frac{2}{k_0} = \frac{6(1-2\nu)}{E}$  ( $E \approx 1.2 \text{MPa}$ )

### III.4.1 Modèle de Néo-Hookien



**Figure.III.5:** Evolution des contraintes équivalentes (Von-Mises) en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytiques et numériques du modèle Néo Hookien aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.

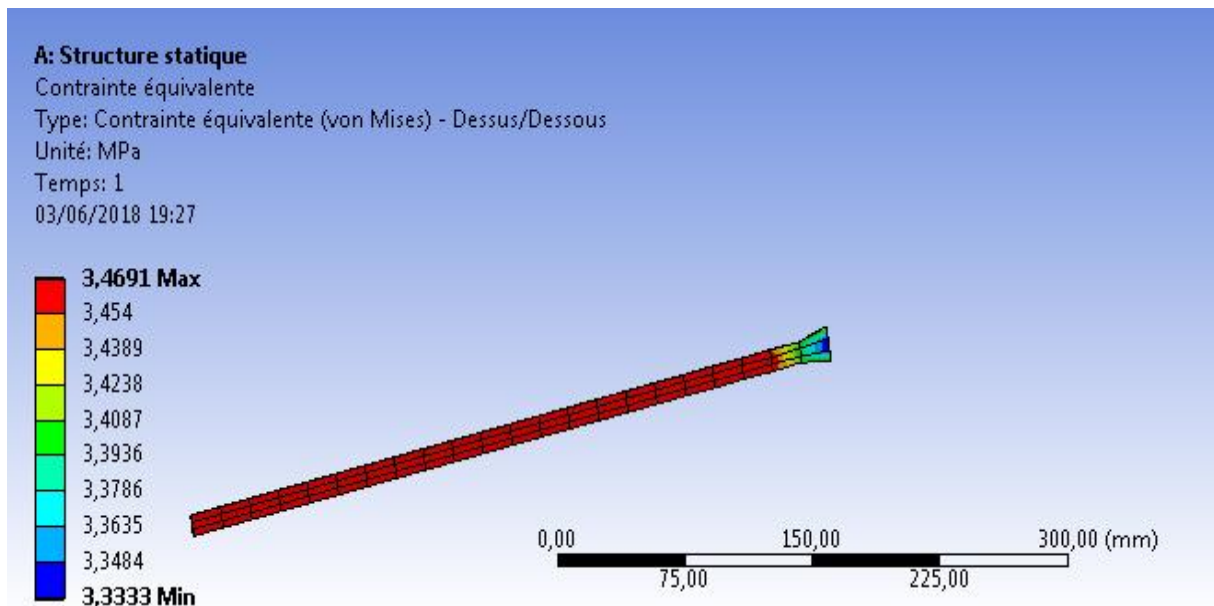
La figure (III.5) représente l'évolution des différentes contraintes calculées (analytiquement et numériquement) en fonction des élongations.

Les résultats analytiques et numériques obtenus sont confrontés aux résultats expérimentaux de la littérature (Treloar 1949), dans le cas d'un test de traction uni-axiale.

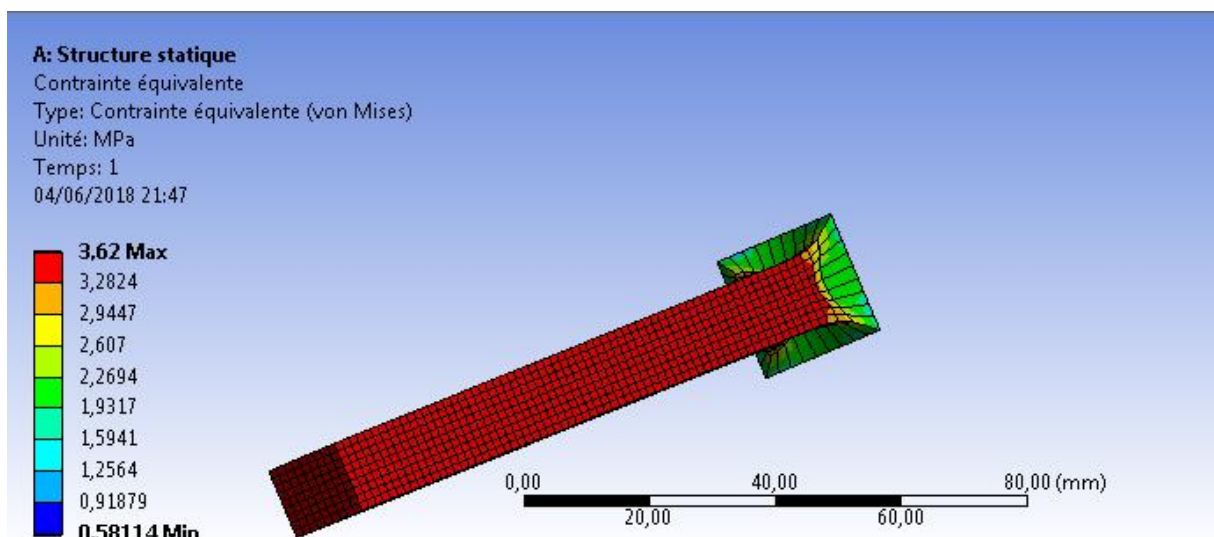
On constate que le modèle analytique de Néo Hookien reproduit les résultats expérimentaux d'un test de traction uni-axiale jusqu'à une élongation de 200% c'est-à-dire  $\lambda=2$ . A partir de cette élongation ( $\lambda=2$ ), la courbe analytique dévie progressivement de la courbe expérimentale.

Cependant, la courbe obtenue numériquement dans le cas d'une simulation 2D est confondue avec la courbe théorique. Il est à noter que les simulations numériques ont été réalisées avec les mêmes paramètres du modèle théorique. Les courbes numériques obtenues

dans le cas d'une simulation 2D et 3D sont confondues jusqu'à une valeur  $\lambda=5$ , au-delà de cette valeur, les simulations 3D ne donnent pas de résultats.



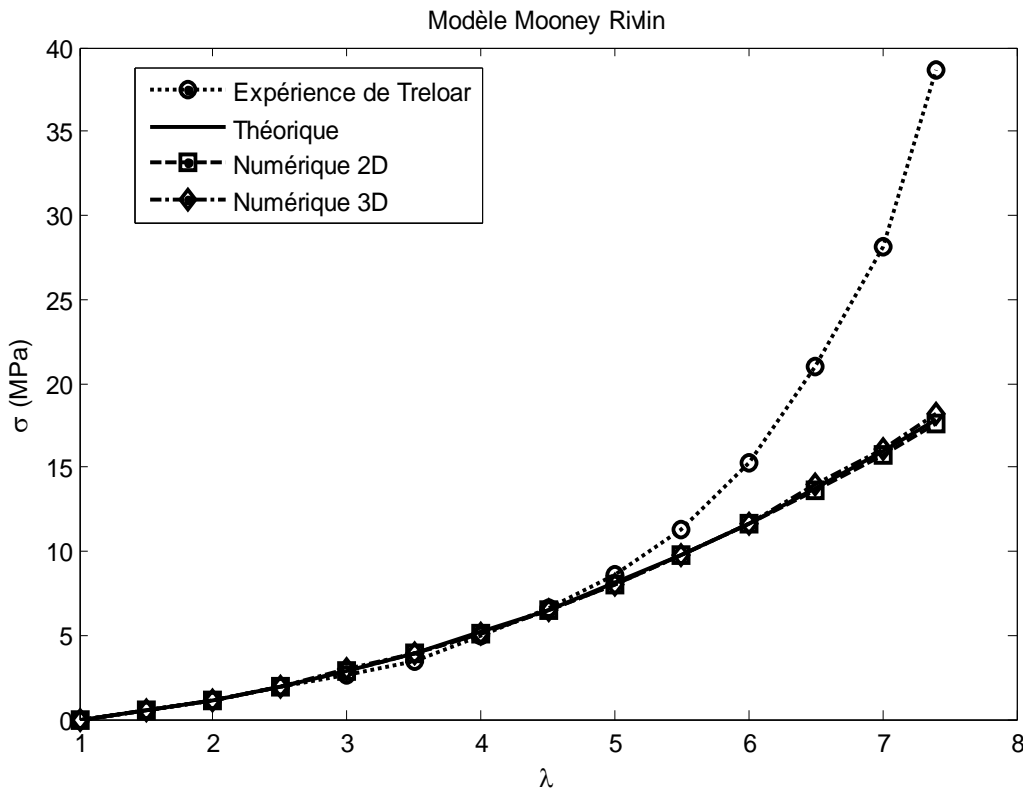
**Figure III.6 :** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation  $\lambda = 3$  (Modélisation 2D, Potentiel Néo Hookien).



