République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Bejaia

Faculté des Sciences Exactes

Département MI/Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Thème

Le degré Topologique dans la résolution des problèmes aux limites

Réalisé par :

M^{elle} **CHELOUAH Karima**

M^{elle} **REDOUANE Asma**

devant le jury :

M^{me} K. Kheloufi-Mebarki	M.C.A	U.A.M.Bejaia	Présidente
M^{me} A. Nasri	M.A.A	U.A.M.Bejaia	Examinatrice
M^{me} S. Allili-Zahar	M.C.B	U.A.M.Bejaia	Encadreur

Année Universitaire 2018 – 2019

Table des matières

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier **DIEU**, le tout puissant, de nous avoir accordé la force et la volonté de réaliser ce modeste travail et de nous avoir guidé vers les bonnes personnes qui ont été un véritable soutient moral.

Nous tenons à remercier très chaleureusement notre promotrice Madame **S. ALLILI-ZAHAR**, pour ses précieux conseils et son soutient durant la réalisation de notre travail.

Nous remercions également Madame **K. KHELOUFI**, de nous avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance.

Sans oublier bien évidemment Madame **A. Nasri**, qui a accepté d'examiner cet humble travail.

Un grand merci à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à dans la réalisation de ce travail de recherche.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contributions, leur soutient et leur patience. Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :
Mes très chèrs parents, qui m'ont toujours soutenu tout au long de mes études. Je leur présente tous mes sincères remerciements et mon plus profond respect, mes soeurs, mes frères et tous mes relatifs.

Je le dédie aussi à Karima, avec qui j'ai travaillé pour accomplir ce mémoire, et je lui souhaite tout le bonheur dans sa vie, ainsi qu'à tous mes amis(es) qui m'ont aidé à me décompresser chaque fois que la pression outrepasse les limites du tolérable.

Asma

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :
Mes très chèrs parents, qui m'ont toujours soutenu tout au long de mes études. Je leur présente tous mes sincères remerciements et mon plus profond respect, mes soeurs, mes frères et tous mes relatifs.

Je le dédie aussi à Asma, avec qui j'ai travaillé pour accomplir ce mémoire, et je lui souhaite tout le bonheur dans sa vie, ainsi qu'à tous mes amis(es) qui m'ont aidé à me décompresser chaque fois que la pression outrepasse les limites du tolérable.

Karima

Introduction

Dans ce mémoire, on va présenter un nombre : Le degré topologique d'une fonction f en y_0 relativement à un ouvert Ω ; Il nous aide à répondre aux fameuses questions du type :

$$f(x) = y_0 \text{ admet elle une solution dans } \Omega.$$

Le degré topologique s'est révélé un outil trés puissant pour la résolution de certains problèmes aux limites non linéaires associés à des E.D.O.

La notion du degré a été introduite par Kronecker [17] pour les applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ en 1869. Poincaré [26], *Böhl* [5] et Hadamard [13] l'ont ensuite développé au début des années 1990, puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer [4] le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques.

La topologie algébrique d'espace de Banach et ses applications aux équations non linéaires, a débuté par le travail de J. Schauder durant la période 1927-1932 [21].

Schauder a identifié une classe importante d'opérateurs non linéaires dans un espace de Banach, les perturbations complètement continues de l'identité pour lesquelles il a pu généraliser deux résultats importants de Brouwer dans un espace de dimension finie : un théorème du point fixe et un théorème d'invariance de domaine.

La notion du degré topologique de Brouwer ou de Schauder est assez bien couverte dans la littérature traitants des équations topologique en analyse.

Le théorème du point fixe de Schauder est devenu au cours du temps un outil puissant pour étudier l'existence de solutions des équations différentielles ordinaires.

Brouwer a travaillé sur le degré topologique en dimension finie. La théorie analytique du degré de Brouwer pour les applications de classe $\mathcal{C}^0$ ont été développées par Nagumo [23] et Heinz [15].

Le degré de Leray Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brouwer, comme indiqué dans [19]. La non nullité du degré est la plus importante de ces propriétés car à partir de laquelle on s'assure que l'équation

$$x - K(x) = y_0 \tag{1}$$

admet une solution.
Sur le plan pratique, il est plus facile de prouver que le degré $deg(I - K, \Omega, y_0) \neq 0$ que de résoudre l'équation (1) ; autrement dit, c'est plus facile de prouver que l'ensemble de ses solutions n'est pas vide.
Pour les problèmes aux limites associés aux E.D.O du second ordre, il y a différentes méthodes de résolutions : méthodes classiques : itérative monotone, du point fixe, de sous et sur solution,...,etc. La notion du degré topologique est un outil complémentaire et indispensable pour l'étude de ces problèmes.

Ce mémoire consiste à présenter les propriétés du degré topologique et les différents théorèmes de types point fixe avec quelques applications utilisant le degré. Le mémoire se compose de trois chapitres ; il nous a semblé utile de l'entamer par le premier chapitre consacré aux rappels et notions fondamentales utiles dans notre travail.

Le deuxième chapitre est dédié à la notion du degré topologique de Brouwer en dimension finie, à la généralisation de celui-ci au degré de Schauder en dimension infinie et à la présentation de ses propriétés.

Dans le troisième chapitre, on propose des applications du degré topologique. La première application concerne les théorèmes du point fixe de Brouwer, celui de Borsuk, puis quelques corrolaires. La deuxième application est consacrée au degré de Schauder appliqué à des théorèmes du point fixe de Schauder, notament la fameuse alternative de Leray Schauder.

On termine ce chapitre par une application de cette alternative à la résolution d'un problème aux limites posé sur un intervalle non borné.

On termine ce mémoire par un annexe qui regroupe quelques notions et résultats complémentaires.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notations et définitions, quelques critères de compacité sur les intrevalles bornés et non bornés.

1.1 Quelques notations et définitions

• $\mathcal{C}^k(I,J)$:= l'ensemble des fonctions $f : I \to J$, k fois continûment dérivables.
• $\mathcal{C}^k(I) := \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.
• $\mathcal{C}(I) := \mathcal{C}^0(I)$.
• $\mathcal{C}_0^1([a,b])$:= espace de fonctions $\{u \in \mathcal{C}^1([a,b]); u(a) = u(b) = 0\}$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$Sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• $\|u\|_2 := (\int_I |u(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$, c'est la norme usuelle dans l'espace $L^2(I)$.
• $\|u\|_\infty := \sup\limits_{t\in I} |u(t)|$.
• $dim(f(X))$ dimension de f en X.
• $L^1(\Omega) = \{f$ mesurable, telle que $\int\limits_\Omega |f(t)|dt < +\infty\}$.
• $L^p(\Omega) = \{f$ mesurable, telle que $\int\limits_\Omega |f(t)|^p dt < +\infty\}$.

Définition 1.1. ***(Espaces métrique)*** *Un espace métrique (E,d) est la donnée d'un ensemble E et d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ appelée distance qui vérifie :*

1. $\forall x, y \in E$, $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\forall x, y \in E : d(x,y) = d(y,x)$,
3. $\forall x, y, z \in E : d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2. ***(Espace vectoriel normé)*** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ un corps), une norme sur E est une application*

$$\begin{aligned} \|.\| : E &\rightarrow [0,+\infty[\\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned}$$

ayant les propriétés suivantes :

(i) $x \in E$ *et* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},$ *on a* $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

(iii) $\forall x \in E, \forall y \in E : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$

Le couple $(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé.

Définition 1.3. ***(Ensemble borné)*** *On dit que A est un sous ensemble borné de X si, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| \leq M$.*

Définition 1.4. ***(Ensemble fermé)*** *Soit X un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de X.*
On appelle A un sous-ensemble fermé de X si, pour toute suite convergente $(f_n)_{n\geq 1} \subset A$ la limite est aussi dans A.

Définition 1.5. ***(Ensemble ouvert)*** *Soit X un espace vectoriel normé, A un sous ensemble de X.*
On dit que A est un sous-ensemble ouvert de X si $\forall x \in A, \exists \delta > 0$ tel que

$$y \in X, \|y - x\| < \delta \Rightarrow y \in A.$$

Définition 1.6. ***(Espace complet)*** *On dit que (X, d) est complet si toutes les suites de Cauchy de X sont convergentes.*

Définition 1.7. ***(Espace de Banach)*** *On appelle un espace de Banach, un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance issue de sa norme.*

Définition 1.8. ***(Ensemble Convexe)*** *On dit que A est convexe si pour chaque $x, y \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.*

Définition 1.9. ***(Applications compactes)*** *Soit X un espace de Banach $T : X \rightarrow X$ une application compacte si elle est continue et possède la propriété suivante :*
pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de X, la suite $(T(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans X.

Définition 1.10. ***(Relativement compacte)*** *Un ensemble est dit relativement compacte si son adhérence est compacte.*

Définition 1.11. *Soit X et Y deux espaces de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $f : \Omega \to Y$ une application continue.*

1. *f est dite compacte si $f(\overline{\Omega})$ est compacte.*
2. *f est complètement continue si f est continue et l'image de tout borné est relativement compacte.*
3. *On appelle perturbation compacte de l'identité toute application de type $(I - K)$, où K est une application compacte de X dans X.*

Définition 1.12. *Soit $I \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si :*

1. *l'application $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}$,*
2. *l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in I$.*

Définition 1.13. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$. Alors le support de f est défini par :*

$$supp\ f := \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.14. ***(L'opérateur de Nemytskii)*** *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. L'opérateur $u \mapsto Fu$ défini sur un espace de fonctions par $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ est appelé opérateur de Nemytskii.*

Définition 1.15. ***(Combinaison Convexe)*** *Soient $x_1, x_2, ..., x_p$, "p" éléments de $\mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est une combinaison convexe de ces "p" éléments s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$:*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p \text{ avec } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

Définition 1.16. ***(Homéomorphisme)*** *Soit K un espace topologique compact et X un espace topologique séparé, et $f : K \longrightarrow X.$, un homéomorphisme est une application bijective et bicontinue d'un espace topologique dans un autre, dont les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.*

Définition 1.17. ***(Endomorphisme)*** *C'est un morphisme (ou homomorphisme) d'un objet mathématique dans lui même. Ainsi, par exemple, un endomorphisme d'espace vectoriel X est une application linéaire $f : X \longrightarrow X$, et un endomorphisme de groupe G est un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow G$, ... etc. En général, nous pouvons parler d'endomorphisme de n'importe quelle catégorie.*

Définition 1.18. ***(Le déterminant Jacobien)*** *on désignera par* $Df(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})(x_0)(1 \leqslant i, j \leqslant n)$*, la matrice jacobienne de* f *en* x_0 *et par* $J_f(x_0) = det[Df(x_0)]$ *le déterminant jacobien de* f *en* x_0.

Définition 1.19. ***(Matrice Jacobienne)*** *La matrice Jacobienne est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle.*

Définition 1.20. ***(Fonction lipschitzienne)*** *On dit que la fonction* f *est lipschitzienne par rapport à* x *s'il existe un nombre réel positif* $k(k > 0)$ *tel que ;*

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Omega : \ ||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq k||x_1 - x_2||.$$

Définition 1.21. ***(Equicontinuité)*** *Soit* E *un ensemble de fonctions et* $a \in E$ *on dit que* E *est équicontinue au point a si pour tout* $\epsilon > 0 \exists V$ *de a tel que l'on ait pour tout* $f \in E$, $\delta(f(V)) < \epsilon$*.Où*$(\delta(f(V))$ *est le diamètre de* $f(V)$*).*

Définition 1.22. ***(La mesure de lebesgue)*** *Est une mesure définie sur la tribu borélienne de* $\mathbb{R}^d$*, elle donne un sens mathématique aux notions physiques de volume* $(d = 3)$*, de surface* $(d = 2)$ *et de longueur* $(d = 1)$*.*

Définition 1.23. ***(La rétraction)*** *Soient* X *un espace topologique et* A *un sous espace. Une rétraction de* X *sur* A *est une application continue* r *de* X *dans* A *dont la réstriction sur* A *est l'application identité de* A*, c'est à dire telle que pour tout point* a *de* A*, vérifie* $r(a) = a$*.*

Définition 1.24. *Soit* K *une partie d'un espace compact métrique* E*. On dit que* K *est compacte s'il vérifie la propriété de Borel -Lebesgue : de tout recouvrement de* K *par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Proposition 1.1. *Soit* $K \subset X$ *un fermé, borné et* $f : K \to X$ *une application. Alors* f *est compacte si seulement si* f *est limite uniforme d'une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'applications compactes de rangs finis i.e (dim* $f(X)$ *est finie).*

Proposition 1.2. *Soit* X *un espace vectoriel normé, on a les équivalences*

$$\begin{aligned} dimX < +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \text{la boule fermée } \overline{B}(0,1) \text{ compacte.} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{la frontière } \partial B(0,1) \text{ compacte.} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{de toute suite de } \overline{B}(0,1), \text{ on peut extraire une sous suite convergente .} \end{aligned}$$

Proposition 1.3. *Si* f *est de rang fini, l'implication suivante a lieu :*

$$f \text{ continue } \Rightarrow f \text{ compacte .}$$

Proposition 1.4. *Si l'espace X est de dimension finie, tout endomorphisme linéaire sur X est continu et compact.*

Proposition 1.5. *Si l'espace X est de dimension finie, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est compacte.*

(ii) *L'image de la boule unité est relativement compacte.*

(iii) *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ borné dans X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $f(x_{n_k})$ converge dans X.*

1.2 Quelques critères de compacité

Pour montrer la compacité de l'opérateur du point fixe utilisé dans le chapitre 3, on aura besoin de quelques critères de compacité. On commence par le critère d'Ascoli-Arzéla qui assure la compacité sur les intervalles bornés.

