

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques**

Option : Analyse Mathématique

Par

CHEURFA LYDIA

KHENNICHE MANEL

THÈME

Introduction à l'étude des systèmes biomathématiques et bioéconomiques.

Soutenu publiquement le 02/07/2019 devant jury composé de :

M ^{me} .	N. MOHDEB	M.C.A	Université A. Mira de Béjaïa	Présidente
M ^r .	A. BERBOUCHA	Pr	Université A. Mira de Béjaïa	Promoteur
M ^{me} .	A. NASRI	M.A.A	Université A. Mira de Béjaïa	Examinatrice

Remerciements

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance et toute notre gratitude à l'administration, et à l'ensemble de tous les enseignants du département de Mathématiques de l'Université de Béjaia pour leurs efforts et leur entière disponibilité, dans le but de nous transmettre leur savoir et leurs connaissances.

Nous exprimons particulièrement notre profonde gratitude à notre promoteur Monsieur Ahmed BERBOUCHA de nous avoir proposé ce sujet, accompagné d'une documentation inestimable, son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité ainsi que son orientation tout au long de la réalisation de ce travail.

Nous remercions Madame Nadia MOHDEB pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à Madame NASRI pour avoir accepté de lire ce travail et de le juger.

Nous ne pouvons omettre de remercier infiniment Monsieur Sid Ali BOUSLA et Mademoiselle Tinhinane MEZIANI de nous avoir aidé tout au long de notre travail.

CHEURFA LYDIA ET KHENNICHE MANEL

Dédicaces

Je tiens à remercier, en premier lieu, le Dieu tout puissant pour m'avoir donné la volonté et le courage afin de réaliser ce modeste travail.

Je dédie ce travail

A l'âme de mon chère père, qui a su m'inculquer le sens de la sagesse, le sens de la responsabilité, de l'optimisme et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie. Tes conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite. Ta patience sans fin, ta compréhension et ton encouragement sont pour moi le soutien indispensable que tu as toujours su m'apporter.

A ma mère qui m'a comblé avec sa tendresse et son affection tout au long de mon parcours, elle a été toujours à mes côtés pour me consoler quand il le fallait. En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et ma profonde estime,(que Dieu vous garde et vous bénisse).

A mes très chères sœurs Méllissa, Liza, Sara, Chaima et ma nièce adorée Assia, que j'aime et qui m'ont comblé d'amour et de joie.

A toute ma famille particulièrement Mon grand père maternel.
A tous mes chers amis, particulièrement ma meilleure amie Tinhinane.

A ma binôme Cheurfa Lydia avec qui j'ai préparé ce mémoire.

Dédicaces

Je tiens à remercier, en premier lieu, le Dieu tout puissant pour m'avoir donné la volonté et le courage afin de réaliser ce modeste travail.

Je dédie ce travail à mes très chères parents que j'aime. Ils m'ont comblé d'amour et de joie et m'ont également porté assistance et assuré confort et sécurité (que Dieu vous grade et vous bénisse).

A toute ma famille.

Particulièrement à ma chère sœur Thilelli et mon cher frère Aris et mes petites adorées Nelia, Numidia, Wawa, Milina que Dieu vous grade et vous bénisse.

A mon très cher mari Said qui m'a toujours soutenu dans mes études, pour son dévouement et son inépuisable patience tout au long de mon parcours que Dieu tu garde et tu bénisse.

A tout mes chers amis sans exception.

A mon binôme Kheniche Manel avec qui j'ai préparé ce mémoire.

CHEURFA LYDIA

Table des matières

Introduction générale	1
1 Généralités sur les équations différentielles ordinaires	3
1.1 Équations différentielles ordinaires	3
1.2 Stabilité des solutions d'un système différentiel	4
1.3 stabilité asymptotique	4
1.4 Théorie de la stabilité locale : cas des systèmes non linaires	5
1.5 Critère de Routh-Hurwitz	7
1.6 Stabilité de Lyapunov	8
1.7 Comportement des solutions d'un système différentiel	10
2 Différents modèles mathématique	12
2.1 Modèles avec une seule population	12
2.1.1 Modèle d'accroissement de population exponentiel logistique et le modèle logistique de Verhulst	13
2.1.2 Le modèle exponentiel de Malthus	13
2.2 Le modèle logistique de Verhulst	15
2.3 Modèles à deux espèces	17
2.3.1 Le modèle de Lotka-Volterra	18
2.3.2 Formulation générale du modèle de Lotka-Volterra	20
3 Proie-prédateur avec récolte de proie	23
3.1 le modèle	23

3.2	Existence d'équilibres	25
3.3	Comportement dynamique des équilibres	26
3.3.1	La stabilité global de p^* et la non existence de cycles limite	28
3.4	Équilibre bionomique	30
	Bibliographie	34

Introduction

La modélisation mathématique est nécessaire dans de nombreuses disciplines telles que l'écologie, la dynamique des populations, l'épidémiologie etc, et cela en traduisant les phénomènes biologiques par un système dynamique. Ce dernier, constitue un ensemble de modèles mathématiques formels définis sous forme de systèmes d'équations, permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction.

Ce mémoire se divise en trois chapitres. Nous détaillons ici le contenu de chacun d'entre eux.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions fondamentales, qui seront le plus souvent utilisées dans les différentes études de ce mémoire.

Dans le second chapitre, nous présentons certains modèles mathématiques on cite :

-Modèle d'accroissement de population exponentiel, logistique et le modèle logistique de Verhulst :

En dynamique des populations, le modèle de Verhulst est un modèle de croissance proposé par Pierre François Verhulst vers 1840. Verhulst a proposé ce modèle en réponse au modèle de Malthus qui proposait un taux d'accroissement constant sans frein conduisant à une croissance exponentielle de la population.

Le modèle de Verhulst imagine que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente.

- le modèle de Lotka-Volterra

Volterra spécialiste des systèmes dynamiques et des équations différentielles qui les décrivent ; a eu vite fait de construire un modèle d'évolution de ces populations, Alfred James Lotka, publia indépendamment en 1924, un modèle équivalent. On le désigne aujourd'hui sous le nom de "modèle de Lotka-Volterra".

Le troisième chapitre est consacré à la présentation d'un modèle de ressource de pêche avec une zone de réserve. Le modèle est donné par un système de deux équations différentielles ordinaires qui décrivent les interactions entre les proies et les prédateurs. Nous étudions l'existence et la positivité des points d'équilibres du système associé. Ensuite, nous analysons la stabilité locale et globale du point d'équilibre positif. Par ailleurs, nous donnons la formulation où l'équilibre biologique est atteint .

Généralités sur les équations différentielles ordinaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats généraux nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Nous donnons des résultats sur la stabilité des équilibres des équations différentielles ordinaires, ainsi que des résultats sur la non existence de cycles limites, nous rappelons brièvement la théorie de la stabilité, plus précisément la stabilité globale.

1.1 Équations différentielles ordinaires

On note I un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} , θ un ouvert de \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$ et $u = (u_1, \dots, u_n)$ un élément de \mathbb{R}^n . On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre associée à une fonction $f : I \times \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, une équation du type :

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)) \quad (1.1.1)$$

où $u \in \theta$, $t \in I$. Pour tout $(t, u) \in I \times \theta$, on note $f(t, u) = (f_1(t, u), \dots, f_n(t, u))$ telle que chaque fonction f_i est continue sur $I \times \theta$.

