Université Abderrahmane Mira De Bejaia

Faculté Des Sciences Exactes

Département De Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

Présenté par :

ARKOUB Hanane

BOUCHOUCHA Kenza

THÈME

Etude de l'existence de solutions pour certains problèmes aux limites non locaux associés à des E.D.O. non linéaires

Devant le jury composé de :

Mme.	F. TALBI-BOULAHIA	MCA	U. BEJAIA	Présidente
Mme.	S. ALLILI-ZAHAR	MCB	U. BEJAIA	Examinatrice
Mme.	K. KHELOUFI-MEBARKI	MCA	U. BEJAIA	Promotrice

Juin 2019

Remerciements

Avant tout, nous tenons à remercier Dieu le tout puissant de nous avoir accordé la volonté et la patience pour accomplir ce travail à terme.

Nous exprimons nos remerciements et notre profonde gratitude :

A notre promotrice ***Mme K. KHELOUFI****, pour l'honneur qu'elle nous a fait de nous encadrer, pour la qualité de son encadrement, sa disponibilité, ses conseils, ses compétences scientifiques, qui nous ont permis d'élargir nos connaissances.*

Nous remercions également les membres du jury :

Mme F. TALBI *pour l'honneur qu'elle nous fait de présider le jury et d'évaluer ce travail.*

Mme S. ALLILI *pour l'honneur qu'elle nous fait d'examiner le mémoire.*

Nos remerciements vont aussi pour tous les enseignants qui ont contribués à notre formation de la première année à ce jour.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin.

Dédicaces

Avec mes sentiments de gratitudes les plus profonds, Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents Said et Djida à qui je dois tous dans cette vie.

Merci pour votre éducation et pour les principes que vous m'avez appris,

votre patience avec moi, votre soutien moral et physique, vos précieux conseils et votre amour ;

vous êtes les plus beaux parents au monde que Dieu vous protège et vous garde en bonne santé.

À mon très cher fiancé Soufiane, pour ses encouragements, sa fidélité et sa gentillesse.

Ainsi qu'à toute sa famille

À mes très chers frères Boualem, Nassim, Abdelkader, Rafik, Abderrahmane et leurs épouses.

À mes très cheres soeurs Salima, Naima et son époux.

À mes très chers neveux et nièces.

À toute ma famille sans exception et mes amies en particulier Souad.

À ma binôme, ma copine kenza.

*À tous les étudiants de la promotion AM (*2019*).*

Hanane.

Dédicaces

En signe de respect et de reconnaissance je dédie ce

modeste travail :

À mon père, mon ange gardien, la source de ma joie et mon bonheur, celui qui s'est

toujours sacrifié pour me voir réussir.

À ma mère, la lumière de ma vie, qui m'a appris comment combattre et affronter la vie avec

ses précieux conseils.

J'espère qu'un jour mon bon Dieu me donne l'occasion de les honorés et

leur rendre ce qu'ils méritent.

À mon fiancé Slimane, pour son encouragement, son soutien moral, son optimisme et

sa présence à mes côtés, durant les moments les plus difficiles.

À mon frère, Sif Eddine, ma joie et ma fierté.

À ma soeur Lydia, pour son aide dans le parcours de ma vie,

et ma nièce Esraa.

Que Dieu les garde et les protège tous.

À toute ma famille et mes amies en particulier Zahoua.

À ma binôme, ma copine Hanane.

À tous les étudiants de la promotion AM (2019).

Kenza.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
L	Opérateur linéaire continu.
$D(L)$	Domaine de l'opérateur L.
$Ker(L)$	Noyau de l'opérateur L.
I	Application identité .
$p.p$	presque partout.
$\frac{\partial(.)}{\partial t}$	La dérivée partielle par rapport a t.
$\overline{\Omega}$	Adhérence ou fermeture de Ω.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω.
(a,b)	Intervalle ouvert .
$\mathrm{L}^p(\Omega)$	$\{x : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et $\int_\Omega \lvert x(t)\rvert^p dt < \infty\},\ 1 \leq p < \infty$.
$\lVert x\rVert_{L^p}$	$\left(\int_\Omega \lvert x(t)\rvert^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
$\mathrm{C}^k(\Omega, J)$	L'ensemble des fonctions $f : \Omega \to J$, k fois continuement dérivables.
$\mathrm{C}^k(\Omega)$	$\mathrm{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$.
$\mathrm{C}_b(\Omega)$	L'espace de toutes les fonctions continues bornées sur Ω.
$\mathrm{C}^1_\infty(\Omega)$	$\{x \in \mathrm{C}^1(\Omega) : \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x'(t)$ existent$\}$.
$\lVert x\rVert_\infty$	$\{\sup \lvert x(t)\rvert,\ t \in \Omega\}$.
$W^{k,p}(\Omega)$	$\{x \in C^{k-1}(\Omega)$ tel que $x^{(\alpha)} \in L^p(\Omega),\ 1 \leq \alpha \leq k\}$.
$x^{(\alpha)}$	La dérivée de x d'ordre α.
$\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$	$\{x \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) : \lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ existe$\}$.

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude de quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles du second ordre posées sur des intervalles bornés ou non bornés de $\mathbb{R}$, où les conditions aux bords sont non locales. Des diffcultées nouvelles apparaissent quant à la résolution de ce type de problèmes, notamment leurs formulations intégrales, et font appel à quelques techniques nouvelles par comparaison avec les problèmes aux limites classiques où les conditions aux bords sont souvent de type Sturm-Liouville.

L'objectif principal de ce mémoire est de mettre le point sur l'utilisation de la théorie du point fixe dans les espaces de Banach, soit sous forme de théorèmes de points fixes ou sous forme des méthodes topologiques liées au degré topologique, pour résoudre de tels problèmes.

Dans les domaines de la physique, de la chimie ou de la biologie, de nombreux modèles sont régis par des problèmes aux limites associés à des équations différentielles considérées sur des intervalles bornés ou non bornés avec différents types de conditions aux bords. Dans certains de ces problèmes, les conditions aux bords sont donnés localement. Dans d'autres cas, les conditions sont non locales, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas uniquement des points considérés mais d'autres points ou d'une fonction linéaire ou non linéaire de l'inconnue. Il est parfois préférable d'imposer des conditions non locales car ces dernières peuvent s'avérer être plus précises. Par exemple, si dans le problème classique de Robin :

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \;\; x'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

la condition locale $x'(1) = 0$ est remplacée par la condition non locale $x(1) = x(\eta)$, où $\eta \in (0,1)$, alors le problème

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta), \end{cases} \tag{2}$$

est un problème aux limites non local. La condition non locale $x(1) = x(\eta)$, peut s'écrire comme une "différence" $x(\eta) - x(1) = 0$. Dans le processus d'expérimentation scientifique et de calcul numérique, il est plus facile de determiner la valeur de $\frac{x(\eta)-x(1)}{\eta-1}$ que celle de $x'(1)$.

Il est à noter que l'étude des problèmes aux limites à multi-points a été initiée par Il'in et Moiseev [14] en 1987. Gupta [8] a ensuite étudié des problèmes aux limites non linéaires à trois points de non résonance. Depuis lors, plusieurs extensions des problèmes aux limites non linéaires à multi-points (de résonance ou de non résonance) ont été étudiés par plusieurs auteurs. Les méthodes utilisées sont les théorèmes de continuation de Leray-Schauder, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder ou encore la théorie du degré de coïncidence de Mawhin.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier est entièrement consacré à la présentation de quelques notions préliminaires dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire, à savoir : quelques outils de base d'analyse fonctionnelle, le degré topologique de Leray-Schauder, quelques éléments de la théorie du point fixe, notament les théorèmes de continuation de type Leray-Shauder, théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii sur les cônes (pour la recherche des solutions positives).
Nous avons aussi jugé utile de rappeler quelques notions sur la fonction de Green concernante le problème de Sturm-Liouville. Nous avons aussi présenté les méthodes de calcul de la fonction de Green correspondant à chaque problème aux limites considéré dans ce mémoire ; ceci nous permet également de transformer ces problèmes en des problèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre est constitué de deux parties, dont nous exposerons des conditions suffisantes pour l'existence de solutions pour deux problèmes de non résonance à trois points.

Le premier problème est défini sur un intervalle borné comme suit :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1. \\ x(0) = 0, \;\; x(1) = x(\eta), \end{cases}$$

où le paramètre $\eta \in (0,1)$ et $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory.
Ce problème aux limites peut être réduit à l'équation opérationnelle

$$Lx + Nx = 0,$$

où $L : D(L) \subset X \to Y$ est un opérateur linéaire et pour $x \in D(L)$, $Lx = -x''$ et $N : X \to Y$ est un opérateur non linéaire telle que $Nx(t) = f(t, x(t), x'(t))$, $t \in [0,1]$, avec X et Y sont des espaces de Banach appropriés et où les conditions aux limites sont utilisées pour définir le domaine $D(L)$ de L. Nous utiliserons les inégalités de Wirtinger et des conditions de croissance sur la non linéairité f afin d'obtenir les estimations á priori nécessaires pour utiliser une variante du théorème de continuation de Leray-Schauder.
Le second problème est défini sur la demie droite positive comme suit :

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ x(0) = \alpha x(\eta), \;\; \lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = 0, \end{cases}$$

où $\alpha \; et \; \eta$ sont des paramètres réels vérifiant $\alpha \neq 1$, $0 < \eta < +\infty$,
et $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction S-Carathéodory.
L'existence de solutions bornées est établi en utilisant le théorème de continuation de Leray-Schauder en passant par la formulation intègrale de ce problème à l'aide de la fonction de Green.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressées à l'étude de l'existence de solutions positives pour le système d'équations différentielles du second ordre associées à des conditions aux bords intégrales suivant :

$$\begin{cases} x_1''(t) + f(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ x_2''(t) + f(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} x_i'(t) = \int_0^{+\infty} g_1(s)x_1(s)ds, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} x_i'(t) = \int_0^{+\infty} g_2(s)x_2(s)ds, \end{cases}$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction L^1-Carathéodory et $g_i \in L^1[0, +\infty)$. L'approche utilisée pour répondre aux questions considérées est basée sur l'application d'une des variantes du théorème du point fixe de Krasnosel'skii.

Le quatrième chapitre, est consacré à l'étude du problème aux limites de résonance à trois points suivant :

$$\begin{cases} x^{''}(t) = f(t, x(t)),\ t \in (0, 1), \\ x^{'}(0) = 0,\ x(\eta) = x(1), \end{cases}$$

où $f : [0, 1] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\eta \in (0, 1)$.

La recherche de solutions positives multiples pour ce problème est basée sur le théorème du Guo-Krasnosel'skii.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons certains notions et concepts, essentiels au développement des autres chapitres. Nous rappellerons certaines définitions ainsi que certains théorèmes d'analyse fonctionnelle pour une meilleure présentation des résultats de notre travail.

1.1 Quelques outils de base

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soient E un espace de Banach réel et K un sous ensemble non vide, fermé et convexe de E. K est dit un cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

(i) $x \in K, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$ *;*

(ii) $x \in K$, $-x \in K \Rightarrow x = 0$.

Définition 1.2. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $Tx = x$.*

Définition 1.3. *Un problème aux limites est dit résonant (ou de résonance), si le problème linéaire homogène associé admet une solution non nulle.*
Dans le cas contraire, il est dit problème non résonant (ou de non résonance).

Exemple 1.1. *Considérons l'équation différentielle du second ordre suivante :*

$$-x''(t) = f(t, x(t)), \quad p.p.\ t \in (0, 1) \tag{1.1}$$

soumise à l'une des conditions aux bords suivantes :

$$x'(0) = 0, \quad x(1) = 1, \tag{1.2}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(1) = 1, \tag{1.3}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{1.4}$$

Et l'équation

$$-x''(t) = 0. \tag{1.5}$$

les solutions sont $x(t) = 1$ *pour (1.5)-(1.2),* $x(t) = t$ *pour (1.5) - (1.3) et* $x(t) = 0$ *pour (1.5)-(1.4).*

D'où, les problèmes (1.1)-(1.2) et (1.1)-(1.3) sont résonants et le problème (1.1)-(1.4) est non résonant.

Définition 1.4. *Une fonction* $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est dite* L^1*-Carathéodory si et seulement si :*

a. $t \mapsto f(t, u)$ *est mesurable, pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$.

b. $u \mapsto f(t, u)$ *est continue, pour p.p.* $t \in [0, 1]$.

c. Pour tout $r > 0, \exists \varphi_r \in \mathrm{L}^1[0, 1]$ *telle que* $\|f(t, u)\| \leq \varphi_r(t)$, *pour p.p.* $t \in [0, 1]$ *et pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$ *avec* $\|u\| \leq r$.

Définition 1.5. *Une fonction* $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est dite S-Carathéodory si et seulement si :*

1. $t \mapsto f(t, u, v)$ *est mesurable sur* $[0, +\infty)$, *pour tout* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2. $(u, v) \mapsto f(t, u, v)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$, *pour p.p.* $t \in [0, +\infty)$.

3. Pour tout $r > 0$, *il existe* $\varphi_r \in L^1[0,+\infty)$, *avec* $t\varphi_r \in L^1[0,+\infty)$, *et* $\varphi_r(t) > 0$ *sur* $(0,+\infty)$ *tel que :*

$\max\{|u|,|v|\} \leq r$ *implique* $|f(t,u,v)| \leq \varphi_r(t)$, *pour p.p.* $t \in [0,+\infty)$.

Définition 1.6. *(Limite supérieure et inférieure d'une fonction).*

Soit f *une fonction définie sur* D_f, *on dit que* f *admet une limite* l *en* $a \in \mathbb{R}$, *si elle est définie au voisinage de* a *et si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

- ***Limite supérieure*** *:*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\eta \to 0} \sup\{f(x) : 0 < |x-x_0| < \eta\}.$$

- ***Limite inférieure*** *:*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\eta \to 0} \inf\{f(x) : 0 < |x-x_0| < \eta\}.$$

Exemple 1.2. *Considérons la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x > 0 \\ -e^{-x} & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Alors, $\liminf_{x \to 0} f(x) = -1$ *et* $\limsup_{x \to 0} f(x) = 1$.

Remarque 1.1. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe si et seulement si :* $\limsup_{x \to a} f(x) = \liminf_{x \to a} f(x)$.

Soient X et Y deux espaces de Banach.

Définition 1.7. *Soit* $f : \Omega \subset X \to Y$ *une application. On dit que* f *est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de* Ω *en un ensemble relativement compact dans* Y.

f *est dite compacte si* $f(\Omega)$ *est relativement compacte dans* Y.

Remarque 1.2. *(a) Toute application compacte est complètement continue.*

(b) Si Ω *est borné, la réciproque est vraie.*

Définition 1.8. *Une application $f : X \to Y$ est compacte si seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X on peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

Définition 1.9. *On appelle perturbation compacte de l'identité toute application de type $(I-F)$, où F est une application compacte de X dans X.*

1.1.2 Quelques critères de compacité

Théorème 1.1. *(Critère d'Ascoli-Arzéla)*

Soit X un espace métrique compact. $H \subset C(X,Y)$ un sous-espace muni de la norme sup. Alors H est relativement compact si et seulement si :

1. *H est uniformément borné, i.e.*

   $\forall x \in X$, *l'ensemble* $\{f(x) : f \in H\}$ *est borné dans* Y.

2. *H est équi-continu, i.e.*

   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ V \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in X\ ;\ y \in V \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y \leq \varepsilon,\ \forall f \in H.$

Cas où $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$

Théorème 1.2. *(Cas particulier d'Ascoli Arzéla)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$ une suite vérifiante :

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée, i.e.* $\exists\, c > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq c.$

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équi-continue, i.e.* $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall\, x,y \in [a,b]$:

$\mid x - y \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f_n(x) - f_n(y) \mid \leq \varepsilon, \forall\, n \in \mathbb{N}$. *Alors,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente. (i.e.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est relativement compacte).*

Corollaire 1.1. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $\mathrm{C}^{k+1}([a,b],\mathbb{R})$, alors elle admet une sous-suite convergente dans $\mathrm{C}^k([a,b],\mathbb{R})$.*

Lemme 1.1. *[2] (Critère de compacité de Corduneanu).*

Soit $M \subset X = \mathrm{C}([0,+\infty),\mathbb{R})$, alors M est relativement compact sur X si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) M est uniformément borné dans X,

(ii) Les fonctions de M sont équicontinues sur tout compact de $[0,+\infty)$,

(iii) Les fonctions de M sont équiconvergentes, i.e. pour tout $\epsilon > 0$,

$\exists T = T(\epsilon) > 0$ tel que $\mid f(x) - f(+\infty) \mid < 0$ pour tout $x > T$ et $f \in M$,

où $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Conséquence du critère de compacité de Corduneanu.