1.2.1 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

On peut trouver les résultats de cette section dans [6].

Théorème 1.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ une suite vérfiant les deux conditions*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée, i.e :*

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \|f_n\| \leq C.$$

2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-continue , i.e*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ : \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Corollaire 1.1. *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ (C.à.d les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$),*
Alors elle admet une sous suite convergente dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$;
(i.e) $\mathcal{C}^1$ s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}^0$.

Démonstration. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et puisque $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ alors pour tout $t, s \in$

$[a,b]$ et $\epsilon > 0, \exists \delta \in]t,s[$:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_n(s)| &\leq |f_n'(\delta)||t-s|, n \in \mathbb{N} \\ &\leq c|t-s|, \text{ avec } c = \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t)| \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\epsilon}{c}$, indépendante de n, d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. D'après le théorème 1.1, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente. □

Voici un exemple sur le théorème d'Ascoli-Arzela :

Exemple 1.1. *On considère l'espace $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup et $K : X \longrightarrow X$ l'opérateur intégral défini par*

$$(Ku)(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y,u(y))dy$$

où $G : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $f : [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée .
On montre que K est complètement continue.
(a) *K est continue :*
Soit $(u_n)_{n\in N} \subset X$, telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u \in X$. Alors $\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in[0,1]} |u_n(y) - u(y)| = 0$ et donc, par continuité de f et G, on a :

$$\forall x \in [0,1], |Ku_n(x) - Ku(y)| \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |G(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))|$$

où le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
(b) *Soit B un borné de X et $B' = K(B)$. Montrons, en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela, que B' est relativement compact :*
(i) B' est uniformément borné car $\forall u' \in B'$ et $\forall x \in [0,1]$, $\exists u \in B : u'(x) = Ku(x)$ avec

$$|u'(x)| \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |G(x,y)| \sup_{(y,u)\in[0,1]\times[-M,M]} |f(y,u)|.$$

(ii) B' est équicontinue car $\forall (x_1,x_2) \in [0,1]^2$ et $\forall u \in B$, on a :

$$\begin{aligned} |Ku(x_1) - Ku(x_2)| &\leq \int_0^1 |f(y,u(y))||G(x_1,y) - G(x_2,y)|dy \\ &\leq \sup_{y\in[0,1]\times[-M,M]} |f(y,u)| \int_0^1 |G(x_1,y) - G(x_2,y)|dy. \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$; par continuité de $G(x,y)$; il existe $\delta > 0$ (où $\delta = \frac{\epsilon}{\sup_{y\in[0,1]\times[-M,M]} |f(y,u)|}$), telle que

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| \leq \delta &\implies |G(x_1,y) - G(x_2,y)| < \delta, \ \forall x \in [0,1] \\ &\implies |Ku(x_1) - Ku(x_2)| < \epsilon. \end{aligned}$$

1.2.2 Critère de compacité de Corduneanu

Ce critère donne la compacité sur les intervalles non bornés. On peut trouver les résultats de cette section dans [7].
Soit $C_l = \{u \in C(\mathbb{R}^+), \lim_{t\to+\infty} u(t)$ *existe* $\}$.
C_l *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|u\|_l = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |u(t)|.$$

1.2.3 Critère de compacité de Zima

Soit $p : I \to I$ *une fonction continue sur* $I =]0, +\infty[$. *On désigne par* X *l'espace de Banach défini par*

$$X = \{y \in C(I) : \sup_{t\in I} p(t) < \infty\}$$

muni de la norme de type Bielek's suivante :

$$\|y\|_p = \sup_{t\in I} |y(t)|p(t) < \infty.$$

Lemme 1.1. *Si la fonction* $u \in \Omega$ *est complètement équicontinue sur* $I =]0, +\infty[$ *et bornée uniformément au sens de la norme* $\|.\|_q$ *telle que* $q \in C(I, I)$ *vérifiant*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{p(t)}{q(t)} = 0.$$

Alors, Ω *est relativement compact dans* X.

1.2.4 Critère de compacité dans les espace L^p

Proposition 1.6. ***(Fréchet-Kolmogorov)*** *Un ensemble* $S \subset L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < +\infty)$ *est relativement compact si et seulement si* S *est borné et pour chaque* $\epsilon > 0$, *on a :*

1. $\exists \delta > 0$, *tel que* $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+h) - u(x)|^p < \epsilon, \forall u \in S, \forall\ 0 < h < \delta$.
2. *il existe* $N > 0$ *tel que* $\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,+N]} |u(x)|^p dx < \epsilon, \forall u \in S$.

Définition 1.25. *La famille* $\mathcal{A} \subset C_l$ *est dite équiconvergente si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists T = T(\epsilon) > 0, \forall t > T, |u(t) - \lim_{t\to+\infty} u(t)| < \epsilon, \forall u \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.26. *La famille* $\mathcal{A} \subset C_l$ *est dite équicontinue sur un intervalle compact* I *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall (t_1, t_2) \in I^2, |t_1 - t_2| \le \delta \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon, \forall u \in \mathcal{A}.$$

Remarque 1.1. *D'une manière équivalante, A est équiconvergente si* $\forall \epsilon > 0$, $\exists T = T(\epsilon)$ *tels que* $|u(t) - l_u^+| \leq \epsilon$ *pour tout* $|t| \geq T$ *et pour tout* $u \in A$; *ici* $l_u^+ = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$ *et* $l_u^- = \lim\limits_{t \to -\infty} u(t)$.

Proposition 1.7. ***(Critère de Corduneanu)***[1, 2, 3, 7]. *Une famille* $\mathcal{A} \subset C_l$ *est relativement compacte si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $\mathcal{A}$ *est uniformément bornée dans* C_l.

ii) $\mathcal{A}$ *est équicontinue sur chaque intervalle compact de* $\mathbb{R}$.

iii) $\mathcal{A}$ *est équiconvergente.*

Chapitre 2

Le degré topologique

Ce chapitre est partagé en deux sections : le degré topologique de Brouwer en dimension finie et le degré de Schauder en dimension infinie qui est le plus important et le plus utilisé dans les applications. Le degré, $deg(f, \Omega, y_0)$ de f dans Ω par rapport à y_0 donne une information sur l'existence de solutions de l'équation $f(x) = y_0$ dans un ensemble ouvert Ω où $f : \Omega \subset X \to X$ est continue, $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et X un espace topologique, métrique la plupart du temps. Pour des connaissances approfondies, voir [9], [11], [24], [28].

2.1 Le degré de Brouwer(en dimension finie)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \bigcap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$
On considère le problème $(\mathbf{P})$ *:*

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \text{ soit } y_0 \in \mathbb{R}^n, \\ \text{ on cherche les éléments } x \in \Omega \text{ tels que }, \\ f(x) = y_0. \end{cases}$$

Exemple 2.1. $(\Omega =]0,1[, n = 1)$ *et* $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant l'hypothèse* $(\mathcal{H})$

$$(\mathcal{H}) \text{ pour toute solution } x \text{ de } (\mathbf{P}),\ f'(x) \neq 0.$$

On définit alors le degré topologique (qui est un entier relatif d) de f en y_0 relativement à Ω par :

$$d = deg(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \sum_{i \in I} Sgn(f'(x_i)), & \text{si } \{x_i, i \in I\} \text{ est l'ensemble des solutions de } (\mathbf{P}); \\ 0, & \text{si le problème } (\mathbf{P}) \text{ n'a pas de solution }. \end{cases}$$

où $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et $I \subset \mathbb{N}$.

Remarque 2.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre d vérifie les propriétés suivantes :*

- *$d \in \mathbb{Z}$.*
- *d dépend de f, Ω, y_0.*
- *La somme intervenant dans la définition de d est finie.*

Donnons quelques exemples illustratifs :

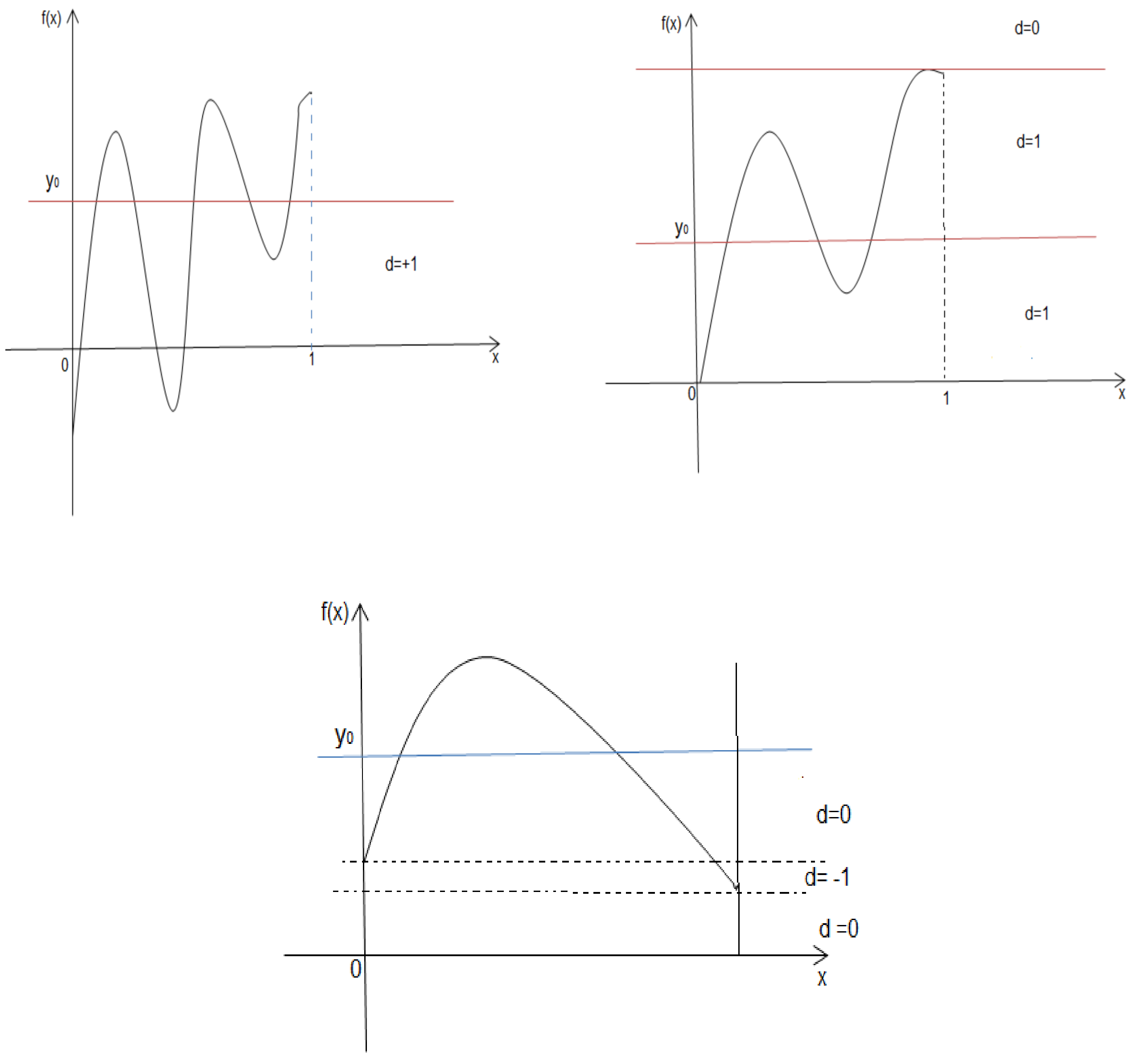

FIGURE 2.1 –

Remarque 2.2. *Le nombre d vérifie quelques propriétés très importantes :*

- *si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \bigcap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), d$ reste constante sur un certain intervalle.*

- *si $d \neq 0$ alors le problème* $(\mathbf{P})$ *admet au moins une solution.*
- *si $d = 0$ alors le problème* $(\mathbf{P})$ *peut ou non admettre une solution.*

2.1.1 Définition du degré topologique de Brouwer en utilisant le signe du déterminant Jacobien

Le cas régulier

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application dans $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ pour $x_0 \in \Omega$.

