

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

*Université Abderrahmane Mira de Bejaia*

Faculté des sciences exactes

Département de Mathématiques



## *Mémoire de fin d'études*

En vue de l'obtention d'un Master académique en Mathématiques

Option : Probabilités Statistique et Applications

### *Thème*

---

## **Analyse de Sensibilité du modèle GI/M/1/N avec arrivées négatives**

---

*Réalisé par :*

M. BENZID *Fares*

*Devant le jury*

M. ABBAS K.	Président	Professeur	Univ. Bejaia
M. OUAZINE S.	Rapporteur	M.C.B	Univ. Bejaia
Mme. BOURAINE L.	Examinatrice	M.C.A	Univ. Bejaia
M. AMEUR L.	Examinateur	Docteur	Univ. Bejaia

Année universitaire : 2018/2019

## *Remerciements*

*Au terme de mon modeste travail, je tiens à remercier tous d'abord Dieu, le tout puissant de m'avoir accordé la volonté, force, santé, détermination et courage afin d'accomplir mon mémoire.*

*Je tiens à exprimer mes profondes gratitudees à mon promoteur **M. OUAZINE** pour la manière dont il m'a encadré. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses remarques constructives m'ont beaucoup apporté tout au long de ce travail.*

*Je tiens à remercier **M. AMEUR**, pour ses éclaircissements et son aide pour réaliser la partie pratique de ce mémoire.*

*Je remercie chaleureusement les membres de jury **M. AB-BAS** en sa qualité de président, **Mme. BOUAINÉ** et **M. AMEUR** qui m'ont honorés de leurs présence et d'avoir accepté d'évaluer ce modeste travail à sa juste valeur.*

*Que toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire, veuillez bien trouver ici l'expression de mes sincères remerciements.*

*et pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à mes chers parents, frères et sœurs, pour leur soutien et leur confiance en moi.*

## *Dédicaces*

*Je dédie ce travail à ...*

*À mes très chers parent; aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.*

*À mes chers frères, mes sœurs, mes nièces et neveux, surtout mon petit neveu Syphax.*

*À mes amis, Faissal, Mourad, Ouali, Sami, Yacine, Farouk,...*

*À mes anciens et nouveaux copains de chambre "C01".*

*À tout ceux qui me sont chers.*

*À toute la promotion de 2<sup>ème</sup> et 1<sup>ère</sup> année PSA (2018/2019).*

*À toi ...*

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>ii</b>
<b>Sommaire</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Systèmes de files d'attente</b>	<b>3</b>
1.1 Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov? . . . . .	3
1.1.1 Définitions et rappels . . . . .	3
1.2 Formalisme de files d'attente . . . . .	8
1.2.1 Notation de Kendall . . . . .	10
1.2.2 Analyse mathématique d'un système de file d'attente . . . . .	10
1.2.2.1 Performances d'un système de file d'attente . . . . .	10
1.2.2.2 Formules de Little . . . . .	11
1.2.3 Files d'attente markoviennes . . . . .	12
1.2.3.1 Processus de naissance et de mort . . . . .	12
1.2.4 Files d'attente non markoviennes . . . . .	12
1.2.5 Systèmes de files d'attente avec arrivées négatives . . . . .	13
<b>2 Analyse d'incertitude et de sensibilité</b>	<b>15</b>
2.1 Analyse de l'incertitude . . . . .	15
2.1.1 Nature et sources de l'incertitude paramétrique . . . . .	15
2.1.1.1 Méthodes de propagation de l'incertitude paramétrique . . . . .	16
2.2 Analyse de sensibilité globale . . . . .	17

---

2.2.1	Indice de sensibilité globale de Sobol . . . . .	18
2.2.1.1	Indices de Sobol par la simulation de Monte Carlo . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Analyse de sensibilité d'un système de file d'attente GI/M/1/N avec arrivées négatives</b>	<b>21</b>
3.1	Description du modèle . . . . .	21
3.2	Analyse de sensibilité du modèle . . . . .	23
3.2.1	Indice de sensibilité de Sobol de premier ordre . . . . .	23
3.3	Analyse de l'incertitude du modèle . . . . .	30
3.3.1	Sur le modèle $M/M/1/4$ avec arrivées négatives . . . . .	30
3.3.2	Sur le modèle $D/M/1/4$ avec arrivées négatives . . . . .	32
3.3.3	Sur le modèle $H_2/M/1/4$ avec arrivées négatives . . . . .	33
3.3.4	Sur le modèle $E_2/M/1/4$ avec arrivées négatives . . . . .	35
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>38</b>

## TABLE DES FIGURES

1.1	Graphe de transition . . . . .	6
1.2	Représentation schématique d'une file d'attente simple. . . . .	9
1.3	Processus de naissance et de mort. . . . .	12
3.1	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $M/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	25
3.2	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $D/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	26
3.3	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $H_2/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	27
3.4	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle $E_2/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	28
3.5	Histogramme et graphe du paramètre $\mu$ de modèle $M/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	31
3.6	Histogramme et graphe du paramètre $\zeta$ de modèle $M/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	31
3.7	Histogramme et graphe du paramètre $d$ de modèle $D/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	32
3.8	Histogramme et graphe du paramètre $\lambda_2$ de modèle $H_2/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	34
3.9	Histogramme et graphe du paramètre $\mu$ de modèle $H_2/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	34
3.10	Histogramme et graphe du paramètre $\zeta$ de modèle $H_2/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	35
3.11	Histogramme et graphe du paramètre $\lambda_1$ de modèle $E_2/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	36
3.12	Histogramme et graphe du paramètre $\lambda_2$ de modèle $E_2/M/1/4$ avec arrivées négatives. . . . .	36

## LISTE DES TABLEAUX

3.1	Probabilités $a_j$ des quatre modèles que nous allons étudiés. . . . .	22
3.2	Espérances et variances par la simulation de Monte Carlo pour les quatre modèles étudiés. . . . .	37

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la vie quotidienne, on se retrouve toujours à faire la queue ou se qu'on appelle dans les mathématiques file d'attente, la théorie de cette dernière intervient pour modéliser et analyser un tel phénomène ou des systèmes réels plus complexes et divers. Donc elle consiste en l'étude de systèmes où des clients se présentent à un dispositif dit serveur afin de se faire servir. Un système de file d'attente est constitué d'une file d'attente et d'un ou de plusieurs serveurs. Un espace d'attente peut être limité ou non.

La modélisation d'un système s'agit d'une conception d'un modèle mathématique simple à partir d'un phénomène naturel qui peut se qualifier complexe, dans le but de lui appliquer des outils, des techniques et des théories mathématiques, qui permettent aux spécialistes de domaine à mieux expliquer ce système, le représenter, garder en vue son comportement et surtout évaluer ses performances. Affecter un modèle à un phénomène réel, peut aider à se rapprocher de la réalité, plus le système est complexe plus qu'on aura besoin d'informations et plus l'information sur le phénomène est fourni plus on devient proche de l'exactitude. Entre temps, l'exactitude s'avère difficile à atteindre mais facile à l'approximer et la simuler grâce à des méthodes d'approximation. Parmi ces méthodes qui rendent la tâche plus facile, pour lesquelles on peut faire confiance, grâce à sa puissance, on trouve les chaîne de Markov. Il se trouve que les chaînes de Markov en ses deux types, les chaînes de Markove à temps discret et à temps continu, conviennent parfaitement à la modélisation des systèmes de files d'attente.

L'étude de système de files d'attente a vu naissance en 1909 par l'ingénieur *Danois Erlang*, lors de ses travaux sur la gestion des réseaux téléphoniques. Depuis, l'analyse de performances des systèmes à flux discret utilise les modèles d'attente comme un outil vu leur qualité puissante.

Dans [8], *Gelenbe* a introduit un nouveau système de files d'attente avec une propriété de pouvoir éliminé des clients existant à recevoir un service quelconque. Cette propriété est dite "arrivées négatives". On trouve dans la littérature plusieurs types de ces arrivées [9, 10].

Lors de la modélisation d'un système d'attente, le manque d'informations sur les valeurs des paramètres caractérisant le système (incertitude épistémique) et la connaissance imprévisible de son comportement (incertitude aléatoire) sont les deux facteurs majeurs que l'ingénieur puissent rencontrer, c'est à partir de là que l'expression "incertitude paramétrique" intervient pour définir tel scénario, c'est à dire, l'incertitude des paramètres du modèle.

Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été mises en place pour l'analyse de sensibilité de ces phénomènes complexes. Ces méthodes consistent à déterminer et évaluer la variabilité des sorties (résultats) d'un modèle à des perturbations sur les variables d'entrée.

L'objet assigné à ce mémoire est en premier lieu, de considérer l'analyse de sensibilité de la distribution stationnaire du modèle  $G/M/1/N$ , autrement dit, de détecter les paramètres les plus influents du modèle en utilisant les indices de Sobol. Ensuite une quantification de l'incertitude paramétrique est effectuée afin d'étudier la robustesse du modèle.