**Figure III.7 :** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation  $\lambda = 3$  (Modélisation 3D, Potentiel Néo- Hookien).

Les deux figures (III.6) et (III.7) représentent la contrainte équivalente déterminée numériquement pour une élongation  $\lambda = 3$ . On constate que la contrainte de Von Mises est la même pour les deux modélisations (2D et 3D).

### III.4.2 Modèle de Mooney Rivlin



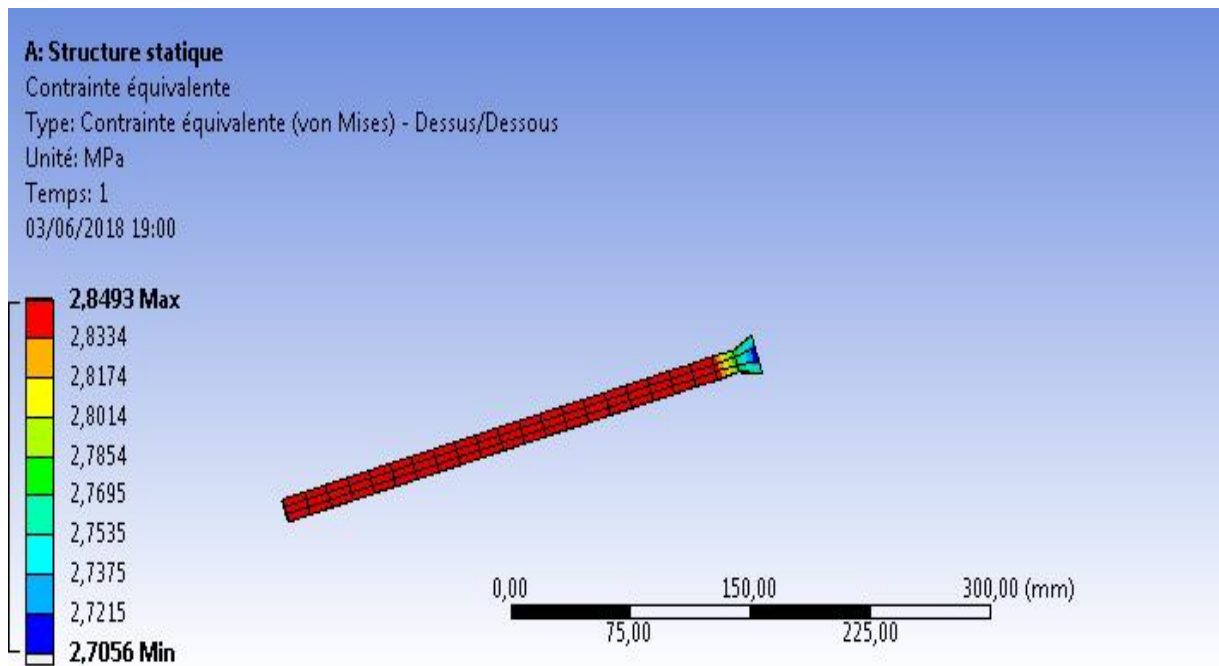
**Figure III.8 :** Evolution des contraintes équivalentes de Von Mises en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytiques et numériques du modèle Mooney-Rivlin aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale

La figure (III.8) représente l'évolution des différentes contraintes calculées (analytiquement et numériquement) en fonction des élongations.

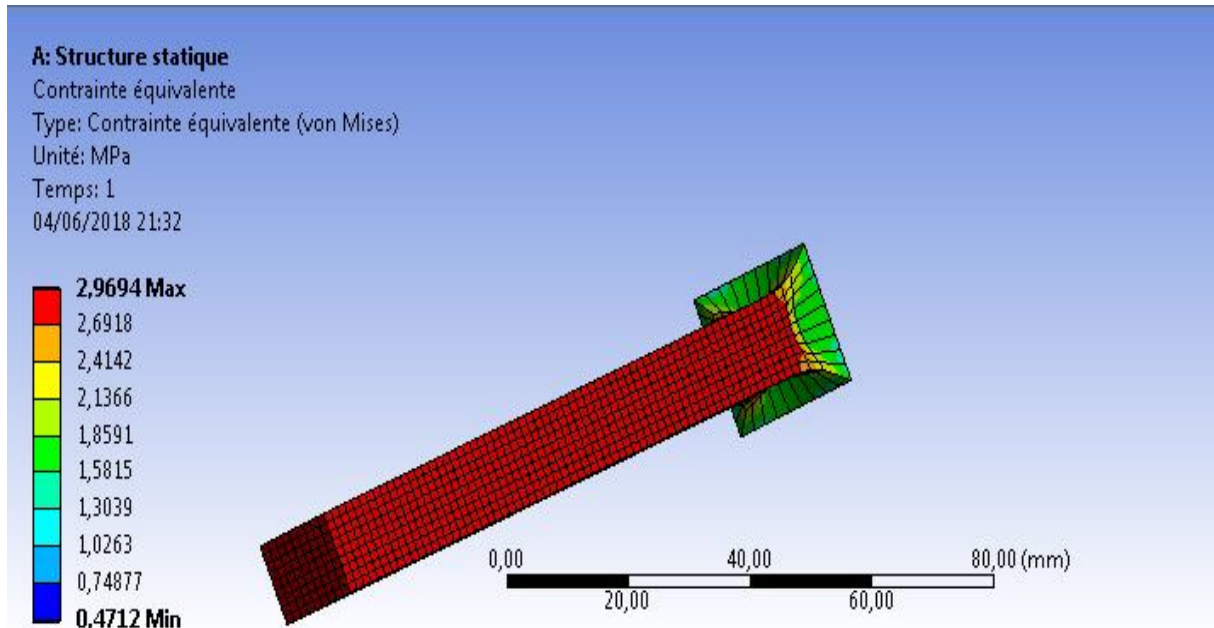
Les résultats analytiques et numériques obtenus sont confrontés aux résultats expérimentaux de la littérature (Treloar 1949), dans le cas d'un test de traction uni-axiale.

On constate que le modèle analytique de Mooney-Rivlin reproduit d'une manière satisfaisante les résultats expérimentaux d'un test de traction uni-axiale jusqu'à une élongation de 500% c'est-à-dire  $\lambda = 5$ . A partir de cette élongation ( $\lambda = 5$ ), la courbe analytique dévie progressivement de la courbe expérimentale vers des valeurs inférieures.

Cependant, les courbes obtenues numériquement dans le cas d'une simulation 2D et 3D sont confondues avec la courbe analytique. Il est à noter que les simulations numériques ont été réalisées avec les mêmes paramètres du modèle théorique (deux paramètres). Les courbes numériques obtenues dans le cas d'une simulation 2D et 3D sont confondues.



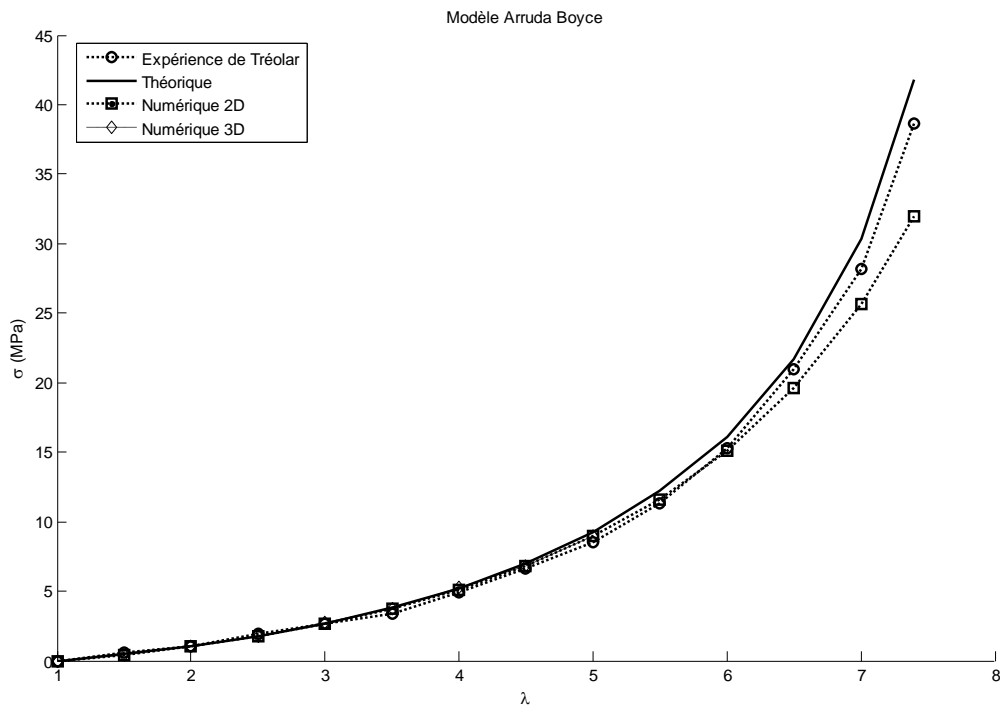
**Figure III.9 :** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élancement  $\lambda = 3$  (Modélisation 2D, Potentiel de Mooney Rivlin).