Lemme 1.2. *[4] Soit $M \subset C_b(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, alors M est relativement compact dans X si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) *M est uniformément borné dans $C(\mathbb{R}^+)$;*

ii) *les fonctions de $\{y : y = \frac{x}{1+t}, x \in M\}$ sont équicontinues sur tout intervalle compact de $[0,+\infty)$;*

iii) *les fonctions de $\{y : y = \frac{x}{1+t}, x \in M\}$ sont équiconvergentes à l'infini, c'est à dire pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T = T(\epsilon) > 0$ tel que $|y(t) - y(+\infty)| < \epsilon$, pour tout $t > T$, $x \in M$.*

Théorème 1.3. *[3](Théorème de convergence dominée de Lebesgue "T.C.D.L")*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que :

(i) $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$ p.p dans Ω,

(ii) il existe une fonction $g \geq 0$ et $g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p dans Ω.

Alors, $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$, quand $n \to \infty$.

Inégalité de Wirtinger (voir [5])

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et u une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ et à valeurs réelles. On a :

$$\int_a^b \mid u(t) - u(a) \mid^2 dt \leq 4\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b \mid u'(t) \mid^2 dt.$$

$$\int_a^b \mid u(t) - u(b) \mid^2 dt \leq 4(\tfrac{b-a}{\pi})^2 \int_a^b \mid u^{'}(t) \mid^2 dt.$$

1.2 Quelques éléments de la théorie du point fixe

La théorie du point fixe dans les espaces de Banach, soit sous forme de théorèmes de points fixes ou sous forme des méthodes topologiques liées au degré topologique, est utilisée pour étudier les différentes classes des problèmes aux limites.

1.2.1 Degré topologique de Leray-Schauder

Références principales ([20],[17])

En plus des théorèmes du point fixe, il existe des méthodes topologiques permettant l'étude de diverses classes de problèmes aux limites. L'une de ces méthodes est le degré topologique.

Les théorèmes dits de continuation, pour l'étude des problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires, sont souvent basés sur une formulation équivalente se ramenant à une équation non linéaire dans un espace abstrait ; ensuite une application de la théorie du degré permet de résoudre le problème. L'outil principal demeure le degré topologique de Leray-Schauder pour les perturbations compactes de l'identité. Il est construit pour les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte.

Soit X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $f : \Omega \to X$ une application continue. Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité du degré topologique de Leray-Schauder à travers ses propriétés.

Théorème 1.4. *Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets f, Ω, y_0 où Ω est un ouvert borné de X, $y_0 \in X$ et $f = I - K$ avec $K : \Omega \to X$ une application compacte telle que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors, il existe une application*

$$\begin{array}{rcl} deg : & \mathcal{A} & \to \mathbb{Z} \\ (f, \Omega, y_0) & \mapsto & deg(f, \Omega, y_0), \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) (Normalisation). $deg(I, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1, & si\ y_0 \in \Omega, \\ 0, & si\ y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

(ii) (Existence de solutions). Si $deg(f, \Omega, y_0) \neq 0$ *alors il existe* $x_0 \in \Omega :\ f(x_0) = y_0$.

(iii) (Invariance homotopique). Soit $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ *une famille d'applications compactes et dépendant continûment de* t *telle que* $y_0 \notin f_t(\partial\Omega),\ \forall\, t \in [0, 1]$. *Alors le degré* $deg(f_t, \Omega, y_0)$ *ne dépend pas de* t. *En particulier*

$$deg(f_1, \Omega, y_0) = deg(f_0, \Omega, y_0).$$

(vi) (Additivité). Soit $y_0 \in X$ *et* $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des assertions suivantes :*

(a) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ *et* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *;*

(b) $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \subset \Omega$ *et* $y_0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i)$.

Alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = \sum_{i=1}^{n} deg(f, \Omega_i, y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

L'entier $deg(f, \Omega, y_0)$ *est appelé le degré topologique de Leray-Schauder de* f *sur* Ω *en* y_0*, ce degré est unique.*

Des propriétés supplémentaires peuvent être déduites à partir des propriétés précédentes.

Proposition 1.1. *(v) (Excision). Soit* $U \subset \Omega$ *fermé et* $y_0 \notin f(U) \cup f(\partial\Omega)$.

Alors $deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega \setminus U, y_0)$.

(iv) (Changement de base). Pour tout $z \in X$,

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f - z, \Omega, y_0 - z).$$

(iiv) (Continuité par rapport à y_0). Si y_1 est dans un voisinage de y_0 (dans un sens à préciser), alors $deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,\Omega,y_1)$.

(iiiv) (Invariance sur le bord). Si $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, alors pour tout $y_0 \notin f(\partial\Omega)$,

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(g,\Omega,y_0).$$

Les propriétés d'existence de solutions et d'invariance par homotopie conduisent à des théorèmes du point fixe très importants. Ces derniers sont souvent utilisés pour résoudre des problèmes aux limites non linéaires. Dans les deux sections qui suivent nous donnons quelques uns de ces théorèmes. Il est à noter que les fonctions considérées dans les théorèmes présentés ne sont pas forcément définies sur l'espace tout entier.

1.2.2 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 1.5. *[20] (Théorème du point fixe de Brouwer, 1912).*
Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.

Théorème 1.6. *[11] (Théorème du point fixe de Schauder, 1930).*
Soit D un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $f : D \to D$ une application compacte continue. Alors f admet au moins un point fixe.

Corollaire 1.2. *Soit D un sous-ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de Banach X et $f : D \to D$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.*

Corollaire 1.3. *Soit D un sous-ensemble convexe, fermré, non vide, non nécessairement borné d'un espace de Banach X et $f : D \to D$ une application continue telle que $f(D)$ est inclus dans un compact de D. Alors f admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.7. *[11](L'alternative non linéaire de Leray-Schauder).*
Soit E un espace de Banach et $C \subset E$ un convexe fermé, Ω un ouvert de C contenant 0 et

$T : \overline{\Omega} \to C$ un opérateur complètement continu. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié

(a) T admet un point fixe dans $\overline{\Omega}$ i.e. $\exists\, x \in \overline{\Omega} : x = Tx$,

(b) il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in [0,1]$ tels que $x = \lambda Tx$.

Demonstration 1. *Nous pouvons trouver des démonstrations de ces résultats dans [6].*

Remarque 1.3. *L'énoncé (b) indique que l'ensemble $S = \{x \in \Omega : x = \lambda Tx\,;\, \lambda \in [0,1]\}$ n'est pas borné. Ainsi pour appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, il suffit de montrer que T est complètement continu vérifiant l'estimation à priori suivante :*

$$\exists R > 0,\, \forall x \in E,\, \forall \lambda \in [0,1] : (x = \lambda Tx \Rightarrow \|x\| < R).$$

Cela veut dire que T admet au moins un point fixe dans $B(0,R)$.

Théorème 1.8. *[7] (Théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii, 1988).*
Soit X un espace de Banach, et soit $K \subset X$ un cône. Supposons que Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles bornés ouverts de X avec $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.
Soit $A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to K$ un opérateur complètement continu vérifiant l'une des conditions suivantes :

(i) $\|Au\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$,

(ii) $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors, A admet un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

1.2.3 Théorèmes de continuation de type Leray-Shauder

Une autre façon d'obtenir l'existence de points fixes pour une fonction non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation. Celui-ci consiste à déformer notre fonction en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Il est évident que cette déformation devra vérifier certaines conditions voir (G).

Soit Ω un ensemble ouvert connexe dans un espace normé E. Un certain nombre de théorèmes sont concernés par une famille d'applications $h_t\,(0 \leq t \leq 1)$ de Ω dans E telles que

h_t n'admet pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Donc si h_0 satisfait les conditions qui assures l'existence d'un point fixe, on s'attend à ce que h_1 ait un point fixe.

Définition 1.10. *Soient h_0 et h_1 deux applications définies de Ω dans E. On dit que h_0 est homotopique à h_1 dans Ω s'il existe une famille d'applications $h_t\,(0 \leq t \leq 1)$ de Ω dans E telle que :*

(i) $h_t(x) = h(x,t)$ est continue de $\Omega \times [0,1]$,

(ii) $h(\Omega \times [0,1])$ est contenu dans un sous-ensemble compact de E,

(iii) $h_t(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

Notons que tous les théorèmes de continuation ont la forme générale (G) suivante :

$$(G)\ \begin{cases} \text{Si les conditions sur } \Omega \text{ et } h_0 \text{ sont satisfaites,} \\ h_1 \text{ est } \textit{homotopique} \text{ à } h_0 \text{ dans } \Omega, \\ \text{alors, } h_1 \text{ admet un point fixe.} \end{cases}$$

Les premiers théorèmes de continuation applicables aux problèmes non linéaires sont dus à Leray et Schauder (1934) ; notamment le théorème 1.10, connu sous le nom "théorème de continuation de Leray-Schauder". Dans ce dernier la condition sur h_0 est donnée par $deg(I - h_0, \Omega, 0) \neq 0$. Ce théorème est le résultat le plus général de la forme (G).
Notons bien que, ce théorème ne peut pas être appliqué sans une connaissance de la théorie de degré topologique.

Théorème de continuation de Leray-Shauder

Soit X un espace de Banach et Ω un ouvert borné dans $X \times [a,b]$.
Notons $\Omega_\lambda = \{x \in X : (x,\lambda) \in \Omega\},\ \lambda \in [a,b]$. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} f : \overline{\Omega} &\to X \\ (x,\lambda) &\mapsto f(x,\lambda) = x - F(x,\lambda), \end{aligned}$$

où $F : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur complètement continu.

Théorème 1.9. *(Propriété d'homotopie généralisée).*

Supposons que $f(x,\lambda) \neq 0$*, pour tout* $(x,\lambda) \in \partial\Omega$ *(*$\partial\Omega$ *est la frontière de* Ω *dans* $X \times [a,b]$*).*

Alors, pour tout $\lambda \in [a,b]$*,* $deg(f(.,\lambda),\Omega_\lambda,0) = constant$*.*

Théorème 1.10. *(Théorème de Lerray-Schauder).*

Soit Ω *un ouvert borné dans* $X \times [a,b]$ *et* f *l'opérateur défini ci-dessus. Si* f *satisfait les conditions suivantes :*

(i) $f(x,\lambda) \neq 0, \quad \forall\,(x,\lambda) \in \partial\Omega,$

(ii) $deg(f(.,a),\Omega_a,0) \neq 0.$

Alors, l'ensemble $S = \{(x,\lambda) \in \overline{\Omega}, f(x,\lambda) = 0\}$ *contient une partie convexe fermée* C *tel que* $C \cap \Omega_a \neq \emptyset$ *et* $C \cap \Omega_b \neq \emptyset$*.*

En particulier, l'équation $x = F(x,b)$ *admet une solution dans* Ω_b*.*

Remarque 1.4. *Si* $\Omega = X$*.*

Supposons que la condition (ii) du théorème 1.10 est satisfaite. Pour que la conclusion de ce théorème reste vrai il suffit de montrer que l'ensemble S *est à priori borné.*

Autrement dit, if suffit de montrer qu'il existe un nombre réel $R > 0$ *tel que* $S \subset B(0,R) \times [a,b]$ *et dans ce cas, on prend* $\Omega = B(0,R) \times [a,b]$ $(S \cap \partial\Omega = \emptyset)$*.*

Diverses tentatives ont été faites pour remplacer le théorème de Leray-Schauder en évitant l'utilisation de degré. Ces théorèmes utilisent des conditions sur h_0 et Ω qui sont moins générales mais plus faciles à établir dans les applications. La plus utile est celle de Schaefer (1955) qui peut être reformulée sous la forme (G) tels que $h_0 = 0$, $h_t = th_1$ et Ω est une boule dans l'éspace X.

Théorème 1.11. *([19], page 29) (Théorème de Schaefer, 1955).*

Soit X *un espace de Banach,* T *une application continue de* X *dans* X *qui est compacte sur tout sous-ensemble borné de* X*, alors soit*

(a) l'équation $x = \lambda Tx$ *a une solution pour* $\lambda = 1$*, ou*

(b) l'ensemble $\{x \in X : \ x = \lambda Tx\}$ *n'est pas borné, pour* $\lambda \in (0, 1)$.

Théorème 1.12. *(Deuxième version du théorème de Schaefer). Soit* X *un espace de Banach,* $T : X \to X$ *une application complètement continue.*
Si l'ensemble $\{x \in X : \ x = \lambda Tx, \ 0 < \lambda < 1\}$ *est borné, alors l'application* T *admet un point fixe.*

Remarque 1.5.
1. *La plupart des applications du théorème de continuation de Leray-Schauder aux équations différentielles ou intégrales sont consacrés à des situations où l'ensemble des solutions possibles de la déformation est à priori borné.*
2. *Lorsque ce n'est pas le cas, on peut essayer de déterminer un ensemble ouvert pour lequel les hypothèses (i), (ii) du théorème 1.10 soient vérifiées (voir par exemple l'article de Jean Mawhin [17]).*

1.3 Fonction de Green

Les fonctions de Green ont été introduites par George Green en 1828. Elles interviennent dans la résolution des équations linéaires, qu'elles soient différentielles ou aux dérivées partielles, ainsi que dans la transformation d'équations différentielles non linéaires en équations intégrales.

1.3.1 Fonction de Green d'un problème de Sturm-Lioville

Dans cette section, nous allons rappeler quelques résultats sur la théorie fondamentale de la fonction de Green pour les problèmes de Sturm- Liouville linéaires.
Considérons l'équation différentielle de Sturm-Liouville :

$$(p(t)x'(t))' + (q(t) + \lambda r(t))x(t) = 0, \ t \in [a, b].$$

Ici p, q et r sont des fonctions données à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$ avec $r(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$. $x = x(t)$ est une fonction à déterminer et λ est un paramètre à déterminer aussi.

Remarque 1.6. *Bien que l'équation de Sturm-Liouville ait une forme spéciale, toute équation différentielle linéaire du second ordre de la forme :* $a_0(t)x'' + a_1(t)x' + (a_2(t)+\lambda)x = 0$, *où* $a_0(t) \neq 0$, $\frac{a_1}{a_0}$ *et* $\frac{a_2}{a_0}$ *sont des fonctions intégrables sur* $[a,b]$, *peut se mettre sous la forme de Sturm-Liouville si nous définissons*

$$p(t) = \exp\left(\int^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right),\ q(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)}p(t) \text{ et } r(t) = \frac{1}{a_0(t)}p(t).$$

Définition 1.11. *Soient* $p \in C^1([a,b])$ *et* $q,\ r \in C([a,b])$. $p,\ r > 0$ *des fonctions réelles.*
Soit $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ *tels que* ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 \neq 0$ *et* ${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 \neq 0$.
On appelle problème de Sturm-Liouville régulier linéaire homogène le problème aux limites suivant :

$$(\mathcal{SLH}) \begin{cases} (p(t)x'(t))' + (q(t)+\lambda r(t))x(t) = 0, \quad a < t < b \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0, \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0. \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ *est appelée valeur propre du problème* $(\mathcal{SLH})$ *si ce problème admet une solution non triviale.*

Les conditions aux bords de l'intervalle (a,b) sont linéaires et séparées ; nous ne considérons pas les conditions aux bords non séparées, c'est-à-dire du type :

$$\begin{cases} c_{11}x(a) + c_{12}x'(a) - d_{11}x(b) - d_{12}x'(b) = 0, \\ c_{21}x(a) + c_{22}x'(a) - d_{21}x(b) - d_{22}x'(b) = 0, \end{cases}$$

où $c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,..,n$.

Dans ce qui suit nous présentons une méthode simple de calcul de la fonction de Green concernant les problèmes aux limites de type Sturm-Liouville.

Définition 1.12. *Soient* $p \in \mathrm{C}^1(a,b)$, $f,\ q \in \mathrm{C}(a,b)$ *et* $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1,2$ *tels que* $\forall i = 1,2,\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ *et* $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.
Considérons les équations différentielles ordinaires suivantes :
(H) $\quad (p(t)x^{'}(t))^{'} + q(t)x(t) = 0 \quad a < t < b$

(NH) $(p(t)x^{'}(t))^{'} + q(t)x(t) = f(t) \quad a < t < b$

ainsi que les conditions aux bords

$$(CB)_h \quad \begin{cases} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x^{'}(a) = 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x^{'}(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \quad \begin{cases} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x^{'}(a) = \gamma \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x^{'}(b) = \delta \end{cases}$$

On appelle fonction de Green associée au problème homogène $(H + (CB)_h)$ *toute fonction* $G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) G *est continue sur* $[a, b] \times [a, b]$,

(b) $G(t, s) = G(s, t)\ \forall (t, s) \in [a, b] \times [a, b]$ *(G est symétrique),*

(c) $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s)$ *est continue en tout point* $(t, s) \in [a, b]^2$ *si* $t \neq s$,

(d) $\frac{\partial G}{\partial t}(s^+, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(s^-, s) = \frac{1}{p(s)}$, *pour tout* $s \in [a, b]$,

(e) $\forall s \in [a, b]$, *la fonction partielle* $t \mapsto G(t, s)$ *vérifie l'équation homogène (H) sur chacun des intervalles* $[a, t), (t, b]$,

(d) $\forall s \in [a, b]$, *la fonction* $t \mapsto G(t, s)$ *vérifie les conditions aux bords* $(CB)_h$.