Définition 2.1. ***(a)*** *x_0 est dit point régulier si $J_f(x_0) \neq 0$.*
(b) *x_0 est dit point singulier ou bien point critique s'il n'est pas régulier.*
On notera l'ensemble des points singuliers de f sur l'ouvert Ω par

$$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega;\ J_f(x_0) = 0\}.$$

(c) *$y_0 \in f(\bar{\Omega})$ est dite valeur régulière si*

$$f^{-1}(y_0) \cap S_f(\Omega) = \emptyset.$$

Dans le cas contraire, y_0 est dite valeur singulière ou critique.
Immédiatement, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ est une valeur régulière, alors l'ensemble E=$f^{-1}(\{y_0\})$ est fini.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} y_0 \text{ régulière} \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in f^{-1}(\{y_0\}), J_f(x) \neq 0 \\ &\Longrightarrow \quad \forall x \in f^{-1}(\{y_0\}), \exists U \in V(x) \text{ tel que } f_{|}U \text{ est un homéomorphime} \\ &\qquad\quad \text{(théorème de l'inversion locale)} \end{aligned}$$

alors tous les points de E sont isolés (E est un ensemble discret)
Or, f étant continue, l'ensemble E est fermé donc compact car il est inclu dans le borné Ω. Enfin,

$$E \text{ compact et discret } \Longleftrightarrow E \text{ fini }.$$

□

Définition 2.2. *Si $y_0 \notin [f(\partial\Omega) \cup S_f(\Omega)]$, alors on définit le degré topologique de Brouwer de f en y_0 relativement à l'ouvert Ω par :*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\})} Sgn J_f(x) \\ 0, \quad si\ \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset. \end{cases}$$

Le cas singulier

Définition 2.3. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ une valeur singulière, on pose*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1)$$

où y_1 est une valeur régulière proche de y_0 et dont l'existence est assuré par le lemme de Sard (lemme 2.1). On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix de y_1.

Lemme 2.1. ***(Lemme de Sard, 1942)***
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ une application continûment dérivable sur Ω et S l'ensemble des points singuliers de f. Alors, $f(\mathcal{S}_f(\Omega))$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Voir [24] □

Exemple 2.2. ***(Exemple de calcul du degré topologique en dimension $\mathbb{R}^2$)***
Soit $\Omega = B(0, r)$, $Y_0 = (1, 0)$ et $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y)$. Calculons $deg(f, \Omega, Y_0)$
$f(x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0) \vee (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \vee (\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}) \in \partial\Omega.$
On remarque qu'au moins le point (1,0) est sur la frontière de la boule unité qu'elle que soit la norme usuelle que l'on considère sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent,
***Si r=1**, alors le degré n'est pas défini*
***Si 0<r<1**, alors $B(0, r) \cap f^{-1}(Y_0) = \emptyset$ et donc $deg(f, B(0, r), Y_0) = 0$.*
*Enfin, **Si r>1**, alors le degré est bien défini. De plus, on a :*

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & -3y^2 + 3x^2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$J_f(x, y) = (3x^2 - 3y^2)^2 + 36x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Les trois points sont alors réguliers et comme $SgnJ_f(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \neq 0$ alors

$$deg(f, \Omega, y) = 3.$$

2.2 Propriétés du degré de Brouwer

Dans ce paragraphe, on résume les propriétés les plus importantes du degré topologique de Brouwer, on suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On a les propriétés suivantes :

2.2.1 Degré de l'identité(Normalisation)

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $Id : \Omega \to \Omega$, la fonction identité de Ω vers Ω, alors :

$$\textbf{\textit{(a)}}\ deg(Id, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1, & si\, y_0 \in \Omega, \\ 0, & si\, y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{(b)}}\ deg(-Id, \Omega, y_0) = \begin{cases} (-1)^n, & si\, y_0 \in \Omega, \\ 0, & si\, y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Démonstration. **(a)** Si $y_0 \in \Omega, \Omega \cap Id^{-1}(\{y_0\}) \neq \emptyset$, alors :

$$deg(Id, \Omega, y_0) = \sum_{x \in \Omega \cap Id^{-1}(\{y_0\})} SgnJ_{Id}(x)$$

$J_{Id}(x) = 1,$ donc $J_{Id}(x) \neq 0$, alors y_0 est une valeur régulière.
$\displaystyle\sum_{x \in \Omega \cap Id^{-1}(\{y_0\})} SgnJ_{Id}(x) = +1$ car $J_{Id}(x) = 1 > 0$, donc

$$deg(Id, \Omega, y_0) = 1.$$

(b) Si $\Omega \cap (-Id^{-1}(\{y_0\})) \neq \emptyset$, alors :

$$deg(-Id, \Omega, y_0) = \sum_{x \in \Omega \cap (-Id^{-1}(\{y_0\}))} SgnJ_{-Id}(x)$$

$J_{-Id}(x) = \underbrace{((-1)(-1)...(-1))}_{nfois} = (-1)^n.$ □

2.2.2 Résolution des équations algébriques

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Si $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$ alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = 0.$$

Ou encore,

$$deg(f, \Omega, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \overline{\Omega}, f(x) = y_0$$

Démonstration. Par la contra posée :

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, y_0) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \exists x \in \overline{\Omega}, f(x) = y_0 \\ &\Rightarrow \quad \text{l'équation algébrique d'inconnu } x \text{ admet au moins une solution dans } \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

□

2.2.3 Continuité par rapport à y_0

Si y_1 est proche de $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, alors

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,\Omega,y_1).$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe une boule B contenant à la fois y_0 et y_1 et tel que $B \subset \mathbb{R}^n(\partial\Omega)$; alors $y_1 \notin f(\partial\Omega)$ et l'on peut alors choisir μ une n-forme différentielle B ; et ce dans les deux définitions correspondantes du degré. □

2.2.4 Invariance par homotopie

Soit $\{f_t\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille d'applications dépendantes de t et $\{y_0(t)\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille de points continues en t et tels que $y_0(t) \notin f_t(\partial\Omega), \forall t \in [0,1]$ alors $deg(f_t,\Omega,y_0(t))$ ne dépend pas de t. En particulier

$$deg(f_0,\Omega,y_0(0)) = deg(f_1,\Omega,y_0(1)).$$

Les fonctions (f_t) sont dites reliées homotopiquement. Plus généralement, on dit que deux fonctions f et g sont homotopes s'il existe une fonction continue $H : [0,1]\times\bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$H(0,x) = f(x) \text{ et } H(1,x) = g(x), \forall x \in \bar{\Omega}$$

d'où le nom de la propriété 2.2.4

Démonstration. Considérons l'ensemble :

$$\begin{aligned} Y &= \bigcup_{0\leq t\leq 1} f_t(\partial\Omega) \\ &= \{f_t(x);\ 0\leq t\leq 1,\ x\in\partial\Omega\} \end{aligned}$$

On pose : $f(t,x) = f_t(x)$ donc

$$Y = \bigcup_{0\leq t\leq 1} f_t(\partial\Omega) = f([0,1]\times\partial\Omega).$$

$f(\partial\Omega)$ et $f(\overline{\Omega})$ sont des compacts, f est continue, $\partial\Omega$ est fermé, $\bar{\Omega}$ est fermé, borné, $\partial\Omega$ est borné. Y étant fermé on considère l'espace $\mathbb{R}^n\backslash Y$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et contenant y_0.
On prend μ une n-forme différentiable à support compact K, $K \subset \mathbb{R}^n\backslash Y$ et donc :

$$\begin{aligned} d : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ t &\longmapsto d(t) = deg(f_t,\Omega,y_0) \\ &\qquad\quad = \int_\Omega \mu\circ f_t. \end{aligned}$$

Cette application est continue, discrète donc constante. □

2.2.5 Invariance sur le bord

Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *et* $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$*, alors,*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

Démonstration. Pour $t \in [0,1]$, considérons la déformation convexe de f et g convexe définie comme suit :
$f_t(x) = tf(x) + (1-t)g(x)$ alors $f_t(x) = f(x) = g(x)$, sur $\partial\Omega$. En effet

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega, \quad f_t(x) &= tf(x) + (1-t)g(x) \\ &= tg(x) + (1-t)g(x) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega, \quad f_t(x) &= tf(x) + (1-t)g(x) \\ &= tf(x) + (1-t)f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Du moment que $deg(f_t, \Omega, y_0)$ est défini et constant, en déduit que :

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0)$$

(d'après la propriété précédente, les fonctions f et g sont homotopiques (déformation convexe), alors elles ont le même degré). □

2.2.6 Continuité par rapport à la fonction

Soit $r = dist(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ *et soit* $g \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ *une fonction telle que*

$$\sup_{x \in \partial\Omega} \|g(x) - f(x)\| < r;$$

alors :

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

On peut retenir cette propriété en se souvenant que deux fonctions voisines ont le même degré.

Démonstration. Pour $t \in [0,1]$, posons $f_t = tg + (1-t)f$ et vérifions que $y_0 \notin f_t(\partial\Omega)$, $\forall t \in [0,1]$.

Pour $x \in \partial\Omega$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\|f_t(x) - y_0\| &= \| (tg + (1-t)f)(x) - y_0\| \\
&= \|t(g-f)(x) - (y_0 - f(x))\| \\
&\geq |\ \|(y_0 - f(x))\| - \|t(g-f)(x)\|\ | \\
&= \|(y_0 - f(x)) - \|t(g-f)(x)\| \text{ (par définition de r)} \\
&\geq \|(y_0 - f(x)) - \|(g-f)(x)\| (car \mid t \mid \leq 1) \\
&> \|(y_0 - f(x))\| - r \geq 0 \text{ (par définition de r).}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f_t(x) \neq y_0$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Le résultat demandé se déduit alors de la propriété d'invariance par homotopie du degré. Cette propriété sera utile pour l'approximation d'une fonction continue par une fonction plus régulière. □

2.2.7 Constance sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$

$deg(f, \Omega, .)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ et $(y_0, y_1) \in \mathcal{C}^2$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant localement connexe, l'ensemble $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ est un ouvert ; par suite, ce dernier est un ensemble fermé, ouvert et connexe par arcs ; il existe alors un chemin continu :

$$\Phi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}$$

tel que $\Phi(0)=y_0$ et $\Phi(1)=y_1$. D'après la propriété 2.3 on a :

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1).$$

□

2.2.8 Additivité

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des assertions suivantes :
(a) $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ *et* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *;*
(b) $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i \subset \Omega$ *et* $y_0 \notin f(\bar{\Omega} \backslash \bigcup_i \Omega_i)$ *alors*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \sum_i deg(f, \Omega_i, y_0),$$

où un seul nombre fini de termes dans la somme est non nul.

Démonstration. Supposons l'assertion (a) ; le cas où (b) est vérifiée se traite de la même manière.