Si le champ de vecteur f ne dépend pas explicitement du temps t , l'équation (1.1.1) est dite autonome. Dans le cas contraire, l'équation est dite non-autonome.

Une équation différentielle autonome s'écrit :

$$\frac{du}{dt} = f(u(t)) \quad (1.1.2)$$

où $f : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $\theta \subset \mathbb{R}^n$. Ce genre d'équations décrit un système dont le mécanisme d'évolution ne dépend pas du temps.

Si la fonction f est affine ($f(t, u) = C(t)u + D(t)$, où $C(t) \in M_n(\mathbb{R})$ et $D(t) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in I$), l'équation (1.1.2) est dite linéaire. Dans le cas où $D(t) = 0$, l'équation est dite linéaire homogène.

1.2 Stabilité des solutions d'un système différentiel

Considérons que le champ de vecteurs $f : \theta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzien sur θ .

Définition 1.2.1 (point d'équilibre) *On dit que $u^* \in \theta$ est un point d'équilibre (ou critique ou stationnaire) de l'équation (1.1.1) (respectivement de (1.1.2)) si $\forall t \in I$, $f(t, u^*) = 0$ (respectivement $f(u^*) = 0$). Sinon le point u^* est dit ordinaire.*

1.3 stabilité asymptotique

Définition 1.3.1 (stabilité au sens de lyapunov) *Soit $E(t, \cdot)$ l'unique solution de (1.1.1) vérifiant une condition initiale donnée, une solution $E(t, \cdot)$ issue d'un point $u^* \in \theta \subset \mathbb{R}^n$ au temps t_0 est dite stable au sens de Lyapunov si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \xi > 0 : \forall v^* \in \theta, \|u^* - v^*\| < \xi \implies \|E(t, u^*) - E(t, v^*)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Définition 1.3.2 (stabilité quasi-asymptotique (attractivité)) Une solution issue d'un point $u^* \in \theta$ au temps t_0 est dite quasi-asymptotiquement stable (attractif) si :

$$\exists \xi > 0 : \forall v^* \in \theta, \|u^* - v^*\| < \xi \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|E(t, u^*) - E(t, v^*)\| = 0.$$

Définition 1.3.3 (stabilité asymptotique) Une solution issue d'un point $u^* \in \theta$ au temps t_0 est dite asymptotiquement stable si elle est à la fois stable au sens de Lyapunov et quasi-asymptotiquement stable (attractive).

Une solution issue d'un point $u^* \in \theta$ au temps t_0 est dite instable lorsqu'elle n'est pas stable.

1.4 Théorie de la stabilité locale : cas des systèmes non linéaires

Soit u^* un point d'équilibre de l'équation différentielle (1.1.2).

Définition 1.4.1 Le système linéarisé de (1.1.2) autour du point d'équilibre u^* est défini par :

$$\frac{dz}{dt} = Df(u^*)z(t), \quad (1.4.1)$$

où Df est la différentielle de f .

Théorème 1.4.2 (de Hartman-Grobman) Si la matrice jacobienne Df n'admet aucune valeur propre de partie réelle nulle, alors les deux systèmes (1.1.2) et (1.4.1) sont topologiquement conjugués. En d'autres termes, si le point stationnaire du linéarisé (1.4.1) de système (1.1.2) est aussi stable (respectivement instable) alors le point stationnaire du système non linéaire est stable (respectivement instable), sauf si la matrice Df admet une valeur propre de partie réelle nulle.

Théorème 1.4.3 (Lyapunov, 1892) (voir [5]) Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $\mathfrak{S} = Df(u^*)$ sont de partie réelle strictement négative, alors u^* est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable pour (1.1.2).

En revanche, si $\mathfrak{S} = Df(u^*)$ admet au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors u^* est instable pour le système (1.1.2).

exemple :

Un système différentiel autonome en dimension deux, est donné par :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = g(u, v), \end{cases} \quad (1.4.2)$$

où f et g sont deux fonctions de u et v , possédant un point d'équilibre (u^*, v^*) . La matrice jacobienne au point (u^*, v^*) est alors égale à

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial f}{\partial v}(u^*, v^*) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u^*, v^*) & \frac{\partial g}{\partial v}(u^*, v^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée au système (1.4.2) est donnée par :

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad (1.4.3)$$

Alors les valeurs propres de cette équation sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Si $\text{tr}^2(A) - 4\det(A) < 0$, alors $\sqrt{\text{tr}^2(A) - 4\det(A)}$ fournit des solutions imaginaires. En effectuant la somme et le produit des deux valeurs propres on obtient : pour vérifier la stabilité du système (1.4.2) (i.e, $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ et $\text{Re}(\lambda_2) < 0$) il est suffisant de connaître les valeurs de la trace et du déterminant de A . Si les deux valeurs propres sont négatives ou sont positives alors $\det(A) > 0$. Pour que λ_1 et λ_2 aient des parties réelles négatives, il faut que

$$\text{tr}(A) < 0 \text{ et } \det(A) > 0$$

Cela permet de faire une analyse de la stabilité locale complète du système d'équations différentielles (1.4.2) à deux dimensions en termes de $\text{tr}(A)$ et de $\det(A)$.

Maintenant, nous présentons les différentes possibilités de la stabilité du point d'équilibre par rapport aux deux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors le point d'équilibre du système dynamique est asymptotiquement stable et les trajectoires de départ à proximité de ce point s'approcheront de ce point.
- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors le point critique du système dynamique est instable et les trajectoires divergent.
- Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ et sont de signes opposés, alors le point critique est un point-col (instable)
Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$, ou l'inverse, alors le point d'équilibre est instable.
- Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$, ou l'inverse, il n'est pas possible de dire si le point d'équilibre est stable ou instable.
- Si $\lambda_1 = \sigma + i\tau$ et $\lambda_2 = \sigma - i\tau$ avec $\sigma > 0$ et $\tau \neq 0$, alors le point d'équilibre est un foyer instable.
- Si $\lambda_1 = \sigma + i\tau$ et $\lambda_2 = \sigma - i\tau$ avec $\sigma < 0$ et $\tau \neq 0$, alors le point d'équilibre est un foyer stable.
- Si $\lambda_1 = \sigma + i\tau$ et $\lambda_2 = \sigma - i\tau$ avec $\sigma = 0$ et $\tau \neq 0$, alors les solutions sont oscillantes et le point d'équilibre est un centre.

Pour certaines équations caractéristiques, il n'est pas toujours facile de calculer et de déterminer explicitement le signe des parties réelles des valeurs propres associés. C'est pourquoi nous allons présenter le critère de Routh-Hurwitz qui donne des renseignements sur le signe des parties réelles des racines d'un polynôme à partir de ces coefficients.

1.5 Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz [22] donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que les racines d'un polynôme de degré $n \geq 3$ soient à parties réelles strictement négatives. Considérons le polynôme suivant :

$$P(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n,$$

avec P de degré n et à coefficients $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, n$.