Ce mémoire contient trois chapitres essentiels, une conclusion et une bibliographie. Dans le premier chapitre, nous allons abordé quelques notions sur les files d'attente, nous donnons après, une bibliographie concernant les systèmes de files d'attente avec arrivées négatives . Le deuxième chapitre concerne en un premier lieu, l'analyse de l'incertitude, où on va s'intéresser à une méthode de propagation de l'incertitude paramétrique qui est la méthode de Monte Carlo, en deuxième lieu, l'analyse de sensibilité globale de Sobol est proposé comme méthode d'analyse. Dans le dernier chapitre, nous allons projeté notre attention sur l'application des méthodes de simulation de Monte Carlo aux systèmes de files d'attente  $G/M/1/4$  avec arrivées négatives, afin d'estimer les indices de sensibilité des paramètres d'entrées du modèle en question sous l'hypothèse que ses paramètres sont déterminés avec incertitude épistémique. Nous approximons aussi l'espérance et la variance de la distribution stationnaire. Notre travail se clôture par une conclusion, tout en donnons des perspectives.

# CHAPITRE 1

## SYSTÈMES DE FILES D'ATTENTE

La théorie de files d'attente constitue un outil théorique et pratique pour la modélisation stochastique, l'évaluation des performances et le contrôle de différents types de systèmes concrets [20]. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble, d'identifier les éléments critiques. La modélisation mathématique des files d'attente est un outil de la logistique. Elle relève du calcul des probabilités : les arrivées et départs des clients de la file sont analysés comme un processus stochastique typique d'un processus de naissance et de mort.

### 1.1 Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov ?

#### 1.1.1 Définitions et rappels

**Définition 1.1.1.** [21] Un **processus stochastique** ou processus aléatoire, est une famille de variables aléatoires  $X_t, t \in T$  indexées par le paramètre  $t \in T$ , si  $T$  est un ensemble de  $\mathbb{R}_+$ , alors  $t$  signifie temps. Généralement  $X_t$  représente l'état du processus stochastique au temps  $t$ .

- Si  $T$  est dénombrable, alors nous disons que  $(X_t, t \in T)$  est un processus à temps discret.

- Si  $T$  est un intervalle de  $[0, \infty[$ , alors le processus stochastique est dit un processus à temps continu.

L'ensemble des valeurs de  $X_t$  est appelé **l'espace d'état**, qui peut également être soit discret (fini ou infini dénombrable) ou continu (un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^n$ ), donc nous écrivons  $(X_n)_{n \geq 0}$  pour le processus à temps discret et  $(X_t)_{t \geq 0}$  pour le processus à temps continu.

Soit l'ensemble  $\mathbb{E}$  un espace d'état fini ou infini dénombrable dans lequel les variables aléatoires vont prendre leurs valeurs.

**Définition 1.1.2.** [15] Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace  $\mathbb{E}$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **une chaîne de Markov** si la probabilité pour que la chaîne soit dans un certain état à la  $n^{\text{ième}}$  étape du processus ne dépend que de l'état du processus à l'étape précédente (la  $(n - 1)^{\text{ième}}$  étape) et pas des états dans lesquels il se trouvait aux étapes antérieures, c'est ce qu'on appelle propriété de Markov ou absence de mémoire.

Et tout processus qui possède cette propriété est appelé **processus de Markov**.

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout état  $j$  et pour toute suite d'états  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$  pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens, i.e.

$$\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) > 0.$$

On distingue deux types de chaîne de Markov :

**Définition 1.1.3.** [3] Une chaîne de Markov à temps continu est un processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  à espace d'état discret  $\mathbb{E}$  à temps continu  $T$  donné par :

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}).$$

**Définition 1.1.4.** [7] Le processus stochastique  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{E}$  est une chaîne de Markov à temps discret  $T$  si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i_0, \dots, i_{n-1}, i, j) \in \mathbb{E}^{n+1}$ ,

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}).$$

On s'intéressera uniquement aux chaînes de Markov *homogènes* discrètes. Ces dernières ne dépendent pas de  $n$ , i.e.

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i).$$

**Définition 1.1.5.** [24] On peut définir la **probabilité de transition** d'un état  $i$  vers l'état  $j$  en une étape notée  $p_{ij}$  par :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i).$$

Une matrice  $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{E}}$  d'ordre fini ou infini (selon l'espace d'état  $\mathbb{E}$ ) dont ses éléments sont égales aux probabilités de transition, est appelée **matrice de transition** de la chaîne de Markov ou matrice stochastique, tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq p_{ij} \leq 1, & \forall i, j \in \mathbb{E}; \\ \sum_{j \in \mathbb{E}} p_{ij} = 1, & \forall i \in \mathbb{E}. \end{cases}$$

La forme standard d'une matrice stochastique est alors ;

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & \\ p_{i1} & & & & & p_{ij} & & & \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \end{pmatrix}.$$

**Exemple 1.1.**  $\mathbb{E} = \{1, 2, 3, 4\}$

$p_{12} + p_{14} = 1$ ,  $p_{31} + p_{32} = 1$  et  $p_{23} = p_{14} = 1$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est commode d'utiliser une représentation graphique d'une chaîne de Markov homogène; sous forme d'un graphe orienté. On associe alors à chaque état de la chaîne un nœud et à chaque transition possible entre deux états, un arc orienté pondéré par la probabilité de transition. Donc, le graphe de transition de l'exemple précédent est comme suit :

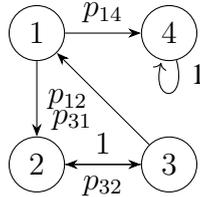


FIGURE 1.1: Graphe de transition .

À partir d'un état initial connu  $X_0$  du processus, nous pouvons trouver la probabilité que la chaîne de Markov sera dans un certain état  $j$  à un instant donné  $n$ . Les probabilités de transition  $p_{ij}$ , et plus généralement la matrice  $P$ , décrivent l'évolution de l'état d'une chaîne de Markov étape par étape. Il est également possible de calculer des probabilités de transition en plusieurs étapes par la formule suivante :

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{m+n} = j / X_m = i).$$

Les probabilités  $p_{ij}^{(n)}$  sont appelées **probabilités de transition en n étapes**.

**Théorème 1.1.1.** [23] La probabilité  $p_{ij}^{(n)}$  qu'une chaîne de Markov se retrouve dans l'état  $j$  après  $n$  étapes, si elle se trouve actuellement dans l'état  $i$ , est donnée par l'élément  $(i, j)$  de la matrice  $P^n$ .

Sous forme matricielle, cette propriété devient

$$P^{(n)} = \left( p_{ij}^{(n)} \right) = P^n.$$

**Définition 1.1.6.** [3] Dans une chaîne de Markov, l'état  $i$  est dit **accessible** depuis l'état  $j$ , si  $\exists n \geq 1, p_{ji}^n > 0$ . C'est à dire, que partant de l'état  $j$ , il est possible (avec une probabilité positive) d'accéder à l'état  $i$  en nombre fini de transitions.

**Définition 1.1.7.** [28] L'état  $i$  est dit **récurrent**, si allant de  $i$ , la chaîne de Markov retourne en un temps fini à l'état  $i$ , avec une probabilité :

$$\mathbb{P}(\tau_i < +\infty / X_0 = i) = 1.$$

Avec,  $\tau_i$  est le temps de retour à l'état  $i$ , tel que :

$$\tau_i = \min(n \geq 1, X_n = i).$$

Un état non récurrent s'appelle **transient** dont la probabilité est :

$$\mathbb{P}(\tau_i < +\infty / X_0 = i) < 1.$$

**Remarque 1.1.1.** Une chaîne de Markov est dite *récurrente*, si tous ses états sont récurrents ; et si tous ses états sont transients, alors cette chaîne est transiente.

**Définition 1.1.8.** [5] Dans une chaîne de Markov, deux états  $i$  et  $j$  **communiquent**, s'ils existent deux entiers  $m \geq 0$ , et  $n \geq 0$ , tels que :  $p_{ij}^m > 0$  et  $p_{ji}^n > 0$ .

**Définition 1.1.9.** Une chaîne de Markov est dite **irréductible** si et seulement si tous ses états communiquent.

**Définition 1.1.10.** La période  $d_i$  de l'état  $i \in \mathbb{E}$ , s'écrit :

$$d_i = \text{pgcd}(n \geq 1, p_{ii}^n > 0).$$

Si  $d_i = 1$ , l'état  $i$  est apériodique. Dans le cas contraire,  $i$  est périodique.

**Propriété 1.1.2.** Une chaîne de Markov irréductible est dite *apériodique* lorsque tous ses états sont apériodiques.

**Remarque 1.1.2.** Dans une chaîne de Markov irréductible :

- ✓ Tous ses états ont la même période  $d$ .
- ✓ S'il existe un état  $i \in \mathbb{E}$  tel que  $p_{ii} > 0$ , alors cette chaîne est apériodique.

**Définition 1.1.11.** Une chaîne de Markov est dite **ergodique** si elle est à la fois récurrente positive et apériodique.