- Vérifions d'abord que $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$, $\forall i \in I$. En effet, dans le cas contraire, il existerait un indice $i \in I$ et $x \in \bar{\Omega} \cap \partial\Omega_i$ tel que $x \notin \partial\Omega$. Alors, il existe un indice $j \neq i$ tel que $x \in \Omega_j$ car $\Omega{=}\bigcup_i \Omega_i$. De plus, Ω_j étant ouvert, il existe une boule ouverte $B(x, r_j) \subset \Omega_j$. Enfin, les ouverts $\{\Omega_i\}$ étant deux à deux disjoints, $B \cap \Omega_i{=}\emptyset$ ce qui contredit $x \in \partial\Omega_i$. On a donc pour tout indice i, $f(\partial\Omega_i) \subset f(\partial\Omega)$; et donc $y_0 \notin f(\partial\Omega_i)$.
- Soit $\epsilon > 0$ et, par le lemme de Sard, il existe un point $y_1 \notin f(S_f(\Omega))$ tel que $y_1 \in B(y_0, \epsilon)$. Alors

$$\begin{aligned}
\deg(f, \Omega, y_0) &= \deg(f, \Omega, y_1) \\
&= \Sigma_{x\in\Omega\cap f^{-1}(y_1)} Sgn(J_f)(x) \\
&= \Sigma_{i=1}^{i=N} \Sigma_{x\in\Omega\cap f^{-1}(y_1)} Sgn(J_f)(x) \\
&= \Sigma_{i=1}^{i=N} deg(f, \Omega_i, y_1).
\end{aligned}$$

En effet, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_(^{-1} y0) \subset \cup_{i=1}^{i=N} \Omega_i$ et donc pour tout $i \geq N+1$,

$$deg(f, \Omega_i, y_0) = 0.$$

□

Corollaire 2.1. *(Propriété d'excision)*
Soit $K \subset \Omega$ fermé et $y_0 \notin [f(K) \cup f(\partial\Omega)]$. Alors,

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega \backslash K, y_0)$$

Corollaire 2.2. *(propriété d'invariance par rapport à l'ouvert)*
Soit $x_0 \in \Omega$ est une solution isolée de l'équation $f(x) = y_0$, alors $\exists r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$, le degré $deg(f, \mathcal{B}_r(x_0), y_0)$ est constant. i.e.

$$deg(f, \mathcal{B}_r(x_0), y_0) = deg(f, \mathcal{B}_{r_0}(x_0), y_0), \forall r \leq r_0.$$

Démonstration. [14] □

2.2.9 Propriété multiplicative du degré

Soit $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, où U *et* V *sont deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ respectivement et soit $y_0 \notin f(\partial\mathrm{U})$ et $z_0 \notin f(\partial\mathrm{V})$. Alors, la formule suivante a lieu*

$$deg(f \times g, \mathrm{U} \times \mathrm{V}, (y_0, z_0)) = deg(f, \mathrm{U}, y_0).deg(g, \mathrm{V}, z_0)$$

où $(f \times g)(x, y){=}(f(x), g(y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On a utilisé les définitions des formes μ et ν ainsi que le théorème de Fubini.

Démonstration. Soit $\mu(x)=\emptyset(x)$ dx et $\nu=\psi(x)$ dx deux formes différentielles intervenant dans les définitions respectives de μ et de ν. On définit le produit des formes μ et ν par $(\mu,\nu)(x,y)=\mu(x)\oplus\nu(y)$; (μ,ν) est alors une $(m+n)$-forme adaptée à la fonction $(f\times g)$. Notons $X=(x,y)$ et $(\mu,\nu)(X)=\eta(X)dX$ puis écrivons

$$\begin{aligned}
\deg(f\times g, U\times V, (y_0,z_0)) &= \int_{U\times V}(\mu.\nu)(f\times g) = \int_{U\times V}\eta(f\times g)J_{f\times g}\,dX \\
&= \int_{U\times V}\eta(f\times g)(X)J_f.J_g\,dX \\
&= \int_{U\times V}\eta(f(x),g(y))(X)J_f.J_g\,dX \\
&= \int_{U\times V}\phi(f)(x)\psi(g)(y)J_f.J_g\,dx\,dy \\
&= \left(\int_U \phi(f)(x)J_f\,dx\right)\left(\int_U \psi(g)(y)J_g\,dy\right) \\
&= \left(\int_U \mu\circ f\,df\right)\left(\int_V \nu\circ g\,dg\right) = \left(\int_U \mu\right)\left(\int_V \nu\right) \\
&= deg(f,U,y_0).deg(g,V,z_0).
\end{aligned}$$

□

2.2.10 Composition d'applications

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et considérons une fonction $f\in\mathcal{C}^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. L'ensemble $f(\partial\Omega)$ étant compact, $\mathbb{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ admet une seule composante connexe non bornée $\mathcal{C}_\infty$ si $n>1$ et si $n=1$. Comme $\mathbb{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ est inclu dans $\mathbb{R}^n\backslash f(\Omega)$, une telle composante non bornée coupe nécessairement $\mathbb{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$. En vertu des propriétés de non nullité et d'invariance du degré sur les composantes connexes, le degré $deg(f,\Omega,\mathcal{C}_\infty)\neq 0$. Enonçons alors le théorème du produit de Leray.

Théorème 2.1. *(Formule du produit de Leray) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $(f,g)\in\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})\times\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. On désigne par $\mathcal{C}_i^b$ les composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$. Alors, pour tout $z_0\notin(g\circ f)(\partial\Omega)$, on a la formule*

$$deg(g\circ f,\Omega,z_0)=\sum_i deg(f,\Omega,\mathcal{C}_i^b).deg(g,\mathcal{C}_i^b,z_0)$$

où la somme dans le second membre est finie.

Démonstration. **(a)** Il est clair que les degrés intervenant dans la formule sont tous bien définis ; en effet, le degré $deg(f,\Omega,\mathcal{C}_i^b)$ est bien défini car les composantes connexes $\mathcal{C}_i^b$, étant à la fois ouvertes et fermées, sur $\partial\mathcal{C}_i^b=\emptyset$. D'autre part, le degré $deg(g,\mathcal{C}_i^b,z_0)$ est bien défini car, par définition, $\mathcal{C}_i^b \subset \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

(b) Commençons par vérifier l'existence d'un nombre fini de termes non nuls dans la somme. En effet, soit $B_R(0)$ une boule contenant $f(\bar{\Omega})$ et posons et $M{=}\bar{B}_R(0) \cap g^{-1}(z_0)$. De l'hypothèse, on déduit que $g^{-1}(z_0) \cap f(\partial\Omega) \neq \emptyset$; par suite, $M \subset \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$. Écrivons $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega) = \cup_i \mathcal{C}_i$, où les $\mathcal{C}_i$ désignent toutes les composantes, bornées et non bornées de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega).M$ étant compact, il existe un nombre fini N d'indices i tel que les ensembles $\cup_{i=1}^{i=N} \mathcal{C}_i^b$ et $\mathcal{C}_{N+1}{=}\mathcal{C}_\infty \cap B_{R+1}(0)$ couvrent l'ensemble M. Donc le, $deg(f, \Omega, \mathcal{C}_{N+1}) = 0$. De plus, on peut choisir R assez grand pour que pour tout $i \geq N+2$, $\mathcal{C}_i^b \subset B_R(0)$. Alors $g^{-1}(z_0) \cap \mathcal{C}_i^b$ ce qui entraine la nullité du degré $deg(g, \mathcal{C}_i^b, z_0)$, pour tout $i \geq N+2$. Par conséquent, l'un des deux facteurs au moins s'annule dans la sommation lorsque $i \geq N+1$ et elle est finie.

(c) Faisons la démonstration de la formule dans le cas régulier. Pour $z_0 \notin S_{g \circ f}$ on a les égalités

$$\begin{aligned}
\deg(g \circ f, \Omega, z_0) &= \Sigma_{x \in (g \circ f)^{-1}(z_0)} Sgn J_{g \circ f}(x) \\
&= \Sigma_{x \in (g \circ f)^{-1}(z_0)} Sgn J_g f(x) Sgn J_f(x) \\
&= \Sigma_{x \in f^{-1}(y), y \in g^{-1}(z_0)} Sgn J_g(y) Sgn J_f(x) \\
&= \Sigma_{y \in f(\Omega) \cap g^{-1}(z_0)} Sgn J_g(y) \left(\Sigma_{x \in f^{-1}(y)} Sgn J_f(x) \right).
\end{aligned}$$

Or, $f(\Omega) \cap g^{-1}(z_0) \neq \emptyset$; par suite $y \notin f(\partial\Omega)$; *d'où* l'égalité

$$deg(g \circ f, \Omega, z_0) = \sum_{y \in f(\Omega) \cap g^{-1}(z_0)} Sgn J_g(y).deg(f, \Omega, y).$$

De plus, $f(\Omega)$ étant compact, il peut *être* recouvert par un nombre fini de composantes $\mathcal{C}_i$; en raisonnant comme dans la partie (a) et en utilisant la propriété d'additivité du degré, on obtient la formule

$$deg(g \circ f, \Omega, z_0) = \sum_{i=1}^{i=n} deg(f, \Omega, \mathcal{C}_i^b). \sum_{y \in \mathcal{C}_i \cap g^{-1}(z_0)} Sgn J_g(y).deg(f, \Omega, y)$$

ou encore

$$deg(g \circ f, \Omega, z_0) = \sum_{i=1}^{i=n} deg(f, \Omega, \mathcal{C}_i^b).deg(g, \mathcal{C}_i^b, z_0).$$

(c) Dans les définitions des degrés de f et de g, nous avons utilisé pour le cas régulier ; En effet, soit $x \in f^{-1}(y)$ tel que $J_f(x) = 0$, alors $J_{g \circ f}(x){=}J_g(y).J_f(x) = 0$ ce qui contredit le fait que z_0 est une valeur régulière. $\square$

2.3 Le degré de Leray-Schauder(en dimension infinie)

On peut trouver les résultats de cette section dans [19]
En 1934, Leray et Schauder ont généralisé le degré topologique de Brouwer à la dimension infinie.

2.3.1 Construction du degré de Leray-Schauder

Exemple 2.3. *Dans ce contre exemple, on prend l'espoir d'étendre les propriétés du degré e trouver un degré topologique pour une application continue sur un espace de dimension infinie Soit* $E = L^{\infty} = \{(x_n)_{n\geq 1}/(x_n)$ *suite bornée* $\}$ *et* $S : E \to E$ *définie par* $S(x) = (0, x_1, x_2, ...)$, *pour chaque* $x = (x_1, x_2, ...) \in E$.
Soit l'homotopie naturelle entre I *et* S,

$$H(t,x) = tx + (1-t)S(x) = (tx_1, tx_2 + (1-t)x_1, tx_3 + (1-t)x_2, ...),$$

$$\forall t \in [0,1]; H(t,x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tx_1 = 0 \\ tx_2 + (1-t)0 = 0 \\ ... \\ ... \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, ...) = (0,0,0,....).$$

Donc la seule solution de $H(t,x) = 0$ *est la suite nulle.*
S'il existe un degré pour toutes les applications continues sur E, *alors d'après l'invariance homotopique on aura*
$1 = deg(I, B(0,1), 0) = deg(S, B(0,1), 0)$
D'où, la $deg(S, B(0,1), y) = 1 \neq 0\ \forall y \in E$ *proche de 0.*
C'est à dire tout y *proche de 0 aurait un antécédent par* S *ce qui est faux car* $y = (\epsilon, 0, 0, ...)\epsilon \neq 0$ *n'a pas d'antécédent par* S. *Donc le degré topologique n'est pas définit pour toutes les fonctions continues.*

2.3.2 Définition du degré pour les perturbations compactes de l'identité, de rang fini

Soit $K_\epsilon : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ *une application continue, compacte à valeurs dans un espace de dimension finie* N_ϵ *contenant* y_0 *et telle que* $\sup\limits_{x\in\Omega} |K_\epsilon(x) - K(x)| < \frac{\delta}{2}$ *avec* $(\delta = dist(y_0, f(\partial\Omega)))$. *Le choix de* K_ϵ *est justifié par la proposition* 1.1. *Alors, on a*

Proposition 2.2. *Le degré de Brouwer* $deg(I - K_\epsilon|_{\bar{\Omega}\cap N_\epsilon}, N_\epsilon \cap \Omega, y_0)$ *est bien defini. On posera* $f_\epsilon = I - K_\epsilon$.