Ainsi, on a le critère de Routh-Hurwitz suivant :

Toutes les racines du polynôme $P(y) = 0$ ont des parties réelles strictement négatives si et seulement si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & \cdot \end{vmatrix} > 0 \quad (1.5.1)$$

Par exemple, pour $n=3$ l'équation s'écrit

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0$$

Dans ce cas les conditions (1.5.1) s'écrivent

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

1.6 Stabilité de Lyapunov

(voir [22]) Les fonctions de Lyapunov, nommées d'après le mathématicien russe Alexandre Mikhailovitch Lyapunov, sont des fonctions qui peuvent être utilisées pour montrer la stabilité d'un point critique (ou équilibre) d'un système dynamique ou équations différentielle. En construisant les fonctions de Lyapunov, un certain nombre de conditions doivent être réunies. Malheureusement, il n'y a pas de façon systématique de trouver ces fonctions. Elles sont, au mieux, faites par tâtonnements et par conjecture instruite.

Définition 1.6.1 (Dérivée orbitale) Considérons l'équation différentielle ordinaire (1.1.2) et soit $L : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. La dérivée orbitale de L le long des solutions de (1.1.2), notée $\dot{L}(u)$ est définie par

$$\dot{L}(u) = \langle \nabla L(u), f(u) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial u_i}(u) f_i(u),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur \mathbb{R}^n , $\nabla L(u)$ le gradient de L en u et $f_i(u)$ la i^{eme} composante du champ f .

Définition 1.6.2 (Fonction de Lyapunov) On dit que L est une fonction de Lyapunov pour (1.1.2) en $u = 0$ dans \mathbb{R}^n , si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ on a :

- $L(u) > 0$ sauf en $u = 0$ où $L(0) = 0$ (f est dite définie positive).
- $\dot{L}(u) \leq 0$

Théorème 1.6.3 (Théorème de Lyapunov) ([22]). Soit u^* un équilibre de l'équation différentielle (1.1.2) Soit ψ un voisinage de u^* inclus dans θ et $L : \psi \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

- $L(u^*) = 0$,
- $\forall u \in \psi \setminus \{u^*\}, L(u) > 0$,
- $\forall u \in \psi, \dot{L}(u) \leq 0$.

Alors u^* est stable.

Remarques 1.6.4 La fonction L du théorème 1.6.3 est appelée fonction de Lyapunov associée à (1.1.2).

Théorème 1.6.5 (Fonction de Lyapunov stricte). Soit u^* un point d'équilibre de l'équation (1.1.2). Soit ψ un voisinage de u^* dans θ et $L : \psi \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

- $L(u^*) = 0$,
- $\forall u \in \psi \setminus \{u^*\}, L(u) > 0$,
- $\forall u \in \psi \setminus \{u^*\}, \dot{L}(u) < 0$.

Alors u^* est asymptotiquement stable.

Théorème 1.6.6 (Stabilité asymptotique globale). S'il existe une fonction $L : \psi \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $L(u) > 0, \forall u \neq 0$ et $L(0) = 0$,
- $\|u\| \rightarrow \infty \Rightarrow L(u) \rightarrow \infty$
- $\dot{L}(u) < 0, \forall u \neq 0$.

Alors $u = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

1.7 Comportement des solutions d'un système différentiel

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à définir quelques notions sur la dynamique qualitative d'un système différentiel. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [8]. Soit θ un ouvert de \mathbb{R}^n , un champ de vecteurs Φ de classe C^k sur θ est la donnée d'une application $\Phi : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k telle que :

$$\Phi : u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto (f_1(u), \dots, f_n(u)) \quad (1.7.1)$$

On lui associe le système différentiel

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u), i = 1, \dots, n \quad (1.7.2)$$

Où les fonctions $u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto f_1(u), \dots, f_n(u)$ (appelées les composantes du champ de vecteurs Φ) sont des fonctions de classe C^k sur l'ouvert θ .

D'après le théorème d'existence et d'unicité, il existe une solution maximale unique $u(t)$ de (1.7.2) telle que $u(0) = u_0$.

Définition 1.7.1 (orbite) [8] L'orbite ω du champ de vecteurs Φ passant par le point u_0 est la courbe différentiable formée des points $u(t)$ de θ donnée par la solution de (1.7.2) à donnée initiale u_0 . Cette courbe est orientée par le sens de variation de t . Sa tangente au point $u(t)$ est la droite affine passant par $u(t)$ de direction le vecteur $\Phi(u(t))$. On distingue éventuellement l'orbite positive $\omega_+ = u(t), t \geq 0$ et l'orbite négative $\omega_- = u(t), t \leq 0$ passant par le point $u(0) = u_0$.

Définition 1.7.2 Une orbite périodique d'un champ de vecteurs Φ est une orbite passant par un point u_0 , qui n'est pas un point singulier, pour lequel il existe un nombre $T > 0$ appelé période vérifiant $u(T) = u_0$.

Définition 1.7.3 [2] Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.

Théorème 1.7.4 (Critère de Bendixson) Soit D un domaine connexe de \mathbb{R}^2 , si la divergence $(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v})$ est non nulle et de signe constant sur D , alors le système différentiel $(\dot{u}=f(u,v), \dot{v}=g(u,v))$ n'admet pas de solution périodique entièrement contenue dans D .

Théorème 1.7.5 (Critère de Dulac) Soit D un domaine connexe de \mathbb{R}^2 , et soit α une fonction de classe C^1 sur D . Si la quantité $(\frac{\partial(\alpha f)}{\partial u} + \frac{\partial(\alpha g)}{\partial v})$ est non nulle et de signe constant sur D , alors le système différentiel $(\dot{u}=f(u,v), \dot{v}=g(u,v))$ n'admet pas de solution périodique entièrement contenue dans D .

Différents modèles mathématique

Un modèle mathématique permet de représenter des phénomènes de la vie réel, comme les loi de la nature par exemple. Nous pouvons établie des statistique et formuler des hypothèses sur ces modèles ,permettant ainsi la création de théories. Tous ces éléments aboutissent également à la construction des prévisions utilisées afin de contrôler l'évolution d'individus d'une population notamment.

Dans tout ce chapitre, nous présentons certain modèles mathématique :

- ★ *Modèle d'accroissement de population exponentiel logistique et le modèle logistique de Verhulst.*
- ★ *Le modèle de Lotka-Volterra.*
- ★ *Le modèle de Gauss généralisé.*
- ★ *Le modèle de Kolmogorov.*

2.1 Modèles avec une seul population

Pour le cas d'une population $N(t)$ supposé isolé (pas de migration), la façon la plus simple de décrire l'évolution au cours du temps de cette population est par la naissances

et les décès, qui la font augmenter ou diminuer, tel que

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \text{naissance} - \text{décès}, \\ &= \text{croissance},\end{aligned}$$

où la croissance est soit linéaire ou non linéaire. Ainsi nous introduisons les principaux modèles classiques de croissance [1]

2.1.1 Modèle d'accroissement de population exponentiel logistique et le modèle logistique de Verhulst

Depuis l'apparition des premiers hommes sur terre, l'évolution de la population humaine est flagrante. Cependant, ce n'est que depuis deux siècles que la population humaine augmente de façon aussi exceptionnelle, puisque, durant plusieurs années, sa croissance se faisait très lentement. Ce phénomène, des plus intéressants, amena, entre autres, deux grands mathématiciens, soit Malthus et Verhulst, à élaborer des modèles mathématiques. Les modèles de Malthus et Verhulst sont axés sur le même sujet :

L'accroissement démographique. Bien qu'il est convergent dans le même sens, il va aussi de soi qu'ils possèdent certaines différences qui les rendent uniques l'un par rapport à l'autre. dans la partie qui suit, on va présenter les deux modèles.