**Figure III .10 :** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation  $\lambda = 3$  (Modélisation 3D, Potentiel de Mooney Rivlin).

Les deux figures (III.9) et (III.10) représentent la contrainte équivalente déterminée numériquement pour une élongation  $\lambda = 3$ . On constate que la contrainte de Von Mises est la même pour les deux modélisations (2D et 3D).

### III. 4.3 Modèle d'Arruda-Boyce (8-chaines)



**Figure III.11:** Evolution des contraintes équivalentes de Von-Mises en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytiques et numériques du modèle d'Arruda-Boyce aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.

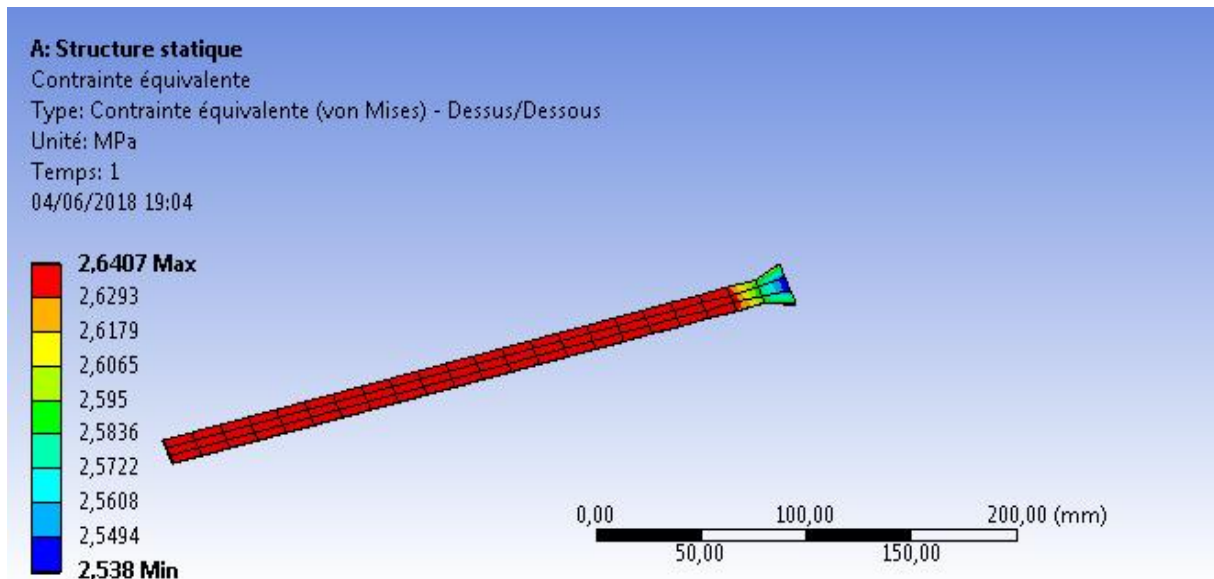
La figure (III.11) représente l'évolution des différentes contraintes calculées (analytiquement et numériquement) en fonction des élongations.

Les résultats analytiques et numériques obtenus sont confrontés aux résultats expérimentaux de la littérature (Treloar 1949), dans le cas d'un test de traction uni-axiale.

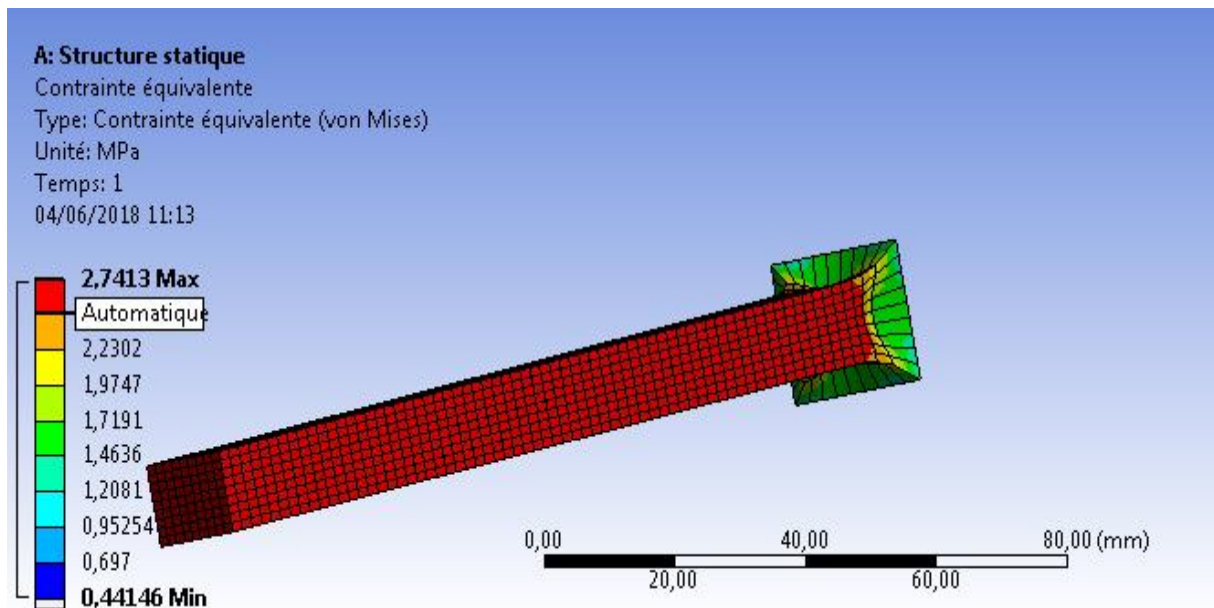
On constate que le modèle analytique d'Arruda-Boyce reproduit d'une manière très satisfaisante les résultats expérimentaux d'un test de traction uni-axiale dans toute la gamme des élongations.

Les courbes obtenues analytiquement et numériquement dans le cas d'une simulation 2D sont confondues avec la courbe expérimentale. Il est à noter que les simulations numériques ont été réalisées avec les mêmes paramètres pour le modèle théorique d'Arruda-Boyce. Les courbes numériques obtenues dans le cas d'une simulation 2D et 3D sont confondues jusqu'à une valeur  $\lambda=5$ , au-delà de cette valeur, les simulations 3D ne donnent pas de résultats.