Démonstration. **(a)** $y_0 \notin (I - K_\epsilon)(\partial\Omega)$. Pour tout $x \in \partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned}
\|y_0 - (I - K_\epsilon)(x)\| &= \| y_0 - f(x) + f(x) - f_\epsilon(x)||_X \\
&\geq | \, ||y_0 - f(x)||_X - ||f(x) - f_\epsilon(x)||_X \, | \\
&= ||y_0 - f(x)||_X - ||f(x) - f_\epsilon(x)||_X \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0.
\end{aligned}$$

(b) Remarquons que les solutions $x \in \bar{\Omega}$ de l'équation $x - K_\epsilon(x) = y_0$ sont dans $\Omega \cap N_\epsilon$; de plus, si $\partial(\Omega \cap N_\epsilon)$ désigne la frontière de $\Omega \cap N_\epsilon$ dans l'espace N_ϵ, la trace sur N_ϵ de $\partial\Omega$, Alors $\partial(\Omega \cap N_\epsilon) \subset \partial\Omega \cap N_\epsilon$ et donc le degré est bien défini. □

Définition 2.4. *Soit K_ϵ de rang fini et Ω en dimension infinie. On pose*

$$deg(I - K_\epsilon, \Omega, y_0) = deg(I - K_\epsilon|_{\bar{\Omega} \cap N_\epsilon}, N_\epsilon \cap \Omega, y_0).$$

2.3.3 Degré topologique de Leray Schauder

Soit K_ϵ une approximation de K (donnée par la proposition 1.1). Alors

Définition 2.5.

$$deg(I - K, \Omega, y_0) = deg(I - K_\epsilon, \Omega, y_0).$$

Proposition 2.3. ***(a)*** *Cette définition ne dépend pas du choix de K_ϵ.*
(b) *Si dim $X < +\infty$, les degrés de Brouwer et Schauder coïncident.*

Démonstration. **(a)** Soit K_ϵ et $K_{\epsilon'}$ deux approximations de K, N_ϵ et $N_{\epsilon'}$ les espaces images correspondants. Soit N un sous-espace de dimension finie contenant à la fois y_0, N_ϵ, $N_{\epsilon'}$. *Grâce* à la définition 2.5, On a

$$deg(I - K_\epsilon, \Omega, y_0) = deg(I - K_\epsilon|_{\bar{\Omega} \cap N}, \Omega \cap N, y_0)$$

et

$$deg(I - K_{\epsilon'}, \Omega, y_0) = deg(I - K_{\epsilon'}|\bar{\Omega} \cap N, y_0, \Omega \cap N, y_0).$$

Maintenant, si on déforme homotopiquement $(I - K_\epsilon)$ et $(I - K_{\epsilon'})$, on constate que les degrés de Brouwer sur $\bar{\Omega} \cap N$ sont bien définis et ils sont égaux.
(b) Trivial en considérant $N_\epsilon = X$ avec dim $X < +\infty$ et $K_\epsilon = K$. □

2.4 Propriétés du degré de Leray Schauder

Les propriétés essentielles du degré en dimension finie restent valables en dimension infinie et se démontrent par approximation.

En effet, il existe toujours une suite d'applications compactes $(K_n)_{n\in N} convergeant uniformément vers K et telle que$, $\forall n \in N$, $K_n(\bar{\Omega}) \subset N_n$ *avec dim* $(N_n) < +\infty$. *Et d'après la définition du degré en dimension infinie, on a*

$$\forall n \in N, deg(I-K,\Omega,y_0) = deg(I-K_n,\Omega,y_0) = deg(I-K_n|_{\bar{\Omega}\cap N_n},\Omega\cap N_n,y_0).$$

Ceci montre, en particulier, que le degré de Schauder est aussi un entier relatif. De plus, Si $deg(I-K,\Omega,y_0) \neq 0$, *alors il existe* $x_n \in \Omega \cap N_n$ *tel que* $(I-K_n)(x_n)=y_0$. *Mais comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||K_n(x_n) - K(x_n)||_X = 0$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} ||(I-K)(x_n) - y_0||_X = 0.$$

Enfin, K étant compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in N}$ *telle que la suite* $K(x_{n_k})$ *soit convergente ; la suite* (x_{n_k}) *converge aussi vers une limite* $x_0 \in \Omega$ *et l'on a, par passage à la limite, l'égalité* $x_0 - K(x_0)=y_0$. *Ceci prouve la propriété de non nullité du degré. Les autres propriétés se montrent de façons similaires.*

Chapitre 3

Applications

3.1 Applications du Degré de Brouwer

On peut trouver les résultats de cette section dans ([14], *p.* 231)

3.1.1 Théorème du point fixe de Brouwer, 1912 $1^{ème}$version

Théorème 3.1. *Soit C un ouvert compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration. Dans le cas ou $C = \overline{B}(0, R)$.
Si $f(x_0) = x_0$, pour $x_0 \in \partial C$, le théorème est démontré.
Sinon $f(x) \neq x, \forall x \in \partial C$. Considérons alors la déformation continue $f_t(x) = x - tf(x)$.
Pour tout $t \in [0, 1[$ et $x \in \partial C$, on a les estimations suivantes :

$$\|f_t(x)\| \geq |\|x\| - t\|f(x)\|| = |R - t\|f(x)\|| \geq R - tR = R(1 - t) > 0$$

En effet, comme f est continue donc $f(C) \subset C$, on aura $t\|f(x)\| \leq \|f(x)\| \leq R, \forall t \in [0, 1[$.
Considérant la déformation homotopique suivante

$$f_t(x) = x - tf(x).$$

Pour $t = 0 \Rightarrow f_t(x) = x$, donc

$$deg(Id, C, 0) = 1.$$

Pour $t = 1 \Rightarrow f_t(x) = x - f(x)$, donc

$$deg(Id - f, C, 0) = 1.$$

$\Rightarrow deg(Id - f, C, 0) \neq 0$.
Donc $\exists x \in C$ tel que $(Id - f)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$. $\square$

3.1.2 Théorème de point fixe de Brouwer, 1933 $2^{ème}$version

Théorème 3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine ($\Omega = -\Omega$) et $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue, impair telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors*
(a) *Si $0 \notin \bar{\Omega}$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est pair.*
(b) *Si $0 \in \Omega$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est impair.*

Démonstration. Voir ([25], *p.* 9) □

Théorème 3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec Ω est un sous ensemble ouvert, borné de $\mathbb{R}^n$. Si $(f(x), x) > 0$, pour toute $x \in \partial\Omega$, alors*

$$deg(f, \Omega, 0) = 1.$$

Démonstration. On considère la déformation homotopique

$$H(t, x) = tx + (1 - t)f(x), \forall (t, x) \in [0, 1] \times \overline{\Omega}$$

l'équation $H(t, x) = 0 \Leftrightarrow$ ya pas de solutions sur $\partial\Omega$ car $(f(x), x) > 0, \forall x \in \partial\Omega$.
donc $0 \notin H([0, 1] \times \overline{\Omega})$, et donc on a

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1.$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 3.4. *Soit $0 \in \Omega$ qui est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue tel que*

$$f(x) \neq \lambda x, \forall x \in \partial\Omega \text{ et } \forall \lambda > 0 \quad (*)$$

Alors f admet un point fixe dans Ω c'est à dire $f(x) = x$ admet au moins une solution pour un certain x dans $\overline{\Omega}$.

Démonstration. On considère la déformation homotopique

$$H(t, x) = x - tf(x), \text{ pour } x \in \overline{\Omega} \text{ et } t \in [0, 1]$$

• Montrons que $H(t, x) \neq 0, \forall t \in [0, 1], x \in \partial\Omega$
Par l'absurde, on suppose que

$$\exists t_0 \in [0, 1], \exists x_0 \in \partial\Omega, H(t_0, x_0) = x_0 - t_0 f(x_0) = 0.$$

Premier cas : $t_0 = 0$
$H(0, x_0) = x_0 = 0, \Rightarrow x_0 = 0$ contradiction avec le faite que $0 \in \Omega et 0 \in \partial\Omega$.
Deuxième cas : $t \in]0, 1]$

$H(t_0, x_0) = x_0 - t_0 f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{t_0} x_0$. On pose $\lambda = \frac{1}{t_0} > 1$, contradiction avec $(*)$.
Alors f n'admet pas de point fixe sur le bord de Ω $H(t,x) \neq 0,\ \forall t \in [0,1],\ x \in \partial\Omega$ donc d'après l'invariance homotopique ;

$$deg(I - f, B, 0) = deg(I, B, 0),$$

où B est la boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$, mais $deg(I, B, 0) = 1$, alors f admet au moins un point fixe dans $\overline{\Omega}$. □

3.2 Application du Degré de Leray Schauder

3.2.1 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 3.5. [9], [12], [20], [27], [29]. *Soit Ω un ouvert, borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte. Alors*
*ou bien **(i)** f admet un point fixe dans Ω.*
*ou bien **(ii)** il existe $x \in \partial\Omega$, $\exists t \in [0,1]$: x=$tf(x)$.*

Démonstration. Si la condition **(ii)** n'est pas satisfaite, l'assertion suivante a lieu :
$\forall x \in \Omega, \forall t \in [0.1] : (I - tf)(x) \neq 0$; le degré $deg(I - tf, \Omega, 0)$ est donc bien défini, et vaut, par homotopie, $deg(I, \Omega, 0) = 1$. Pour t=1, f admet donc un point fixe dans Ω. □

Corollaire 3.1. *Soit X un espace de Banach et $K : X \longrightarrow X$ une application compacte. Admettons l'hypothèse :*

$$(\boldsymbol{H}_1) \quad \exists r > 0 : \forall t \in [0.1] \quad (tK(x) = x \Longrightarrow x \in B(0,r)).$$

Alors K admet au moins un point fixe dans B=$B(0;r)$.

3.2.2 Théorème de Borzuk, 1933

Théorème 3.6. *Soit X un espace de Banach et $\Omega \subseteq X$ un ouvert borné contenant l'origine et symétrique par rapport à celui-ci. On considère une application compacte K définie sur $\overline{\Omega}$ et impaire. Alors, si $0 \notin (I - K)(\partial\Omega)$, le degré $deg(I - K, \Omega, 0)$ est impair.*

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$, approchons K par une famille d'applications K_ϵ de rangs finis N_ϵ. Alors l'application $L_\epsilon(x) = \frac{K_\epsilon(x) - K_\epsilon(-x)}{2}$ est encore une approximation de K ; comme elle est impaire, le degré $deg(I - L_\epsilon, \Omega \bigcap N_\epsilon, 0)$ est, d'après le théorème de Borzuk en dimension finie, un entier impair ; le théorème se déduit alors de la définition du degré en dimension infinie. □

L'exemple suivant montre qu'on peut pas construire un degré topologique pour toute application continue en dimension infinie.

Exemple 3.1. *Soit* $X = L^2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < \infty\}$ *muni de la norme* $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *et* $B = \{x \in l_2 : \|x\| = 1\}$ *on définit* $f : \bar{B} \to \partial B \subset \bar{B}$ *par*

$$f(x) = ((\sqrt{1 - \|x\|^2}), x_1, x_2, ...,).$$

La fonction f *est continue, mais elle n'admet pas de point fixe, car sinon il existerait* $x \in \bar{B}$ *tel que* $f(x) = x$ *ce qui entrainerait que* $\|x\| = \|f(x)\| = 1,\ x_1 = \sqrt{1 - \|x\|^2} = 0$ *et*
$x_1 = x_2 = x_3 = ... = 0,$ *contradiction avec* $\|x\| = 1.$

Soit X *un espace de Banach,* $\Omega \subset X$ *un ouvert borné et* $f : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ *une perturbation compacte de l'identité* $(f = I - K)$.

3.2.3 Théorème de Schauder, $1^{ère}$version

Théorème 3.7. *Soit* B_r *une boule ouverte de centre 0 et de rayon* r *contenant l'origine dans l'espace* X *de Banach, et* F *une application compacte de* B_r *en elle même. Alors l'équation* $Fx = x$ *admet au moins une solution dans* $\bar{B}_r$.

Démonstration. L'opérateur $tF : [0, 1] \times B_r(0, 1) \to X$ une application compacte. Par la propriété d'invariance homotopique du degré, on a :

$$deg(I - tF, B_r, 0) = deg(I, B_r, 0) = 1,$$

à condition que $I - tF \neq 0$ sur ∂B_r, où $t \in [0, 1]$. Donc $Fx = x$ admet au moins une solution.
Soit $B_r = B(0, r)$ et supposons $\exists x_0 \in \partial B_r(||x_0|| = r)$ et $F_0 \in [0, 1]$ tel que $x_0 = t_0 F x_0$

- Pour $t_0 = 0$: $x_0 = 0$ contradiction avec $0 \in B_r$
- Pour $t_0 = 1$: $x_0 = Fx_0$ (F admet un point fixe sur $\partial B_r \subset \bar{B}_r$)
- Pour $t_0 \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} x_0 = t_0 F x_0 &\Longrightarrow ||x_0|| = t_0 ||Fx_0|| \\ &\Longrightarrow ||x_0|| < ||Fx_0|| \\ &\Longrightarrow ||Fx_0|| > r. \end{aligned}$$

contradiction avec $F(B_r) \subset B_r$. □

3.2.4 Théorème de Schauder, 1930, $2^{ème}$version

Théorème 3.8. *Soit* C *un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach* X *et* $K : C \longrightarrow C$ *une application compacte. Alors* K *admet au moins un point fixe.*

Démonstration. **(a)** Première étape : On suppose que $C = B(0,1)$ la boule unité.
S'il existe $x_0 \in \partial C$ tel que $K(x_0) = x_0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, $\forall t \in [0,1]$, le degré $deg(K_t, C, 0)$, où $K_t = I - tK$, est bien défini. En effet, s'il existe $x \in \partial C$, $tK(x) = x$, alors $R = ||x||{=}t||K(x)|| \leq Rt$ car $K(C) \subset C$ et donc $t = 1$, ce qui conduit à une contradiction avec $||K(x)|| = R = ||x||$. Le degré est donc bien défini et vaut, par homotopie, $deg(K, C, 0){=}1$ d'où le résultat.
(b) Deuxième étape C est un convexe, fermé, borné, non vide. On considère une rétraction continue $R : X \longrightarrow \mathcal{C}$ et B une boule contenant C. Soit le diagramme $B \rightarrow^R C \rightarrow^B B$. L'application $(K \circ R)$ est compacte car K est compacte et R bornée. D'après la première étape, l'application $(K \circ R)$ admet un point fixe $x_0 \in B$, $x_0{=}(K \circ R)(x_0)$. Or, $R(x_0) \in C$ et par hypothèse, $K(C) \subset C$; alors $K(R(x_0)) \in C$ et donc $x_0 \in C$.
Dans cet exemple on verra une application du théorème précédent. $\square$

3.2.5 Théorème de Schaefer, 1955

Théorème 3.9. *Soit X un espace de Banach et $K : X \longrightarrow X$ une application compacte. On a alors l'alternative :*
Ou bien, l'équation $tK(x) = x$ admet une solution pour tout $t \in [0,1]$.
Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in X : \exists t \in [0,1], tK(x) = x\}$ est non borné.