2.1.2 Le modèle exponentiel de Malthus

Le premier regard scientifique sur la dynamique des populations semble être celui de Leonardo Fibonacci, dit Léonard de Pise, dont la célèbre suite de nombres telle que la suite Fibonacci permet de donner un modèle d'évolution célèbre des lapins mais surtout un modèle d'étude des générations de certaines populations (par exemple abeilles, fourmis...). Nous allons ici poursuivre l'intérêt de Fibonacci pour la description d'un phénomène naturel, et nous intéresser à la dynamique des populations.

où il décrit la croissance d'une population de lapins : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les moins un nouveau couple à compter de troisième mois de son existence ? ».

Mais les fondements modernes de la dynamique des populations datent clairement de l'économiste anglais Thomas Robert Malthus [2]. Il introduisit en 1798 dans son célèbre énoncé " *Population, when unchecked, increase in a geometrical ratio* ", ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de " *croissance Malthusienne* ". Il considère une population idéale constituée d'une seule espèce animale homogène, i.e. il néglige les variations d'âge, de taille et de périodicité éventuelle pour la natalité et qui vit seule dans un milieu invariable ou qui coexiste avec d'autres espèces sans influence directe ou indirecte.

Celui-ci consiste à supposer que l'accroissement de la densité N d'individus de cette population, pendant un court intervalle de temps, est proportionnel à N . Ce qui se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (2.1.1)$$

Où r est un facteur constant de proportionnalité qui représente le coefficient d'accroissement ou taux de croissance. En intégrant l'équation (2.1.1) on obtient la loi de croissance exponentielle ou loi de croissance malthusienne.

en effet :

Intégrons les deux membres,

$$\int \frac{dN}{N} = \int r dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = r \int dt \quad (\text{en vertu de la linéarité})$$

$$D'où \log|N| = rt + c.$$

On obtient la solution de l'équation différentielle (2.1.1). À cette fin, on introduit dans la solution la quantité initiale, en obtenant l'expression de N :

$$N(t) = N(0) \exp(rt)$$

- Si $r < 0$, la population est en extinction exponentielle : $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$.
 - Si $r = 0$, la population est équilibre démographique : $N(t) = N(0)$.
 - Si $r > 0$, la population est en croissance exponentielle $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = +\infty$. (FIGURE.2.1.1).
- Cette loi ne tient pas en compte les limites que le milieu impose à la croissance. Lors d'expériences de laboratoire les prévisions de la loi malthusienne restent correctes sur de petits effectifs, tandis qu'il y a divergence pour des valeurs élevées de la population. On est donc amené à conclure que la loi exponentielle reste valable tant que la densité de la population ne sature pas le milieu.

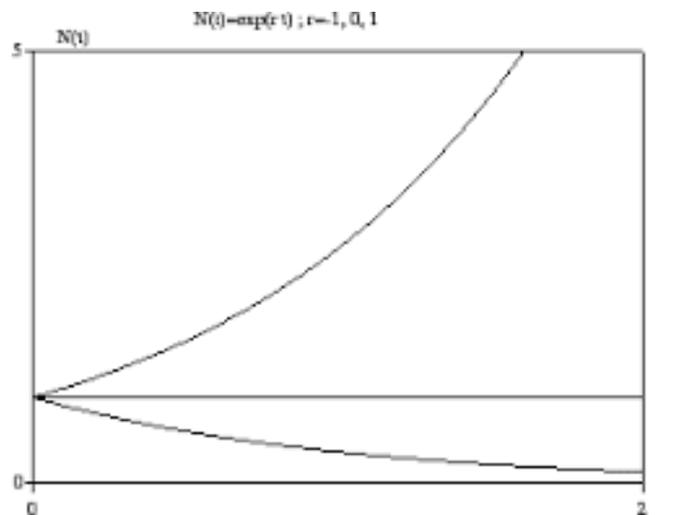


FIGURE 2.1.1 – la loi de croissance malthusienne

2.2 Le modèle logistique de Vrhulst

C'est à partir de ces considérations que le biologiste belge Pierre-François Vrhulst [3] propose en 1837 un modèle tenant compte de la limitation imposée par l'effectif croissant de la population N .

L'idée de son modèle logistique, est la suivant. Si la population pouvait croître indéfiniment, sans rencontrer aucune limitation de ressource ou d'espace, elle aurait une croissance ex-

ponentielle. Mais une croissance exponentielle n'est pas adaptée aux populations que l'on observe le plus souvent à l'exception peut-être d'une période initiale où la taille de la population est encore petite, car elle ne tient pas compte des limitations environnementales qui, de fait, ralentissent la croissance lorsqu'on s'approche de la taille normale de la population qu'on appelle sa "carrying capacity" k . D'où l'idée de remplacer le taux constant r par un taux de variable

$$r \left(1 - \frac{N(t)}{k} \right)$$

qui dépend de la taille de la population. Ce coefficient

$$\left(1 - \frac{N(t)}{k} \right)$$

reste proche de 1 lorsque la taille de la population est très petite, ce qui explique le début de croissance exponentiel, puis il diminue jusqu'à tendre vers 0 lorsque la taille de la population augmente et tend vers k . Ce qui se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t)}{k} \right) \quad (2.2.1)$$

Où r est le taux de croissance de la population quand N est très petit et k appelé "carrying capacity" en anglais correspond à la capacité du milieu à supporter la croissance de la population et représente la population limite au-delà de laquelle elle ne peut plus croître. Le modèle (2.2.1) est appelé modèle logistique.

En intégrant l'équation (2.2.1) par la méthode de séparation de variable :

On a

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t)}{k} \right),$$

soit peut se réécrire

$$\frac{1}{N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)} dN(t) = r dt.$$

Mais comme on a l'égalité

$$\frac{1}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{N}{k}},$$

l'équation devient

$$\frac{dN(t)}{N(t)} + \frac{\frac{1}{k}dN(t)}{1 - \frac{N(t)}{k}} = rdt,$$

D'où en intégrant

$$\log N(t) - \log \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) = rt + c$$

Soit encore en prenant l'exponentielle

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{k}} = \exp(rt) \exp(c).$$

Il est facile de vérifier que la constante d'intégration vaut ici

$$c = \log \left(\frac{N(0)k}{k - N(0)} \right).$$

D'où, après simplifications, on obtient la loi de croissance appelée logistique de Verhulst :

$$N(t) = \frac{kN(0)}{N(0) + (k - N(0)) \exp(-rt)}$$

L'expression de $N(t)$ correspond à une courbe sigmoïde (FIGURE 2.2.1).

- Si $N(0) = 0$, $N(t) = 0$ pour tout t .

- Si $N(0) \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k$.

Cette loi est radicalement différente de celle de Malthus en ce sens qu'elle impose une valeur limite à la population (FIGURE 2.2.1).