Dans ce qui suit, nous présentons un résultat, appelé Alternative de Fredholm, qui assure l'existence et l'unicité de solutions du problème de Sturm-Liouville non homogène.

Théorème 1.13. ([*1*], *page* 236)***(Alternative de Fredholm)***
Le problème non homogène $((NH) + (CB)_{nh})$ *admet une solution unique si et seulement si le problème homogène* $((H) + (CB)_h)$ *admet uniquement la solution triviale* $x \equiv 0$.

Théorème 1.14. ***(Existence et unicité de la fonction de Green)***
Supposons que le problème homogène $((H) + (CB)_h)$ *admet uniquement la solution triviale* $x \equiv 0$. *Alors il existe une unique fonction* G, *dite fonction de Green telle que, pour toute fonction* f, *la seule solution du problème semi-homogène* $((NH) + (CB)_h)$ *s'écrit sous la forme*

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds.$$

Demonstration 2. ***(i) Existence de la fonction*** G.

Soit ϕ_1 *et* ϕ_2 *les solutions respectives des problèmes à conditions initiales*

$$(H) + \begin{cases} \phi_1(a) = \alpha_2 \\ \phi_1'(a) = -\alpha_1 \end{cases} \quad et \quad (H) + \begin{cases} \phi_2(b) = \beta_2 \\ \phi_2'(b) = -\beta_1 \end{cases}$$

Alors $\phi_1, \phi_2 \neq 0$ *sont linéairement indépendantes car sinon* ϕ_1 *(et aussi* ϕ_2*) serait solution du problème* $P_0 : (H) + (CB)_h$ *contredisant l'hypothèse.*

Soit donc $W = \phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2 \neq 0$ *leur Wronskien et* G *la fonction de Green définie par*

$$G(t,s) = \frac{1}{p(s)W(s)} \begin{cases} \phi_1(s)\phi_2(t), \ a \leq s \leq t, \\ \phi_1(t)\phi_2(s), \ t \leq s \leq b. \end{cases}$$

Alors toute solution y *du problème non homogène* $(NH) - (CB)_h$ *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_a^t \frac{\phi_1(s)\phi_2(t)}{p(s)W(s)} f(s)ds + \int_t^b \frac{\phi_1(t)\phi_2(s)}{p(s)W(s)} f(s)ds \\ &= \int_a^b G(t,s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Remarquons que $p(t)W(t) = p(s)W(s) = p(a)W(a) = p(b)W(b) \neq 0, \ \forall\, t, s \in [0,1]$,

c'est à dire que le produit pW *est constant.*

(ii) Unicité de la fonction G.

Soient G, H *deux fonctions de Green, alors* $\int_a^b (G(t,s) - H(t,s))f(s)ds = 0$, *pour tout* $t \in [a,b]$ *et pour toute fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue.*

Pour t *fixé, posons* $f(s) = G(t,s) - H(t,s)$, *on obtient* $\int_a^b (G(t,s) - H(t,s))^2 ds = 0, \ \forall t \in [a,b]$.

Comme G *et* H *sont continues,* $G \equiv H$, *c'est-à-dire* $(G(t,.) = H(t,.), \ \forall t \in [a,b])$.

Exemple 1.3. *Considérons le problème de Dirichlet posé sur l'intervalle* $[a,b]$

$$(P) \quad \begin{cases} x'' = f(t), \ \ a < t < b \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases}$$

Construisons les fonctions ϕ_1 *et* ϕ_2 *solutions des problèmes de Cauchy :*

$$\begin{cases} \phi_1'' = 0 \\ \phi_1(a) = 0 \\ \phi'(a) = -1. \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \phi_2'' = 0 \\ \phi_2(b) = 0 \\ \phi'(b) = -1. \end{cases}$$

On trouve $\phi_1(t) = a - t$, $\phi_2(t) = b - t$ *et* $W(\phi_1, \phi_2) = b - a \neq 0$, *d'où la fonction de Green*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-b)}{b-a}, & si \quad a \leqslant t \leqslant s \leqslant b \\ \frac{(s-a)(t-b)}{b-a}, & si \quad a \leqslant s \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

1.3.2 Fonctions de Green correspondantes à l'opérateur $Lx = -x''$

. **(i) Cas des conditions aux bords à deux points de type Dirichlet.**

Soit le problème aux limites à trois points posé sur l'intervalle borné suivant :

$$\begin{cases} -x'' = v(t), & t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Lemme 1.3. *Supposons que* $\int_0^1 v(s)\,ds < \infty$ *et* $\int_0^1 s\,v(s)\,ds < \infty$. *Alors la solution du problème (1.6) est donnée par :*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)\,ds, \quad t \in (0,1) \tag{1.7}$$

où la fonction de Green positive G *est définie sur* $[0,1] \times [0,1]$ *par :*

$$G(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & s \leq t, \\ t(1-s), & s \geq t. \end{cases}$$

Demonstration 3. *Soit la fonction* v *telle que* $\int_0^1 v(s)\,ds < \infty$ *et* $\int_0^1 s\,v(s)\,ds < \infty$. *Posons*

$$u(s) = x'(s), \quad s \in (0,1). \tag{1.8}$$

Alors

$$u'(s) = -v(s), \quad s \in (0,1). \tag{1.9}$$

En intégrant (1.9) sur $[0,t]$, *on obtient*

$$u(t) = u(0) - \int_0^t v(s)\,ds, \quad t \in (0,1). \tag{1.10}$$

De même, intégrons (1.8) sur $[0,t]$, *on trouve*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(s)\,ds, \quad t \in (0,1). \tag{1.11}$$

De (1.10) et (1.11) plus une simple intégration par partie, on obtient que toute solution du problème (1.6) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A + Bt - \int_0^t (t-s)v(s)\,ds, \tag{1.12}$$

où A et B sont deux constantes à déterminer.

Les conditions aux bords du problème (1.6), donnent

$$x(0) = A = 0 \tag{1.13}$$

$$x(1) = B - \int_0^1 (1-s)v(s)\,ds = 0 \tag{1.14}$$

(1.13) et (1.14) donnent

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 t(1-s)v(s)\,ds - \int_0^t (t-s)v(s)\,ds \\ &= \int_0^t (t - st - t + s)v(s)\,ds + \int_t^1 t(1-s)v(s)\,ds \\ &= \int_0^t s(1-t)v(s)\,ds + \int_t^1 t(1-s)v(s)\,ds. \end{aligned}$$

Ce qui nous conduit à l'expression de la fonction de Green G donnée.

Remarque 1.7. *On peut avoir (1.12), en intégrant directement l'équation $-x''(s) = v(s)$ deux fois sur $[0,t]$.*

(ii) Cas des conditions aux bords à trois points.

Soit le problème aux limites à trois points posé sur la demie droite positive suivant :

$$\begin{cases} -x''(t) = v(t), \quad t \in (0,\infty) \\ x(0) - \alpha x(\eta) = 0, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} x'(t) = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

où $\alpha \geq 0$, $\eta \in (0,\infty)$,

Lemme 1.4. *Supposons que $\int_0^\infty v(s)\,ds < \infty$ et $\int_0^\infty sv(s)\,ds < \infty$. Alors la solution du problème (1.15) s'écrit sous la forme :*

$$x(t) = \int_0^\infty G(t,s)v(s)\,ds, \quad t \in (0,\infty) \tag{1.16}$$

où la fonction de Green positive G est définie sur $(0,\infty)\times(0,\infty)$ par :

$$G(t,s)=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases} s, & 0<s\leq \min(t,\eta)<\infty \\ \alpha(s-t)+t, & 0<t\leq s\leq \eta<\infty \\ \alpha(\eta-s)+s, & 0<\eta\leq s\leq t<\infty \\ \alpha(\eta-t)+t, & 0<\max(\eta,t)\leq s<\infty \end{cases}$$

Demonstration 4. *Soit $x\in C^1(0,\infty)$ une solution de (1.15), alors x s'écrit sous la forme*

$$x(t)=A+Bt-\int_0^t (t-s)v(s)\,ds, \tag{1.17}$$

où A, B sont deux constantes à déterminer, et cela suivant les conditions aux bords du problème (1.15). Dérivons (1.17), on obtient

$$x'(t)=B-\int_0^t v(s)\,ds, \tag{1.18}$$

(1.17) et (1.15) donnent

$$0=x(0)-\alpha x(\eta)=A-\alpha\left(A+B\eta-\int_0^\eta (\eta-s)v(s)\,ds\right),$$

ce qui donne

$$(1-\alpha)A-\alpha\eta B+\alpha\int_0^\eta (\eta-s)v(s)\,ds=0. \tag{1.19}$$

De plus, (1.18) assure que

$$\lim_{t\to+\infty} x'(t)=0 \Longrightarrow B=\int_0^\infty v(s)\,ds. \tag{1.20}$$

De (1.19) et (1.20)

$$A=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\eta\int_0^\infty v(s)\,ds-\int_0^\eta (\eta-s)v(s)\,ds\right].$$

En remplaçant par les valeurs de A et B dans (1.17), on aura

$$x(t) \;=\; \tfrac{\alpha}{1-\alpha}\left(\eta\int_0^\infty v(s)\,ds-\int_0^\eta(\eta-s)v(s)\,ds\right)+\int_0^\infty tv(s)\,ds-\int_0^t(t-s)v(s)\,ds,$$

donc

$$x(t) = \frac{1}{1-\alpha}\begin{cases} \int_0^t sv(s)\,ds + \int_t^\eta (t+\alpha(s-t))v(s)\,ds \\ + \int_\eta^\infty (t+\alpha(\eta-t))v(s),\,ds & t \leq \eta, \\ \\ \int_0^\eta sv(s)\,ds + \int_\eta^t (s+\alpha(\eta-s))v(s)\,ds \\ + \int_t^\infty (t+\alpha(\eta-t))v(s),\,ds & \eta \leq t. \end{cases}$$

Ce qui nous conduit à l'expression de la fonction de Green G donnée.

(iii) Cas des conditions aux bords de type intégral.

Soit le problème aux limites avec condition intégrale posé sur l'intervalle $[0,\infty)$ suivant :

$$\begin{cases} -x'' = v(t), \quad t \in (0,\infty) \\ x(0) = 0, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} x'(t) = \int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds. \end{cases} \tag{1.21}$$

Lemme 1.5. *Supposons que $1 - \int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds > 0$ et $v \in C^1(0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$. Alors la solution du problème (1.21) s'écrit sous la forme :*

$$x(t) = \int_0^\infty H(t,s)v(s)\,ds, \quad t \in (0,\infty) \tag{1.22}$$

où la fonction positive H est définie sur $(0,\infty)\times(0,\infty)$ par :

$$H(t,s) = G(t,s) + \frac{t\int_0^{+\infty} g(\tau)G(s,\tau)\,d\tau}{1-\int_0^{+\infty} sg(s)\,ds},$$

avec la fonction de Green G est définie par :

$$G(t,s) = \min(t,s).$$

Demonstration 5. *Soit $x \in C^1(0,\infty)$. D'après (1.12), x s'écrit sous la forme :*

$$x(t) = A + Bt - \int_0^t (t-s)v(s)\,ds, \tag{1.23}$$

où A, B sont deux constantes à déterminer. De (1.23) et (1.21) on obtient

$$A = x(0) = 0 \ \text{ et } B = \int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds + \int_0^{+\infty} v(s)\,ds.$$

En remplaçant dans (1.23), on trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= t\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds + t\int_0^{+\infty} v(s)\,ds - \int_0^t (t-s)v(s)\,ds \\ &= t\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds + \int_0^t s\,v(s)\,ds - \int_t^{+\infty} tv(s)\,ds \\ &= t\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds + \int_0^{+\infty} G(t,s)\,v(s)\,ds, \end{aligned}$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq s < +\infty \\ s & 0 \leq s \leq t < +\infty \end{cases} = \min(t,s).$$

Maintenant, il reste à montrer que

$$\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{t\int_0^{+\infty} g(\tau)G(s,\tau)\,d\tau}{1-\int_0^{+\infty} sg(s)\,ds} v(s).$$

On a

$$x(t) = t\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds + \int_0^{+\infty} G(t,s)\,v(s)\,ds. \tag{1.24}$$

Multiplions (1.24) par $g(t)$ puis intégrant sur $(0,+\infty)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t)x(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \Big(g(t)t\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds\Big)\,dt \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \Big(g(t)\int_0^{+\infty} G(t,s)\,v(s)\,ds\Big)\,dt \\ &= \Big(\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds\Big)\Big(\int_0^{+\infty} tg(t)\,dt\Big) \\ &\quad + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(t)G(t,s)\,v(s)\,ds\,dt, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} g(t)x(t)\,dt\Big(1-\int_0^{+\infty} sg(s)\,ds\Big) \\ &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} g(t)G(t,s)\,dt\Big)\,v(s)\,ds \\ &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} g(\tau)G(\tau,s)\,d\tau\Big)\,v(s)\,ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} g(s)x(s)\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{t\int_0^{+\infty} g(\tau)G(s,\tau)\,d\tau}{1-\int_0^{+\infty} sg(s)\,ds}\, v(s).$$

Un simple remplacement dans (1.24) nous donne (1.22).

1.3.3 Fonctions de Green correspondantes à l'opérateur $Lx = x'' + \beta^2 x$

Considérons le problème aux limites linéaire à trois points suivant :

$$\begin{cases} x^{''}(t) + \beta^2 x(t) = v(t),\ t \in (0,1) \\ x^{'}(0) = 0,\ x(\eta) = x(1), \end{cases} \tag{1.25}$$

où $\eta \in (0,1)$, $\beta \in (0, \frac{\Pi}{2})$.

Lemme 1.6. *Pour tout $v \in \mathrm{C}[0,1]$, le problème (1.25) admet une unique solution*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, \tag{1.26}$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\cos\beta t}{\beta \sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2} + \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s), & 0 \le s \le \min(t,\eta) \le 1, \\ \frac{\cos\beta t}{\beta \sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}, & 0 \le t \le s \le \eta \le 1, \\ \frac{\cos\beta t}{\beta \sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} + \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s), & 0 \le \eta \le s \le t \le 1, \\ \frac{\cos\beta t}{\beta \sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}, & 0 \le \max(t,\eta) \le s \le 1. \end{cases} \tag{1.27}$$

Demonstration 6. *On a $x_1(t) = \cos\beta t$ et $x_2(t) = \sin\beta t$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $x'' + \beta^2 x = 0$.*

Donc toute solution de l'équation non homogène $x'' + \beta^2 x = v$ s'écrit :

$$x(t) = c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t + x_p(t), \tag{1.28}$$

où x_p est une solution particulière de l'équation $x'' + \beta^2 x = v$.

Par la méthode de la variation des constantes on cherche x_p sous la forme

$$x_p(t) = c_1(t)\cos\beta t + c_2(t)\sin\beta t,$$

où les fonctions $c_1'(t)$ et $c_2'(t)$ vérifient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos\beta t + c_2'(t)\sin\beta t = 0, \\ -c_1'(t)\beta\sin\beta t + c_2'(t)\beta\cos\beta t = v(t). \end{cases}$$

On obtient, par la méthode de Cramer

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta t \\ v(t) & \beta\cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\beta\sin\beta t & \beta\cos\beta t \end{vmatrix}} = \frac{-v(t)\sin\beta t}{\beta(\cos^2\beta t + \sin^2\beta t)} = -v(t)\frac{\sin\beta t}{\beta},$$

d'où

$$c_1(t) = -\frac{1}{\beta}\int_0^t v(s)\sin\beta s\, ds. \tag{1.29}$$

De même

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\beta t & 0 \\ -\beta\sin\beta t & v(t) \end{vmatrix}}{\beta} = v(t)\frac{\cos\beta t}{\beta},$$

d'où

$$c_2(t) = \frac{1}{\beta}\int_0^t v(s)\cos\beta s\, ds. \tag{1.30}$$

On substitue (1.29) et (1.30) dans (1.28), on obtient

$$x(t) = c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t + \frac{1}{\beta}\int_0^t \sin\beta(t-s)v(s)ds, \tag{1.31}$$

En dérivant (1.31), on obtient

$$x'(t) = -\beta c_1\sin\beta t + \beta c_2\cos\beta t + \frac{1}{\beta}\int_0^t \beta\cos\beta(t-s)v(s)ds.$$

Puis, la condition $x'(0) = 0$ *donne* $c_2 = 0$ *et* $x(1) = x(\eta)$ *donne*

$$c_1 = \frac{1}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\left(\int_0^\eta \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}v(s)ds + \int_\eta^1 \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-s)}{2}}v(s)ds\right).$$

En substituant les valeurs de c_1 *et* c_2 *dans (1.31), on obtient*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\left(\int_0^\eta \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}v(s)ds + \int_\eta^1 \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-s)}{2}}v(s)ds\right) \\ &+ \frac{1}{\beta}\int_0^t \sin\beta(t-s)v(s)ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)v(s)ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s), & 0 \le s \le t \le 1, \\ 0, & 0 \le t \le s \le 1, \end{cases}$$

$$+\frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \begin{cases} \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}, & 0 \le s \le \eta \le 1, \\ \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}, & 0 \le \eta \le s \le 1. \end{cases} \tag{1.32}$$

De plus

$$x(t) = \begin{cases} \int_0^t \left(\frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2} + \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s)\right) v(s)\,ds \\ +\int_t^\eta \frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2} v(s)\,ds & t \le \eta, \\ +\int_\eta^1 \frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} v(s)\,ds, \\ \\ \int_0^\eta \left(\frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2} + \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s)\right) v(s)\,ds \\ +\int_\eta^t \left(\frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} + \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s)\right) v(s)\,ds & \eta \le t, \\ +\int_t^1 \frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} v(s)\,ds. \end{cases}$$

On obtient ainsi l'expression de G donnée par (1.27).