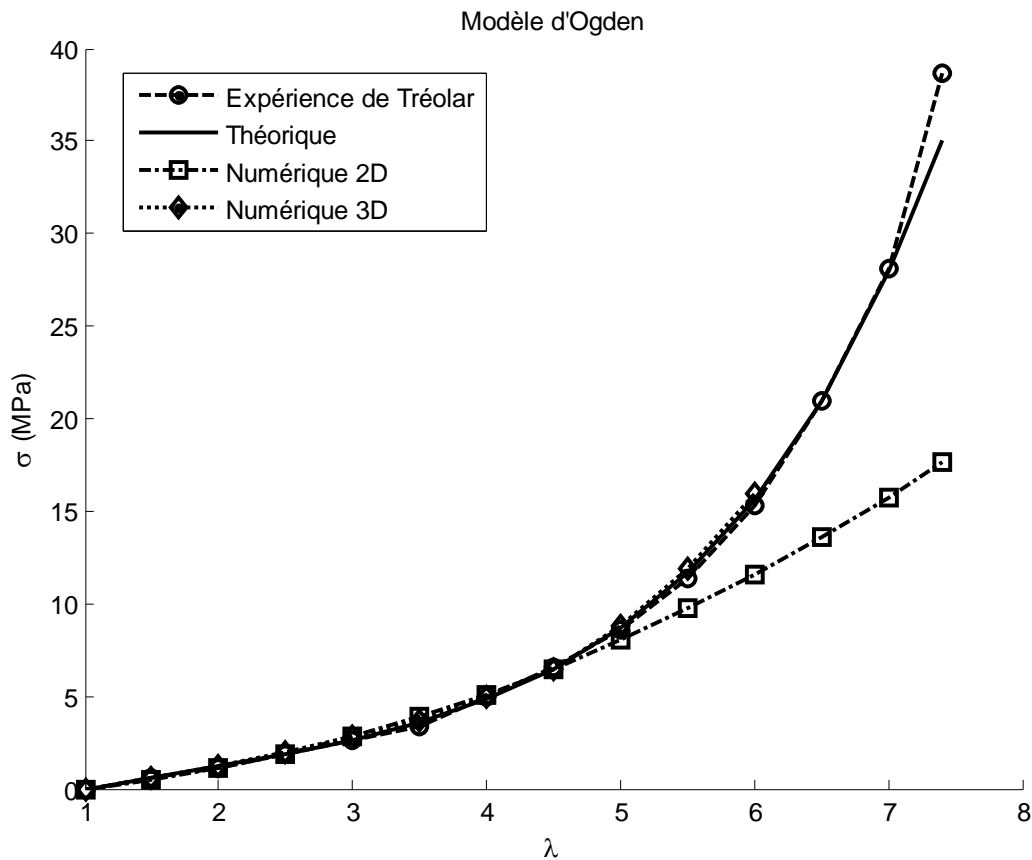
**Figure III.12:** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élancement  $\lambda = 3$  (Modélisation 2D, Potentiel d'Arruda-Boyce).



**Figure.III. 13:** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élancement  $\lambda = 3$  (Modélisation 3D, Potentiel d'Arruda-Boyce).

Les deux figures précédentes représentent la contrainte équivalente de Von Mises déterminée pour la même élancement ( $\lambda = 3$ ). On constate que le résultat de la simulation est le même dans les deux cas étudiés (2D et 3D).

## III.4.4 Modèle d'Ogden



**Figure.III.14:** Evolution des contraintes équivalentes de Von-Mises en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytiques et numériques du modèle d'Ogden aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.

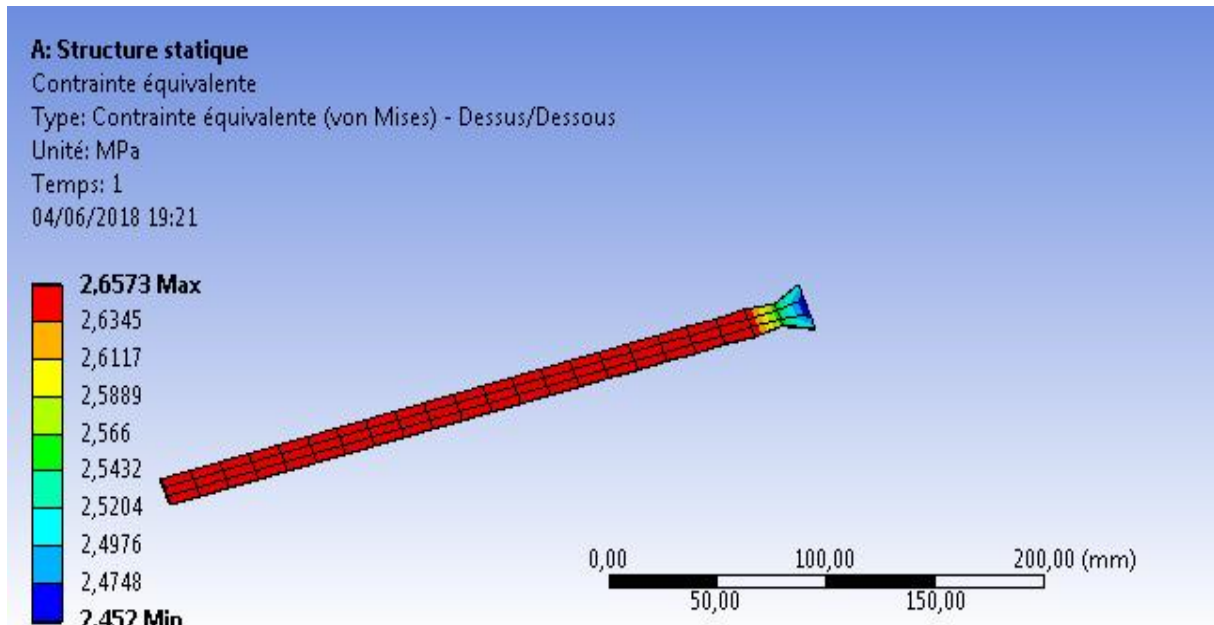
La figure (III.14) représente l'évolution des différentes contraintes calculées (analytiquement et numériquement) en fonction des élongations.

Les résultats analytiques et numériques obtenus sont confrontés aux résultats expérimentaux de la littérature (Treloar 1949), dans le cas d'un test de traction uni-axiale.

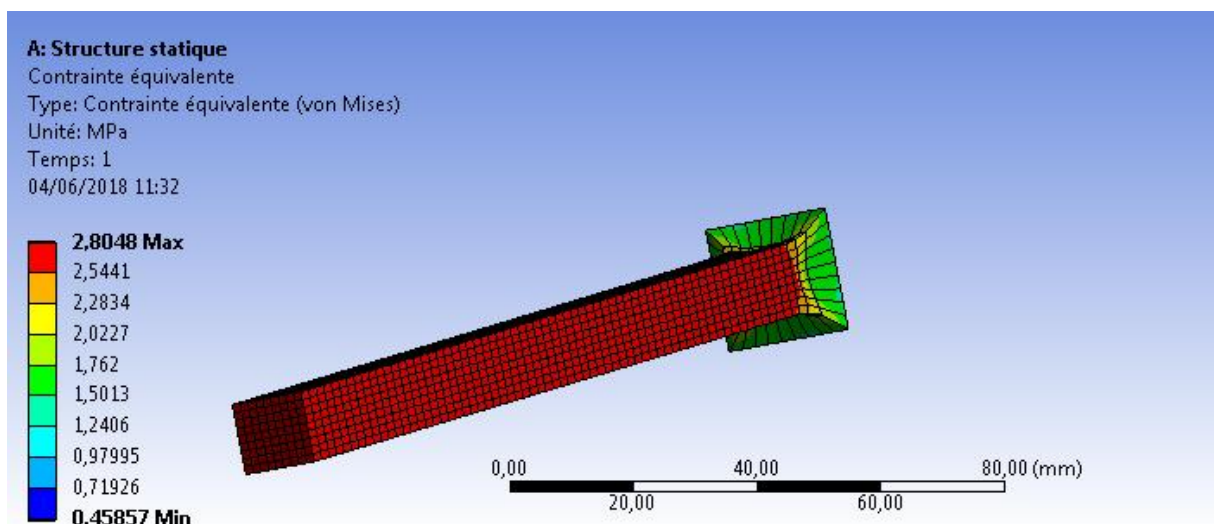
On constate que le modèle analytique d'Ogden reproduit d'une manière satisfaisante les résultats expérimentaux d'un test de traction uni-axiale.

Les courbes obtenues analytiquement et numériquement dans le cas d'une simulation 2D sont confondues avec la courbe expérimentale. Il est à noter que les simulations numériques ont été réalisées avec les mêmes paramètres pour le modèle théorique d'Ogden (six paramètres). Les courbes numériques obtenues dans le cas d'une simulation 2D et 3D

sont confondues jusqu'à une valeur  $\lambda=6$ , au-delà de cette valeur, les simulations 3D ne donnent pas de résultats.