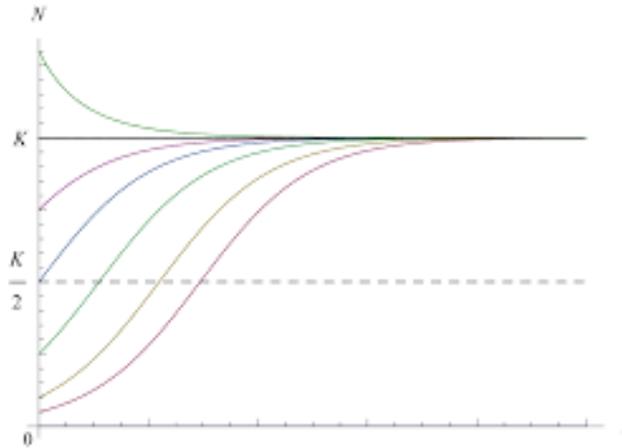


FIGURE 2.2.1 – La loi de croissance logistique

2.3 Modèles à deux espèces

Un des constats les plus simples en écologie est qu'une population interagit avec d'autres populations, en outre, une population mange et peut être mangée. Tout au long de ce chapitre, nous identifierons dans nos modèles la population de prédateurs par y et celle de sa proie par x . La modélisation des systèmes proies-prédateurs consiste ainsi en l'expression couplée des deux variables dynamiques x et y qui forme un système dynamique défini pour x et y positifs, c'est-à-dire définis dans le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - yF(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yQ(x, y) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Les fonctions $g(x)$, $F(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont appelées respectivement la croissance de la proie, la réponse fonctionnelle et la réponse numérique du prédateur qui seront explicitées plus bas.

2.3.1 Le modèle de Lotka-Volterra

Dans les années 1920, la paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interaction de type proie-prédateur a fait l'objet d'une querelle de priorité entre l'américain

Alfred J. Lotka et l'italien Vito Volterra. Le premier s'intéresse aux oscillations dans les réactions chimiques, mais étend son étude aux problèmes démographiques, aux réseaux alimentaires, au cycle de l'eau ou du dioxyde de carbone, en passant par les oscillations proies-prédateurs qui sont l'objet du modèle qui porte son nom. Le second s'intéresse à un problème de pêche. Plus tard, il est établi que c'est à V. Volterra que revient le mérite de l'élaboration du premier modèle de type prédateur-proie appliqué à une situation biologique. En effet, l'intérêt de Volterra pour les problèmes d'équilibres entre les espèces animales dans les écosystèmes fut suscité par son beau-fils, le zoologiste Umberto d'Ancona qui s'occupait depuis quelques années, de statistique portant sur la pêche dans le nord de la mer Adriatique. Ces données concernaient le pourcentage de poissons prédateurs (Sélaciens) pêchés dans trois ports italiens : Trieste, Fiume et Venise pendant la période 1905 – 1923. Elles montraient que pendant la période 1915 – 1920, où la pêche était moins intense à cause de la première guerre mondiale, il y avait eu un accroissement relatif de la classe des Sélaciens. Selon l'hypothèse de D'Ancona, la pêche perturbait l'équilibre naturel entre les espèces. Elle favorisait une augmentation relative des espèces proies, c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent seulement de plancton, et une diminution des espèces prédatrices, c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent d'autres poissons. La diminution de la pêche due à la guerre avait donc rétabli, au moins en partie, l'équilibre naturel. D'Ancona s'adressa à Volterra en lui demandant de trouver une démonstration mathématique à son hypothèse. La réponse de Volterra publié en 1926 prit la forme du célèbre modèle prédateur-proie. Le modèle de Volterra reçut par la suite des modifications et publié finalement dans le premier chapitre de ses leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la vie [21] où il étudie la coexistence de deux espèces dont l'une dévore l'autre. Considérons deux espèces, la première, la proie de densité $x(t)$ et la seconde, le prédateur de densité $y(t)$, alors le modèle de Lotka-Volterra est le système à deux équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = y(cx - d) \end{cases} \quad (2.3.2)$$

où a, b, c et d sont des constantes positives, a représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateurs, b le taux de prédation du prédateur sur la proie, c le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation et d le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proies.

L'interprétation des hypothèses de ce modèle est la suivante :

(i) En l'absence de toute prédation, la proie croît par loi malthusienne; il s'agit du terme ax dans (2.3.2).

(ii) l'effet de la prédation est de réduire le taux de croissance de la proie par un terme proportionnel à la population de la proie et du prédateur; il s'agit du terme $-bxy$.

(iii) En l'absence de toute proie pour sa subsistance, le prédateur décroît exponentiellement; il s'agit du terme $-dy$.

(iv) La contribution des proies au taux de croissance des prédateurs est le terme cxy ; qui est proportionnel à la population de la proie et du prédateur.

La mise en équation de la fonction représentant la prédation dans le modèle (2.3.2) est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborée par Volterra. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontre entre ces deux espèces est proportionnel au nombre des individus qui la compose. La seconde consiste à supposer qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres, i.e. que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur. Le phénomène observé par D'Ancona est ainsi expliqué : l'accroissement du nombre de prédateurs et la diminution du nombre de proies résultaient de la disparition de la pêche qui, avant la guerre, avait modifié l'équilibre naturel de cette association biologique. Le modèle (2.3.2) est dit modèle de Lotka-Volterra puisque les mêmes équations de (2.3.2) sont obtenues par Alfred J. Lotka (voire [16],[17]) à partir d'une réaction chimique qui, selon lui pourrait présenter un comportement périodique dans les concentrations de produits chimiques.

2.3.2 Formulation générale du modèle de Lotka-Volterra

Depuis le modèle (2.3.2) de Lotka-Volterra, de nombreuses études ont contribué à exprimer de différentes manières les taux de croissance des populations et leurs interactions. Les systèmes proie-prédateur ainsi générés exhibent des dynamiques très variées.

Le modèle de Gauss généralisé

La première généralisation du modèle de Lotka-Volterra (2.3.2) est due à Gauss en 1934, il s'agit du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - yh(x) \\ \frac{dy}{dt} = y(\gamma h(x) - d) \end{cases} \quad (2.3.3)$$

pour le rendre plus réaliste, le modèle de Gauss a pris une formulation plus générale qui incorpore la croissance logistique de la proie en l'absence de prédateurs (voir [9]), il s'agit du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - yh(x) \\ \frac{dy}{dt} = y(\gamma h(x) - d) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement les densités de proies et de prédateurs à l'instant t . Les fonctions g et h sont définies comme suit :

- $g(x)$ est le taux de croissance de la population proie en l'absence de prédateurs, elle est continue et différentiable pour $x \geq 0$ et vérifie $g(0) > 0$ et si l'environnement à une capacité de portée, il existe $k > 0$ tel que $g(k) = 0$ et $(x - k)g(x) < 0$ pour $x \neq k$
- $h(x)$ est la réponse fonctionnelle du prédateur, i.e. le nombre de proies consommées par unité de temps par un prédateur, elle est positive, continue et différentiable pour $x \geq 0$ et vérifie : $h(0) = 0$ et $h'(x) > 0$ pour $x \geq 0$.
- γ et d sont respectivement, le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs et le taux de mortalité du prédateurs en l'absence de proies. Les formes particulières choisies pour les fonctions g et h contiennent une quantité importante d'informations biologiques et sont déterminantes pour la dynamique du système étudié.