Chapitre 2

Etude de certains problèmes aux limites non résonants à trois points

Les problèmes aux limites à multi-points associés à des équations différentielles du second ordre dans un intervalle fini ont été étudié de manière approfondie et de nombreux résultats, qui répondent aux questions liant à l'existence, la positivité et la multiplicité de solutions sont obtenues. Les méthodes utilisées reposent principalement sur les théorèmes de continuation (en particulier le théorème de Leray-Schauder) et la théorie du point fixe sur les cônes des espaces de Banach (en particulier le théorème de Guo-Krasnosel'skii) (voir [9],[12]). Du fait qu'un intervalle infini n'est pas compact, l'étude de tels problèmes dans un intervalle infini est plus complexe. Les principales méthodes utilisées pour étudier ces poblèmes dans un intervalle infini sont l'extension de solutions continues définies sur des intervalles finis sous un processus de diagonalisation, la technique de sous et sur solutions, la théorie du point fixe dans un espace de Banach approprié ou dans un espace de Fréchet.

2.1 Etude d'un problème aux limites à trois points posé sur un intervalle borné

D'après Chaitan P. Gupta, [9] (1994).

Dans cette section on considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1. \\ x(0) = 0, \;\; x(1) = x(\eta), \end{cases} \tag{2.1}$$

où le paramètre $\eta \in (0,1)$ et $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory.

Le problème (2.1) a été étudié par Gupta [8] en utilisant la théorie de degré et les inégalités de type Wirtinger. Plus récement ce problème a été étudié par Marano [16] en utilisant une autre approche. Dans les résultats qu'on va présenter, Gupta donne entre autres une démonstration plus simple du théorème 1 obtenu par lui même dans [8].

Avant de présenter quelques résultats d'existence concernant le problème (2.1), on donne le lemme suivant qui discute la solvabilité du problème linéaire associé à ce problème.

Lemme 2.1. *Soient $y \in L^1[0,1]$, $\eta \in (0,1)$. Alors le problème linéaire*

$$\begin{cases} -x''(t) = y(t), \quad 0 < t < 1. \\ x(0) = 0, \;\; x(1) = x(\eta), \end{cases} \tag{2.2}$$

admet une unique solution $x \in W^{2,1}(0,1)$ qui s'écrit sous la forme

$$x(t) = -\int_0^t (t-s)y(s)ds + t\int_0^\eta y(s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_\eta^1 (1-s)y(s)ds.$$

Demonstration 7. *On a*

$$-x''(t) = y(t).$$

Alors

$$x(t) = x'(0)t - \int_0^t (t-s)y(s)ds.$$

On en déduit que

$$x(1) = x'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds,$$

et

$$x(\eta) = x'(0)\eta - \int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds.$$

Comme

$$x(1) = x(\eta),$$

alors, on obtient

$$(1-\eta)x'(0) = -\int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds + \int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

D'où

$$x(t) = -\int_0^t (t-s)y(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

Ou encore

$$x(t) = -\int_0^t (t-s)y(s)ds + t\int_0^\eta y(s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_\eta^1 (1-s)y(s)ds.$$

Dans ce qui suit, nous présentons trois résultats d'existence pour le problème (2.1).

Théorème 2.1. *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction* L^1*-Carathéodory.*

Supposons qu'il existe trois fonctions positives p, q *et* r *dans* $L^1(0,1)$ *telles que*

$$|f(t, x_1, x_2)| \leq p(t)|x_1| + q(t)|x_2| + r(t), \tag{2.3}$$

pour p.p. $t \in [0,1]$ *et pour tout* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, le problème (2.1) admet au moins une solution dans $W^{2.1}(0,1)$ *pourvu que*

$$\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1} < 1. \tag{2.4}$$

Demonstration 8. *Considérons les deux espaces de Banach*

$X = C^1(0,1)$ *muni de la norme* $\|x\| = max(\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty)$ *et* $Y = L^1(0,1)$ *muni de sa norme usuelle.*

Soit

$$D(L) = \{x \in W^{2,1}(0,1) \ : \ x(0) = 0, \ x(1) = x(\eta)\}.$$

On définit l'opérateur linéaire $L : D(L) \subset X \to Y$ par :

$$Lx = -x'', \ x \in D(L).$$

On définit aussi l'opérateur non linéaire $N : X \to Y$ par :

$$Nx(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Notons que N est un opérateur borné de X dans Y et L est injectif ($Ker(L) = \{0_X\}$).

Maintenant, on considère l'opérateur linéaire $K : Y \to X$ défini par :

$$(Ky)(t) = -\int_0^t (t-s)y(s)ds + t\int_0^\eta y(s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_\eta^1 (1-s)y(s)ds, \ t \in [0, 1].$$

D'après le lemme 2.1, on constate que pour $y \in Y$, $Ky \in D(L)$ et $LKy = y$ et pour $x \in D(L)$, on a $KLx = x$.

L'application $KN : X \to X$ est continue. En effet,

- *N est continu borné de X dans Y,*
- *K est continu de Y dans X.*

De plus, d'après le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla, KN envoie les sous-ensembles bornés de X dans des sous-ensembles relativement compacts de X.

Par conséquent, l'application $KN : X \to X$ est complètement continue.

Notons que $x \in C^1[0, 1]$ est une solution du problème (2.1) si et seulement si x est solution de l'équation opérationnelle

$$Lx + Nx = 0,$$

qui est équivalente à l'équation

$$x + KNx = 0. \tag{2.5}$$

Dans ce qui suit, nous allons appliquer une variante du théorème de continuation de Leray-Schauder (voir le théorème 1.12) pour montrer l'existence de solutions de l'équation (2.5), qui sont des solutions du problème (2.1).

Pour ce faire, il suffit de montrer que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille d'équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1. \\ x(0) = 0, \;\; x(1) = x(\eta). \end{cases} \tag{2.6}$$

est à priori borné dans $C^1[0,1]$ par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.

Nous observons que pour $x \in W^{2,1}(0,1)$ avec $x(0) = 0,\; x(1) = x(\eta)$, il existe $\zeta \in (0,1)$ telle que $x'(\zeta) = 0$, car si $x'(t) > 0$ pour tout $t \in (0,1)$, alors $x(t)$ est strictement croissante sur $[0,1]$ et comme $\eta < 1$, on obtient $x(\eta) < x(1)$, ceci est contradictoire avec $x(1) = x(\eta)$; et si $x'(t) < 0$ pour tout $t \in (0,1)$, alors $x(t)$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ et comme $\eta < 1$, on obtient $x(\eta) > x(1)$, ceci est contradictoire avec $x(1) = x(\eta)$.

Ce qui entraîne donc :

$$\|x\|_\infty \leq \|x'\|_\infty \leq \|x''\|_{L^1}. \tag{2.7}$$

En effet, pour $t \in [0,1]$, on a

$$|x(t)| = \left| \int_0^t x'(t)dt \right| \leq \int_0^1 |x'(t)|dt \leq \|x'\|_\infty.$$
$$|x'(t)| = \left| \int_\zeta^t x''(t)dt \right| \leq \int_\zeta^1 |x''(t)|dt = \|x''\|_{L^1}.$$

Soit maintenant x une solution du problème (2.6) pour certain $\lambda \in [0,1]$, telle que $x \in W^{2,1}(0,1)$ avec $x(0) = 0,\; x(1) = x(\eta)$.

En utilisant la condition de croissance (2.3), on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\|x''\|_{L^1} &= \lambda \|f(t, x(t), x'(t))\|_{L^1}, \\
&\leq \int_0^1 |p(t)x(t) + q(t)x'(t) + r(t)|dt, \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \int_0^1 p(t)dt + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)| \int_0^1 q(t)dt + \int_0^1 r(t)dt, \\
&= \|p\|_{L^1}\|x\|_\infty + \|q\|_{L^1}\|x'\|_\infty + \|r\|_{L^1}, \\
&\leq (\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1})\|x''\|_{L^1} + \|r\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|x''\|_{L^1} \leq \frac{\|r\|_{L^1}}{1 - (\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1})}.$$

Il vient d'après la condition (2.4) qu'il existe une constante c, indépendante de $\lambda \in [0,1]$, tel que

$$\|x''\|_{L^1} \leq c.$$

Ensuite, la relation (2.7) entraîne immédiatement que, l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille d'équations (2.6) est à priori borné dans $C^1[0,1]$ par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$. Ce qui achève cette démonstration.

Le théorème suivant, montre que dans le cas où la fonction p dans (2.3) appartient à $L^2(0,1)$, on peut affaiblir la condition (2.4) dans le théorème précédent.

Théorème 2.2. *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory.*
Supposons qu'il existe trois fonctions positives p, q et r telles que :
$p \in L^2(0,1)$ et $q, r \in L^1(0,1)$ vérifiant :

$$|f(t, x_1, x_2)| \leq p(t)|x_1| + q(t)|x_2| + r(t), \tag{2.8}$$

pour p.p. $t \in [0,1]$ et pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Alors, le problème (2.1) admet au moins une solution dans $W^{2.1}(0,1)$ pourvu que

$$\frac{2}{\pi}\|p\|_{L^2} + \|q\|_{L^1} < 1. \tag{2.9}$$

Demonstration 9. *Comme dans le théorème 2.1, il suffit de montrer que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille d'équations*

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), \quad 0 < t < 1. \\ x(0) = 0, \;\; x(1) = x(\eta). \end{cases} \tag{2.10}$$

est a priori borné dans $C^1[0,1]$ par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.
Pour tout $x \in W^{2,1}(0,1)$ avec $x(0) = 0,\ x(1) = x(\eta)$, on a

$$\|x\|_{L^2} \leq \frac{2}{\pi}\|x'\|_{L^2}.$$

En effet, l'inégalité de Wirtinger (voir page 8) entraîne

$$\int_0^1 |x(t) - x(0)|^2 dt \leq 4\left(\frac{1-0}{\pi}\right)^2 \int_0^1 |x'(t)|^2 dt,$$

ce qui donne

$$\left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{4}{\pi^2}\int_0^1 |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$\|x\|_{L^2} \leq \frac{2}{\pi}\|x'\|_{L^2}.$$

Par suite, les inégalités de type Wirtinger (2.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, entraînent

$$\begin{aligned}
\|x''\|_{L^1} &= \lambda\|f(t,x(t),x'(t))\|_{L^1},\\
&\leq \int_0^1 p(t)|x(t)|dt + \int_0^1 q(t)|x'(t)|dt + \int_0^1 r(t)dt,\\
&\leq \left(\int_0^1 |p(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0\leq t\leq 1}|x'(t)|\int_0^1 q(t)dt + \int_0^1 r(t)dt,\\
&= \|p\|_{L^2}\|x\|_{L^2} + \|q\|_{L^1}\|x'\|_\infty + \|r\|_{L^1},\\
&\leq \left(\frac{2}{\pi}\|p\|_{L^2} + \|q\|_{L^1}\right)\|x''\|_{L^1} + \|r\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|x''\|_{L^1} \leq \frac{\|r\|_{L^1}}{1-\left(\frac{2}{\pi}\|p\|_{L^2} + \|q\|_{L^1}\right)}.$$

D'après (2.9), nous obtenons que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille d'équations (2.10) est à priori borné dans $C^1[0,1]$ par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$. Ce qui achève cette démonstration.

Le troisième théorème d'existence localise mieux les solutions du problème (2.1).

Théorème 2.3. *Soit $f : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory . Supposons qu'il existe trois fonctions positives p, q et $r \in \mathrm{L}^2(0,1)$ telles que*

$$|f(t,x_1,x_2)| \leq p(t) \mid x_1 \mid + q(t) \mid x_2 \mid + r(t), \tag{2.11}$$

pour p.p. $t \in [0,1]$, et pour tous $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, le problème (2.1) admet au moins une solution dans $W^{2.2}(0,1)$ pourvu que

$$\frac{2}{\pi}\|p\|_{L^2} + \|q\|_{L^2} < 1. \tag{2.12}$$

Demonstration 10. *Il suffit d'observer que sous l'hypothèse (2.11), toute solution de la famille de l'équations (2.10) est dans* $W^{2.2}(0,1)$.

La preuve de ce théorème se fait de la même façon que celle du théorème 2.2.

Nous terminons cette section par donner quelques exemples concrets auxquels les résultats présentés précédemment s'appliquent.

Exemple 2.1. *Considérons le problème aux limites :*

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{t^4}\,x + \alpha\,\frac{1}{t^2}\,x', \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = 0, \quad x(\eta) = x(1), \end{cases} \tag{2.13}$$

où $\eta \in (0,1),\ 0 \le \alpha < \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{2})$. *Ici* $f(t,x,y) = \frac{1}{t^4}\,x + \alpha\,\frac{1}{t^2}\,y,\ 0 < t < 1.$

L'existence de solutions de (2.13) découle du théorème 2.2. En effet,

la condition (2.8) est satisfaite pour $p(t) = \frac{1}{t^4},\ \ q(t) = \alpha\frac{1}{t^2}$ *et* $r(t) = 0$.

De plus,

$$\frac{2}{\pi}\|p\|_{L^2} + \|q\|_{L^1} = \frac{2}{\pi}\sqrt{2} + 2\alpha < 1,$$

Exemple 2.2. *Considérons le problème aux limites :*

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{t^4}\,x + \alpha\,\frac{1}{t^4}\,x', \quad 0 < t < 1 \\ x(0) = 0, \quad x(\eta) = x(1), \end{cases} \tag{2.14}$$

où $\eta \in (0,1),\quad 0 \le \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{2})$. *Ici* $f(t,x,y) = \frac{1}{t^4}\,x + \alpha\,\frac{1}{t^4}\,y, \quad 0 < t < 1.$

L'existence de solutions du problème (2.14) découle du théorème 2.3. En effet,

$$\frac{2}{\pi}\|p\|_{L^2} + \|q\|_{L^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{2} + \sqrt{2}\alpha < 1,$$

où $p(t) = \frac{1}{t^4},$ *et* $q(t) = \alpha\frac{1}{t^4}$.

2.2 Solvabilité d'un problème aux limites à trois points posé sur la demie droite positive

D'après Hairong Lian, Weigao Ge, [15] (2006).

Dans cette section, on discutera la solvabilité du problème aux limites du second ordre à trois points posé sur la demie droite positive suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ x(0) = \alpha x(\eta), \quad \lim_{t \to +\infty} x'(t) = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

où α *et* η sont des paramétres réels vérifiants $\alpha \neq 1$, $0 < \eta < +\infty$, et $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction S-Carathéodory.

Afin de montrer l'existence de solutions du problème (2.15) on utilisera un théorème de continuation de type Leray-Schauder, plus précisément, on utilisera le théorème 1.12.

Pour cela on a besoin du lemme suivant, qui permet de transformer le problème aux limites (2.15) en un problème du point fixe à l'aide de la fonction de Green correspondante.

Lemme 2.2. *Pour tout* $v \in L^1[0, +\infty)$ *avec* $tv(t) \in L^1[0, +\infty)$, *le problème linéaire :*

$$\begin{cases} x''(t) + v(t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ x(0) = \alpha x(\eta), \quad \lim_{t \to +\infty} x'(t) = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

admet une unique solution qui s'écrit sous la forme

$$x(t) = \int_0^{+\infty} G(t, s) v(s) ds,$$

où G *est la fonction de Green associée, elle est définie par :*

$$G(t, s) = \frac{1}{1 - \alpha} \begin{cases} s, & 0 < s \leq \min(t, \eta) < +\infty, \\ \alpha(s - t) + t, & 0 < t \leq s \leq \eta < +\infty, \\ \alpha(\eta - s) + s, & 0 < \eta \leq s \leq t < +\infty, \\ \alpha(\eta - t) + t, & 0 < \max(\eta, t) \leq s < +\infty. \end{cases}$$

Demonstration 11. *Voir le chapitre préliminaires.*

Dans le lemme suivant, nous donnons quelques propriétés de la fonction G, qui vont être utilisées par la suite.

Lemme 2.3. *La fonction de Green G satisfait :*

1. *Pour tous $t, s \in [0, +\infty)$, on a*

$$|G(t,s)| \leq \begin{cases} s, & \alpha < 0, \\ \frac{s}{1-\alpha}, & 0 \leq \alpha < 1, \\ \max\{\frac{\alpha s}{\alpha-1}, \frac{\eta}{\alpha-1}\}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t,s) := \overline{G}(s) = \frac{1}{1-\alpha} \begin{cases} s, & s \leq \eta, \\ \alpha(\eta - s) + s, & \eta \leq s. \end{cases}$

Maintenant, nous présentons un résultat d'existence pour le problème (2.15).