Dans la pratique, on montre que S est borné ce qui implique que $tK(x) = x$ admet une solution.

3.3 Applications à un problème aux limites posé sur un intervalle non borné

On peut trouver les résultats de cette section dans [10].
Dans ce chapitre, la théorie du degré topologique combinée avec la méthode de sous et sur solutions[1] *dans un domaine compact est utilisée pour discuter l'existence de solutions bornées pour une classe de problèmes aux limites associées aux équations différentielles non linéaires du second ordre posés sur un intervalle non borné. Le terme non linéaire, qui dépend de la première dérivée, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.*

1. Voir [8], pour plus de détails sur cette méthode.

3.3.1 Position du problème

L'objectif de ce chapitre est de discuter l'existence de solutions bornées pour le problème aux limites du second ordre suivant posé sur la demi droite réelle positive :

$$\begin{cases} -x^{''}(t) + a(t)x(t) = f(t, x(t), x^{'}(t)), & t \in I, \\ \quad x(0) = x_0, \ \ x \text{ bornée sur } [0, +\infty), \end{cases} \tag{3.1}$$

où x_0 est un nombre réel donné et $I = (0, +\infty)$. Le terme non linéaire $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et la fonction $a : I \longrightarrow]0, +\infty[$ est continue et satisfait la condition suivante :

$$(\boldsymbol{H}_0) \quad \exists a_0 \in I, \ a(t) \geq a_0, \ \ \forall t \geq 0.$$

3.3.2 Le problème sur un intervalle tronqué

Soit $b > b_0$ pour $b_0 > 0$ fixé. On considère le problème sur un intervalle borné

$$\begin{cases} -x''(t) + a(t)x(t) = f(t, x(t), x'(t)), & 0 < t < b \\ x(0) = x_0, \ \ x'(b) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Définition 3.1. (a) *On dit que α_b est sous-solution de C^0 du problème (3.2), si $\alpha_b \in C^0([0, b]), \alpha_b'(b)$ existe, et pour tout $t \in [0, b]$, il existe un intervalle ouvert $I_t \subset [0, b]$ avec $t \in I_t$ et une fonction $\alpha_t \in C^2(I_t)$ tel que*

$$\begin{cases} \alpha_t(t) = \alpha_b(t), \\ \alpha_t(s) \leq \alpha_b(s), \ \ s \in I_t, \\ -\alpha_t''(s) + a(s)\alpha_t(s) \leq f(s, \alpha_t(s), \alpha_t'(s)), & s \in I_t, \\ \alpha_b(0) \leq x_0, \ \ \alpha_b^{'}(b) < 0. \end{cases}$$

(b) *On dit que β_b est une sur-solution de C^0 du problème (3.2), si $\beta_b \in C^0([0, b]), \beta_b'(b)$ il existe, et pour tout $t \in [0, b]$, il existe un intervalle ouvert $I_t \subset [0, b]$ avec $t \in I_t$ et une fonction $\beta_t \in C^2(I_t)$ tel que*

$$\begin{cases} \beta_t(t) = \beta_b(t), \\ \beta_t(s) \geq \beta_b(s), \ \ s \in I_t, \\ -\beta_t''(s) + a(s)\beta_t(s) \geq f(s, \beta_t(s), \beta_t'(s)), & s \in I_t, \\ \beta_b(0) \geq x_0, \ \ \beta_b^{'}(b) < 0. \end{cases}$$

3.3.3 Formulation intégrale

Les lemmes suivants concernent le problème linéaire associée à (3.1).

Lemme 3.1. *Soit $a \in C(I)$ satisfaisant ($\boldsymbol{H}_0$). Alors il existe une unique fonction de Green*[2] *$G = G(t,s)$ telle que $u_0(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s)ds$, est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} x''(t) - a(t)x(t) = 1, \quad t \in I, \\ x(0) = 0, \;\; x(t) \text{ bornée sur } (0,+\infty). \end{cases}$$

De plus G, satisfait la propriété de l'intégrabilité suivante :

$$\int_0^{+\infty} |G(t,s)|ds < \frac{1}{a_0}, \; \forall t \geq 0.$$

Lemme 3.2. *Soit $a \in C(I)$ satisfisant ($\boldsymbol{H}_0$), alors pour tout nombre réel x_0, le problème*

$$\begin{cases} x''(t) - a(t)x(t) = 0, \;\; t > 0, \\ x(0) = x_0, \;\; x(t) \text{ bornée sur } (0,+\infty) \end{cases}$$

a une unique solution P_0 satisfaisant :

$$|P_0(t)| \leq |x_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

Ils s'en suit que pour toute fonction continue bornée sur I, le problème

$$\begin{cases} -x''(t) - a(t)x(t) = h(t), \quad t > 0, \\ \;\; x(0) = x_0, \;\; x(t) \text{ bornée sur } (0,+\infty) \end{cases}$$

admet une unique solution u, avec la représentation intégrale suivante

$$u(t) = P_0(t) + \int_0^{+\infty} G(t,s)h(s)ds, \quad t > 0.$$

Finalement, on considère $G(b;t,s)$ la fonction de Green associée au problème :

$$\begin{cases} x''(t) - a(t)x(t) = 0, \quad 0 < t < b, \\ x(0) = 0, \quad x'(b) = 0, \end{cases}$$

la solution du problème (3.1) s'écrit :

$$u(t) = P_0(t) + \int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds.$$

3.3.4 Résultats principaux

Soit $C^k(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est l'espace de fonctions k-fois continûment dérivables et $CB^k(I \times \mathbb{R})$ l'espace de fonctions bornés et continues jusqu'à l'ordre k, pour $x \in CB(I,\mathbb{R})$, on note

$$||x||_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|.$$

2. Pour la définition de la fonction de Green, consulter l'annexe.

Commençons par quelques hypothèses que nous utilisons par la suite :

(H_1) *il existe* $\alpha, \beta \in CB^1(0, \infty)$, $(\alpha \leq \beta)$ *et* $b_0 > 0$, *pour tout* $b > b_0$ *la fonction* $\alpha_b := \alpha_{|_{[0,b]}}$ *et* $\beta_b := \beta_{|_{[0,b]}}$ *sont des sous et sur solution de* C^0 *pour le problème* (3.2) *respectivement et*

$$f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \leq 0 \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)), \quad t \in (0, b). \tag{3.3}$$

(H_2) *il existe* $c \geq 0$, $q : (0, +\infty) \longrightarrow I$ *intégrable et* $\psi : I \longrightarrow [1, +\infty[$ *continues, avec* $\frac{1}{\psi}$ *intégrable sur les intervalles bornés et* $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} = +\infty$ *tel que*

$$|f(t, x, y)| \leq \psi(|y|)(q(t) + c|y|), \ \ \forall (t, x, y) \in D_\alpha^\beta \times \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

où D_α^β *est définit par*

$$D_\alpha^\beta := \{(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \ \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}.$$

(H_3)

$$A := \int_0^{+\infty} a(t) \max(|\alpha(t)|, |\beta(t)|) dt < +\infty.$$

On pose $Q := \int_0^{+\infty} q(t)dt$ *et* $K_0 := \max\{||\alpha||, ||\beta||\}$. *L'hypothèse* (H_2) *assure l'existence d'un nombre réel* K_1, *telle que* $K_1 > \max\{||\alpha'||, ||\beta'||\}$ *et*

$$\int_0^{K_1} \frac{1}{\psi(s)} ds > Q + 2cK_0 + A. \tag{3.5}$$

Pour $t \in [0, b]$, *on définit la fonction tronquée* $\tilde{f}$ *par*

$$\tilde{f}(t, x, y) = \begin{cases} f(t, \beta(t), T_{K_1}(y)), & \beta(t) < x, \\ f(t, x, T_{K_1}(y)), & \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ f(t, \alpha(t), T_{K_1}(y)), & x < \alpha(t), \end{cases}$$

où

$$T_K(y) = \begin{cases} -K, & y < -K, \\ y, & -K < y < K, \\ K, & K < y, \end{cases}$$

est la fonction tronquée au niveau de K. *Par la suite, on considère la famille de problèmes*

$$\begin{cases} -x''(t) + a(t)x(t) = \lambda \tilde{f}(t, x(t), x'(t)), & t \in (0, b), \\ \quad x(0) = x_0, \ x'(b) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\lambda \in [0, 1]$ *est un paramètre.*

3.3.5 Estimation a priori des solutions

Pour appliquer le théorème 3.10, on démontre le résultat qui donne les estimations de solutions du problème (3.6) et de leurs premières dérivées respectives. (càd les estimations à priori dans $C^1[a,b]$).

Proposition 3.1. *Sous l'hypothèse ($\boldsymbol{H}_1$), la solution possible du problème (3.6) satisfait cette estimation*

$$\alpha_b(t) \leq x(t) \leq \beta_b(t),\ \forall t \in [0,b].$$

Démonstration. Par absurde, on suppose qu'il existe un certain $t_0 \in [0,b]$ tel que
$x(t_0) - \alpha_b(t_0) = min_t(x-\alpha_b)(t) < 0$. On a :

(a) $t_0 \neq 0$ puisque $(x-\alpha_b)(0) = x_0 - \alpha_b(0) \geq 0$.

(b) $t_0 \neq b$ puisque $(x-\alpha_b)^{'}(b) = -\alpha_b^{'}(b) > 0$ et si $t_0 = b$, alors $(x-\alpha_b)$ atteint son minimum en $t_0 = b$, alors $(x-\alpha_b)^{'}(b) \leq 0$, d'où la contradiction.

(c) si $t_0 \in (0,b)$. Par définition d'une sous et sur-solution de $\mathcal{C}^0$, il existe un intervalle ouvert I_{t_0} avec $t_0 \in I_{t_0} \subset (0,b)$ et la fonction $\alpha_{t_0} \in \mathcal{C}^2(I_{t_0})$ telle que $\alpha_{t_0}(t_0) = \alpha_b(t_0)$, $\alpha_{t_0}(s) \leq \alpha_b(s)$ et $\alpha_{t_0}^{''}(s) - a(s)\alpha_{t_0}(s) + f(s, \alpha_{t_0}(s), \alpha_{t_0}^{'}(s) \geq 0$. Par conséquent, on a l'estimation :

$$\begin{aligned}
(x^{''} - \alpha_{t_0}^{''})(t_0) &= a(t_0)x(t_0) - \lambda\tilde{f}(t_0, x(t_0), x^{'}(t_0)) - \alpha_{t_0}^{''}(t_0) \\
&\leq a(t_0)x(t_0) - \lambda\tilde{f}(t_0, x(t_0), x^{'}(t_0)) - a(t_0)\alpha_{t_0}(t_0) + f(t_0, \alpha_{t_0}(t_0), \alpha_{t_0}^{'}(t_0)) \\
&= a(t_0)(x-\alpha_b)(t_0) - \lambda\tilde{f}(t_0, x(t_0), x^{'}(t_0)) + f(t_0, \alpha_b(t_0), \alpha_b^{'}(t_0)) \\
&= a(t_0)(x-\alpha_b)(t_0) + (1-\lambda)f(t_0, \alpha_b(t_0), \alpha_b^{'}(t_0)) < 0,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de la première inégalité dans (3.3).
Puisque la fonction $x - \alpha_{t_0}$ réalise son minimum en t_0, on en déduit que

$$(x^{''} - \alpha_{t_0}^{''})(t_0) \geq 0,$$

d'où la contradiction. De manière similaire, on peut prouver que $x(t) \leq \beta_b(t)$ pour tout $t \in [0,b]$. □

Proposition 3.2. *Sous les conditions ($\boldsymbol{H}_1$)-($\boldsymbol{H}_3$), la solution possible pour le problème (3.6) satisfait cette estimation*

$$||x^{'}|| \leq K_1,$$

où K_1 est définie dans (3.5).