Le modèle de Kolmogorov

Kolmogorov a développé un système plus général que celui de Gauss, il s'agit du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y) \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Les fonctions f et g sont respectivement les taux de croissance des deux populations x et y , elles sont de classe $C^1[0, +\infty[$ et vérifient les conditions suivantes :

1. Pour une densité fixe de proies, le taux de croissance de la population de proies x diminue par la croissance de la population de prédateurs y . Cela conduit à la condition

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) < 0$$

2. Pour une densité fixe de prédateurs, le taux de croissance de la population de prédateurs y augmente par la croissance de la population de proies x . Cela conduit à la condition

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) > 0$$

3. Pour de petites densités des deux populations, la population de proies croît et par conséquent on a

$$f(0, 0) > 0$$

4. Il existe un nombre suffisant de prédateur pour lequel, un petit nombre de proies ne peut croître plus longtemps. Cela conduit à la condition

$$\exists A > 0 \text{ tel que } f(0, A) = 0$$

5. Le milieu admet une capacité de portée limitée. Cela conduit à la condition

$$\exists B > 0 \text{ tel que } f(B, 0) = 0$$

6. S'il existe un nombre suffisant de proies, le nombre de prédateurs croît, sinon il décroît. Cela conduit à la condition

$$\exists C > 0 \text{ tel que } g(C, 0) = 0$$

7. D'après Kolmogorov [13] et Richardson, si $B \leq C$, les prédateurs sont en extinction et les proies saturent le milieu (cela est aussi vrai pour le modèle de Gause). Cependant, pour avoir une coexistence entre les populations de proies et prédateurs, il faut assurer que $C < B$.

Proie-prédateur avec récolte de proie

Dans ce chapitre, nous analysons le comportement d'un système modélisant les interactions entre les proies, les prédateurs et l'effort de pêche, nous proposons un modèle mathématique pour étudier la dynamique d'un système de ressources halieutiques dans un environnement aquatique constitué de deux zones :

Une zone de pêche libre et une zone de réserve où la pêche est strictement interdite. les équilibres biologiques et bionomique du système sont obtenues, puis les critères de stabilité locale, d'instabilité et de stabilité globale du système sont déduits. Il est prouvé que même si la pêche est exploitée de manière continue dans la zone réservée, les populations de poissons peuvent être maintenues à un niveau d'équilibre approprié dans l'habitat [6].

3.1 le modèle

Considérons un habitat de pêche, dans un écosystème aquatique, constitué de zones réservées et non réservées. Dans la modélisation du système, il convient qu'aucune pêche n'est autorisée dans la zone réservée alors que la zone non réservée est une zone de pêche en libre accès. Soit $X(t)$ et $Y(t)$ les densités respectives de la biomasse de la

même population de poissons dans les zones réservées et non réservées, respectivement, à l'instante t . Laisser la sous-population de poissons de la zone non réservée migrer dans la zone réservée à un taux σ_1 et la sous-population de poissons de la zone réservée migrer dans la zone non réservée à un taux σ_2 . Soit E l'effort total appliqué pour la capture de la population de poissons dans la zone non réservée. Nous supposons dans chaque zone, la croissance de la population de poissons suit le modèle logistique. En gardant cela à l'esprit, la dynamique de sous-population de poissons dans les zones réservées et non réservées peut être régie par le système autonome d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - qEx \\ \frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y, \\ x(0) > 0, y(0) > 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Dans le modèle ci-dessus, r et s sont les taux de croissance intrinsèque de la sous-population de poissons dans les zones réservées et non réservées respectivement, K et L sont les capacités de charge des espèces de poissons dans les zones réservées et non réservées respectivement, q est le coefficient de captivité d'espèce de poissons dans les zones non réservées. Les paramètres $r, s, q, \sigma_1, \sigma_2, K$ et L sont supposés être des constantes positives (voir [6], page-627-).

Nous notons que s'il n'y a pas de migration de la population de poissons d'une zone réservée vers une zone non réservée (i.e. $\sigma_2 = 0$) et $r - \sigma_1 - qE < 0$, alors $\dot{x} < 0$. De même s'il n'y a pas de migration de la population de poissons d'une zone non réservée vers une zone réservée (i.e. $\sigma_1 = 0$) et $s - \sigma_2 < 0$, alors $\dot{y} < 0$. Par conséquent, tout au long de notre analyse, nous supposons que :

$$r - \sigma_1 - qE > 0, \quad s - \sigma_2 > 0. \quad (3.1.2)$$

3.2 Existence d'équilibres

L'équilibre du modèle (3.1.1) est obtenu en résolvant $\dot{x} = \dot{y} = 0$. On peut vérifier que le modèle (3.1.1) n'a que deux équilibres positifs à savoir $p_0 (0, 0)$ et p_* (x^* , y^*). x^* et y^* sont les solutions positives des équations algébriques suivantes :

$$\sigma_2 y = \frac{rx^2}{K} + (r - \sigma_1 - qE)x. \quad (3.2.1)$$

$$\sigma_1 x = \frac{sy^2}{L} (\sigma_2 - s)y. \quad (3.2.2)$$

En substituant la valeur de y à partir de l'équation (3.2.1) dans l'équation (3.2.2), nous obtenons une équation cubique en x qui est :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (3.2.3)$$

telle que

$$a = \frac{sr^2}{L\sigma_2^2 K^2},$$

$$b = - (r - \sigma_1 - qE) \frac{2sr}{L\sigma_2^2 K},$$

$$d = (s - \sigma_2)(r - \sigma_1 - qE) \frac{1}{\sigma_2} - \sigma_1,$$

l'équation ci-dessus a une solution positive unique x^* si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(r - \sigma_1 - qE)^2 \frac{s}{L\sigma_2^2} < (s - \sigma_2) \frac{r}{K}.$$

$$(s - \sigma_2)(r - \sigma_1 - qE) < \sigma_1 \sigma_2.$$

Connaissant la valeur de x^* , la valeur de y^* peut être alors calculée à partir de (3.2.1).
On peut noter ici que pour y^* soit positive, il faut avoir

$$\frac{rx^*}{K} > r - \sigma_1 - qE .$$

3.3 Comportement dynamique des équilibres

Le comportement dynamique des équilibres peut être étudié en calculant les matrices jacobiniennes à chaque équilibre [5]. En gardant à l'esprit l'équation (3.1.2), nous remarquons que l'équilibre triviale p_0 est instable d'où :

Déterminons les valeurs propres de la matrice jacobienne associée à p_0

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - 2r\frac{x}{K} - \sigma_1 - qE & \sigma_2 \\ \sigma_1 & s - 2s\frac{y}{L} - \sigma_2 \end{pmatrix}$$

pour $p_0 = (0, 0)$ la matrice jacobienne associée est :

$$J(p_0) = \begin{pmatrix} r - \sigma_1 - qE & \sigma_2 \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 \end{pmatrix}$$

l'équation caractéristique est :

$\lambda^2 - (r - \sigma_1 - Eq + s - \sigma_2)\lambda + (r - \sigma_1 - Eq)(s - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2 = 0$, et les valeurs propres de $J(p_0)$ sont :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(s - \sigma_2 + r - \sigma_1 - qE - \sqrt{\Delta}) ,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(s - \sigma_2 + r - \sigma_1 - qE + \sqrt{\Delta})$$

avec $\Delta > 0$ et, $\Delta = (r - \sigma_1 - Eq + s - \sigma_2)^2 - 4((r - \sigma_1 - Eq)(s - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2)$.