Théorème 2.4. *Soit $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction S-Carathéodory. Supposons qu'il existe trois fonctions positives p, q et r dans $L^1[0, +\infty)$ telles que*

$$|f(t,u,v)| \leq p(t)|u| + q(t)|v| + r(t), \quad p.p. \;\; t \in [0,1], \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors, le problème (2.15) admet au moins une solution pourvu que

$$\eta P + P_1 + Q < 1, \;\; \alpha < 0,$$

$$\frac{\alpha\eta}{1-\alpha} P + P_1 + Q < 1, \;\; 0 \leq \alpha < 1,$$

$$\max\left\{\frac{\alpha\eta}{\alpha-1} P + P_1 + Q, \frac{\eta}{\alpha-1} P + \frac{\alpha}{\alpha-1} P_1\right\} < 1, \;\; \alpha > 1.$$

Demonstration 12. *Posons :*

$$P = \int_0^{+\infty} p(s)ds, \quad P_1 = \int_0^{+\infty} sp(s)ds, \quad Q = \int_0^{+\infty} q(s)ds,$$

$$Q_1 = \int_0^{+\infty} sq(s)ds, \quad R = \int_0^{+\infty} r(s)ds, \quad R_1 = \int_0^{+\infty} sr(s)ds.$$

Considérons l'espace de Banach

$$X = \left\{ x \in \mathrm{C}^1_\infty[0,+\infty),\ x(0) = \alpha x(\eta),\ \lim_{t\to+\infty} x'(t) = 0 \right\},$$

muni de la norme $\|x\| = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$,

où $\mathrm{C}^1_\infty[0,+\infty) = \left\{ x \in \mathrm{C}^1[0,+\infty), \lim_{t\to+\infty} x(t) \ \ et \ \ \lim_{t\to+\infty} x'(t) \ existent \right\}$.

Définissons l'opérateur $T : X \times [0,1] \to X$ *par :*

$$T(x,\lambda)(t) = \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds,\ 0 \leq t < +\infty \quad et \quad \lambda \in [0,1].$$

Dans le lemme suivant nous donnons quelques propriétés de l'opérateur T.

Lemme 2.4. *Soit* $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *une fonction S-Carathéodory. Alors, pour tout* $\lambda \in [0,1]$ *l'opérateur* T *est bien défini et il est complètement continu dans* X.

Demonstration 13.

(i) Montrons d'abord que l'opérateur T *est bien défini :*

Soit $x \in X$, *alors il existe* $r > 0$ *tel que* $\|x\| \leq r$. *Pour tout* $\lambda \in [0,1]$, *il vient que*

$$\begin{aligned} T(x,\lambda)(t) &= \lambda \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s, x(s), x'(s))\, ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} |G(t,s)| \varphi_r(s) ds, \quad \text{pour tout } t \in [0,+\infty) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Soient $t_1, t_2 \in [0,+\infty)$ *tels que* $t_1 < t_2$. *Comme G(.,s) est continue par rapport à* t, *le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donne*

$$\begin{aligned} |T(x,\lambda)(t_1) - T(x,\lambda)(t_2)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} |G(t_1,s) - G(t_2,s)||f(s,x(s),x'(s))|\, ds \\ &\leq \lambda \int_0^{+\infty} |G(t_1,s) - G(t_2,s)| \varphi_r(s)\, ds \qquad (1) \\ &\longrightarrow 0, \qquad \text{quand} \quad t_1 \to t_2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|(T(x,\lambda))'(t_1) - T((x,\lambda))'(t_2)| &= \left|\lambda \int_0^{\infty} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s,x(s),x'(s))ds\right| \\
&\leq \lambda \int_{t_1}^{t_2} |f(s,x(s),x'(s))|\, ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \varphi_r(s)ds \qquad (2)\\
&\longrightarrow 0, \qquad \textit{quand} \quad t_1 \to t_2.
\end{aligned}$$

Donc $Tx \in \mathrm{C}^1[0,+\infty)$.

De plus, on a

$$T(x,\lambda)(0) = \alpha T(x,\lambda)(\eta).$$

et

$$\lim_{t\to+\infty}(T(x,\lambda))'(t) = \lim_{t\to+\infty} \lambda \int_t^{+\infty} f(s,x(s),x'(s))ds = 0.$$

D'où

$$T(x,\lambda)(t) \in X.$$

(ii) Montrons que $T(.,\lambda)$ *est continu.*

Soit $(x_n)_n$ *une suite de* X *tel que* $x_n \to x$ *quand* $n \to +\infty$ *dans* X *.*

Montrons que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $T(x_n,\lambda) \to T(x,\lambda)$ *quand* $n \to +\infty$ *dans* X*.*

Comme f *est S-Carathéodory et*

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} \overline{G}(s)(f(s,x_n(s),x_n'(s)) - f(s,x(s),x'(s)))ds\right| &\leq 2\int_0^{+\infty} |\overline{G}(s)|\varphi_{r_0}(s)ds \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

où $r_0 > 0$ *un nombre réel tel que* $\max\{\max_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \|x_n\|, \|x\|\} \leq r_0$*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
|T(x_n,\lambda)(+\infty) - T(x,\lambda)(+\infty)| &\leq \lambda \int_0^{+\infty} |\overline{G}(s)||f(s,x_n(s),x_n'(s)) - f(s,x(s),x'(s))|ds \\
&\to 0, \qquad \textit{quand} \quad n \to +\infty. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Nous obtenons aussi

$$\begin{aligned} |T(x_n,\lambda)(t)-T(x_n,\lambda)(+\infty)| &\leq \lambda\int_0^{+\infty}|G(t,s)-\overline{G}(s)||f(s,x_n(s),x'_n(s))|ds \\ &\leq \int_0^{+\infty}|G(t,s)-\overline{G}(s)|\varphi_{r_0}(s)ds \\ &\to 0, \qquad quand \quad t\to+\infty, \end{aligned} \tag{4}$$

et

$$\begin{aligned} |(T(x_n,\lambda))'(t)-(T(x_n,\lambda))'(+\infty)| &\leq \lambda\int_t^{+\infty}|f(s,x_n(s),x'_n(s))|ds \\ &\leq \int_t^{+\infty}\varphi_{r_0}(s)ds\to 0, \quad quand \quad t\to+\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

De même, on trouve

$$|T(x,\lambda)(t)-T(x,\lambda)(+\infty)|\to 0, \quad quand \quad t\to+\infty, \tag{6}$$

et

$$|(T(x,\lambda))'(t)-(T(x,\lambda))'(+\infty)|\to 0, \quad quand \quad t\to+\infty. \tag{7}$$

Pour tout nombre positif $T_0<+\infty$, quand $t\in[0,T_0]$, on trouve

$$\begin{aligned} |T(x_n,\lambda)(t)-T(x,\lambda)(t)| &\leq \int_0^{+\infty}|G(t,s)||f(s,x_n(s),x'_n(s))-f(s,x(s),x'(s))|ds \\ &\to 0, \quad quand \quad n\to+\infty, \end{aligned} \tag{8}$$

et

$$\begin{aligned} |T(x_n,\lambda)'(t)-T(x,\lambda)'(t)| &\leq \int_t^{+\infty}|f(s,x_n(s),x'_n(s))-f(s,x(s),x'(s))|ds \\ &\to 0, \quad quand \quad n\to+\infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Ainsi, la continuité de $T(.,\lambda)$ s'obtient en combinant (3)-(9).

(iii) Montrons que $T(.,\lambda)$ envoie les bornés de X dans des ensembles relativement compacts de X.

Soit $B\subset X$ un sous ensemble borné. Alors, $T(.,\lambda)(B)$ est uniformément borné et de la même *façon, comme dans (1), (2) et (6), (7) on montre que $T(.,\lambda)(B)$ est équicontinu et équiconvergent sur chaque intervalle compact de $[0,+\infty)$.*

Par conséquent, $T(.,\lambda) : X \times [0,1] \longrightarrow X$ est complètement continue.

D'après le lemme 2.2, il est clair que $x \in X$ est une solution du problème (2.15) si et seulement si x est un point fixe de $T(.,1)$. On a clairement, $T(x,0) = 0$ pour tout $x \in X$.

Si pour $\lambda \in [0,1]$, les points fixes de $T(.,\lambda)$ dans X appartiennent à une boule fermée de X indépendamment de λ, alors le théorème de continuation de Leray-Schauder complète la preuve.

Donc il suffit de monter que l'ensemble des points fixes de $T(.,\lambda)$ est à priori borné par une constante M indépendamment de λ.

Soient $x \in X$ et $\lambda \in [0,1]$ tels que

$$x = T(x,\lambda).$$

- ***Cas 1 :*** $\alpha < 0$.

Pour tout $x \in X$, on a $x(0)\,x(\eta) \leq 0$. Donc, il existe $t_0 \in [0,\eta]$ tel que $x(t_0) = 0$.

D'une part, on a

$$|x(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} x'(s)ds\right| \leq (t+\eta)\|x'\|_{L^\infty}, \quad t \in [0,+\infty),$$

et

$$\begin{aligned}
\|x'\|_\infty \leq \lambda\|f(t,x,x')\|_{L^1} &\leq \|f(t,x,x')\|_{L^1} \\
&\leq \|p(t)|x(t)| + q(t)|x'(t)| + r(t)\|_{L^1} \\
&\leq (\eta P + P_1 + Q)\|x'\|_\infty + R,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|x'\|_\infty \leq \frac{R}{1-\eta P - P_1 - Q} = M_1.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \lambda\left|\int_0^{+\infty} G(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} |sf(s,x(s),x'(s)|ds \\
&\leq P_1\|x\|_\infty + Q_1 M_1 + R_1, \quad t \in [0,+\infty),
\end{aligned}$$

d'où

$$\|x\|_\infty \leq \frac{Q_1M_1 + R_1}{1 - P_1} = M_2.$$

Par conséquent, il suffit de prendre $M = \max\{M_1, M_2\}$, *qui est indépendant de* λ.

- ***Cas 2 :*** $0 \leq \alpha < 1$.

Pour tout $x \in X$, *on a*

$$|x(t)| = |\alpha x(\eta) + \int_0^t x'(s)ds| \leq \alpha|x(\eta)| + t\|x'\|_\infty.$$

Ce qui donne

$$|x(\eta)| \leq \alpha|x(\eta)| + \eta\|x'\|_\infty,$$

alors

$$(1-\alpha)|x(\eta)| \leq \eta\|x'\|_\infty.$$

D'où

$$|x(t)| \leq \left(\frac{\alpha\eta}{1-\alpha} + t\right)\|x'\|_\infty, \text{ pour tout } t \in [0, +\infty).$$

Comme dans le premier cas, on trouve

$$\begin{aligned} \|x'\|_\infty &\leq \frac{(1-\alpha)R}{(1-\alpha)(1-P_1-Q) - \alpha\eta P} = M_3. \\ \|x\|_\infty &\leq \frac{Q_1M_3 + R_1}{1-\alpha-P_1} = M_4. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre $M = \max\{M_3, M_4\}$, *qui est indépendant de* λ.

- ***Cas 3 :*** $\alpha > 1$.

Pour $x \in X$, *on a*

$$|x(t)| = \left|x(\eta) + \int_\eta^t x'(s)ds\right| \leq \frac{1}{\alpha}|x(0)| + |t-\eta|\|x'\|_\infty, \qquad t \in [0, +\infty).$$

Ce qui entraîne

$$|x(t)| \leq \left(\frac{\alpha\eta}{1-\alpha} + t\right)\|x'\|_\infty, \qquad \text{pour tout } t \in [0, +\infty).$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\|x'\|_\infty \leq \frac{(\alpha-1)R}{(\alpha-1)(1-P_1-Q)-\alpha\eta P} = M_5.$$

et

$$\|x\|_\infty \leq \frac{\alpha(Q_1M_5+R_1)+\eta(QM_5+R)}{\alpha-1-(\alpha P_1+\eta P)} = M_6.$$

Donc, il sufit de prendre $M = \max\{M_5, M_6\}$, *qui est indépendant de* λ.

Par conséquent, le problème (2.15) admet au moins une solution.

Une illustration pratique du résultat théorique précédent est donnée dans l'exemple suivant.

Exemple 2.3. *Considérons le problème aux limites du second ordre à trois points posé sur la demie droite positive suivant :*

$$\begin{cases} x''(t) + e^{-\gamma t}x'(t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty, \\ x(0) = \frac{1}{2}\,x(\eta), \qquad \lim\limits_{t\to+\infty} x'(t) = 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

où $\gamma > 1$. *Ici* $f(t,x,y) = e^{-\gamma t}y, \quad t \in (0,+\infty)$.

Comme $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, *alors pour* $p(t) = r(t) = 0$ *et* $q(t) = e^{-\gamma t}$, *on obtient*

$$\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}P + P_1 + Q = Q = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma s}ds = \frac{1}{\gamma} < 1.$$

Donc le théorème 2.4 est applicable.

Autrement dit, le problème (2.17)admet au moins une solution.

Chapitre 3

Etude d'un système d'équations différentielles du second ordre associées à des conditions aux bords de type intégrales

D'après Shouliang Xi, Mei Jia et Huipeng Ji, [22] (2009).

Dans cette section, nous étudions l'existence de solutions positives pour un système de deux équations différentielles du second ordre avec des conditions aux bords de type intégrales posés sur la demie droite positive. En utilisant un théorème du point fixe sur les cônes, appelé *théorème de Guo-Krasnosel'skii.* Nous montrons l'existence d'au moins une solution positive sous des conditions de croissance appropriées imposées aux termes non linéaires.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} x_1''(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ x_2''(t) + f_2(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} x_i'(t) = \int_0^{+\infty} g_1(s)x_1(s)ds, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} x_i'(t) = \int_0^{+\infty} g_2(s)x_2(s)ds, \end{cases} \tag{3.1}$$

où pour $i \in \{1,2\}$, $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction L^1-Carathéodory et $g_i \in L^1[0,+\infty), \forall i = 1,2.$

Dans ce qui suit, on va utiliser la définition suivante :

Définition 3.1. *Une fonction $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est dite L^1-Carathéodory si :*

1. *$h(.,x,y)$ est mesurable, Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,*
2. *$h(t,.,.)$ est continue pour p.p. $t \in \mathbb{R}^+$,*
3. *pour chaque $r_1, r_2 > 0$, il existe $\varphi_{r_1,r_2} \in L^\infty[0,+\infty)$, tel que*
   $0 \leq h(t,(1+t)x,(1+t)y) \leq \varphi_{r_1,r_2}(t)$, pour tout $x \in [0,r_1], y \in [0,r_2]$ et pour p.p. $t \in \mathbb{R}^+$.

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

(H_1) $g_i \in L^1[0,+\infty)$ est une fonction positive vérifiant $1 - \int_0^{+\infty} sg_i(s)ds > 0, \quad i = 1,2.$

(H_2) f_i est une fonction L^1-Carathéodory pour $i = 1,2.$

Notons

$$c_i = \frac{1}{1 - \int_0^{+\infty} sg_i(s)ds}, \quad i = 1,2.$$

Soit

$$C_\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \text{ est continue et } \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|x(t)|}{1+t} < +\infty \right\}.$$

Comme $(C_\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}), \|.\|_1)$ muni de la norme $\|x\|_1 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|x(t)|}{1+t}$ est un espace de Banach, alors $X := \{(x_1,x_2) \in C_\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \times C_\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})\}$ muni de la norme : $\|(x_1,x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1$ est aussi un espace de Banach.

Dans cette section on utilisera le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii (théorème 1.8) pour démontrer l'existence de solutions positives du problème (3.1). Pour cela, les lemmes suivants seront utiles :

Lemme 3.1. *Supposons que la condition* (H_1) *est vérifiée, alors pour tout* $v_i \in L^1[0,+\infty)$, $v_i \geq 0$, *le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} -x_i'' = v_i(t), \quad t \in (0,+\infty), \\ x_i(0) = 0, \quad x_i'(\infty) = \int_0^{+\infty} g(s)x_i(s)\,ds, \end{cases} \tag{3.2}$$

pour $i \in \{1,2\}$, *admet une unique solution* $x_i \in C_\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ *définie par :*

$$x_i(t) = \int_0^{+\infty} H_i(t,s)v_i(s)\,ds, \quad t \in [0,+\infty), \tag{3.3}$$

où

$$H_i(t,s) = G(t,s) + t\,c_i\,G_i(s),\ i = 1,2,$$

et

$$G(t,s) = \min\{t,s\},\ \ G_i(s) = \int_0^\infty g_i(r)G(s,r)dr.$$

Demonstration 14. *Voir le chapitre préliminaires.*

Lemme 3.2. *Supposons que la condition* (H_1) *est vérifiée et soit* $\delta \in (0,1)$, *alors pour tout* $t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right]$, $\tau, s \in \mathbb{R}^+$, *on a*

$$H_i(\tau,s) \geq 0, \quad H_i(t,s) \geq \frac{\delta}{1+\tau}H_i(\tau,s). \tag{3.4}$$

Demonstration 15. *Il est clair que* $H_i(\tau,s) \geq 0$.