Démonstration. Soit x la solution du problème (3.6). Par l'absurde supposons qu'il existe $\tau \in (0,b)$ tel que $|x^{'}(\tau)| \geq K_1$. Alors, il existe t_0, t_1 $(t_0 < t_1)$ telle que l'une de ces situations suivantes a lieu :

$$\begin{cases} x^{'}(t_0) = 0, \;\; x^{'}(t_1) = K_1, \quad \text{et} \quad 0 < x^{'}(t) < K_1, \quad \text{pour } t \in (t_0, t_1); \\ x^{'}(t_0) = K_1, \;\; x^{'}(t_1) = 0, \quad \text{et} \quad 0 < x^{'}(t) < K_1, \quad \text{pour } t \in (t_0, t_1); \\ x^{'}(t_0) = 0, \;\; x^{'}(t_1) = -K_1, \quad \text{et} \quad -K_1 < x^{'}(t) < 0, \quad \text{pour } t \in (t_0, t_1); \\ x^{'}(t_0) = -K_1, \;\; x^{'}(t_1) = 0, \quad \text{et} \quad -K_1 < x^{'}(t) < 0, \quad \text{pour } t \in (t_0, t_1). \end{cases}$$

Par simplification, on va étudier uniquement le premier cas. Par la proposition 3.1, puisque $x^{'}(t) > 0$ sur $(t_0 < t_1)$, on a :

$$\begin{aligned} x^{''}(t) - a(t)x(t) &\leq |x^{''}(t) - a(t)x(t)| \\ &= \lambda|\tilde{f}(t, x(t), x^{'}(t))| \\ &= \lambda|f(t, x(t), x^{'}(t))| \\ &\leq \psi(x^{'}(t))(q(t) + cx^{'}(t)). \end{aligned}$$

puisque $\psi(s) \geq 1,$ pour tout $s \in I$, on déduit que

$$\begin{aligned} x^{''}(t) &\leq \psi(x^{'}(t))(q(t) + cx^{'}(t)) + a(t)x|(t)| \\ &\leq \psi(x^{'}(t))(q(t) + cx^{'}(t) + a(t)x|(t)|) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{x^{''}(t)}{\psi(x^{'}(t))} \leq q(t) + cx^{'}(t) + a(t)|x(t)|.$$

Par intégration de t_0 à t_1

$$\begin{aligned} \int_0^{K1} \frac{ds}{\psi(s)} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{x^{''}(t)}{\psi(x^{'}(t))} dt \\ &\leq \int_0^{K1} [q(t) + cx^{'}(t) + a(t)\max\{|\alpha_t|, |\beta_t|\}]dt \leq Q + 2cK_0 + A, \end{aligned}$$

d'où la contradiction avec la définition de K_1 dans (3.5). □

3.3.6 Le problème sur la demi droite

Théorème 3.10. [10] *Supposons que les conditions* ($\boldsymbol{H}_0$)-($\boldsymbol{H}_3$) *soient satisfaites, alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution* x*, telle que pour tout* $b > 0$,

$$\alpha_b(t) \leq x(t) \leq \beta_b(t), \; \forall t \in [0, b].$$

De plus, si f est bornée, alors x admet la représentation suivante :

$$x(t) = P_0(t) + \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds.$$

Démonstration. Dans cette démonstration on utilise le théorème du degré topologique de Leray Schauder pour montrer l'existence de la solution sur un intervalle borné $[0, b)$, puis le procédé de la diagonalisation est employé pour assurer que la solution peut *être* prolongée sur $[0, \infty)$.

Etape 1 Le problème (3.2) admet au moins une solution sur $C^1[0, b]$.

On définit l'opérateur linéaire $L : D(L) \longrightarrow C^0[0, b]$, par $Lx(t) = x''(t) - a(t)x(t)$ avec $D(L) = \{x \in C^2[0, b] : x(0) = x_0,\ x'(b) = 0\}$ et l'opérateur de Nemytskii $N : C^1[0, b] \longrightarrow C^0[0, b]$, par $Nx(t) = \tilde{f}(t, x(t), x'(t))$. Remarquons que résoudre le problème (3.6) est équivalente à prouver l'existence d'un point fixe pour l'opérateur non linéaire abstrait $H_\lambda = \lambda L^{-1} N$ pour $\lambda = 1$, où l'application

$$H_\lambda : C^1[0, b] \longrightarrow C^1[0, b]$$

est définit par

$$(H_\lambda x)(t) = \lambda_{pb}(t) + \lambda \int_0^b G(b; t, s) \tilde{f}(s, x(s), x'(s)) ds. \tag{3.7}$$

On considère l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \mathcal{C}^1[0, b] : ||x||_1 < K\}$$

avec $K := K_0 + K_1 + 1$ et

$$||x||_1 = \max\left(\sup_{0 \le t \le b} |x(t)|,\ \sup_{0 \le t \le b} |x'(t)| \right).$$

Il est claire que H_λ est compact (voir Corduneneanu et Fréchet -Kolmogorov). Par la proposition 3.1 et 3.2 et la définition de Ω, H_λ n'admet pas de point fixe sur $\partial\Omega$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Puisque $H_0 = 0$, donc $1 = deg(I - H_0, \Omega, 0) = deg(I - H_1, \Omega, 0)$. Par conséquent pour $H_1 := L^{-1}N$ a un point fixe sur Ω, i.e. Le Problème (3.6) admet au moins une solution $x_b \in C^1[0, b]$ pour $\lambda = 1$. Par les propositions 3.1 et 3.2 et la définition de $\tilde{f}$, on obtient que $f(t, x_b(t), x_b'(t)) = \tilde{f}(t, x_b(t), x_b'(t))$, x_b est la solution du problème (3.2).

Etape 2 Le problème (3.1) admet au moins une solution dans $C^1[0, \infty)$.

Nous allons utiliser l'argument de diagonalisation. Soit x_b la solution du problème (3.2). On définit

$$u_b(t) = \begin{cases} x_b(t), & 0 \le t \le b, \\ x_b(b), & t > b. \end{cases}$$

Remarquons premièrement que K est indépendant de b, de plus, la famille $\{u_b$, pour $b \in (0, \infty)\}$ est uniformément bornée dans $C^1[0, \infty)$. De plus, pour tout $t_0, t_1 \in (0, \infty)$ $(t_0 < t_1)$, on a

$$\begin{aligned} u_b^{'}(t_0) - u_b^{'}(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} u_b^{''}(s)ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} [a(s)u_b(s) + \psi(|u_b^{'}(s)|) \cdot (q(t) + c|u_b^{'}(s)|]ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} a(s)\max\{|\alpha(s)|, |\beta(s)|)\}ds + K_2 \int_{t_0}^{t_1} q(s)ds \\ &\quad +cK_1K_2(t_1 - t_0), \end{aligned}$$

où $K_2 := \sup\limits_{0 \leq s \leq K_1} \psi(s)$. Soit $\{b_i\}$ une suite croissante de nombres réels telles que $\lim\limits_{i \longrightarrow \infty} b_i = +\infty$. La famille $\{u_{b_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{C}^1[0, b_1]$, donc elle est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0[0, b_1]$. De plus, elle est équicontinue d'après l'inégalité précédente, $(\mathbf{H}_3)$ et le fait que q est intégrable. Ce qui implique que $\{u_{b_i}^{'}\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0[0, b_1]$.
Le lemme d'Ascoli Arzela garantit l'existence d'une sous suite $\triangle_1 \subset N^*$ et une fonction $\omega_1 \in \mathcal{C}^1[0, b_1]$ telle que la suite $\{u_{b_i}^j\}$, pour $i \in \triangle_1$, converge uniformément à ω_1^j sur $[0, b_1]$, pour $j = 0, 1$.

Considérons maintenant la famille $\{u_{b_i}\}$, $i \in \triangle_1 \backslash \{1\}$ définit sur l'intervalle $[0, b_2]$. Par le même argument, il existe une sous suite $\triangle_2 \subset \triangle_1 \backslash \{1\}$ et une fonction $\omega_2 \in \mathcal{C}^1[0, b_2]$ telle que la suite $\{u_{b_i}^j\}$, $i \in \triangle_2$ converge uniformément à ω_2^j sur $[0, b_2]$, pour $j = 0, 1$.

Par induction, on obtient, pour tout entier k, l'existence de $\triangle_k \subset \triangle_{k-1} \backslash \{k-1\}$ et la fonction $\omega_k \in \mathcal{C}^1[0, b_k]$ telle que $\{u_{b_i}^j\}$, $i \in \triangle_k$ converge uniformément à ω_k^j sur $[0, b_k]$, pour $j = 0, 1$. Notons $\omega_k = \omega_{k-1}$ sur $[0, b_{k-1}]$. Finalement, définit la fonction

$$x(t) = \bigcup_{k \in N} \omega_k(t).$$

Alors x est la solution du problème (3.1) puisque $x(0) = \omega_1(0) = x_0$, $||x|| < K$. De plus, pour tout t fixé $t \in (0, \infty)$, on peut choisir $b_i > t$. Alors

$$x^{''}(t) = w_{b_i}^{''}(t) = f(t, \omega_{b_i}(t), \omega_{b_i}^{'}(t)) = f(t, x(t), x^{'}(t))),$$

ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Exemple 3.2. *On considère le problème :*

$$\begin{cases} -x^{''}(t) + a(t)x(t) = x(t) - x^{'}(t), \ t > 0, \\ x(0) = 1, \ \ x \textit{ bornée sur } [0, +\infty), \end{cases} \tag{3.8}$$

Avec

$$a(t) = \begin{cases} t + 1, & t \geq 2 \\ 3, & 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Alors $a(t) \geq a_0 = 3$ *et les fonctions* $\alpha(t) = -e^{-t}$, $\beta(t){=}e^{-t}$ *sont des sous et sur solutions respectivement. Alors les hypothèses (*$\boldsymbol{H}_0$*)-(*$\boldsymbol{H}_3$*) sont satisfaites. Par conséquent, le problème* (3.8) *a au moins une solution* x *tel que*

$$-e^{-t} \leq x(t) \leq e^{-t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

En particulier, on sait que la $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t){=}0$.

Annexes

4.4 Fonction de Green

On peut trouver les résultats de cette section dans [6].

4.4.1 Existence et unicité de la fonction Green

Considérons les équations de Sturm Liouville linéaires sur un intervalle $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$

$$(H) : (pu^{'})^{'} + qu = 0, \ (NH) : (pu^{'})^{'} + qu = f,$$

associées aux conditions aux bords :

$$(CB)_h \begin{cases} a_1 u(a) + a_2 u^{'}(a) = 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u^{'}(b) = 0, \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} a_1 u(a) + a_2 u^{'}(a) = \gamma, \\ b_1 u(b) + b_2 u^{'}(b) = \delta, \end{cases}$$

où $\gamma, \delta, a_1, a_2, b_1, b_2$ *sont des constantes réelles telles que* $|a_1| + |a_2| \neq 0$ *et* $|b_1| + |b_2| \neq 0$.

Théorème 4.11. *On suppose que le problème* $(H) - (CB)_h$ *admet une solution unique triviale nulle, alors il existe une et une seule fonction* G *(dite de Green), telle que pour toute fonction* f*, la solution* u *du problème* $(NH) - (CB)_h$ *s'écrit d'une façon unique sous la forme*

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds.$$

De plus, G *vérifie les propriétés suivantes :*

a) G *est continue sur* $[a, b]^2$ *;*

b) G *est symétrique* $(G(t, s) = G(s, t) \ \forall t, s \in [a, b])$;

c) $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s)$ *est continue pour* $t \neq s$;

d) $\frac{\partial G}{\partial t}(u^+, u) - \frac{\partial G}{\partial t}(u^-, u) = \frac{1}{p(u)}$ *pour tout* $u \in [a, b]$;

e) *La fonction partielle* $t \longrightarrow G(t, s)$ *est solution de l'équation* (H) *pour tout* $t \neq s$;

f) *La fonction partielle* $t \longrightarrow G(t, s)$ *vérifie les conditions* $(CB)_h$ *pour tout* $s \in [a, b]$.