Rappelons que l'état d'une chaîne de Markov à un instant donné dépend évidemment des probabilités de transitions  $p_{ij}$ , mais également de l'endroit où le processus a débuté son évolution. Cette position initiale obéit, de manière générale, à une loi de probabilité.

$$\pi_i^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i), i \in \mathbb{E}.$$

Partant de cette distribution initiale, la probabilité  $\pi_i^{(1)}$  que le système se trouve dans l'état  $i$  après une étape est

$$\begin{aligned}\pi_i^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 = i) &= \sum_{j \in \mathbb{E}} \mathbb{P}(X_1 = i / X_0 = j) \mathbb{P}(X_0 = j), \\ &= \sum_{j \in \mathbb{E}} p_{ji} \pi_j^{(0)} = \sum_{j \in \mathbb{E}} p_{ji} \pi_j^{(0)}.\end{aligned}$$

Cette égalité est donnée sous sa forme matricielle suivante :

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P.$$

En utilisant l'homogénéité des probabilités de transition, on trouve

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Théorème 1.1.3.** *Si la distribution de l'état initial d'une chaîne de Markov est donnée par le vecteur de probabilité  $\pi^{(0)}$ , la distribution des états de la chaîne après  $n$  étape est*

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n,$$

où  $P$  est la matrice de transition de la chaîne.

Si  $\pi^{(0)}$  est la distribution initiale, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(0)} P^n = \pi.$$

**Définition 1.1.12.** Une distribution de probabilités  $\pi$  sur les états d'une chaîne de Markov est **invariante** (ou **stationnaire**), si elle vérifie :

$$\pi = \pi P.$$

## 1.2 Formalisme de files d'attente

Un système d'attente comporte plusieurs formalismes, à savoir, une file d'attente, un ou plusieurs serveurs. Une file est composée de clients se succédant et demandant un service, des clients arrivant peuvent être des individus, des appels téléphonique..., et le

service peut être un serveur humain, une centrale téléphonique..., ces clients se font servir selon une discipline de service.

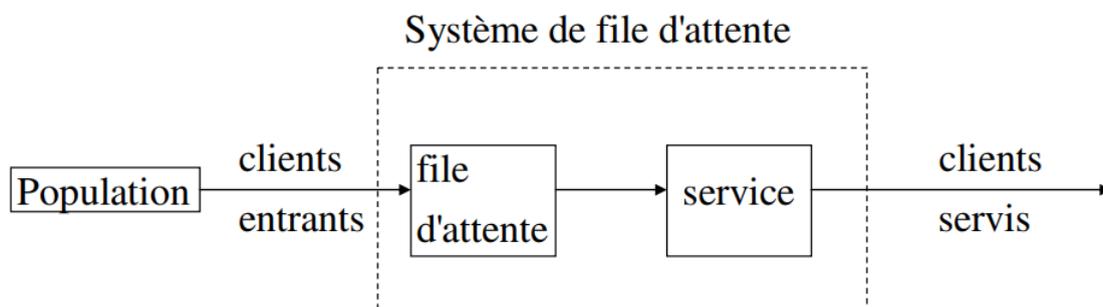


FIGURE 1.2: Représentation schématique d'une file d'attente simple.

Afin de spécifier une file d'attente simple, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file [3] :

- I. Processus d'arrivée :** L'arrivée des clients à la file (station) est décrite par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- II. Temps de service :** Le temps de service est mesuré par la quantité séparant le début et la fin de service d'un client.
- III. Structure et discipline de la file :**
  - a. Nombre de serveurs :** Une station peut disposer de plusieurs serveurs montés en parallèle. Soit  $C$  le nombre de serveurs.
  - b. Capacité de la file :** La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Lorsque le nombre de place de la file est limité (incluant le ou les clients en service). Dans ce cas, un client qui arrive alors que la station est pleine, ce client est perdu, supposons que  $K$  est la capacité de la file.
  - c. Discipline de la file :** La discipline de la file est la règle de priorité déterminant l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retiré pour recevoir un service. Les principales disciplines les plus courantes sont :
    - FIFO**(First In First Out) : C'est la file standard, dans laquelle les clients sont servi dans leur ordre d'arrivée.
    - LIFO**(Last In First Out) : Cette pile correspond au cas où les clients en attente forment une pile, le dernier arrivé étant au-dessus de la pile et donc le prochain à être servi.

**Round-Robin**(Cyclique) : Cette discipline est utile pour modéliser un serveur multitâche où les clients sont servis à tour de rôle pendant un intervalle de temps fixe, appelé *quantum*.

**PS**(Processor Sharing) : C'est le cas limite de la discipline **Round-Robin** lorsque le quantum tend vers zéro.

**RANDOM**(Aléatoire) : Cette discipline correspond aux situations, où le prochain client servi est choisi au hasard parmi tous ceux en attente.

### 1.2.1 Notation de Kendall

La notation de Kendall normalise la description d'une file simple :

$T/X/C/K/m/Z$  avec T : distribution d'inter-arrivée,  
 X : distribution de service,  
 C : nombre de serveurs,  
 K : capacité de la file,  
 m : population des usagers,  
 Z : discipline de service,

où T et X sont donnés par M : loi exponentielle,  
 G : loi générale,  
 GI : lois générales indépendantes,  
 D : loi constante (déterministe),  
 $E_k$  : loi de Erlang d'ordre k,  
 $H_k$  : loi hyperexponentielle d'ordre k.

### 1.2.2 Analyse mathématique d'un système de file d'attente

#### 1.2.2.1 Performances d'un système de file d'attente

Chaque modèle de files d'attente a ses performances qui le définissent. À partir de la distribution stationnaire  $\pi$ , on peut définir les principales performances pour un système à une seule file d'attente :

**N** : le nombre de clients dans le système ;

**L** : le nombre moyen de clients dans le système ;

- $L_q$  : le nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- $T$  : le temps de séjours dans le système ;
- $W$  : la durée moyenne de séjours dans le système ;
- $W_q$  : la durée moyenne d'attente d'un client ;
- $\rho$  : taux d'occupation du système ;
- $U$  : taux d'occupation des serveurs ;
- $P_b$  : probabilité de blocage pour les files d'attente à capacité finie ;
- $P_0$  : probabilité que le système soit vide.

Soient les paramètres suivantes :

- $\lambda$  : le taux d'arrivées dans le système ;
- $\frac{1}{\lambda}$  : intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives ;
- $\mu$  : taux de service ;
- $\frac{1}{\mu}$  : durée moyenne de service.

### 1.2.2.2 Formules de Little

**Théorème 1.2.1.** *La relation entre le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour d'un client dans le système est donnée par la formule :*

$$L = \lambda_e W, \quad \lambda_e < \lambda.$$

Où  $\lambda_e$  est le taux d'effectif d'entrée dans le système. On trouve aussi une relation entre le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen d'attente d'un client :

$$L_q = \lambda_e W_q, \quad \lambda_e < \lambda.$$

D'autres relations

$$\begin{cases} L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}; \\ W = W_q + \frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

**Remarque 1.2.1.** *dans le cas où la capacité de la file d'attente est infini, on a :  $\lambda_e = \lambda$ .*

### 1.2.3 Files d'attente markoviennes

Les files markoviennes, d'une façon générale, sont toutes les files dans lesquelles les inter-arrivées et les durées de services sont des variables aléatoires sans mémoire, lorsque la file à un instant donné, contient  $n$  clients, le taux d'arrivées est  $\lambda_n$  et la durée moyenne de service est  $\mu_n$ .

#### 1.2.3.1 Processus de naissance et de mort

Soit le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$ , où  $N(t)$  est le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ , est un processus stochastique à espace d'état discret, à temps continu. Le taux de transition d'un état  $n$  quelconque vers l'état  $(n - 1)$  est égale à  $\mu_n$  et le taux de transition d'un état  $n$  vers l'état  $(n + 1)$  est égale à  $\lambda_n$ . Ce type de processus est appelé processus de naissance et de mort.

Les processus  $(N(t))_{t \geq 0}$  dans les systèmes de files d'attente markoviennes, sont tous des processus de naissance et de mort.

**Remarque 1.2.2.** À partir d'un état  $n$  donné, les transitions ne sont possibles que vers l'un des états voisins ( $n - 1$  et  $n + 1$ ).

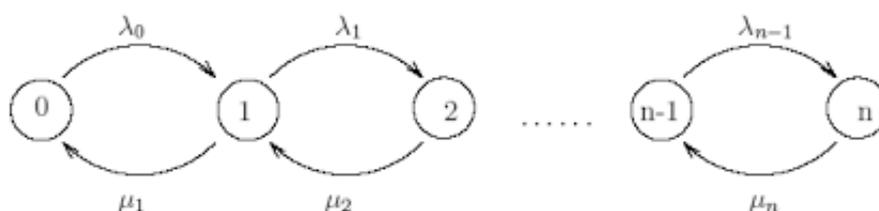


FIGURE 1.3: Processus de naissance et de mort.

### 1.2.4 Files d'attente non markoviennes

L'étude des systèmes d'attente se ramène en général, à l'étude du processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$ , représentant le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ . Dans le cas du titre de la section précédente, ce processus est markovien. En absence de cette propriété, on tombe sur les files d'attente non markoviennes.