Alors nous constatons que $\lambda_2 > 0$ d'où l'équilibre trivial $p_0(0, 0)$ est instable.

En utilisant le critère de Routh-Hurwitz [14], il est facile de vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne correspondent à p^* ont des parties réelles négatives, et donc p^* est localement asymptotiquement stable dans le plan (x, y) . Cela signifie que nous pouvons trouver un petit cercle de centre p^* tel que toute solution $(x(t), y(t))$, du système (3.1.1), qui est à l'intérieur du cercle à un moment donné $t = t_1$, restera dans le cercle pour tout $t \geq t_1$ et tendra vers (x^*, y^*) pour $t \rightarrow +\infty$.

Dans le lemme suivant, nous montrons que toutes les solutions de système (3.1.1) sont positives et uniformément bornées.

Lemme 3.3.1 *l'ensemble*

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : \omega = x + y \leq \frac{\mu}{\eta} \right\}$$

est une région d'attraction pour toutes les solutions demandent à l'intérieur du quadrant positif, où η est une constante positive et

$$\mu = \frac{K}{4r} (r + \eta - Eq)^2 + \frac{L}{4s} (s + \eta)^2 \text{ (voir [6], page-628-)}.$$

Démonstration.

Soient $\omega = x(t) + y(t)$ et η une constante strictement positive. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} + \eta\omega &= (r + \eta - Eq)x - \frac{rx^2}{K} + (s + \eta)y - \frac{sy^2}{L} \\ &= \frac{K}{4r} (r + \eta - Eq)^2 - \frac{r}{K} \left\{ x - \frac{K}{2r} (s + \eta) \right\}^2 + \frac{L}{4s} (s + \eta)^2 - \frac{s}{L} \left\{ y - \frac{L}{2s} (s + \eta) \right\}^2 \\ &\leq \frac{K}{4r} (r + \eta - Eq)^2 + \frac{L}{4s} (s + \eta)^2 = \mu. \end{aligned}$$

Selon la théorie des inégalités différentielles (voir [6]), on a :

$$0 < \omega(x(t), y(t)) \leq \frac{\mu}{\eta} (1 - \exp(-\eta t)) + \omega(x(0), y(0)) \exp(-\eta t),$$

et quand $t \rightarrow \infty$, $0 < \omega < \frac{\mu}{\eta}$, d'où le résultat. ■

3.3.1 La stabilité globale de p^* et la non existence de cycles limite

Si p^* est asymptotiquement stable, il peut exister des cycles limite autour de ce point, le plus à l'intérieure doit être instable de l'intérieure et le plus externe doit être stable de l'intérieure. Si les cycles limites n'existent pas, dans ce cas, l'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

La question de la stabilité globale dans le système proie-prédateur est un problème mathématique intéressant. Lorsque le système a un équilibre positif unique, il est souvent supposé que la stabilité asymptotique locale et globale de l'équilibre sont équivalent. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour prouver la stabilité globale de l'équilibre positif unique d'un système proie-prédateur. Dans [3], on a construit une fonction de Lyapounov pour le système proie-prédateur et on a établi la stabilité globale.

Dans le théorème suivant, nous montrons que l'équilibre positif p^* est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 3.3.2 *L'équilibre non trivial p^* est globalement asymptotiquement stable par rapport à toutes les solutions démarrant à l'intérieur du quadrant positif [6].*

Démonstration. La preuve du théorème est basée sur la fonction de Lyapounov.

Considérons la fonction définie positive suivante sur un voisinage p^* :

$$V(x, y) = (x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*}) + \frac{y^* \sigma_2}{x^* \sigma_1} (y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*}) \quad (3.3.1)$$

vérifions d'abord que $V(x, y)$ est de Lyapounov pour le système (3.1.1) :

- $V(x, y)$ est de classe au moins C^1 ,
- $V(x^*, y^*) = 0$,
- $\forall (x, y) \neq (x^*, y^*)$,

- $v(x,y) > 0$ (est déjà supposée),

Donc V est définie positive.

Comme $\frac{dV}{dt} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} / f(t, x(t)) \right\rangle + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t))$, en dérivant V par rapport au temps t le long des solutions du système (3.1.1), on trouve

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{r}{K}(x - x^*)^2 - \frac{y^* \sigma_2}{x^* \sigma_1 L}(y - y^*)^2 - \frac{\sigma_2}{x^* xy}(xy^* - x^*y)^2 - qEx \quad (3.3.2)$$

Donc $\frac{dV}{dt}$ est définie négatif, alors V est une fonction de Lyapounov pour le système (3.1.1). D'après le théorème de stabilité de Lyapounov [2], il s'ensuit que l'équilibre p^* est globalement asymptotiquement stable par rapport à toutes les solutions démarrent à l'intérieur du quadrant positif. ■

Le théorème ci-dessus implique que, dans une région de pêche en libre accès, si une sous-région est réservée où la pêche est interdite et où les populations de poissons ne sont capturées qu'en dehors de la sous-région réservée, les espèces de poissons s'installent alors au niveaux de leurs équilibres respectifs, dont l'ampleur dépend des taux de croissance intrinsèques des espèces de poissons, de leurs coefficients de migration et de leurs capacités de charge. Cela implique que les populations de poissons peuvent être maintenues à un niveau d'équilibre approprié même après une récolte continue de populations de poissons dans la zone non réservée.

Dans le théorème suivant, nous montrons que le système (3.1.1) n'a pas de solution périodique.

Théorème 3.3.3 (voir [6], page-629-) *Le système (3.1.1) ne peut avoir de cycle limite à l'intérieur du quadrant positif.*

Démonstration. Posons

$$H(x,y) = \frac{1}{xy},$$

$$h_1(x, y) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - qEx,$$

$$h_2(x, y) = sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y.$$

Il est clair que $H(x, y) > 0$ à l'intérieur du quadrant positif du plan-xy. Ensuite nous avons,

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \frac{\partial(Hh_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Hh_2)}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{y} \left[\frac{r}{K} + \frac{\sigma_2 y}{x^2} \right] - \frac{1}{x} \left[\frac{s}{L} + \frac{\sigma_1 x}{y^2} \right] < 0. \end{aligned}$$

Cela montre que $\Delta(x, y)$ ne change pas de signe et est déférent de zéro dans le premier quadrant positif de plan (x,y). Selon les critères Bendixon-Dulac, il s'ensuit que le système (3.1.1) n'a pas de trajectoire fermée, et donc pas de solution périodique à l'intérieur du quadrant positif du plan (x,y). ■

3.4 Équilibre bionomique

Dans la littérature sur la pêche, on dit que l'équilibre bionomique est atteint lorsque le revenu total obtenu en vendant la biomasse récoltée est égale au coût total utilisé pour la récolter. Dans ce cas, le gain économique est complètement dissipé.