Pour $t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right]$, $\tau, s \in \mathbb{R}^+$, *rappelons que* $G(t,s) = \min\{t,s\}$, *on a*

$$\frac{\delta}{1+\tau}\,G(\tau,s) \leq \frac{\delta}{1+\tau}\tau < \delta \leq t,$$

et

$$\frac{\delta}{1+\tau}\,G(\tau,s) \leq \frac{\delta}{1+\tau}s < s.$$

Ce qui implique que

$$\frac{\delta}{1+\tau}G(\tau,s)\leq \min\{t,s\}=G(t,s),$$

d'où

$$H_i(t,s)\geq \frac{\delta}{1+\tau}H_i(\tau,s),\quad \textit{pour}\ \tau,s\in\mathbb{R}^+,\ t\in\left[\delta,\frac{1}{\delta}\right].$$

Lemme 3.3. *Supposons que (H_1) est vérifiée. Si $v_i\in L^1[0,+\infty)$, $v_i\geq 0$, alors l'unique solution du problème aux limites (3.2) satisfait $x_i(t)\geq 0$ et $\min\limits_{\delta\leq t\leq\frac{1}{\delta}} x_i(t)\geq \delta\|x_i\|_1,\ i=1,2.$*

Demonstration 16. *Il est clair que $x_i(t)\geq 0$, pour tout $t\in\mathbb{R}^+,\ i=1,2.$*

De (3.3) et (3.4), pour tout $t\in\left[\delta,\frac{1}{\delta}\right],\ \tau,s\in\mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \int_0^\infty H_i(t,s)v_i(s)\,ds,\\ &\geq \delta\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\tau}H_i(\tau,s)v_i(s)ds,\\ &= \delta\frac{1}{1+\tau}\,x_i(\tau), \end{aligned}$$

d'où

$$x_i(t)\geq \delta\|x_i\|_1,$$

ainsi

$$\min_{\delta\leq t\leq\frac{1}{\delta}} x_i(t)\geq \delta\|x_i\|_1,\ i=1,2.$$

Pour utiliser le théorème de Guo-Krasnosel'skii, on considère le cône K défini par :

$$K=\{(x_1,x_2)\in X: x_i\geq 0\ et \min_{\delta\leq t\leq\frac{1}{\delta}} x_i(t)\geq \delta\|x_i\|_1,\ i=1,2\}.$$

Montrons d'abord que $\int_0^{+\infty} f_i(s,x_1(s),x_2(s))ds$ est convergente.

De (H_2), pour $(x_1,x_2)\in X$, il existe $r_i>0,\ \ i=1,2$ tel que $\frac{x_i(s)}{1+s}\leq r_i$, pour tout $s\geq 0$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_i(s,x_1(s),x_2(s))ds &= \int_0^{+\infty} f_i\left(s,(1+s)\frac{x_1(s)}{1+s},(1+s)\frac{x_2(s)}{1+s}\right)ds,\\ &\leq \int_0^{+\infty}\phi_{r_1,r_2}(s)ds<+\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, du lemme 3.1, le problème aux limites (3.1) est équivalent à

$$x_i(t) = \int_0^\infty H_i(t,s) f_i(s, x_1(s), x_2(s))ds, \ i = 1, 2.$$

Maintenant, on définit les opérateurs $T_i : K \to C_\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ par :

$$T_1(x_1, x_2)(t) = \int_0^\infty H_1(t,s) f_1(s, x_1(s), x_2(s))ds,$$
$$T_2(x_1, x_2)(t) = \int_0^\infty H_2(t,s) f_2(s, x_1(s), x_2(s))ds.$$

Soit

$$T(x_1, x_2)(t) = (T_1(x_1, x_2)(t), T_2(x_1, x_2)(t)).$$

Lemme 3.4. *Supposons que les conditions $(H_1), (H_2)$ sont vérifiées, alors $T : K \to K$ est complètement continu.*

Demonstration 17. *1. $T : K \to K$. En effet, pour tout $(x_1, x_2) \in K$*

$$\begin{aligned}
\frac{T_i(x_1, x_2)(t)}{t+1} &= \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t} f_i(s, x_1(s), x_2(s))ds, \\
&= \int_0^\infty \frac{G(t,s) + tc_iG_i(s)}{1+t} f_i(s, x_1(s), x_2(s))ds, \\
&\leq \left(1 + c_i \int_0^\infty r g_i(r)dr\right)\left(\int_0^\infty \phi_{r_1,r_2}(s)ds\right), \\
&= c_i \int_0^\infty \phi_{r_1,r_2}(s)ds < +\infty.
\end{aligned}$$

D'où, $T(x_1, x_2) \in X$ et du lemme 3.3, on obtient $T(x_1, x_2) \in K$.

2. Montrons que l'opérateur $T : K \to K$ est continu.

Pour toute suite convergente $(x_{1,n}, x_{2,n}) \to (x_1, x_2)$ pour $n \to +\infty$, il existe deux constantes positives $r_1, r_2 > 0$ telles que

$$\max\{\|x_{1,n}\|, \|x_1\|\} \leq r_1, \ \max\{\|x_{2,n}\|, \|x_2\|\} \leq r_2.$$

De (H_2) on a

$$|f_i(s, x_{1,n}(s), x_{2,n}(s)) - f_i(s, x_1(s), x_2(s))| \to 0, \quad n \to +\infty,$$

et

$$|f_i(s, x_{1,n}(s), x_{2,n}(s)) - f_i(s, x_1(s), x_2(s))| \leq 2\phi_{r_1,r_2}(s),$$

pour p.p. $s \in [0, +\infty)$.

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} & \|T_i(x_{1,n}, x_{2,n}) - T_i(x_1, x_2)\|_1 \\ \leq & \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t} |f_i(s, x_{1,n}(s), x_{2,n}(s)) - f_i(s, x_1(s), x_2(s))| ds, \\ \to & \ 0. \end{aligned}$$

D'où, $\|T_i(x_{1,n}, x_{2,n}) - T_i(x_1, x_2)\|_1 \to 0, \quad n \to +\infty.$

Ainsi, l'opérateur $T : K \to K$ *est continu.*

3. *Soit* D *un sous-ensemble borné de* K*, montrons que* $T(D)$ *est relativement compact.*

   Pour tous $(x_1, x_2) \in D, T_0 > 0$ *et* $t_1, t_2 \in [0, T_0]$*, avec* $t_1 < t_2$*, on a*

$$\begin{aligned} \left| \frac{T_i(x_1, x_2)(t_2)}{1+t_2} - \frac{T_i(x_1, x_2)(t_1)}{1+t_1} \right| &= \left| \int_0^\infty \left(\frac{H_i(t_2, s)}{1+t_2} - \frac{H_i(t_1, s)}{1+t_1} \right) f_i(s, x_1(s), x_2(s)) ds \right|, \\ &\leq \int_0^\infty \left| \left(\frac{H_i(t_2, s)}{1+t_2} - \frac{H_i(t_1, s)}{1+t_1} \right) \right| \phi_{r_1,r_2}(s) ds, \\ &\to 0, \quad quand \quad t_1 \to t_2. \end{aligned}$$

   D'où $T(D)$ *est équicontinu.*

   De plus, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donne

$$\left| \frac{T_i(x_1, x_2)(t)}{1+t} - \lim_{t\to+\infty} \frac{T_i(x_1, x_2)(t)}{1+t} \right| \to 0,$$

   pour tout $t > T_0$.

   D'où $T(D)$ *est équiconvergent à l'infini. Par le lemme 1.2, on a* $T(D)$ *est relativement compact.*

   Par conséquent, $T : K \to K$ *est complètement continu.*

Supposons que

(H_3) Ils existent deux fonctions positives $a_i \in L^1[0,+\infty)$ et deux fonctions continues $h_i \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+),\ i=1,2,$ telles que

$$f_i(t,x,y) \leq a_i(t)\, h_i(x,y), \quad t,x,y \in \mathbb{R}^+,$$

où $\int_0^\infty s\, a_i(s)ds < +\infty$.

Evidemment si (H_3), alors $\int_0^{+\infty} a_i(s)ds < +\infty$, et si (H_1) et (H_3) sont vérifiées, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{H_i(t,s)}{1+t}(1+s)a_i(s)ds < +\infty, \ \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+,\ i=1,2.$$

Notons

$$h_i^0 = \limsup_{x+y\to 0^+} \frac{h_i(x,y)}{x+y}, \quad h_i^\infty = \limsup_{x+y\to +\infty} \frac{h_i(x,y)}{x+y},$$

$$f_i^0 = \liminf_{x+y\to 0^+} \inf_{\delta\leq t\leq \frac{1}{\delta}} \frac{f_i(t,x,y)}{x+y}, \quad f_i^\infty = \liminf_{x+y\to +\infty} \inf_{\delta\leq t\leq \frac{1}{\delta}} \frac{f_i(t,x,y)}{x+y},$$

$$N_i = \inf_{\delta\leq t\leq \frac{1}{\delta}} \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_i(t,s)}{1+t}ds, \quad n_i = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_0^{+\infty} \frac{H_i(t,s)}{1+t}(1+s)a_i(s)ds.$$

Maintenant, nous présentons deux résultats d'existence pour le problème (3.1).

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_3) sont satisfaites et que*

1. *Ils existent des nombres positives δ $(0<\delta<1)$, m_i, M_i, tels que*

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 \leq 1 \ \ \text{et} \ \ M_1 N_1 \delta + M_2 N_2 \delta \geq 1,$$

2. $0 \leq h_i^0 < m_i$ *et* $M_i < f_i^\infty \leq +\infty$.

Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution positive.

Demonstration 18. *1. D'après la condition, $0 \leq h_i^0 < m_i$, il existe $\delta_1 > 0$, $(\delta_1 < 1)$, tel que*

$$h_i(x_1,x_2) \leq m_i(x_1+x_2), \quad \text{pour } x_1+x_2 \in (0,\delta_1].$$

Soit

$$\Omega_1 = \{(x_1,x_2) \in K : \|(x_1,x_2)\| < \delta_1\}.$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in \partial\Omega_1$ *et* $t \in \mathbb{R}^+$, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{T_i(x_1,x_2)(t)}{1+t} &= \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t} f_i(s, x_1(s), x_2(s))ds, \\
&\leq \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t} a_i(s) h_i(x_1(s), x_2(s))ds, \\
&\leq m_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t}(1+s)\, a_i(s)ds, \\
&\leq m_i n_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|T(x_1,x_2)\| &= \|T_1(x_1,x_2)\|_1 + \|T_2(x_1,x_2)\|_1, \\
&\leq m_1 n_1(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) + m_2 n_2(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1), \\
&\leq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 = \|(x_1,x_2)\|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|T(x_1,x_2)\| \leq \|(x_1,x_2)\| \quad \textit{pour tout} \quad (x_1,x_2) \in \partial\Omega_1. \tag{3.5}$$

2. *D'après la condition,* $M_i < f_i^\infty \leq +\infty$ *il existe* $\delta_2 > 1$ *tel que*

$$f_i(t,x_1,x_2) \geq M_i(x_1+x_2), \quad \textit{pour} \ t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right], \ x_1 + x_2 > \delta\delta_2.$$

Soit

$$\Omega_2 = \{(x_1,x_2) \in K : \|(x_1,x_2)\| < \delta_2\}.$$

Pour $(x_1,x_2) \in \partial\Omega_2 \subset K$, *par le lemme (3.3), on a*

$$\min_{\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}} x_i(t) \geq \delta\|x_i\|_1, \ i = 1, 2.$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
x_1(t) + x_2(t) &\geq \min_{\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}} (x_1(t) + x_2(t)) \\
&\geq \delta(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) \\
&= \delta\|(x_1,x_2)\| \\
&= \delta\delta_2.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $(x_1, x_2) \in \partial\Omega_2$ *et* $t \in \mathbb{R}^+$, *on aura*

$$\begin{aligned} \frac{T_i(x_1,x_2)(t)}{1+t} &\geq \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_i(t,s)}{1+t} f_i(s,x_1(s),x_2(s))ds, \\ &\geq \delta M_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_i(t,s)}{1+t} ds, \\ &\geq \delta M_i N_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|T(x_1,x_2)\| &= \|T_1(x_1,x_2)\|_1 + \|T_2(x_1,x_2)\|_1, \\ &\geq \delta M_1 N_1(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) + \delta M_2 N_2(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1), \\ &\geq (\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) = \|(x_1,x_2)\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|T(x_1,x_2)\| \geq \|(x_1,x_2)\|, \quad \textit{pour tout } (x_1,x_2) \in \partial\Omega_2. \tag{3.6}$$

De (3.5) et (3.6) et d'après le théorème de Guo-Krasnosel'skii, l'opérateur T *admet au moins une solution positive non nulle dans* $K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.

Par conséquent, le problème (3.1) admet au moins une solution positive (x_1, x_2) *vérifiant*

$$\delta_1 \leq \|(x_1,x_2)\| \leq \delta_2.$$

C'est à dire

$$\delta_1 \leq \left(\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|x_1(t)|}{1+t} + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|x_2(t)|}{1+t} \right) \leq \delta_2.$$

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_3) *sont satisfaites et que*

1. *Ils existent des nombres positives* δ $(0 < \delta < 1)$, p_i, P_i, *tels que*

$$0 \leq h_i^\infty < p_i, \ P_i < f_i^0 \leq +\infty,$$

2. $p_1 n_1 + p_2 n_2 \leq 1, \ P_1 N_1 \delta + P_2 N_2 \delta \geq 1.$

Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution positive.

Demonstration 19. *1. De la condition $P_i < f_i^0 \leq +\infty$, il existe $\delta_3 > 0$ ($\delta_3 < 1$), tel que*

$$f_i(t, x_1, x_2) \geq P_i\,(x_1 + x_2), \qquad pour\ \ t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right],\ 0 < x_1 + x_2 < \delta_3.$$

Soit

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2) \in K : \|(x_1, x_2)\| < \delta_3\}.$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_3 \subset K$, le lemme (3.3) entraine

$$\min_{\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}} (x_1(t) + x_2(t)) \geq \delta(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1).$$

D'où, pour tout $(x_1, x_2) \in \partial\Omega_3$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{T_i(x_1, x_2)(t)}{1+t} &\geq \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_i(t,s)}{1+t} f_i(s, x_1(s), x_2(s))ds, \\ &\geq \delta P_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{H_i(t,s)}{1+t} ds, \\ &\geq \delta P_i N_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \|T(x_1, x_2)\| &= \|T_1(x_1, x_2)\|_1 + \|T_2(x_1, x_2)\|_1, \\ &\geq \delta P_1 N_1(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) + \delta P_2 N_2(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1), \\ &\geq (\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) = \|(x_1, x_2)\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|T(x_1, x_2)\| \geq \|(x_1, x_2)\|, \quad pour\ tout\ \ (x_1, x_2) \in \partial\Omega_3. \tag{3.7}$$

2. De la condition $0 \leq h_i^\infty < p_i$, il existe $R_0 > 0$, tel que

$$h_i(x_1, x_2) \leq p_i\,(x_1 + x_2), \quad x_1 + x_2 > R_0.$$

Notons

$$q_i = \max_{0 \leq x_1 + x_2 \leq R_0} h_i(x_1, x_2).$$

D'où, on a

$$h_i(x_1, x_2) \leq q_i + p_i(x_1 + x_2), \qquad pour\ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R},$$

Soit

$$\Omega_4 = \{(x_1, x_2) \in K : \|(x_1, x_2)\| < \delta_4\},$$

où $\delta_4 > \max\{1, \delta_3, (q_1 n_1 + q_2 n_2)(1 - p_1 n_1 - p_2 n_2)^{-1}\}$.

Pour tout $(x_1, x_2) \in \partial\Omega_4$, $t \in \mathbb{R}^+$, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{T_i(x_1, x_2)(t)}{1+t} &\leq \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t} a_i(s) h_i(x_1(s), x_2(s)) ds, \\
&\leq \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t} a_i(s)(q_i + p_i(x_1(s) + x_2(s)) ds, \\
&< p_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t}(1+s) a_i(s) ds \\
&+ q_i \int_0^\infty \frac{H_i(t,s)}{1+t}(1+s) a_i(s) ds, \\
&\leq p_i n_i(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) + q_i n_i.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|T(x_1, x_2)\| &= \|T_1(x_1, x_2)\|_1 + \|T_2(x_1, x_2)\|_1, \\
&\leq (p_1 n_1 + p_2 n_2)(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1) + q_1 n_1 + q_2 n_2, \\
&\leq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 = \|(x_1, x_2)\|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|T(x_1, x_2)\| \leq \|(x_1, x_2)\|, \quad \textit{pour tout} \ (x_1, x_2) \in \partial\Omega_4. \tag{3.8}$$

De (3.7) et (3.8) et d'après le théorème de Guo-Krasnosel'skii, l'opérateur T *admet au moins une solution positive dans* $K \cap (\overline{\Omega_4} \backslash \Omega_3)$.