Pour développer ce type de files d'attente qui est beaucoup plus difficile, où la distribution des inter-arrivées n'est plus exponentielle, trois méthodes sont valables pour se ramener à des processus markoviens :

- (i) Utilisation de points de régénération, c'est-à-dire d'une chaîne de Markov induite. Le comportement est considéré comme un ensemble discret d'instantanés de temps aléatoires (ou déterministes).
- (ii) La méthode d'Erlang, dans laquelle la durée est dévisée en étapes fictives, le temps passé à chaque étape ayant une distribution exponentielle. Toute distribution de la durée de vie avec une transformation de Laplace rationnelle peut, en principe, être traitée avec une loi de Cox (mélange de lois exponentielles).
- (iii) L'inclusion de variables supplémentaires en nombre suffisant, consacrées aux durées de vie, dans la spécification de l'état du système pour rendre l'ensemble du processus markovien en temps continu.

### 1.2.5 Systèmes de files d'attente avec arrivées négatives

Dans l'étude des systèmes de files d'attente, en plus de l'arrivée positive (ordinaire) des clients, il se trouve qu'il y a aussi un flux des arrivées négatives. L'arrivée négative ne reçoit pas de service par contre il a un effet sur le système de différentes manières, à savoir : élimination individuelle en ces deux types (RCH : Removal of Customers at the Head, RCE : Removal of Customers at the End), élimination par groupe, élimination d'une quantité aléatoire d'activité, élimination simultanée de tous les clients présents dans le système (désastre). Cet effet intervient sauf dans le cas où le système est vide ou encore le serveur est libre.

Cette famille de systèmes de files d'attente avec arrivées négatives introduite par Gelenbe [8], était motivé initialement par la modélisation des réseaux de neurones où les arrivées positives et négatives représentent les signaux excitateurs, qui font croître le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, et inhibiteurs, qui diminuent le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, respectivement. Puis, leurs domaines d'application se sont étendus pour toucher d'autres systèmes plus complexes comme les réseaux informatiques avec infection par virus, élimination des transactions dans les bases de données, les systèmes d'inventaires, les systèmes de télécommunications, les systèmes de production, etc.

Ces différents types d'arrivée négative peuvent être interprétés comme un phénomène d'occurrence de pannes dans les systèmes de files d'attente non fiable avec ou sans réparations. Harrison [16] a défini un nouveau procédé dans ce sens.

Depuis 1989, de nombreuses recherches ont été faites et plusieurs travaux ont été publiés dans ce sens, Gelenbe [9, 10, 12], Gelenbe et Pujolle [11] et Artalejo [1].

## CHAPITRE 2

# ANALYSE D'INCERTITUDE ET DE SENSIBILITÉ

De nos jours, les modèles numériques sont largement utilisés pour l'étude des systèmes complexes que ce soit en ingénierie, en science environnementale ou en science économique. Ces modèles, censés représenter fidèlement le système étudié, sont généralement décomposés en sous-modèles. Ils peuvent être phénoménologiques (empiriques) et/ou basés sur les lois de la Physique (lois de conservation). La simulation numérique requiert la connaissance et la définition préalables des entrées nécessaires à chaque simulation. Ces dernières caractérisent le système étudié. Cependant, les entrées sont sujettes à des incertitudes plus ou moins grandes pouvant rendre la simulation numérique peu utile. Par conséquent, la modélisation doit tenir compte, autant que faire se peut, de la méconnaissance à priori du système étudié. Des prédictions doivent donc être entreprises dans un cadre probabiliste, autrement dit, à toute prédiction doit être associée une incertitude (densité de probabilité, intervalle de confiance, ...).

## 2.1 Analyse de l'incertitude

### 2.1.1 Nature et sources de l'incertitude paramétrique

Ce sujet a été abordé à de nombreuses reprises dans la littérature, dans laquelle nous citons les articles et livres dont nous nous sommes inspirés pour présenter ce travail : [27],

[6], [18], [19] et bien d'autres.

Les phénomènes réels sont souvent approximé par des modèles mathématiques. L'incertitude de leurs paramètres d'entrés est décrite comme l'incapacité à prévoir précisément son issue, d'où l'incertitude aussi des paramètres de sorties. Sous un aspect universel, cette proposition cache en fait deux réalités bien différentes. Un facteur peut être incertain car il possède une variabilité naturelle qu'il n'est pas possible d'éliminer. Il est alors courant de parler d'incertitude aléatoire (ou stochastique) [34]. L'incertitude sur le résultat d'un jet de dés peut, par exemple, être qualifiée d'aléatoire. Inversement, lorsque l'incertitude est liée à un manque de connaissance réductible sur l'issue de paramètre, nous pourrons parler d'incertitude épistémique. Ainsi, la précision des paramètres de sorties dépendra de la quantité d'information disponible. Ces incertitudes correspondent souvent aux erreurs commises par des instruments de mesure, des procédés de fabrication ou des données limitées.

### 2.1.1.1 Méthodes de propagation de l'incertitude paramétrique

Après avoir identifié dans la section précédente, les deux types de l'incertitude, nous abordons dans cette section sa propagation dans un modèle, afin d'évaluer leur impact sur la variabilité de la sortie [30]. Il est important de choisir une approche pour modéliser cette incertitude. Pour cela, de nombreuses méthodes sont instorées dans ce sens, à savoir : l'ensembles flous, méthode des séries de Taylor [25, 26], l'arithmétique d'intervalles, ...etc. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à la simulation des paramètres d'entrés incertains par la méthode de Monte Carlo [22, 31].

### Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo (MC) sous ses deux formes, forme déterministe (calcul stochastique) et forme probabiliste (calcul de densité de probabilité), est un outil de simulation qui peut servir à propager l'incertitude des paramètres d'entrés dans un modèle. Cet méthode vise à évaluer une quantité déterministe en utilisant des procédés aléatoires. Morgan et Henrion[14], Gentle[13] et Ayuub et Klir[2] ont fait la description. Supposons un vecteur  $x$  de  $m$  paramètre incertain  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , le principe de base de la méthode MC est résumé dans l'algorithme suivant :

**Étape 01.** Affecter une densité de probabilité à chaque paramètre d'entré  $x_i; i = 1, \dots, m$ .

**Étape 02.** Générer un échantillon de taille  $n$  du vecteur  $x$  et supposons que les paramètres sont indépendants.

**Étape 03.** Déterminer d'une manière aléatoire une valeur à chaque paramètre selon leur densité de probabilité.

**Étape 04.** Calculer les statistiques de la distribution de sortie : moyenne, variance, ...

On répète l'algorithme un nombre important de fois afin d'obtenir un échantillon assez grand de valeurs sortantes pour estimer la distribution de probabilité du résultat. Ainsi, il est possible d'estimer l'espérance et la variance de la sortie  $Y$  à l'aide des formules suivantes :

$$E(Y) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (2.1.1)$$

$$V(Y) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - E(Y)]^2. \quad (2.1.2)$$

L'avantage de la méthode de MC est dans sa simplicité à la mettre en œuvre. Son inconvénient réside dans le temps d'exécution, cela est dû à sa nécessité aux grands échantillons pour approximer précisément les statistiques (espérance, variance) du modèle étudié.

## 2.2 Analyse de sensibilité globale

Dans la section précédente, nous avons discuté l'incertitude des paramètres, ses types et l'une des méthodes de propagation, Dans la présente section, nous allons mentionner une analyse préliminaire qui vient avant l'analyse de l'incertitude. L'analyse de sensibilité[29] étudie comment les perturbations sur les variables d'entrées du modèle engendrent des perturbations sur la variable réponse[19], il se trouve qu'il y a plusieurs types d'analyse de sensibilité. Nous allons nous contenter dans ce travail sur une méthode bien précise, c'est la méthode d'analyse de sensibilité globale. Cette dernière étudie l'influence des facteurs d'entrées sur la variabilité de paramètre de sortie.

On ne peut pas parler de l'analyse de sensibilité sans citer les indices de sensibilité et comment les estimer.

## 2.2.1 Indice de sensibilité globale de Sobol

Considérons un modèle mathématique suivant :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto Y = f(X), \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

où,  $X = (X_1, \dots, X_m)$  est un vecteur de paramètres d'entrées aléatoires,  $Y$  est un paramètre de sortie aussi aléatoire (l'image directe via une fonction  $f$ ).

Les méthodes d'analyse de sensibilité globale sont des méthodes basées sur la variance et reposent fortement sur les méthodes d'échantillonnage et de la distribution des paramètres d'entrée. Le concept d'utiliser la variance comme un indicateur de l'importance d'un paramètre d'entrée est à la base de nombreuses méthodes d'analyse de sensibilité basées sur la variance [4].

La méthode de Sobol utilise la décomposition de la variance afin de calculer les indices de sensibilité de Sobol [32]. Cette méthode montre l'utilité des bases de Fourier pour la décomposition de la fonction du modèle [33] et la décomposition fonctionnelle [17]. Dans ce chapitre, on se limite dans les calculs sur les indices de Sobol de premier ordre, bien évidemment qu'il existe d'autres indices de Sobol avec un ordre supérieur à 1.