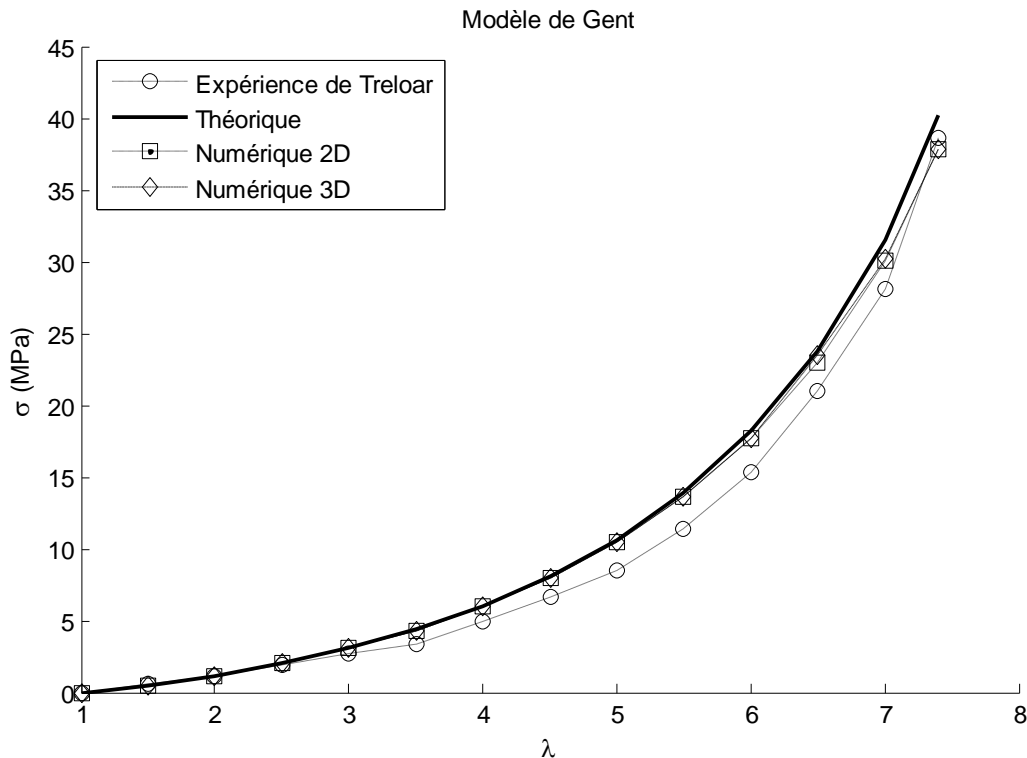
**Figure III.15 :** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation  $\lambda = 3$  (Modélisation 2D, Potentiel d'Ogden).



**Figure III.16 :** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation  $\lambda = 3$  (Modélisation 3D, Potentiel d'Ogden).

Les figures précédentes représentent la contrainte équivalente déterminée numériquement pour le modèle d'Ogden ( $\lambda = 3$ ), une prise en 2D et l'autre en 3D ; on remarque que les deux contraintes sont presque les mêmes.

## III.4.5 Modèle de Gent



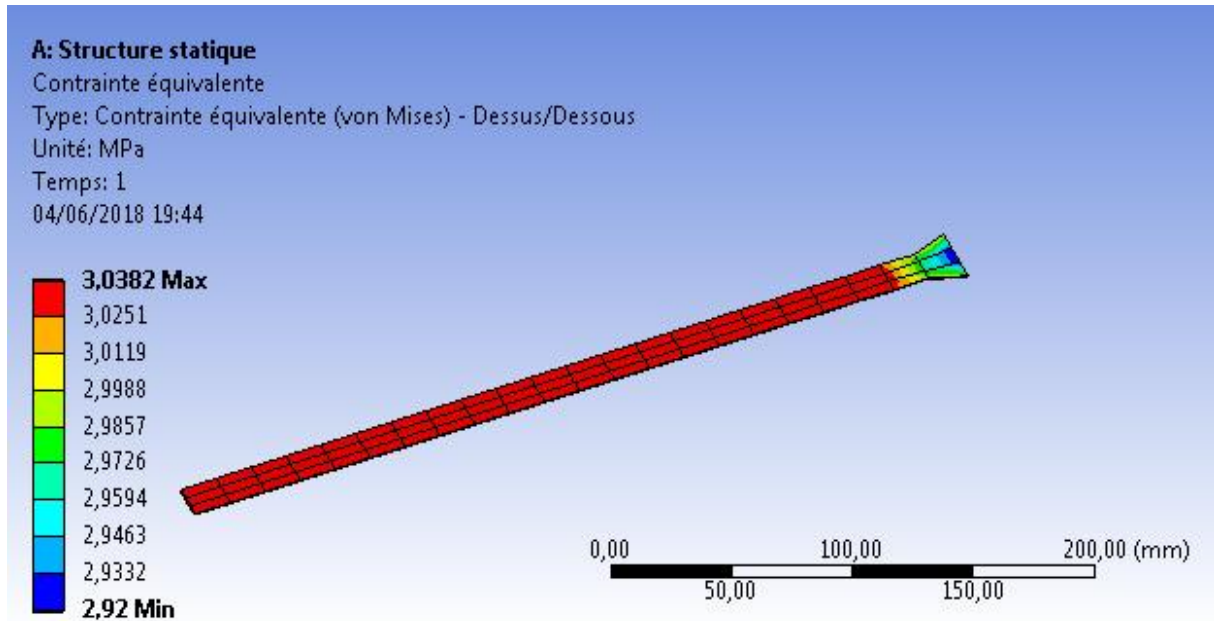
**Figure.III.17** : Evolution des contraintes équivalentes de Von-Mises en fonction des élongations : Confrontation des résultats analytiques et numériques du modèle de Gent aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale.

La figure (III.17) représente l'évolution des différentes contraintes calculées (analytiquement et numériquement) en fonction des élongations.

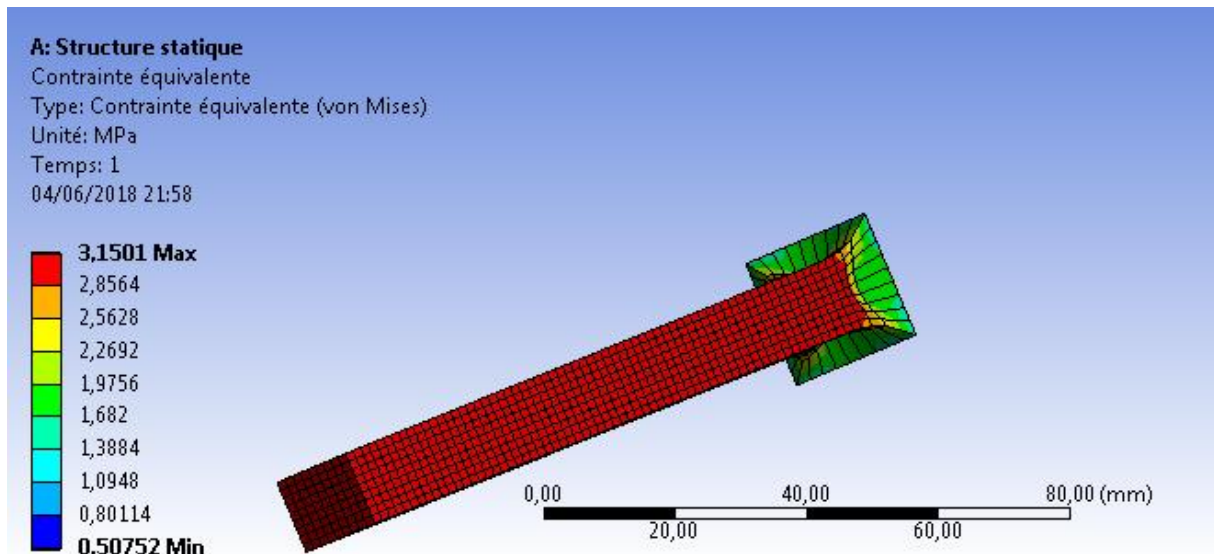
Dans le cas d'un test de traction uni-axiale, les résultats analytiques et numériques obtenus sont confrontés aux résultats expérimentaux de la littérature (Treloar 1949).

On constate que la courbe analytique du modèle de Gent dévie progressivement des résultats expérimentaux à partir d'une élongation de 3.

Les courbes obtenues numériquement dans le cas d'une simulation 2D et 3D sont confondues avec la courbe analytique. Il est à noter que les simulations numériques ont été réalisées avec les mêmes paramètres du modèle théorique.