Soit c le coût de la pêche par unité d'effort et p le prix par unité de biomasse du poisson débarqué. Alors le revenu économique à tout moment t est donné par :

$$\pi(x, E, t) = (pqx - c)E.$$

L'équilibre bionomique est $P_\infty(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$, où $x_\infty, y_\infty, E_\infty$ sont les solutions positives de

$$\dot{x} = \dot{y} = \pi = 0.$$

On peut noter ici que si $c > pqx$, i.e. si le coût de la pêche est supérieur au revenu obtenu, alors le gain économique obtenu de la pêche devient négative.

Par conséquent, la pêcherie sera fermée et aucun équilibre bionomique n'existe. Par conséquent, pour l'existence d'un équilibre bionomique, il est naturel d'assumer que $pqx > c$. Nous avons alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 & \left\{ \begin{array}{l} rx(1 - \frac{x}{k}) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - qEx = 0 \\ sy(1 - \frac{y}{L}) + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0 \\ (pqx - c)E = 0 \end{array} \right. \end{cases} \quad (1)$$

$$\dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\pi = 0 \quad (3)$$

D'après l'équation (3) on a que :

$$(pqx - c) = 0$$

D'où

$$x_\infty = \frac{c}{pq} \quad (4)$$

en substituant (4) dans (2) on obtient :

$$y_\infty = \frac{L}{2s} \left[(s - \sigma_2) + \sqrt{\left\{ (s - \sigma_2)^2 + \frac{4s\sigma_1 c}{Lpq} \right\}} \right]$$

En remplace (4) et (5) dans (1) on obtient :

$$E_\infty = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{pqK} \right) - \frac{\sigma_1}{q} + \frac{\sigma_2 p y_\infty}{c} \quad (3.4.1)$$

Il est claire que $E_\infty > 0$ si :

$$\frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{pqK} \right) > \frac{\sigma_1}{q} - \frac{\sigma_2 p y_\infty}{c}. \quad (3.4.2)$$

Ainsi, l'équilibre bionomique $p_\infty(x_\infty, y_\infty, E_\infty)$ existe si, en plus de la seconde inégalité de l'équation (3.1.2), l'inégalité (3.4.2) est vraie. Nous notons que E_∞ augmente lorsque σ_2

augmente et décroît lorsque σ_1 augmente. Également, y_∞ augmente lorsque σ_1 augmente et il décroît lorsque σ_2 augmente. De l'équation (3.4.1) on peut noter que l'équilibre biologique d'effort ne dépend pas du taux de la croissance et de la capacité de charge de la zone de réserve.

Si $E > E_\infty$, alors le cout total utilisé pour récolter la population de poissons excéderait les revenus totaux provenant de l'industrie de la pêche. De ce fait certains pêcheurs seraient en perte et naturellement ils retireraient leur participation du secteur de la pêche. Par conséquent $E > E_\infty$ ne peut pas être maintenu indéfiniment. Si $E < E_\infty$, alors la pêche est plus rentable et par conséquent, dans une pêche en accès libre, elle attirerait de plus en plus de pêcheurs. Cela aura un effet croissant sur l'effort de récolte. $E < E_\infty$ ne peut pas non plus être maintenu indéfiniment (voir [6] page-630-).

Conclusion

Dans notre travail, nous avons exploré un modèle de ressource de pêche avec une zone de réserve. Dans un premier temps, quelques rappels et notions de base sont donnés. Ensuite, on a présenté les modèles classiques tout en donnant un historique, où nous avons rappelé quelques modèles en dynamique de populations. Enfin, on a fait l'analyse du comportement d'un système modélisant les interactions entre les proies, les prédateurs et l'effort de pêche. En somme, notre mémoire constitue une introduction à l'étude des systèmes biomathématiques et bioéconomiques.

Bibliographie

- [1] K.H. BELKHODJA, *Contrôle optimale appliqué à la gestion d'une ressource renouvelable*, Université de tlemcen aboou bakr belkaid, thèse de doctorat, (2018).
- [2] N. BEROUAL, *Modèles Mathématiques Appliqués à la Dynamique des Populations*, Université Ferhat Abbas stif 1, thèse de doctorat, (2015).
- [3] G. BIRKHOFF, G.S. ROTA, *Ordinary Differential Equation*, Ginn, Boston, (1882).
- [4] C.W. CLARK, *Mathematical Bioeconomics : The Optimal Management of Renewable Resources*, Wiley, New York, (1990).
- [5] E.A. CODDINGTON AND N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, (1955).
- [6] B. DUBEY, *A model for fishery resource with reserve area*, *Nonlinear Analysis*. 4(2003), p. 625-637.
- [7] A.F. FILIPPOV, *A sufficient condition for existence of a stable limit cycle for a second-ordre equation*, *Mat.Sb.30 (en russe)*, p. 171-180, (1952).
- [8] JEAN-PIERRE FRANCOISE, *Oscillations en biologie Analyse qualitative et modèles*, Springer, (2005).
- [9] H.I. FREEDMAN, *Deterministic Mathematical Models in population Ecology*, New York , (1980).
- [10] H.I. FREEDMAN AND P. WALTMAN, *Perturbation of two dimentional predator-prey equations*, *SIAM J. Appl.Math.* **28**, p. 1-10, (1975).

-
- [11] M.P. HASSEL G.C. VARLY, *New inductive population model for insect parasites and its bearing on biological control*, *Nature* . **224**, p. 1133-1136, (1969).
- [12] G.F. GAUSSE, *The struggle for existence*, Baltimore , (1935).
- [13] A.N. KOLMGOROV, *Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza*, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* . **7**, p. 74-80, (1936).
- [14] Y.A. KUZNETOV, *Elements of applied bifurcation theory (2nd Ed)*, Springer, (1998).
- [15] J. LASALLE, S. LEFSCHETZ, *Stability by liapounov's Direct Method With Application*, Academic Press, New York, London, (1961).
- [16] A.J. LOTKA, *Undamped oscillation derived from the law of mass action* , *J. Amer. Chem. Soc.* **42**, p. 1595-1599, (1920).
- [17] A.J. LOTKA, *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, Baltimore, (1925).
- [18] T. MALTHUS, *An Essay on the principle of population*, Dunod, London, (1798).
- [19] N.P. SMARAGDOVA, G.F. GAUSS, A.A. WITT, *Further studies on the interaction between predator and prey* , *Journal of Animal Ecology.* **5**, p. 1-18, (1936).
- [20] P.F. VERHULST, *Notice sur la loi qui suit la population dans son accroissement*, *Corresp. Math. Phys.* **X**, p. 113-121, (1838).
- [21] V. VOLTERRA, *lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* , Gauthier-Villars, Paris , (1931).
- [22] A. WALID, *Analyse de la dynamique de certains modèles proie-prédateur et application*, Université du Havre UFR des Sciences et Techniques et Université de Tunis El Manar Ecole Nationale D'ingénieurs de Tunis , Thèse de doctorat, (2016).
- [23] P. YODZIS, *Predator-prey theory and management of multiepecies fisheries* , *Ecological Applications* .**4**, p. 51-58, (1994).