**Définition 2.2.1.** [19] L'indice de sensibilité exprimant la sensibilité de  $Y$  à  $X_i$  est défini par :

$$S_i = \frac{V(E[Y/X_i])}{V(Y)}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.2.2}$$

Dans la plus part des temps, le calcul des indices de sensibilité de Sobol de premier ordre s'avère très difficile et des fois impossible, cela revient à la complexité de la fonction  $f$ , d'où l'obligation d'utiliser des méthodes de simulation. La méthode de Monte Carlo semble la plus appropriée vu sa simplicité en terme de formulation et d'utilisation.

### 2.2.1.1 Indices de Sobol par la simulation de Monte Carlo

On s'est amené souvent à des calculs d'intégrale de la forme suivante :

$$I = \int_{\mathbb{R}} f(X) \, dX.$$

La simulation de Monte Carlo consiste à approcher la quantité  $I$  par l'estimation  $\hat{I}$  suivant :

$$I \approx \hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j).$$

Soit  $X_n$  un échantillon de taille  $n$ , tel que :

$$X_n = (X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jm})_{j=1, \dots, n}.$$

Notons  $f_0$  et  $V$ , l'espérance et la variance de la variable de sortie  $Y$ . Ces deux là sont estimés par  $\hat{f}_0$  et  $\hat{V}$  à l'aide de la méthode de Monte Carlo :

$$\hat{f}_0 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_{j1}, \dots, X_{jm}). \quad (2.2.3)$$

$$\hat{V} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(X_{j1}, \dots, X_{jm}) - \hat{f}_0]^2. \quad (2.2.4)$$

Le dénominateur du rapport dans la formule 3.2.1 peut être estimé par une technique introduite par Sobol[32].

$$V_i = E[E(Y|X_i)^2] - E[E(Y|X_i)]^2 = U_i - E(Y)^2. \quad (2.2.5)$$

Estimer la quantité  $U_i$  comme une espérance classique (2.2.2), mais en tenant compte du conditionnement à  $X_i$ , en faisant varier entre les deux appels à la fonction  $f$  toutes les variables sauf la variable  $X_i$ [19], c'est l'idée proposée par Sobol. Pour se faire, nous considérons deux échantillons  $X_n^{(1)}$  et  $X_n^{(2)}$  des variables aléatoires  $X_i$ . Donc estimer les indices de Sobol de premier ordre revient à estimer la quantité  $U_i$  dans l'équation précédente par :

$$\begin{aligned} \hat{U}_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_{j1}^{(1)}, \dots, X_{j(i-1)}^{(1)}, X_{ji}^{(1)}, X_{j(i+1)}^{(1)}, \dots, X_{jm}^{(1)}) \\ &\quad \times f(X_{j1}^{(2)}, \dots, X_{j(i-1)}^{(2)}, X_{ji}^{(1)}, X_{j(i+1)}^{(2)}, \dots, X_{jm}^{(2)}). \end{aligned}$$

En effet, les indices de Sobol donnés dans l'équation 3.2.1 peuvent être estimés par :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}. \quad (2.2.6)$$

---

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes source d'incertitude, afin de quantifier cette incertitude, une étape préliminaire est recommandée, c'est l'analyse de sensibilité. Plus précisément, nous avons présenté l'estimation des indices de Sobol avec la méthode de simulation.

## CHAPITRE 3

# ANALYSE DE SENSIBILITÉ D'UN SYSTÈME DE FILE D'ATTENTE GI/M/1/N AVEC ARRIVÉES NÉGATIVES

Dans ce travail, nous considérons un système de file d'attente  $GI/M/1/N$  avec arrivées négatives. Nous proposons la méthode de Monte Carlo pour propager l'incertitude des paramètres dans la file d'attente considérée. L'analyse de sensibilité consiste à étudier l'impact des paramètres d'entrées de la distribution stationnaire du modèle considéré sur la sortie en supposant que ces paramètres sont incertains.

### 3.1 Description du modèle

Considérons un système de file d'attente  $GI/M/1/N$  avec arrivées négatives, dont le temps moyen des inter-arrivées des clients ordinaires est  $1/\lambda$ , et la durée de service est distribuée selon un processus de poisson avec un taux  $\mu$ . L'inter-arrivée des clients négatifs de type RCH est distribué selon une loi exponentielle de paramètre  $\zeta$ . Ces trois processus sont indépendants entre eux. La capacité de la file est limitée à  $N$  clients et la discipline de service des clients ordinaires est FIFO. Soient :  $G(x)$  la distribution de temps des inter-arrivées des clients ordinaires dans sa loi générale,  $L_k$  nombre de clients dans le système avant l'arrivée du  $k^{ième}$  client.

La suite des variables aléatoires  $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$  forme une chaîne de Markov induite dont sa matrice stochastique est la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{N-1} & a_{N-1} & a_2 & a_{N-3} & a_{N-4} & \dots & a_0 \\ b_{N-1} & a_{N-1} & a_2 & a_{N-3} & a_{N-4} & \dots & a_0 \end{pmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

où

$$a_j = \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\zeta)t} \frac{[(\mu+\zeta)t]^j}{j!} dG(t) \quad \text{et} \quad b_j = 1 - \sum_{i=0}^j a_i.$$

tel que,  $a_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L_k = j)$ . Donc  $a_j$  exprime la probabilité du nombre de clients servis où éliminé durant l'arrivée de  $j^{\text{ème}}$  clients.

**Exemple 3.1.** Soit le tableau suivant qui résume les probabilités des quatre modèles auxquels notre étude sera faite par la suite :

Modèle avec arrivées négatives	$a_j$
$M/M/1/N$	$\frac{(\mu+\zeta)^j}{(\lambda+\mu+\zeta)^{j+1}}$
$D/M/1/N$	$-(\mu+\zeta) \frac{[(\mu+\zeta)d]^j}{j!}$
$H_2/M/1/N$	$\left[ \frac{q\lambda_1}{(\lambda_1+\mu+\zeta)^{j+1}} + \frac{(1-q)\lambda_2}{(\lambda_2+\mu+\zeta)^{j+1}} \right] (\mu+\zeta)^j$
$E_2/M/1/N$	$\frac{\lambda_1\lambda_2[(\lambda_2+\mu+\zeta)^{j+1} - (\lambda_1+\mu+\zeta)^{j+1}]}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1+\mu+\zeta)^{j+1}(\lambda_2+\mu+\zeta)^{j+1}} (\mu+\zeta)^j$

TABLE 3.1: Probabilités  $a_j$  des quatre modèles que nous allons étudiés.

## 3.2 Analyse de sensibilité du modèle

Pour apprécier l'importance d'une variable d'entrée, sur la variable de sortie, nous allons estimé dans cette section, les indices de Sobol en utilisant l'intégration de Monte Carlo, à partir des réponses de la distribution stationnaire aux variations des variables d'entrées (paramètres du modèle). À l'aide de ces indices, on peut déterminer les paramètres les plus influentes du modèle étudié. Dans notre cas, nous allons approximer les indices de Sobol sur les modèles d'attente avec arrivées négatives.

### 3.2.1 Indice de sensibilité de Sobol de premier ordre

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \pi_l : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \pi_l(\theta), \end{aligned}$$

où  $\pi_l, l = 0, 1, \dots, N$  est la distribution stationnaire et  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  est un vecteur du paramètres du modèle. Supposons que les  $\theta_i, i = 1, \dots, m$ , sont indépendants. L'indice de Sobol de premier ordre est calculé par la formule suivante :

$$S_i = \frac{V(E[\pi_l/\theta_i])}{V(\pi_l)}, \quad i = 1, \dots, m ; \quad l = 0, 1, \dots, N.$$

Cette formule d'indice de Sobol traduit la sensibilité de la distribution stationnaire  $\pi_l, l = 0, 1, \dots, N$  au paramètre  $\theta_i, i = 1, \dots, m$ .

**Remarque 3.2.1.** *Les valeurs des indices de Sobol sont comprises entre zéro et un ( $0 \leq S_i \leq 1, i = 1, \dots, m$ ). De plus, plus ces indices seront élevés, plus les paramètres associés seront considérables.*

Afin d'estimer les indices de Sobol du premier ordre pour les files d'attente de type G/M/1/N avec arrivées négatives, on considère que les paramètres de ce modèle sont des variables aléatoires. Soit  $Y_n$  un échantillon de taille  $n$ , tel que :

$$Y_n = (\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{km})_{k=1, \dots, n}.$$

Soient :

$$\hat{\pi}_l : \text{la moyenne de la distribution stationnaire } \pi_l (E(\pi_l)).$$

$\widehat{V}$  : la variance de  $\pi_l$  ( $V(\pi_l)$ ).