Par conséquent, le problème (3.1) admet au moins une solution positive vérifiant

$$\delta_3 \leq \|(x_1, x_2)\| \leq \delta_4.$$

Maintenant, nous donnons un exemple d'application

Exemple 3.1. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} x_1''(t) + (x_1 + x_2)^2 e^{-t} = 0, \\ x_2''(t) + (x_1 + x_2)^{\frac{3}{2}} e^{-t} = 0, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ \lim\limits_{t \to +\infty} x_1'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-2s} x_1(s) ds, \\ \lim\limits_{t \to +\infty} x_2'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-2s} x_2(s) ds. \end{cases}$$

Dans cet exemple, on a

$f_1(t, x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 e^{-t},\ f_2(t, x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{\frac{3}{2}} e^{-t}$,

$g_1(s) = g_2(s) = e^{-2s}, a_1(t) = a_2(t) = e^{-t}$,

$h_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2,\ h_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{\frac{3}{2}}$.

Pour $r_1, r_2 > 0$, *on prend* $\phi_{r_1,r_2}(t) = (1 + r_1 + r_2)^2 (1 + t)^2 e^{-t}$. *Soit* $\delta = \frac{1}{2}$.

Comme $n_i \leq \frac{68}{27}$ *et* $N_i \geq \frac{1}{9}$, *on prend* $m_i = \frac{1}{6},\ M_i = 10$.

Ainsi, les conditions du théorème 3.1 sont toutes satisfaites. Par conséquent, ce problème admet au moins une solution positive.

Chapitre 4

Etude d'un problème aux limites résonant à trois points

D'après Xiaoling Han [13] (2007).

L'étude des problèmes aux limites à multi-points a été initiée par Il'in et Moiseev [14]. Gupta [8], motivé par l'étude d'Il'in et de Moiseev, a étudié les problèmes aux limites à trois points, pour les équations différentielles ordinaires non linéaires, de non résonance. Depuis, plus généralement des problémes aux limites à multi-points non linéaires, de ou sans résonance, ont été étudié par plusieurs auteurs en utilisant : le théoréme de l'indice du point fixe, le théoréme de continuation de Leray-Schauder, La théorie du degré de coïncidence et le théorème de l'indice du point fixe sur un cône. Pour le cas de non résonance on cite, par exemple, les références [24, 21] et pour le cas de résonance on cite les deux références [18, 10]. Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'existence de solutions positives d'un problème aux limites à trois points de résonance. La théorie du point fixe sur les cônes est utilisée pour démontrer les différents résultats présentés.

Considérons le problème aux limites à trois points suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t)),\ t \in (0,1), \\ x'(0) = 0,\ x(\eta) = x(1), \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\eta \in (0,1)$.

Remarquons que le problème linéaire homogène associé :

$$\begin{cases} x^{''}(t) = 0,\ t \in (0,1), \\ x^{'}(0) = 0,\ x(\eta) = x(1), \end{cases}$$

admet des solutions non nulles $x(t) = c,\ c \in \mathbb{R}$.

Donc le problème (4.1) se trouve au cas résonant.

Dans ce qui suit, on examinera l'existence de solutions positives au problème (4.1).

Supposons que :

(H1) $\beta \in (0, \frac{\Pi}{2})$ est une constante.

(H2) $f : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$f(t,x) \geq -\beta^2 x.$$

Posons : $g(t,x) = f(t,x) + \beta^2 x$.

Le problème (4.1) est équivalent au problème :

$$\begin{cases} x^{''}(t) + \beta^2 x(t) = g(t, x(t)),\ t \in (0,1), \\ x^{'}(0) = 0,\ x(\eta) = x(1). \end{cases} \tag{4.2}$$

Considérons les deux espaces de Banach : $\mathrm{C}[0,1]$ muni de la norme $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$,
et l'espace : $\mathrm{C}^2[0,1]$ muni de la norme $\|x\|_2 = \max\{\|x\|, \|x'\|, \|x''\|\}$.

Soit

$$D(L) = \{u \in \mathrm{C}^2[0,1] \mid u^{'}(0) = 0,\ u(\eta) = u(1)\}.$$

Considérons l'opérateur linéaire $L : D(L) \subset \mathrm{C}^2[0,1] \to \mathrm{C}[0,1]$, défini par : $Lx = x^{''} + \beta^2 x,$ pour $x \in D(L),$ où β est une constante telle que L soit inversible.

La condition (H1) garantit que L est inversible.

Pour montrer l'existence de solutions positives, on appliquera le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii sur les cônes (voir le théorème 1.8), pour cela on doit réécrire le problème (4.2) sous forme d'un problème du point fixe.

Présentons d'abord quelques lemmes intermédiaires.

Considérons le problème aux limites linéaire :

$$\begin{cases} x''(t) + \beta^2 x(t) = h(t),\ t \in (0,1), \\ x'(0) = 0,\ x(\eta) = x(1). \end{cases} \tag{4.3}$$

Lemme 4.1. *Supposons que l'hypothèse (H1) soit satisfaite.*

Pour tout $h \in \mathrm{C}[0,1]$, le problème (4.3) admet une unique solution

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds, \tag{4.4}$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s),\ 0 \le s \le t \le 1, \\ 0\ , \qquad 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

$$+\frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \begin{cases} \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}\ ,\ 0 \le s \le \eta \le 1, \\ \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}\ ,\ 0 \le \eta \le s \le 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

Demonstration 20. *Voir le chapitre préliminaires.*

Lemme 4.2. *Il existe $M,\ M_0 > 0$ tels que*

$$0 \le G(t,s) \le M,\ \forall\ (t,s) \in [0,1]\times[0,1],$$

$$M_0 \le G(t,s) \le M,\ \forall\ (t,s) \in [0,1]\times[0,\eta].$$

Demonstration 21. *D'après (4.5) et (H1), pour $\beta < \frac{\pi}{2}$ on a : $G(t,s) \ge 0, \quad \forall\ (t,s) \in [0,1]\times[0,1]$.*

D'autre part, on a

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s),\ 0 \le s \le t \le 1, \\ 0, \qquad 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

$$+\frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \begin{cases} \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}\ ,\ 0 \le s \le \eta \le 1, \\ \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}\ ,\ 0 \le \eta \le s \le 1 \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\sin\beta + \frac{\cos\beta t}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \quad \begin{cases} \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}\ ,\ 0 \leq s \leq \eta \leq 1, \\ \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}\ ,\ 0 \leq \eta \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$< \frac{1}{\beta}\sin\beta + \frac{1}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \quad \begin{cases} \cos\frac{\beta(2s-\eta-1)}{2}\ ,\ 0 \leq s \leq \eta \leq 1, \\ \frac{\sin\beta(1-s)}{2\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}\ ,\ 0 \leq \eta \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\sin\beta + \frac{cos\frac{\beta(1-\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} = M. \tag{4.6}$$

Ainsi $0 \leq G(t,s) \leq M,\ \forall\ (t,s) \in [0,1]\times[0,1].$

Si $(t,s) \in [0,1]\times[0,\eta],$ *alors*

$$G(t,s) \geq \frac{1}{\beta}\cos\beta\cot\frac{\beta(\eta+1)}{2} = M_0. \tag{4.7}$$

Lemme 4.3. *Il existe une fonction continue* $\Phi : [0,1] \to [0,\infty)$ *et une constante* $c \in (0,1]$ *telles que*

$$c\,\Phi(s) \leq G(t,s) \leq \Phi(s).\,\forall\, t,s$$

Demonstration 22. *Soient* $\phi(s) = 1-s, \quad H(t,s) = \mu\,\phi(s) - G(t,s).$

- ***Limite supérieure .***

  Il suffit de montrer que, si $\mu > 0$ *est suffisamment grand alors*

  $H(t,s)_{s\geq t} \geq 0, \quad H(t,s)_{s\leq t} \geq 0,$ *pour tout* $(t,s) \in [0,1]\times[0,1].$

  - ***Cas 1*** *:* $s \in [0,\eta]$ *et* $t \in [0,1],$

  si $s \geq t$ *:*

$$\begin{aligned} H(t,s) &= \mu(1-s) - \frac{\cos\beta t\cos\frac{\beta(1+\eta-2s)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\geq \mu(1-s) - \frac{\cos\frac{\beta(1-\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\geq \mu(1-\eta) - \frac{\cos\frac{\beta(1-\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}. \end{aligned}$$

  Donc pour

$$\mu \geq \mu_1 = \frac{\cos\frac{\beta(1-\eta)}{2}}{\beta(1-\eta)\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}},$$

on aura $H(t,s) \geq 0$.

D'autre part, si $s \leq t$:

$$\begin{aligned} H(t,s) &= \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s) - \frac{\cos\beta t\cos\frac{\beta(1+\eta-2s)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\geq \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta - \frac{\cos\beta t\cos\frac{\beta(1+\eta-2s)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\geq \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta - \frac{\cos\frac{\beta(1-\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\geq \mu(1-\eta) - \frac{1}{\beta}\sin\beta - \frac{\cos\frac{\beta(1-\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Donc pour

$$\mu \geq \mu_2 = \frac{1}{\beta(1-\eta)}\left[\sin\beta + \frac{\cos\frac{\beta(1-\eta)}{2}}{\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}\right],$$

on aura $H(t,s) \geq 0$.

$\bullet$***Cas 2*** : $s \in [\eta, 1]$ *et* $t \in [0,1]$,

si $s \geq t$:

$$\begin{aligned} H(t,s) &= \mu(1-s) - \frac{\cos\beta t\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\ &\geq \mu(1-s) - \frac{\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\ &\geq \mu(1-s) - \frac{\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\ &= (1-s)\left[\mu - \frac{1}{2\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Donc pour

$$\mu \geq \mu_3 = \frac{1}{2\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}},$$

on aura $H(t,s) \geq 0$.

D'autre part, si $s \geq t$:

$$\begin{aligned}
H(t,s)_{s\leq t} &= \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s) - \frac{\cos\beta t\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\
&\geq \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(1-s) - \frac{\cos\beta t\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\
&> \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(1-s) - \frac{\cos\beta\eta\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\
&\geq \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\beta(1-s) - \frac{\beta(1-s)\cos\beta\eta}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\
&= (1-s)\left[\mu - 1 - \frac{\cos\beta\eta}{2\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Donc pour

$$\mu \geq \mu_4 = 1 + \frac{\cos\beta\eta}{2\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}},$$

on aura $H(t,s) \geq 0$.

Soit $\mu^* \geq \max\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, alors, $H(t,s) \geq 0$ pour tout $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$.

Par conséquent, $\mu^*\phi(s) \geq G(t,s)$.

Posons $\Phi(s) = \mu^*\phi(s)$ on aura donc $G(t,s) \leq \Phi(s)$, pour tout t, $s \in [0,1]$.

- ***Limite inférieure.***

Il suffit de montrer que si $\mu > 0$ est suffisamment petit, alors

$H(t,s)_{s\geq t} \leq 0$, $\quad H(t,s)_{s\leq t} \leq 0$, pour tout $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$.

*•**Cas 1** : $s \in [0,\eta]$ et $t \in [0,1]$,*

si $s \geq t$:

$$\begin{aligned}
H(t,s) &= \mu(1-s) - \frac{\cos\beta t\cos\frac{\beta(1+\eta-2s)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\
&\leq \mu(1-s) - \frac{\cos\beta\eta\cos\frac{\beta(1+\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\
&\leq \mu - \frac{\cos\beta\eta\cos\frac{\beta(1+\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc pour

$$\mu \leq \mu_5 = \frac{\cos\beta\eta\cos\frac{\beta(1+\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}},$$

on aura $H(t,s) \leq 0$.

D'autre part, si $s \leq t$:

$$\begin{aligned} H(t,s) &= \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s) - \frac{\cos\beta t\cos\frac{\beta(1+\eta-2s)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\leq \mu(1-s) - \frac{\cos\beta t\cos\frac{\beta(1+\eta-2s)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\leq \mu(1-s) - \frac{\cos\beta\eta\cos\frac{\beta(1+\eta)}{2}}{\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}} \\ &\leq \mu-\mu_5. \end{aligned}$$

Donc pour $\mu \leq \mu_5$, *on aura* $H(t,s) \leq 0$.

•***Cas 2*** *:* $s \in [\eta, 1]$

Si $s = 1$, *alors* $G(t,s) = 0$ *et* $\phi(s) = 0$.

D'où le résultat est vrai.

Si $s \in [\eta, 1)$, *alors*

$$H(t,s)_{s\geq t} = \mu(1-s) - \frac{\cos\beta t\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}.$$

Il est évident qu'il existe $\mu_6 > 0$ *suffisamment petit tel que* $H(t,s)_{s\geq t} \leq 0$.

On suppose que $s \leq t$, *alors*

$$\begin{aligned} H(t,s)_{s\leq t} &= \mu(1-s) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(t-s) - \frac{\cos\beta t\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}} \\ &\leq \mu(1-s) - \frac{\cos\beta t\sin\beta(1-s)}{2\beta\sin\frac{\beta(\eta+1)}{2}\sin\frac{\beta(1-\eta)}{2}}. \end{aligned}$$

Donc, si $\mu \leq \mu_6$ *alors* $H(t,s)_{s\leq t} \leq 0$.

Posons $0 < \mu_0 \leq \min\{\mu_5, \mu_6\}$.

Alors pour tout $(t,s) \in [0,1]\times[0,1]$ *on a* $H(t,s) \leq 0$. *Ainsi*

$$\mu_0\,\phi(s) \leq G(t,s).$$

D'où $\quad c\,\Phi(s) \leq G(t,s), \quad t,s \in [0,1], \quad$ *où* $c = \mu_0/\mu^* \in (0,1]$.

D'où le lemme est démontré.

Soit le cône positif

$$P = \{x \in \mathrm{C}[0,1] \ : \ x(t) \geq 0, \, t \in [0,1]\},$$

Définissons l'opérateur linéaire $T : P \to P$ par :

$$Th(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds.$$

Lemme 4.4. *Pour tout $h \in P$, l'opérateur T est bien défini et il est complètement continu.*

Demonstration 23.

(i) Montrons que l'opérateur T envoi P dans P :

Soit $h \in P$, on a $Th \in \mathrm{C}[0,1]$

$$\begin{aligned} Th(t) &= \int_0^1 G(t,s)h(s)ds \\ &\geq c\int_0^1 \Phi(s)h(s)ds \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

D'où pour tout $t \in [0,1]$ on a $Th(t) \geq 0$, ce qui signifie que $T(P) \subset P$.

(ii) Montrons que T est continu.

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de P telle que $h_n \to h$ quand $n \to +\infty$ dans P.

Montrons que $Th_n \to Th$ quand $n \to +\infty$.

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, pour $t \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} |Th_n(t) - Th(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s)(h_n(s) - h(s))ds\right| \\ &\leq \Phi(s)\int_0^1 |(h_n(s) - h(s))|ds \\ &\to 0 \quad quand \quad n \to +\infty. \end{aligned}$$

(iii) Soit D un sous ensemble borné de P, montrons que $T(D)$ est relativement compact.

- *$T(D)$ est uniformément borné. En effet*

pour tout $h \in D$ et $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |Th(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s)h(s)ds\right| \\ &\leq M\int_0^1 |h(s)|ds \\ &< +\infty \end{aligned}$$

- *Pour tout $h \in D$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $t_1 < t_2$.*

$$\begin{aligned} |Th(t_1) - Th(t_2)| &= \left|\int_0^1 \left(G(t_1,s) - G(t_2,s)\right)h(s)ds\right| \\ &\leq \|h\| \int_0^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds \\ &\to 0 \quad quand \quad t_1 \to t_1. \end{aligned}$$

D'où $T(D)$ est équicontinue.

Ensuite, le critère de compacité d'Ascoli-Arzéla assure que l'opérateur T est complètement continu.

Remarque 4.1. *Si la fonction $t \mapsto \frac{\partial G}{\partial t}(.,s)$ est bornée, alors on peut montrer que $T(D)$ est relativement compacte en utilisant l'injection compacte de $\mathrm{C}^1[0,1]$ dans $\mathrm{C}[0,1]$. En effet*

Pour $h \in D$ et $t \in [0,1]$ on a $|Th(t)| < +\infty$, et

$$\begin{aligned} |(Th)'(t)| &= \left|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h(s)ds\right| \\ &\leq N\int_0^1 |h(s)|ds \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

où $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \leq N$ pour tous $t, s \in [0,1]$. Par conséquent, $T(D)$ est borné dans $\mathrm{C}^1[0,1]$.

Maintenant, pour tout $x \in P$, notons $Fx(t) = g(t,x)$, alors $F : P \to P$ est un opérateur continu. Posons $A = T \circ F : P \to P$.

Constatons que tout point fixe de l'opérateur A dans P est une solution positive du problème (4.2).

Soit $K \subset P$ un cône défini par :

$$K = \{x \in P \ : \ x(t) \geq c \parallel x \parallel, \ t \in [0,1]\},$$

Lemme 4.5. *L'opérateur $A = T \circ F : K \to K$, est complètement continu.*

Demonstration 24.