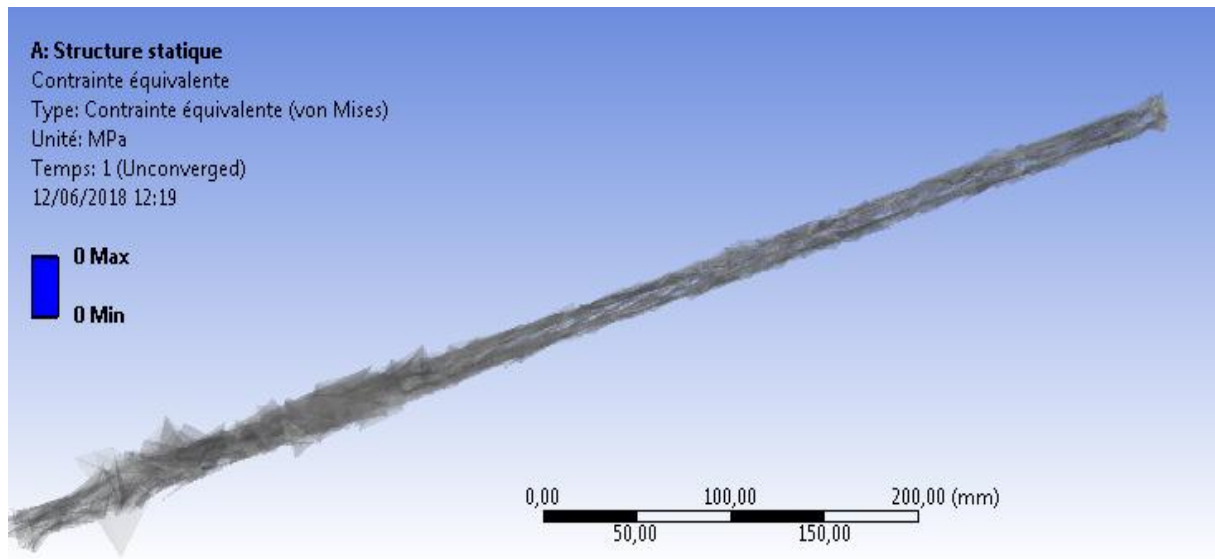


**Figure III.18 :** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation  $\lambda = 3$  (Modélisation 2D, Potentiel de Gent).



**Figure III.19:** Distribution des contraintes de Von Mises pour une élongation  $\lambda = 3$  (Modélisation 3D, Potentiel de Gent).

La figure (III.18) et (III.19) représentent la contrainte équivalente déterminée numériquement pour une élongation  $\lambda = 3$ . On constate que la contrainte de Von Mises en 2D est presque égale à celle en 3D.

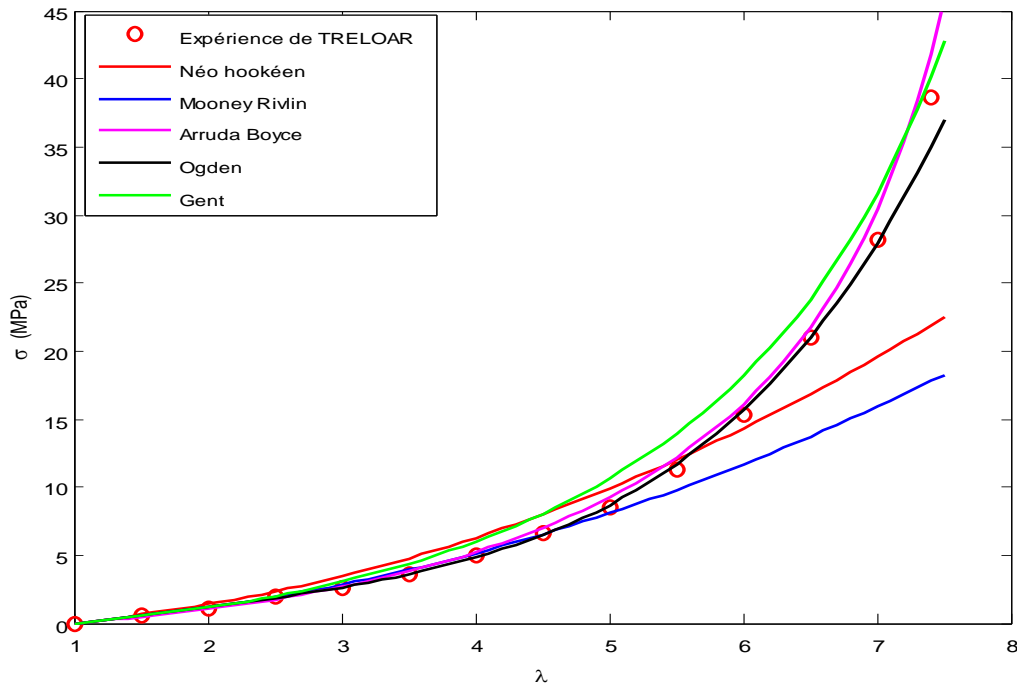


**Figure.III.20 :** Déformation de la pièce pour une elongation  $\lambda = 6.5$  (Modélisation 3D, Modèle d'Ogden)

La figure (III.20) montre la déformation de la pièce pour un très grand déplacement qui correspond à  $\lambda = 6.5$ .

On explique cette déformation par le domaine de validité des calculs de contraintes planes, dans ce cas, le calcul éléments finis ne donne pas de résultats. L'épaisseur de la plaque en 3D doit être faible devant les autres dimensions de la plaque.

## Comparaison des résultats théoriques obtenus en traction pour les cinq modèles



**Figure III.21 :** Confrontation des résultats théoriques des différents modèles aux résultats expérimentaux de Treloar en traction uni-axiale

La figure (III.21) représente l'évolution des différentes contraintes calculées analytiquement pour les cinq modèles en fonction des élongations.

Dans le cas d'un chargement de traction uni-axial, les résultats théoriques sont confrontés aux résultats expérimentaux de la littérature de Treloar (1949).

On constate que les modèles analytiques d'Arruda-Boyce, Ogden et Gent reproduisent d'une manière satisfaisante les résultats expérimentaux pour toute valeur de l'élongation.

Les modèles Néo-Hookeen et Mooney Rivlin reproduisent l'expérience pour des élongations inférieures à 5. Au-delà de cette valeur, les courbes analytiques dévient progressivement de la courbe expérimentale.

### III.6 Etude comparative des différents modèles

Nous allons résumer les résultats trouvés précédemment en considérant le cas de la traction uni-axiale, les résultats expérimentaux utilisés pour cette comparaison sont ceux de Treloar(1949).

On montre sur les figures ci-dessous les résultats des contraintes théoriques des cinq modèles, dans les intervalles [1, 5] et [5, 7.4].