Les estimations de  $\widehat{\pi}_l$  et  $\widehat{V}$  sont :

$$\widehat{\pi}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{km}),$$

et

$$\widehat{V} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l^2(\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{km}) - \widehat{\pi}_l^2.$$

Et estimons aussi la variance par rapport à chaque paramètre  $\theta_i$ , notée  $V_i$  :

$$V_i = E[E(\pi_l/\beta_i)^2] - E[E(\pi_l/\beta_i)]^2 = U_i - E(\pi_i)^2.$$

La quantité  $U_i$  peut être estimée par  $\widehat{U}_i$  en tenant compte du conditionnement en  $\theta_i$ , en faisant varier entre les deux appels à la fonction  $\pi_l$  toutes les variables sauf la  $i^{\text{ème}}$  variable. Plus précisément, soient  $Y_n^{(1)}$  et  $Y_n^{(2)}$ , deux échantillons de variables aléatoires  $\theta_i$  :

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}) \times (\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(2)}, \dots, \theta_{km}^{(2)}), \\ \widehat{U}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}) \times (\theta_{k1}^{(2)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(2)}), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \widehat{U}_m &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi_l(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}) \times (\theta_{k1}^{(2)}, \theta_{k2}^{(2)}, \dots, \theta_{km}^{(1)}). \end{aligned}$$

À l'aide de toutes ces estimations, on peut alors estimer les indices de Sobol de premier ordre :

$$\widehat{S}_i = \frac{\widehat{U}_i - \widehat{\pi}_l^2}{\widehat{V}}. \quad (3.2.1)$$

Dans la suite de ce chapitre, on suppose que tous les paramètres de ce modèle suivent la distribution uniforme sur  $[1, 2]$ . Pour une file d'attente de taille  $N = 4$ , nous estimons

les indices de Sobol de premier ordre, pour chaque composante de la distribution stationnaire de chaque modèle étudié par la simulation de Monte Carlo, pour un échantillon de taille  $n = 1000$  et un nombre de réplifications  $k=100$ .

Dans ce travail, nous optons comme lois des inter-arrivées les quatre lois connues dans la littérature des systèmes de files d'attente : loi Exponentielle, Déterministe, Hyper-exponentielle d'ordre 2 et Erlang d'ordre 2. Le choix de ses quatre lois est argumenté sur le fait d'englober tous les cas possibles de coefficient de variation.

L'ensemble des figures qui viennent, nous montrons les résultats obtenus en appliquant la formule (3.2.1).

**Exemple 3.2.1.** *Considérons le modèle  $M/M/1/4$  avec arrivées négatives, où la distribution des inter-arrivées et celle de temps de service sont exponentielles de moyenne  $1/\lambda$  et  $1/\mu$  respectivement ; La densité de probabilité des inter-arrivées est donnée par :*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Soit le vecteur des paramètres d'entrés  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\lambda, \mu, \zeta)$ .

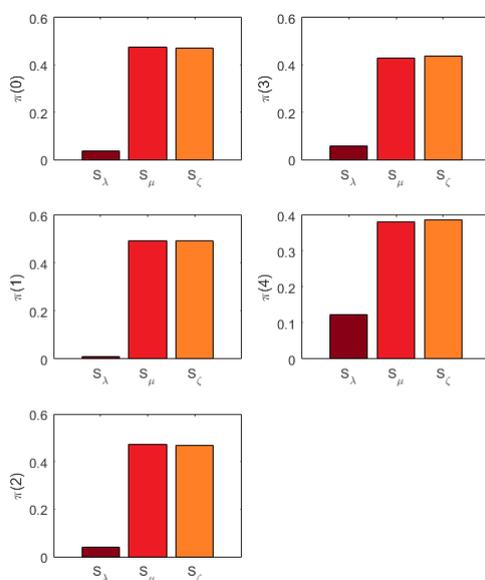


FIGURE 3.1: Indices de Sobol pour les paramètres de modèle  $M/M/1/4$  avec arrivées négatives.

D'après la figure (3.1), nous constatons que les valeurs des indices de sensibilité les plus élevées sont celles qui correspondent aux paramètres  $\mu$  et  $\zeta$ , donc ces deux derniers sont les plus influents sur la distribution stationnaire, et comme le paramètre  $\lambda$  est le moins influent, il est considéré déterministe (constant).

**Exemple 3.2.2.** on considère la file d'attente  $D/M/1/4$  avec arrivées négatives, dont le processus des inter-arrivées est déterministe du taux  $d$ , la durée de service est exponentielle de moyenne  $1/\mu$ . Soit le vecteur des paramètres d'entrées  $\beta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (d, \mu, \zeta)$ .

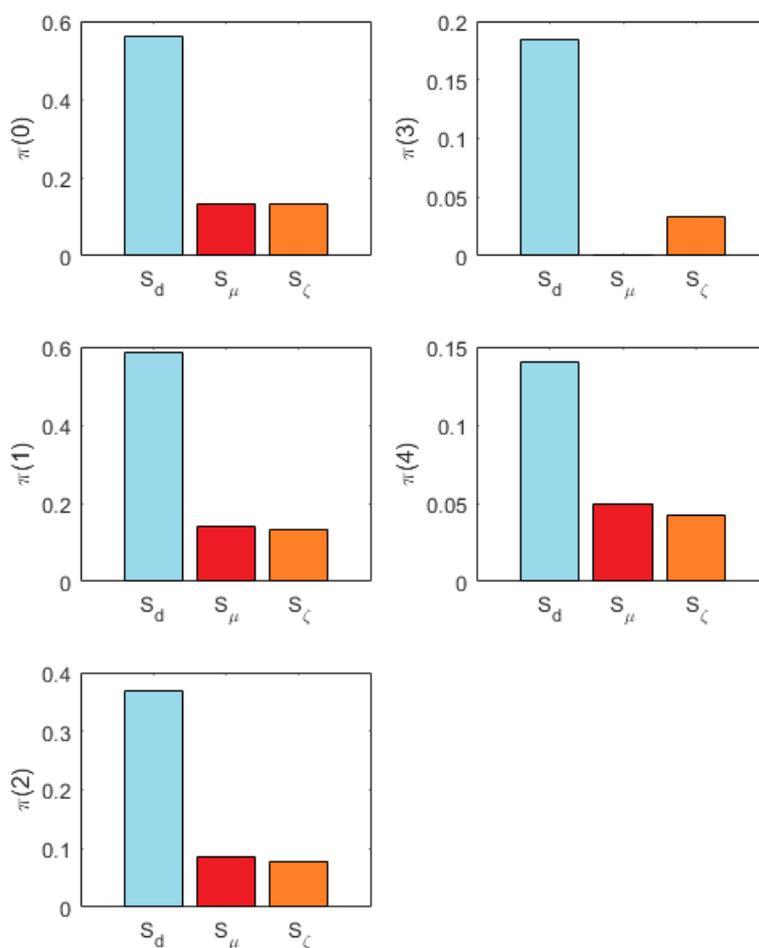


FIGURE 3.2: Indices de Sobol pour les paramètres de modèle  $D/M/1/4$  avec arrivées négatives.

D'après les résultats obtenus dans la figure (3.2), on remarque que la plus grande valeur de l'indice de sensibilité est celle du paramètre  $d$  pour chaque composante de la distribution stationnaire, cela suffit pour dire que  $d$  est le paramètre auquel notre

modèle est sensible. Le reste des paramètres ( $\mu$  et  $\zeta$ ) sont négligeables vu qu'ils n'ont pas d'influence sur la distribution stationnaire, et c'est pour cela qu'on les prend comme déterministes.

**Exemple 3.2.3.** On considère le modèle d'attente  $H_2/M/1/4$  avec arrivées négatives, où l'arrivée des clients est hyper-exponentiel d'ordre 2 de taux  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et le temps de service est distribué selon un processus poissonien de taux  $\mu$ , la distribution de la loi hyper-exponentielle d'ordre 2 est donnée sous la forme suivante :

$$f(t) = q\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1 - q)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq 0.$$

Soit le vecteur des paramètres d'entrées  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \mu, \zeta)$ .

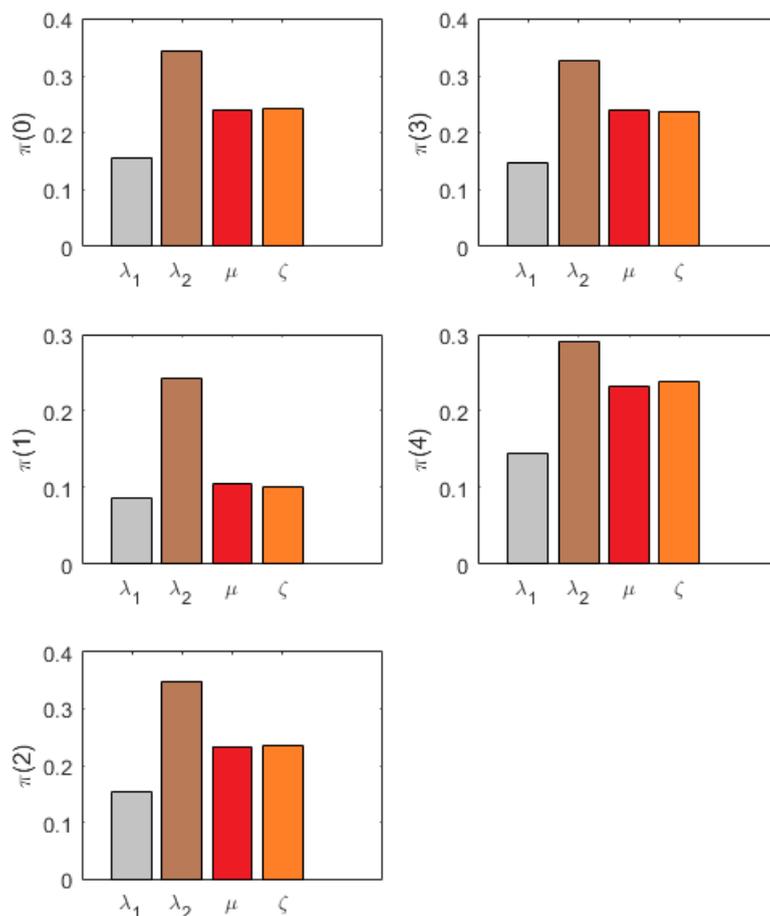


FIGURE 3.3: Indices de Sobol pour les paramètres de modèle  $H_2/M/1/4$  avec arrivées négatives.