Et pour la résolution du problème $(NH)-(CB)_{nh}$, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.12. *Supposons que le problème $(H)-(CB)_h$ admet une solution unique triviale nulle, et soit G la fonction de Green associée.*
On désigne par ψ_1 et ψ_2 les solutions respectives des problèmes :

$$\begin{cases} (H), \\ a_1\psi_1(a) + a_2\psi_1^{'}(a) = 1, \\ b_1\psi_1(b) + b_2\psi_1^{'}(b) = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (H), \\ a_1\psi_2(a) + a_2\psi_2^{'}(a) = 0, \\ b_1\psi_2(b) + b_2\psi_2^{'}(b) = 1, \end{cases}$$

alors le problème non homogène $(NH)-(CB)_{nh}$ admet une unique solution qui s'écrit sous la forme :

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds + \gamma\psi_1 + \delta\psi_2.$$

Théorème 4.13. *On suppose que le problème $(H)-(CB)_h$ admet une solution non triviale φ_0, alors le problème non homogène $(NH)-(CB)_h$ admet une solution si et seulement si $\int_a^b f(t)\varphi_0(t)dt = 0$.*
Dans ce cas, il existe une fonction G continue (dite fonction de Green généralisée), telle qu'une solution du problème $(H)-(CB)_h$ s'écrit sous la forme :

$$u_1(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$

et toute autre solution s'écrit :

$$u(t) = u_1(t) + k\varphi_0(t),\ k \in \mathbb{R}.$$

De plus G vérifie les conditions a, b, c, d et
g) *la fonction partielle $g : t \longrightarrow G(t,s)$ est solution de l'équation $(pg^{'})^{'} + qg = -\varphi_0(t)\varphi_0(s)$ pour tout $t,\ t \neq s$;*
h) $\int_a^b G(t,s)\varphi_0(s)ds = 0.$

4.5 Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 4.14. [6] *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ supposons que :*

i) *$f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$ p.p dans Ω*

ii) *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) \ p.p \ dans \ \Omega.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\| \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

4.6 Autres définitions du degré topologique

La définition du degré peut s'ennoncer autrement. En effet, soit $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *une famille de fonctions positives telles que :*

i) *supp* $\varphi_\epsilon \subset B_\epsilon(0)$

ii) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(x)dx = 1$

D'après la proposition 2.1, *en posant* $E = f^{-1}(\{y_0\}), E$ *est finie* $\Rightarrow \exists x_1, x_2, ..., x_n, f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Alors, si* ϵ *est petit, le support de l'application*

$$x \longmapsto \varphi_\epsilon(f(x) - y_0)$$

admet n *composantes connexes* $U_1, U_2, ..., U_N$ *tel que* $x_i \subset U_i \quad \forall i = \overline{1, N}$ *(les composantes connexes sont disjointes deux à deux), donc :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} supp \ \varphi_\epsilon(f(x) - y_0)(J_f)(x)dx = \sum_{i=k}^{N} \int_{U_k} supp \ \varphi_\epsilon(f(x) - y_0)J_f(x)dx$$

$J_f(x) = SgnJ_f(x)|J_f(x)|$ *donc :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} supp \ \varphi_\epsilon(f(x) - y_0)(J_f)(x)dx = \sum_{i=k}^{N} \int_{U_k} supp \ \varphi_\epsilon(f(x) - y_0)|(J_f)(x)|SgnJ_f(x)dx$$

On veut montrer que :

$$deg(f, \Omega, y_0) = \int_{\Omega} supp \ \varphi_\epsilon(f(x) - y_0)J_f(x)dx.$$

Posons :

$$\begin{aligned} U &= f(x) - y_0 \\ dU &= |J_f(x)|dx \Rightarrow dx = dU/|J_f(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi_{\epsilon}(f(x)-y_0)J_f(x)dx &= \int_{\Omega} \varphi_{\epsilon}(f(x)-y_0)|J_f(x)|SgnJ_f(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{N} \int_{U_k} \varphi_{\epsilon}(f(x)-y_0)|J_f(x)|SgnJ_f(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{N} \int_{U_k} \varphi_{\epsilon}(U)SgnJ_f(x)dU \\
&= \sum_{k=0}^{N} SgnJ_f(x) \int_{U_k} \varphi_{\epsilon}(U)dU \ \ car\ supp\ \varphi_{\epsilon} \subset \Omega \\
&= \sum_{k=0}^{N} SgnJ_f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\epsilon}(U)dU \\
&= \sum_{k=0}^{N} SgnJ_f(x) \\
&= deg(f,\Omega,y_0).
\end{aligned}$$

Définition 4.2. *Soit $U \in \mathbb{R}^n$ un ouvert et μ une n-forme différentiable de $\mathcal{C}^{\infty}$ à support compact $K : K \subset \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \mu = 1$, le degré est défini par*

$$deg(f,\Omega,y_0) = \int_{\omega} \mu \circ f$$

Pour que cette définition soit legitime, on montre qu'ellle est indépandante du choix de μ. On prend une autre forme différentielle γ tel que supp$\gamma \subset K \subset \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma = 1$, on doit démontrer que $\int_{\Omega} \gamma \circ f = \int_{\Omega} \mu \circ f$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mu \circ f - \int_{\Omega} \gamma \circ f &= \int_{\Omega} (\mu \circ f - \gamma \circ f) \\
&= \int_{\Omega} (\mu - \gamma) \circ f.
\end{aligned}$$

Mais $\int_{\mathbb{R}^n} \mu = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma = 1$, alors $\int_{\mathbb{R}^n} (\mu - \gamma) = 0$ et il existe ω une $(n-1)$-forme différentielle telle que $d\omega = \mu - \gamma$(ω est une $(n-1)$ forme donc $d\omega$ est une n-forme). Grâce à la formule de Stokes, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mu \circ f - \int_{\Omega} \gamma \circ f &= \int_{\Omega} (\mu - \gamma) \circ f \\
&= \int_{\Omega} d(\omega \circ f) \\
&= \int_{\partial\Omega} \omega \circ f \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\int_\Omega \mu \circ f = \int_\Omega \gamma \circ f$, *d'òu :*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \int_\omega \mu \circ f.$$

Définition 4.3. *Soit* $\mu : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}_p$ *une n-forme différentielle de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *à support compact* $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ *contenant* y_0 *et telle que* $\int_{R^n} \mu$=1. ($\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ *désigne l'espace des formes linéaires, continues et alternées sur* $\mathbb{R}^n$). *On pose* $deg(f, \Omega, y_0) = \int_\mu \mu \circ f$.

4.7 Théorème de Fubini

Théorème 4.15. *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue alors*

$$\int\int_D f(X, Y) dX dY \quad = \quad \int_a^b \left(\int_{c(X)}^{d(X)} f(X, Y) dY \right) dX.$$

Si D *est décrit avec deux applications continues* , $[a, b] : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que*

$$D = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \ c \leq Y \leq d, \ a(Y) \leq X \leq b(Y)\}$$

alors

$$\int\int_D f(X, Y) dX dY \quad = \quad \int_c^d \left(\int_{a(Y)}^{b(Y)} f(X, Y) dX \right) dY.$$

4.8 Inversion Locale

Théorème 4.16. *Soient* E, F *deux espaces de Banach* $U \subset E$ *ouvert* $f : U \longrightarrow F$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1, a \in U$ *tel que* df_a *soit continue et inversible et donc* df_a^{-1} *est continue*
Alors, il existe un voisinage ouvert V *de* a *et un voisinage ouvert* W *de* $f(a)$ *tels que :*
a) La restriction de $f_{|V}$ *de* f *à* V *est une bijection de* V *sur* W.
b) L'application inverse $g : W \to V$ *est continue.*
c) g *est de classe* C^1 *et* $\forall x \in W, dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

Théorème 4.17. ***(théorèmes du point fixe de contraction de Banach)***
Soit X *un espace de Banach et* $T : X \to X$ *une application contractante (i.e* T *est lipschitzienne avec la constante de Lipschitz* $\alpha \in [0, 1]$*), Alors l'application* T *admet un unique point fixe dans* X.

Conclusion générale

Ce mémoire a été consacré à l'étude d'une méthode de résolution de quelques équations différentielles ordinaires du second ordre notamment non linéaires, il s'agit du degré topologique.

Nous avons entammé notre étude par le degré de Brouwer en dimension finie, ensuite nous avons exploré le degré de Leray-Schauder généralisant à la dimension infinie de celle de Brouwer.

La méthode sous et sur solutions combinée avec le degré topologique a été utilisée. Pour la compacité d'opérateurs, nous avons utilisé le théorème d'Ascoli-Arzéla sur des intervalles bornés.

L'argument de diagonalisation a été utilisé pour assurer que nos solutions peuvent être prolongées à l'intervalle infini $[0, \infty[$.

Nous espérons que ce mémoire aidera le lecteur interessé à approfondir ses connaissances et à adopter la bonne méthode pour traiter les problèmes aux limites sur les domaines non bornés.

Bibliographie

[1] C. Avramescu, Existence problems for homoclinic solutions, Abstr. Appl. Anal. 7(1), 1-27, (2002).

[2] C. Avramescu, Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires, Ann. Math. Pura, 481, 147-168, (1969).

[3] C. Avramescu and C. Vladimirescu, Homoclinic solutions for linear and linearisable ordinary differential equations, Abstr. Appl. Anal. 5(2), 65-85, (2000).

[4] L.E.J. Brouwer, Uber abbildung von Mannigfaltigkeitein. Math. Ann. 71, 97-115, (1912).

[5] P. Böhl, Uber die bewegung eines machaniscsches systems in der nöhe einer Gleichgewichtslage. J. Reine Angew. Math. (1904).

[6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et application, Masson, Paris. (1983).

[7] C. Corduneanu, Integral Equations and Stability of Feedback Systems, Academic Press, New york. (1973).

[8] C. De Coster and P. Habets, Two Point Boundary value problems : Upper and Lower solutions, Mathematics in Sc and Eng, Elsevier. 205, (2006).

[9] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985).

[10] S. Djebali and S. Zahar, Bounded solutions for a derivative dependent boundary value problem on the half-line, Dynamical Systems and Applications. 19, 545-556, (2010).

[11] G. Dinca and J. Mawhin, Brouwer Degre and Application.(pdf free online), 334p (2009). (To appear)

[12] J. Dugundji and A. Granas, Fixed Point Theory, Monografie Matematyczne, Warsaw. (1982).

[13] J. Hadamard, Sur quelques applications de l'indice de Klonecker ; dans introduction à la théorie des fonctions d'une variable, par J. Tannery, Hermann, Paris. II, 875-915, (1910).

[14] H. K. Pathak, An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory, Springer. (2018).

[15] *E. Heinz, An elementary analytic theory of the degree of mappings in n-dimensional-spaces, J. Math. Mech. 8, 231-247. (1959).*

[16] *A. Granas, R. B Gunther, J. W. Lee and D. O'Regan, Boundary value problems on infinite intervals and semiconductor devises, J. Math. Anal.Appl. 116, 335-348, (1986).*

[17] *L. Krocker, Uber systeme von funktionen mehrer variabel n, Monatsberichte. Acad. Wiss. Berlin. 159-193, 688-698 (1869).*

[18] *M. A. Krasnosel'skii, Positive solutions of Operator Equations, Noordhoff, Groningen, The Netherlands. (1964).*

[19] *J. Leray et J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, Ann. scien. de l'E.N.S* 3^{e} *serie, tome. 51, 45-78, (1934).*

[20] *J. Mawhin, Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, In NSF-CBMS Regional conference Series in Math, Amer. Math. Soc, Providence, RI. 40, (1979).*

[21] *J. Mawhin, Leray-Schauder Degree : a half century of extension and applications, J. of the J. Schauder Center. 14, 195-228, (1999).*

[22] *M. Nagumo, A theory of degree based on infinitesimal analysis. Amer. J. Math. 73, 485-496, (1951).*

[23] *M. Nagumo, Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. 73, 497-511, (1951).*

[24] *K. Otared, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux Problèmes Elliptiques, Institut Elie Cartan, Université de Nancy I. (1993).*

[25] *D. O'Regan, Y.J. Cho, and Y.Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Boca Raton. (2006)*

[26] *H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, GauthiersVillars, Paris. 3, (1892).*

[27] *D. R. Smart, Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press. (1974).*

[28] *B. Yan, D. O'Regan and R. P. Agarwal, Positive solutions to singular boundary value problems with sign changing nonlinearities on the half-line via upper and lower solutions, Acta Math. Sinica. English series. 23(8), 1447-1456, (2007) .*

[29] *E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, Berlin, New York. I, (1986).*