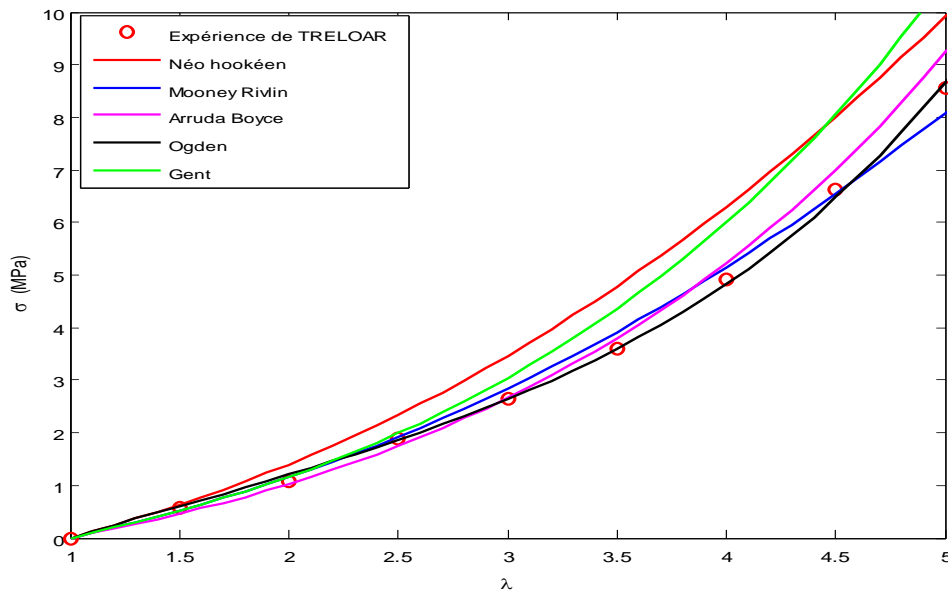


Figure III.22 : Courbes Contraintes – Elongations pour  $\lambda \in [1, 5]$

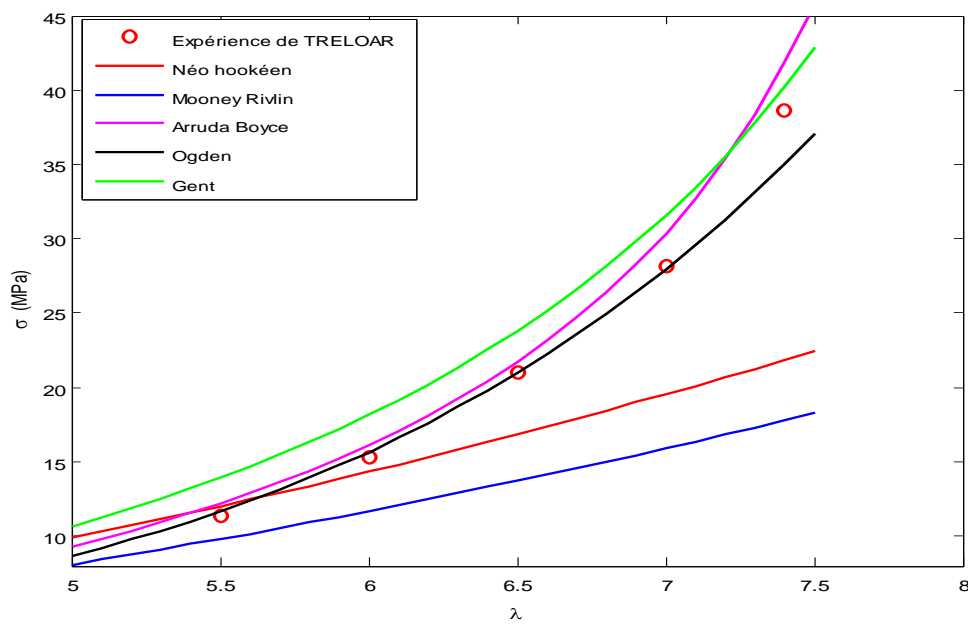


Figure III.23 : Courbes Contraintes – Elongations pour  $\lambda \in [5, 7.4]$



Le tableau(III.1) illustre une comparaison qualitative des différents modèles utilisés dans cette étude.

Modèles	Expression de $W$	Nombre de paramètres	Résultats pour $\lambda \in [1, 1.5]$	Résultats pour $\lambda \in [1.5, 3]$	Résultats pour $\lambda \in [3, 5]$	Résultats pour $\lambda \in [5, 7.4]$
Néo hookien	$W(I_1)$	<b>1</b>	+ +	+	+	-
Mooney Rivlin	$W(I_1, I_2)$	<b>2</b>	+ +	+ +	++	-
Gent	$W(I_1)$	<b>2</b>	+ +	+ +	+	+
Arruda Boyce	$W(I_1)$	<b>2</b>	+ +	+ +	+ +	++
Ogden	$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	<b>6</b>	+ +	+ +	+ +	++

**Tableau III.1 :** Etude qualitative des résultats obtenus en traction uni-axiale (++ Très bons résultats, + bons résultats, -mauvais résultats)

Il est clair que seuls les modèles d'Arruda Boyce et d'Ogden qui donnent de très bons résultats pour les différentes valeurs de l'élongation. Notons que le nombre de paramètres du modèle d'Arruda Boyce (2 paramètres) est inférieur à celui d'Ogden (6 paramètres).

Pour les faibles élongations, les cinq modèles donnent les mêmes résultats.

## Conclusion

Nous avons montré à travers de cette étude que la modélisation numérique en 2D ou en 3D donnent les mêmes résultats, cependant, pour les grands déplacements, la simulation numérique en 3D provoque une détérioration de la pièce simulée, ceci peut être expliqué par le domaine de validité de l'hypothèse des contraintes planes. La pièce simulée doit être d'épaisseur faible dans le cas des contraintes planes.

Nous avons montré que le modèle d'Arruda Boyce qui contient deux paramètres seulement simule la réponse mécanique dans le cas d'un chargement en traction uni-axiale. Le modèle d'Ogden donne d'excellents résultats mais il contient six paramètres. Pour des déformations modérées, les cinq modèles donnent presque les mêmes résultats.

## *Conclusion générale*

---

### **Conclusion générale**

Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature, parmi ces modèles, on peut citer les modèles Néo-Hookéen, Mooney Rivlin, Arruda Boyce, Ogden et Gent.

Dans cette étude, nous avons simulé les essais de la traction en considérant deux modèles numériques 2D et 3D. Nous avons montré que pour de très grands déplacements, l'épaisseur de l'éprouvette doit être faible devant les deux autres dimensions afin d'éviter la détérioration de la pièce simulée.

Les résultats numériques pour les différents modèles sont en bons accord avec la théorie, rappelons que les paramètres des modèles ont été pris de la publication de Marckmann [14]

Il est important de noter qu'une loi de comportement capable de simuler la réponse mécanique avec un minimum de paramètres est l'objectif principal du modélisateur, Nous avons trouvé que le modèle d'Arruda Boyce à deux paramètres ajuste les résultats expérimentaux de Treloar effectués sur le latex en traction uni-axiale.

## *Bibliographie*

---

### **BiBliographie :**

- [1] : Marc Carrega ‘Matériaux polymères ‘ .Dunod (2007)
- [2] : Patricia Saad Septembre 2003, modélisation et identification du comportement non linéaire des cales caoutchouc, thèse de Doctorat
- [3] : Erwan Verron, Modalisation du comportement des structures et des matériaux élastomères, mémoire d’habilitation à dirigé des recherches école centrale de Nantes 2003.
- [4] : IDA Raoult structures élastomères sous chargement cyclique comportement –fatigue-, durée de vie, thèse de doctorat jainvier 2005, laboratoire de mécanique des solide umr 7649-cnrs.
- [5] : Adnane Boukamel. Modélisation mécaniques et numériques des matériaux et structure en élastomères, octobre 2006.
- [6] : Gacem Hatem comportement Visco-hypérelastique des élastomères-Visco-élasticité non linéaires applications aux multicouches, Thèse de doctorat, décembre 2007, l’université paris.
- [7] : Gilles Marckmann. Contribution a l’étude des élastomères et des membranes soufflées Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2004. Français.
- [8] : Mustapha Zidi, Contribution a la modélisation mécanique de comportement dynamique hyperélastique et anisotrope de la paroi artérielle. Thèse de Doctorat.
- [9] : Jean- Louis POISSON détermination d’un critère de fatigue multiaxial appliqué a un élastomère synthétique. Thèse de doctorat, université François-Rabelais de tours, juin 2001.
- [10] : Stéphane MEO, modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l’élasticité à la thermo-Hyperélasticite, Thèse de doctorat, université de la méditerranée Aix Marseille 2.
- [11] :Dominique François. Essaie mecanique et loi de comportement, livre, HERMES science Europe Ltd, 2001.
- [12] : S. BOUZIDI , Modélisation micromécanique du comportement hyperélastique des élastomères composite(2006). Mémoire magister, université de Bejaia.

## *Bibliographie*

---

[13]: G.Marckmann and E.Verron, Comparaison of hyperélastique models for rabberlike materials

[14]: Rafael Tobajas Elena Ibarz and Luis Gracia. A comparative study of hyperelastic constitutive models to characterize the behavior of a polymer used in automotive engines.

[15]: Md. M Lateefi .A comparison of different material models for Elastomeric Material under deformation.