Nous constatons, d'après la figure (3.3), que les valeurs des indices de sensibilité les plus élevées sont celles qui correspondent aux paramètres  $\lambda_2, \mu$  et  $\zeta$ , donc ces derniers sont les plus influents sur la distribution stationaire, et comme le paramètre  $\lambda_1$  est plus petit que les autres, il est considéré déterministe.

**Exemple 3.2.4.** *Considérons la file d'attente  $E_2/M/1/4$  avec arrivées négatives, où le processus des inter-arrivées est d'Erlang d'ordre 2 avec un taux  $\lambda$ , avec  $\lambda^{-1} = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1}$ , et la durée de service est exponentielle de moyenne  $1/\mu$ , la densité de probabilité de la loi hyper-exponentielle d'ordre 2 est donnée par :*

$$f(t) = \lambda_1 \lambda_2 \frac{(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad t \geq 0.$$

Soit le vecteur des paramètres d'entrées  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \mu, \zeta)$ .

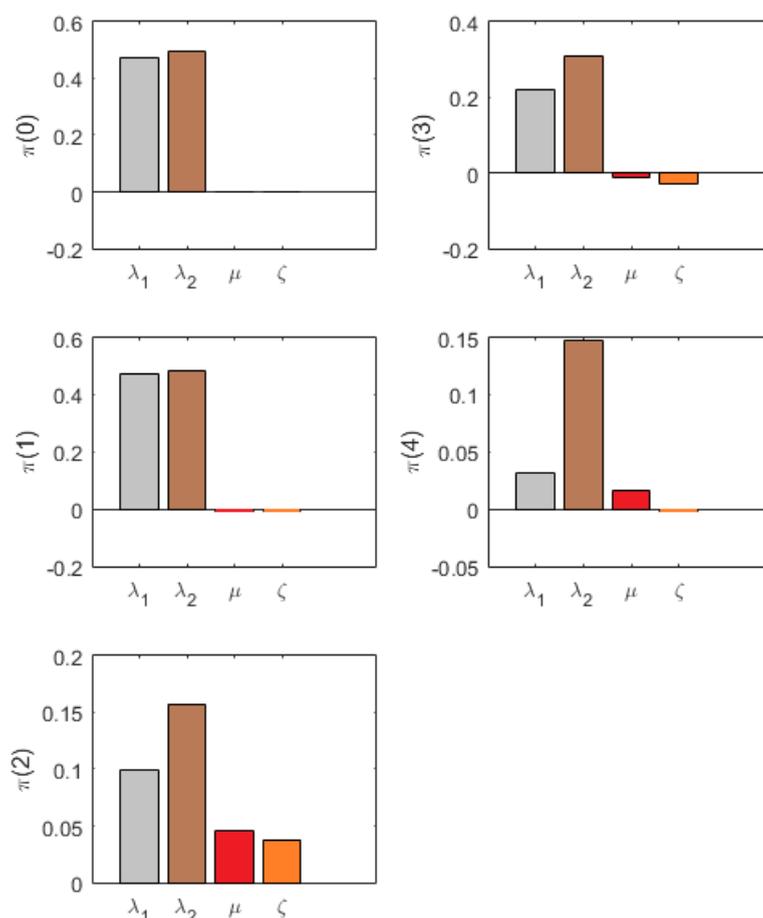


FIGURE 3.4: Indices de Sobol pour les paramètres de modèle  $E_2/M/1/4$  avec arrivées négatives.

D'après les résultats obtenus dans la figure (3.4), on peut dire que les plus grandes valeurs des indices de sensibilité sont celles correspondant aux paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  pour chaque composante de la distribution stationnaire, cela est suffisamment convenable pour dire que ces deux paramètres sont les plus influents sur le modèle étudié. Le reste des paramètres ( $\mu$  et  $\zeta$ ) sont négligeables vu qu'ils n'ont pas une influence importante sur la distribution stationnaire, c'est la raison qui nous permet de les prendre comme déterministes.

### 3.3 Analyse de l'incertitude du modèle

Parmi les paramètres  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  de la distribution stationnaire, nous avons déterminé les paramètres d'entrées  $\hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $s \leq m$ , auxquels le modèle étudié est sensible. Par la suite, nous étudions dans cette section l'incertitude de ces paramètres, qui consiste à estimer la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire  $\pi_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, N$  en introduisant des nouveaux modèles pour  $\hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $s \leq m$  et fixant les paramètres déterministes  $\theta_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $r \leq m$ ,  $s + r = m$ .

Dans la suite, nous allons fixer quelques paramètres :  $\bar{\mu} = 2$ ,  $\sigma_\mu = 0.2$ ,  $\bar{d} = 1$ ,  $\sigma_d = 0.1$ ,  $\bar{\zeta} = 1$ ,  $\sigma_\zeta = 0.1$ ,  $\bar{\lambda}_1 = 1$ ,  $\sigma_{\lambda_1} = 0.1$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 1$ ,  $\sigma_{\lambda_2} = 0.1$ , et posons la taille de l'échantillon  $n = 1000$ .

#### 3.3.1 Sur le modèle M/M/1/4 avec arrivées négatives

D'après l'analyse effectuée dans la première partie de ce chapitre on a obtenu  $\mu$  et  $\zeta$  comme les paramètres les plus influents pour chaque composante  $\pi_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, 4$  de la distribution stationnaire  $\pi_{\mu, \zeta}$ , et le paramètre  $\lambda$  est considéré comme un paramètre déterministe.

Afin de simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire, nous allons présenter une nouvelle formule pour les paramètres incertains  $\mu$  et  $\zeta$  :

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_\mu \epsilon_\mu, \quad (3.3.1)$$

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sigma_\zeta \epsilon_\zeta, \quad (3.3.2)$$

où

$\bar{\mu}$  : la moyenne de paramètre incertain  $\mu$ .

$\sigma_\mu$  : l'écart-type de  $\mu$ .

$\epsilon_\mu$  : le bruit blanc associé à  $\mu$ ,  $\epsilon_\mu \sim N(0, 1)$ .

$\bar{\zeta}$  : la moyenne de paramètre incertain  $\zeta$ .

$\sigma_\zeta$  : l'écart-type de  $\zeta$ .

$\epsilon_\zeta$  : le bruit blanc associé à  $\zeta$ ,  $\epsilon_\zeta \sim N(0, 1)$ .

Les figures (3.5) et (3.6) représentent des histogrammes et des courbures pour les nouveaux modèles 3.3.1 et 3.3.2 attribués aux paramètres  $\mu$  et  $\zeta$  respectivement.

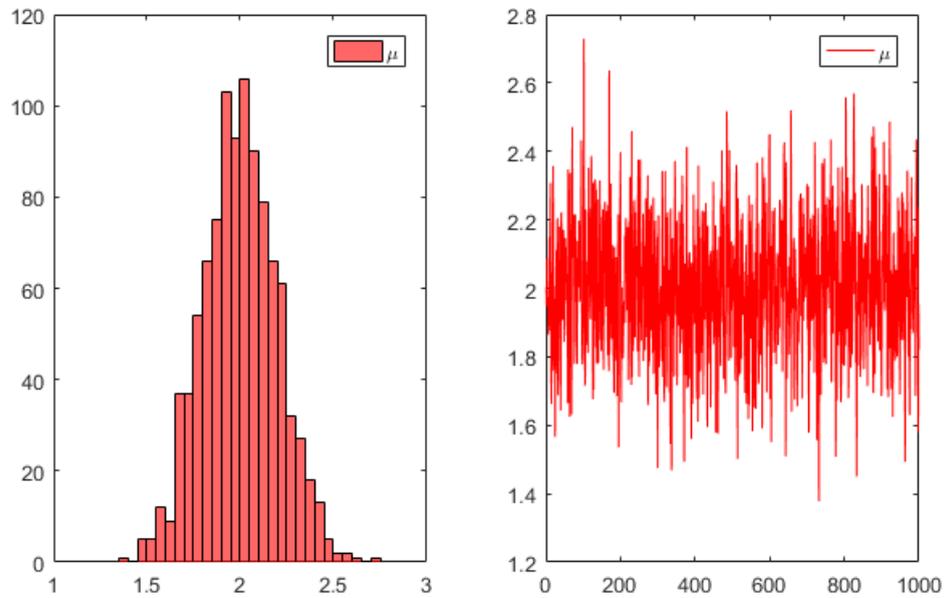


FIGURE 3.5: Histogramme et graphe du paramètre  $\mu$  de modèle  $M/M/1/4$  avec arrivées négatives.