(i) Montrons que l'opérateur A envoi K dans K.

Supposons que $x \in \mathrm{C}[0,1]$, $x \geq 0$, d'après le lemme 4.3, on a

$$(Ax)(t) = T(Fx)(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \geq c\int_0^1 \Phi(s)g(s,x(s))ds, \tag{4.8}$$

d'autre part,

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \leq \int_0^1 \Phi(s)g(s,x(s))ds, \tag{4.9}$$

De (4.8) et (4.9), pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$(Ax)(t) \geq c\|Ax\|, \tag{4.10}$$

cela signifie que $A(K) \subset K$.

(ii) L'opérateur A est complètement continu. En effet,

comme F est continu et T est complètement continu, comme dans la démonstration du lemme 4.4, on peut montrer que l'opérateur A est complètement continu.

Maintenant nous allons présenter quelques résultats d'existence du problème (4.1).

Soient

$$\overline{f}_0 = \limsup_{x\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x}, \quad \underline{f}_0 = \liminf_{x\to 0^+} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},$$

$$\overline{f}_\infty = \limsup_{x\to +\infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x}, \quad \underline{f}_\infty = \liminf_{x\to +\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x}.$$

Théorème 4.1. *Supposons que* $(H1)$ *et* $(H2)$ *soient satisfaites, alors le problème (4.1) admet au moins une solution positive dans l'un des cas suivants :*

(i) $\overline{f}_0 = -\beta^2$ *et* $\underline{f}_\infty = \infty$,

(ii) $\underline{f}_0 = \infty$ *et* $\overline{f}_\infty = -\beta^2$.

Demonstration 25. *Pour* $0 < r < R$, *soient*

$$\Omega_1 = \{x \in \mathrm{C}[0,1] \ : \ \|x\| \leq r\} \quad et \quad \Omega_2 = \{x \in \mathrm{C}[0,1] \ : \ \|x\| \leq R\}.$$

Alors $0 \in \Omega_1$ *et* $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

- ***Cas 1*** : $\overline{f}_0 = -\beta^2$ *et* $\underline{f}_\infty = \infty$.

Comme $\overline{f}_0 = -\beta^2$, *il existe* $r > 0$ *tel que*

$$f(t,x) \leq (m - \beta^2)x, \ \ pour\ tout \ \ 0 < x \leq r.$$

où $m > 0$ *satisfait*

$$Mm \leq 1. \tag{4.11}$$

Pour $x \in K$ *avec* $\|x\| = r$, *on a*

$$g(s,x) = f(s,x) + \beta^2 x \leq m\,x, \ \ pour\ tout \ \ s \in [0,1].$$

De plus, pour tout $s \in [0,1]$, *on a*

$$0 < c\,\|x\| \leq x(s) \leq \|x\| = r.$$

Donc

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &\leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \\ &\leq m\|x\| \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds \\ &\leq M\,m\,\|x\| \leq \|x\|.\end{aligned}$$

Par conséquant,

$$\|Ax\| \leq \|x\|, \forall\, x \in K \cap \partial\Omega_1. \tag{4.12}$$

Comme $\underline{f}_\infty = \infty$, *alors il existe* $R_0 > 0$ *tel que*

$$f(t,x) \geq \rho\, x, \;\; \textit{pour tout} \;\; x \geq R_0,$$

où $\rho > 0$ *satisfait*

$$M_0\, c\, \eta\, (\rho + \beta^2) \geq 1. \tag{4.13}$$

Soit $R > \max\{R_0/c, r\}$, *alors de*

$$x \in K \textit{ avec } \|x\| = R \quad \textit{on aura} \quad x(s) \geq c\,\|x\| = c\,R > R_0,$$

et

$$g(s,x(s)) = f(s,x(s)) + \beta^2\, x(s) \geq \rho\, x + \beta^2\, x \geq c\,(\rho+\beta^2)\,\|x\|.$$

D'après les lemmes 4.2 et 4.3, on obtient

$$\begin{aligned}
(Ax)(t) &= \int_0^1 G(t,s) g(s,x(s)) ds \\
&\geq c\,(\rho+\beta^2)\,\|x\| \int_0^1 G(t,s) ds \\
&\geq c\,(\rho+\beta^2)\,\|x\| \int_0^\eta G(t,s) ds \\
&\geq M_0\, c\, \eta\, (\rho+\beta^2)\|x\| \\
&\geq \|x\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \, \forall\, x \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{4.14}$$

De (4.12) et (4.14) et d'après le théorème de Guo-Krasnosel'skii, l'opérateur A *possède au moins un point fixe* x^* *dans* $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$, *qui est une solution positive du problème (4.1).*

• ***Cas 2*** : $\underline{f}_0 = \infty$ *et* $\overline{f}_\infty = -\beta^2$.

Comme $\underline{f}_0 = \infty$, *alors il existe* $r_0 > 0$ *tel que*

$$f(t,x) \geq \lambda\, x, \, \forall\, 0 < x \leq r_0,$$

où $\lambda > 0$

$$M_0\, c\, \eta\, (\lambda + \beta^2) \geq 1. \tag{4.15}$$

Ainsi, pour $0 < r \leq r_0$*, si* $x \in K$ *et* $\|x\| = r$*, alors*

$$g(s, x(s)) = f(s, x(s)) + \beta^2 x(s) \geq c\,(\lambda + \beta^2)\|x\|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(Ax)(t) &= \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \\
&\geq c\,(\lambda+\beta^2)\,\|x\| \int_0^1 G(t,s)ds \\
&\geq c\,(\lambda+\beta^2)\,\|x\| \int_0^\eta G(t,s)ds \\
&\geq M_0\, c\, \eta\,(\lambda+\beta^2)\,\|x\| \\
&\geq \|x\|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|Ax\| \geq \|x\|,\ \forall\, x \in K \cap \partial\Omega_1. \tag{4.16}$$

De la conclusion, $\overline{f}_\infty = -\beta^2$*, il existe* $R_0 > 0$ *tel que*

$$f(t,x) \leq (\gamma - \beta^2)\,x, \quad \textit{pour tout} \quad x \geq R_0,$$

où $\gamma > 0$ *satisfait*

$$M\,\gamma \leq 1.$$

Soit $R > R_1 = \max\{R_0/c, r_0\}$*, alors si* $x \in K$ *avec* $\|x\| = R$*, on a*

$$x(s) \geq c\,\|x\| = c\,R \geq R_0.$$

Par conséquent,

$$g(s,x) \leq \gamma\, x \leq \gamma\|x\|, \quad \textit{pour tout}\ s \in [0,1].$$

Ce qui donne

$$(Ax)(t) \leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \leq M\,\gamma\|x\| \leq \|x\|,$$

alors pour $R > R_1$*, on obtient*

$$\|Ax\| \leq \|x\|,\ \forall\, x \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{4.17}$$

De (4.16), (4.17) et d'après le théorème de Guo-Krasnosel'skii, l'opérateur A possède au moins un point fixe x^{**} dans $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$, donc x^{**} est une solution positive du problème (4.1). Ce qui achève la démonstration.

Pour obtenir l'existence de deux solutions positives , nous considérons les hypothèses suivantes :

(H3) $\underline{f}_0$, $\underline{f}_\infty = \infty$ et il existe $\omega > 0$ tel que

$$\max\{f(t,x) | \, 0 \leq t \leq 1, \, c\,\omega \leq x \leq \omega\} < (\varepsilon - \beta^2)\,\omega, \tag{4.18}$$

où $\varepsilon > 0$ satisfait $M\,\varepsilon \leq 1$.

(H4) $\overline{f}_0$, $\overline{f}_\infty = -\beta^2$ et il existe $\omega > 0$ tel que

$$\min\{f(t,x) | \, 0 \leq t \leq 1, \, c\,\omega \leq x \leq \omega\} > (\mu - \beta^2)\,\omega, \tag{4.19}$$

où $\mu > 0$ satisfait $M_0\,\mu \leq 1$.

Théorème 4.2. *Supposons que (H1), (H2) et (H3) sont satisfaites. Alors le problème (4.1) admet au moins deux solutions positives distinctes.*

Demonstration 26. *Soient Ω_1, Ω_2 comme dans la démonstration du théorème 4.1 et*

$$\Omega_3 = \{x \in C[0,1] \; : \; \|x\| < \omega\},$$

alors pour $0 < r < \omega < R$, on a $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_3$, $\overline{\Omega}_3 \subset \Omega_2$.

Comme $\underline{f}_0 = \infty$, $\underline{f}_\infty = \infty$, par la preuve du théorème 4.1 on peut assurer l'existence de r suffisamment petit et de R suffisamment grand, tels que (4.16) et (4.14) soient satisfaites. Dans ce qui suit, nous montrons que

$$\|Ax\| < \|x\|, \, \forall \, x \in K \cap \partial\Omega_3. \tag{4.20}$$

Pour $x \in K \cap \partial\Omega_3$, $s \in [0,1]$, on a $c\,\omega = c\,\|x\| \leq x(s) \leq \|x\| = \omega$.

Par (4.18), $f(s,x) < (\varepsilon - \beta^2)\,\omega$, alors

$$g(s,x(s)) = f(s,x(s)) + \beta^2\,x \leq f(s,x(s)) + \beta^2\,\omega < \varepsilon\,\omega.$$

D'où

$(Ax)(t) \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds < M\,\varepsilon\|x\| \leq \|x\|, \forall\, t \in [0,1].$

Ainsi, la proposition (4.20) est vraie. Cela implique que l'opérateur A *satisfait la condition (ii) du théorème de Guo-Krasnosel'skii dans* $K \cap (\overline{\Omega}_3 \backslash \Omega_1)$, *et il satisfait la condition (i) de même théorème dans* $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_3)$.

Par conséquent, l'opérateur A *possède au moins deux points fixes distincts* x_1 *et* $x_2 \in K$ *tels que* $x_1 \in K \cap (\overline{\Omega}_3 \backslash \Omega_1)$ *et* $x_2 \in K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_3)$, *et d'après (4.20), on sait que* x_1, $x_2 \notin \partial\Omega_3$, *donc* $\|x_1\| < \omega < \|x_2\|$. *Ce qui achève la démonstration.*

Théorème 4.3. *Supposons que* $(H1)$, $(H2)$ *et* $(H4)$ *sont satisfaites. Alors le problème (4.1) possède au moins deux solutions positives distinctes.*

Demonstration 27. *Soient* $0 < r < \omega < R$, $\Omega_i\,(i = 1,2,3)$ *sont comme dans la démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2.*

De la condition $\overline{f}_0 = \overline{f}_\infty = -\beta^2$, *on peut prendre* r *suffisamment petit,* R *suffisamment grand, pour que* A *satisfait (4.12) et (4.17).*

Dans ce qui suit, nous montrons que

$$\|Ax\| > \|x\|, \forall x \in K \cap \partial\Omega_3. \tag{4.21}$$

Pour $x \in K \cap \partial\Omega_3,\ s \in [0,1]$, *on a* $c\,\omega = c\|x\| \leq x(s) \leq \|x\| = \omega$,

D'après (4.19), $f(s,x(s)) > (\mu - c\,\beta^2)\,\omega$, *alors*

$$g(s,x(s)) = f(s,x(s)) + \beta^2\,x \geq f(s,x(s)) + c\,\omega\,\beta^2 > \mu\,\omega.$$

Alors

$$\min_{t\in[0,1]} g(s,x(s)) > \mu\|x\|.$$

D'après les lemmes 4.1 et 4.5, on a

$$\begin{aligned}
(Ax)(t) &= \int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))ds \\
&\geq \min_{s\in[0,1]} g(s,x(s)) \int_0^1 G(t,s)ds \\
&\geq \min_{s\in[0,1]} g(s,x(s)) \int_0^\eta G(t,s)ds \\
&> M_0\,\mu\|x\| \geq \|x\|,
\end{aligned}$$

d'où (4.21) est satisfaite.

D'après le théorème de Guo-Krasnosel'skii, l'opérateur A possède deux points fixes x_1 et x_2 tels que $x_1 \in K \cap (\overline{\Omega}_3 \backslash \Omega_1)$ et $x_2 \in K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_3)$. De (4.21) on sait que $x_1 \neq x_2$.

Donc nous obtenons deux solutions positives distinctes du problème (4.1).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à l'étude de quelques problèmes aux limites non locaux associés à des équations différentielles ordinaires considérées sur des intervalles bornés ou non bornés de la droite réelle $\mathbb{R}$, où les conditions aux bords sont de type multi-points ou de type intégrales.

Selon la nature des résultats obtenus et les téchniques utilisées, notre travail comporte deux parties. Dans la première, nous nous sommes intéressées à l'existence de solutions bornées de deux problèmes aux limites à trois points. L'un est posé sur un intervalle borné et l'autre est posé sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$. Les démonstrations des résultats présentés reposent sur le théorème de continuation de Leray-Schauder.

Dans la deuxième partie, l'existence et la multiplicité de solutions positives non nulles de deux problèmes non locaux ont été étudiés. Le premier était un système de deux équations différentielles du second ordre posé sur $[0, \infty)$, où les conditions aux bords sont de types intégrales, et le second était un problème de résonance à trois points. Le théorème du point fixe de Guo-Krasnosels'skii sur les cônes certifie l'existence et la multiplicité de solutions positives sur des coquilles coniques des espaces de Banach.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. Oregan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer, 2000.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 2001.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle Dunod*, 2005.

[4] C. Corduneanu, *Integral equations and stability of feedback systems*, Academic press, New York, 1973.

[5] B. Dacorogna, W. Gangbo and N. Subia, *Sur une generalisation de l'inegalite deWirtinger*, Annales de l'I.H.P., section C, tome 9, $n°1$ 1992.

[6] S. Djebali, Problèmes aux limites associés aux E.D.O. du second order, E.N.S. po Kouba 2007.

[7] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, New York, 1988.

[8] C. Gupta, *Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation*, J. Math. Anal. Appl. 168 $540 - 551$ 1992.

[9] C. P. Gupta, *A note on a second order three-point value problem*, J. Math. Anal. Appl. 186 $277 - 281$ 1994.

[10] C. Gupta, *Existence theorems for a second order m-point boundary value problems at resonance*, Int. J. Math. Sci. 18 $705 - 710$ 1995.

[11] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-verlag, New-York, 2003.

[12] Y. Guo, W. Ge, *Positive solutions for three-point boundary value problems with dependence on the first order derivative*, J. Math. Anal. Appl.290 $291-301$ 2004.

[13] X. Han, *Positive solutions for a three-point boundary value problem at resonance*, J. Math. Anal. Appl. 336 $556-568$ 2007.

[14] V. Il'in, E. Moiseev, *Non-local boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects, Differ. Equ.* 23 $803-810$ 1987.

[15] H. Lian, W. Ge, *Solvability for second-order three-point boundary value problems on a half-line*, Appl. Math. Lett. $1000-1006$ 2006.

[16] S. A. Marano, *A remark on a second-order three-point boundary value problem*, J. Math. Anal. Appl. 183, $518-522$ 1994.

[17] J. Mawhin, *Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds*, Topol. Methods Nonlinear Anal,Journal of the Juliusz Schauder Center, ISSN : $1230-3429$, vol 9, $179-200$, 1997.

[18] R. Ma, *Existence results of a m-point boundary value problem at resonance*, J. Math. Anal. Appl. 294 $147-157$ 2004.

[19] D. R. Smart, *Cambridge tracts in mathematics, Fixed point theorems*, Library of Cougreas Catalogue Card Number : $73-79314$, ISBN : 0 52120289 2, New York, 1974.

[20] K. Schmitt, R.C.Thompson, *Nonlinear Analysis and Differential Equations : An Introduction*, November $11, 2004$.

[21] J. Webb, *Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory, Nonlinear Anal.* $474319-4332$ 2001.

[22] S. Xi, M. Jia and H. Ji, *Positive solutions of boundary value problems for systems of second-order differential equations with integral boundary condition on the half-line*, EJQTDE, No. $31, p.3,$ 2009

[23] B. Yan, Y. Liu, *Unbounded solutions of the singular boundary value problems for second order differential equations on the half-line*, Appl.Math. Comput. 147 629 − 644 2004.

[24] G. Zhang, J. Sun, *Positive solutions of m-point boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 291 406 − 418 2004.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude des problèmes aux limites non locaux associés à des équations différentielles ordinaires non linéaires. Plus précisément, nous présentons des résultats d'existence, de positivité ainsi que de multiplicité de solutions, pour des E.D.O. non linéaires, posés sur des intervalles bornés ou non bornés de $\mathbb{R}$, avec des conditions aux limites de type multi-points ou de type intégrale.

L'approche utilisée s'appuie sur la théorie du point fixe. Plus précésiment, sur le théorème de continuation de Leray-Schauder et le théorème du point fixe du Guo-Krasnosel'skii sur les cônes.

Mots clés :

Problèmes aux limites non locaux, cône, solution positive, fonction de Green, critères de compacité, Point fixe, conditions intégrales, conditions à trois points.