## Annexe I

## 1. Résultat de la simulation numérique de la traction uniaxiale :

On cherche à obtenir les contraintes équivalentes (von mises) dans l'éprouvette pour plusieurs déplacements de différents modèles, les résultats obtenus sont données dans les tableaux suivant :

## 1.1 Modèle de Néo-hookéen :

L'élongation $\lambda$	Contraint expérimental (MPa)	Contraint analytique (MPa)	Contraint numérique en 2D (MPa)	Contraint numérique en 3D (MPa)
1	0	0	0	0
1,5	0,58	0,63	0,63	0,63
2	1,08	1,40	1,40	1,40
2,5	1,9	2,34	2,34	2,41
3	2,64	3,46	3,46	3,62
3,5	3,40	4,78	4,78	4,93
4	4,92	6,30	6,29	6,29
4,5	6,61	8,01	7,98	7,99
5	8,55	9,92	9,88	9,89
5,5	11,33	12,02	11,97	
6	15,3	14,33	14,25	
6,5	20,99	16,83	16,72	
7	28,14	19,54	19,39	
7,4	38,62	21,84	21,65	

## 1.2 Modèle de Mooney Rivlin :

L'élongation $\lambda$	Contraint expérimental (MPa)	Contraint analytique (MPa)	Contraint numérique en 2D (MPa)	Contraint numérique en 3D (MPa)
1	0	0	0	0
1,5	0,58	0,52	0,52	0,52
2	1,08	1,15	1,14	1,15
2,5	1,9	1,92	1,92	1,92
3	2,64	2,84	2,84	2,96
3,5	3,40	3,91	3,91	3,91
4	4,92	5,14	5,11	5,14
4,5	6,61	6,54	6,49	6,53
5	8,55	8,09	8,02	8,07
5,5	11,33	9,80	9,77	9,78
6	15,3	11,68	11,62	11,63
6,5	20,99	13,71	13,64	13,97
7	28,14	15,91	15,75	16,12
7,4	38,62	17,78	17,65	18,15

**1.3 Modèle d'Arruda-Boyce (8-chaines) :**

L'élongation $\lambda$	Contraint expérimental (MPa)	Contraint analytique (MPa)	Contraint numérique en 2D (MPa)	Contraint numérique en 3D (MPa)
1	0	0	0	0
1,5	0,58	0,45	0,45	0,45
2	1,08	1,02	1,02	1,03
2,5	1,9	1,74	1,74	1,74
3	2,64	2,66	2,64	2,74
3,5	3,40	3,80	3,75	3,75
4	4,92	5,22	5,13	5,30
4,5	6,61	7,00	6,83	6,83
5	8,55	9,25	8,95	8,96
5,5	11,33	12,18	11,63	
6	15,3	16,12	15,08	
6,5	20,99	21,72	19,59	
7	28,14	30,38	25,62	
7,4	38,62	41,80	31,95	

**1.4 Modèle d'Ogden :**

L'élongation $\lambda$	Contraint expérimental (MPa)	Contraint analytique (MPa)	Contraint numérique en 2D (MPa)	Contraint numérique en 3D (MPa)
1	0	0	0	0
1,5	0,58	0,60	0,60	0,60
2	1,08	1,20	1,21	1,20
2,5	1,9	1,86	1,87	1,93
3	2,64	2,63	2,65	2,80
3,5	3,40	3,59	3,59	3,67
4	4,92	4,83	4,83	4,98
4,5	6,61	6,47	6,47	6,48
5	8,55	8,68	8,65	8,83
5,5	11,33	11,66	11,60	11,87
6	15,3	15,66	15,55	15,94
6,5	20,99	21,98	20,75	
7	28,14	27,96	27,55	
7,4	38,62	35,02	34,35	

**1.5 Modèle de Gent :**

L'élongation $\lambda$	Contraint expérimental (MPa)	Contraint analytique (MPa)	Contraint numérique en 2D (MPa)	Contraint numérique en 3D (MPa)
1	0	0	0	0
1,5	0,58	0,51	0,52	0,52
2	1,08	1,16	1,16	1,16
2,5	1,9	1,99	1,99	1,99
3	2,64	3,04	3,03	3,15
3,5	3,40	4,35	4,33	4,34
4	4,92	6,00	5,96	5,96
4,5	6,61	8,05	7,97	7,98
5	8,55	10,63	10,49	10,50
5,5	11,33	13,91	13,65	13,67
6	15,3	18,16	17,70	17,72
6,5	20,99	23,80	23	23,55
7	28,14	31,57	30,12	30,17
7,4	38,62	40,20	37,81	37,87

**2 Résultat de la simulation numérique de la Compressiosunaixail :****2.1Modèle Néo-hookéen :**

L'élongation $\lambda$	Contraint analytique(MPa)	Contraint numérique en 2D(MPa)	Contraint numérique en 3D (MPa)
0,93	-0,08	-0,08	-0,08
0,86	-0,16	-0,16	-0,16
0,8	-0,24	-0,24	-0,24
0,73	-0,33	-0,33	-0,33
0,66	-0,43	-0,42	-0,42
0,6	-0,52	-0,53	-0,52
0,53	-0,64	-0,64	

**2.2 Modèle de MooneyRivlin :**

L'élongation $\lambda$	Contraint analytiqu (MPa)	Contraint numérique en 2D (MPa)	Contraint numérique en 3D (MPa)
0,93	-0,065	-0,066	-0,06
0,86	-0,13	-0,13	-0,14
0,8	-0,18	-0,21	-0,21
0,73	-0,25	-0,27	-0,31
0,66	-0,32	-0,34	-0,39
0,6	-0,39	-0,43	-0,46
0,53	-0,48	-0,52	



**2.3 Modèle d'Arruda-Boyce (8-chaines) :**

<b>L'élongation <math>\lambda</math></b>	<b>Contraint analytique(MPa)</b>	<b>Contraint numérique en 2D(MPa)</b>	<b>Contraint numérique en 3D(MPa)</b>
0,93	-0,06	-0,058	-0,059
0,86	-0 ,12	-0 ,11	-0 ,12
0,8	-0,17	-0,17	-0,17
0,73	-0,23	-0,24	-0,23
0,66	-0,31	-0,30	-0,30
0,6	-0,37	-0,38	-0,37
0,53	-0,45	-0,46	-0,46

**2.4 Modèle d'Ogden :**

<b>L'élongation <math>\lambda</math></b>	<b>Contraint analytique(MPa)</b>	<b>Contraint numérique en 3D(MPa)</b>	<b>Contraint numérique en 3D(MPa)</b>
0,93	-0,09	-0,08	-0,08
0,86	-0 ,18	-0 ,17	-0 ,17
0,8	-0,26	-0,26	-0,26
0,73	-0,36	-0,36	-0,36
0,66	-0,47	-0,46	-0,47
0,6	-0,57	-0,58	-0,58
0,53	-0,71	-0,71	-0,70

**2.5 Modèle de Gent :**

<b>L'élongation <math>\lambda</math></b>	<b>Contraint analytique(MPa)</b>	<b>Contraint numérique en 2D(MPa)</b>	<b>Contraint numérique en 3D(MPa)</b>
0,93	-0,06	-0,06	-0,06
0,86	-0 ,13	-0 ,13	-0 ,13
0,8	-0,19	-0,20	-0,20
0,73	-0,25	-0,27	-0,27
0,66	-0,33	-0,34	-0,37
0,6	-0,40	-0,43	-0,43
0,53	-0,48	-0,48	-0,52

## **Résumé**

Les propriétés des élastomères (grandes déformations, amortissement) rendent leur utilisation très intéressante d'un point de vue industriel. Ces matériaux sont aujourd'hui de plus en plus utilisés notamment dans des secteurs de l'industrie tels que l'automobile ou l'aéronautique.

Dans ce travail nous avons fait une étude comparative des lois de comportement hyperélastique des matériaux élastomères. La première partie c'était une recherche bibliographique qui nous a permis de parler sur les élastomères d'une façon générale leurs comportements mécanique, par la suite nous avons rappelés les différentes écritures de la loi de comportement ainsi présenté quelques modèles hyperélastique de la littérature. Dans la deuxième partie nous avons fait une étude comparative pour les cinq modèles hyperélastique (Néo Hookéen, Mooney Rivlin, Arruda-Boyce, Ogden et Gent) pour un chargement de traction uni-axial. Les résultats expérimentaux utilisés sont ceux de Treloar sur le Latex en traction uni-axiale.

## **Abstracts**

The properties of elastomers (large deformations, damping) make their use very interesting from an industrial point of view. These materials are nowadays increasingly used especially in sectors of the industry such as automobile or aeronautics.

In this work we made a comparative study of hyperelastic constitutive laws of elastomeric materials. The first part was a bibliographic search that allowed us to talk about elastomers in a general way their mechanical behavior, later we recalled the different writings of the law of behavior and presented some hyperelastic models of literature. In the second part we made a comparative study for the five hyperelastic models (Neo Hookean, Mooney Rivlin, Arruda-Boyce, Ogden and Gent) for a loading of traction uni-axial. The experimental results used are those of Treloar on Latex in uni-axial traction.