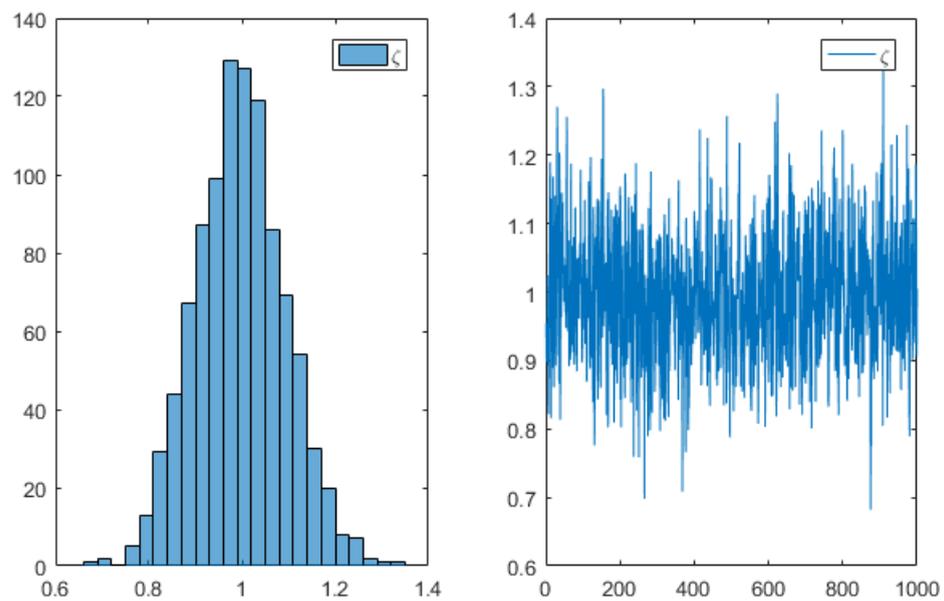


FIGURE 3.6: Histogramme et graphe du paramètre  $\zeta$  de modèle  $M/M/1/4$  avec arrivées négatives.

### 3.3.2 Sur le modèle $D/M/1/4$ avec arrivées négatives

Soit  $d$  le paramètre enregistré comme le paramètre le plus influent pour chaque composante  $\pi_i, i = 0, 1, \dots, N$  de la distribution stationnaire  $\pi_d$ , et les paramètres  $\mu$  et  $\zeta$  sont considérés comme des constantes (déterministes).

Nous allons introduire un nouveau modèle pour le paramètre incertain  $d$  afin d'approximer la moyenne et la variance de la distribution stationnaire.

$$d = \bar{d} + \sigma_d \epsilon_d, \quad (3.3.3)$$

où

$\bar{d}$  : la moyenne de paramètre incertain  $d$ .

$\sigma_d$  : l'écart-type de  $d$ .

$\epsilon_d$  : le bruit blanc associé à  $d$ ,  $\epsilon_d \sim N(0, 1)$ .

La représentation de l'histogramme et de ghraphe pour la nouvelle formule de modèle 3.3.3 est donnée dans la figure (3.7) correspondant au paramètre  $d$ .

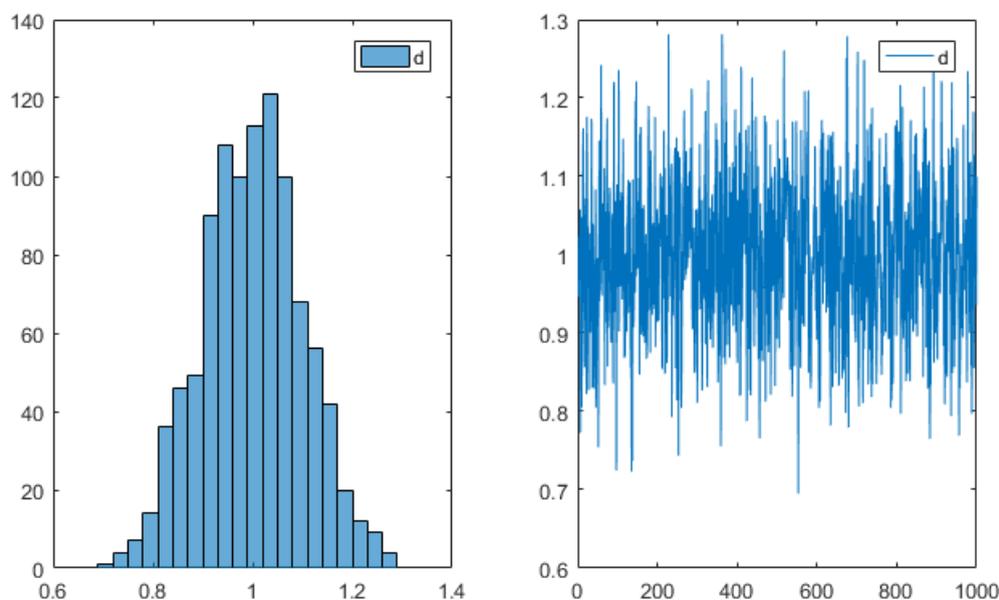


FIGURE 3.7: Histogramme et graphe du paramètre  $d$  de modèle  $D/M/1/4$  avec arrivées négatives.

### 3.3.3 Sur le modèle $H_2/M/1/4$ avec arrivées négatives

Soient  $\lambda_2$ ,  $\mu$  et  $\zeta$  les paramètres les plus dominants en terme de sensibilité vis à vis la distribution stationnaire  $\pi_{\lambda_2, \mu, \zeta}$ , et considérons le paramètre  $\lambda_1$  comme un paramètre déterministe.

Nous approximos la moyenne et la variance de la distribution stationnaire de modèle. Pour cela, nous allons introduire une nouvelle formule pour les paramètres incertains  $\lambda_2, \mu$  et  $\zeta$  :

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_2 + \sigma_{\lambda_2} \epsilon_{\lambda_2}, \quad (3.3.4)$$

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_{\mu} \epsilon_{\mu}, \quad (3.3.5)$$

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sigma_{\zeta} \epsilon_{\zeta}, \quad (3.3.6)$$

où

$\bar{\lambda}_2, \bar{\mu}$  et  $\bar{\zeta}$  : les moyennes des paramètres incertains  $\lambda_2, \mu$  et  $\zeta$  respectivement.

$\sigma_{\lambda_2}, \sigma_{\mu}$  et  $\sigma_{\zeta}$  : les écarts-type des paramètres incertains  $\lambda_2, \mu$  et  $\zeta$  respectivement.

$\epsilon_{\lambda_2}, \epsilon_{\mu}$  et  $\epsilon_{\zeta}$  : les bruits blancs associés à  $\lambda_2, \mu$  et  $\zeta$ ,  $\epsilon_{\lambda_2}, \epsilon_{\mu}, \epsilon_{\zeta} \sim N(0, 1)$ .

Les figures (3.8),(3.9) et (3.10) représentent des histogrammes et des courbures pour les nouveaux modèles 3.3.4, 3.3.5 et 3.3.6 correspondant aux paramètres  $\lambda_2, \mu$  et  $\zeta$  respectivement.

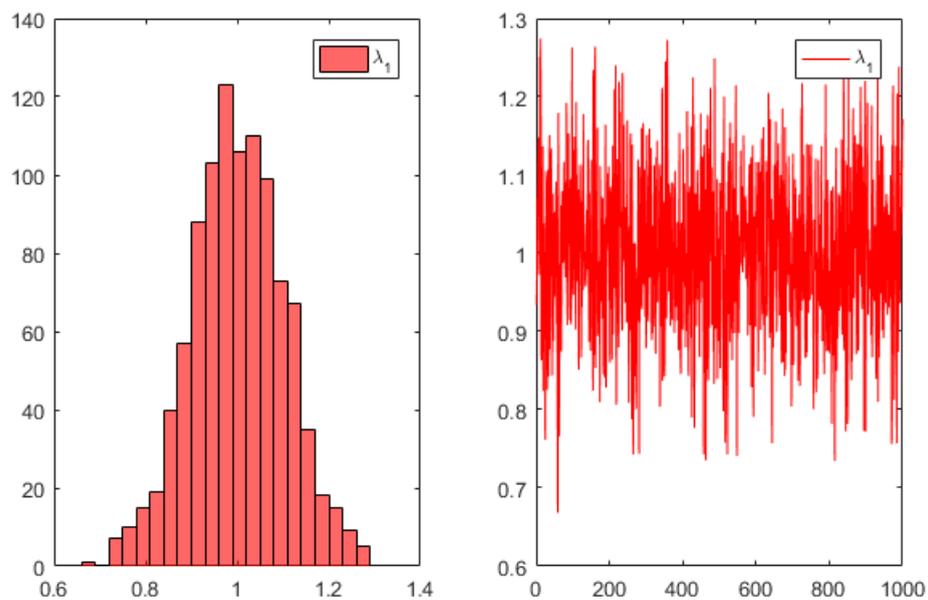


FIGURE 3.8: Histogramme et graphe du paramètre  $\lambda_2$  de modèle  $H_2/M/1/4$  avec arrivées négatives.

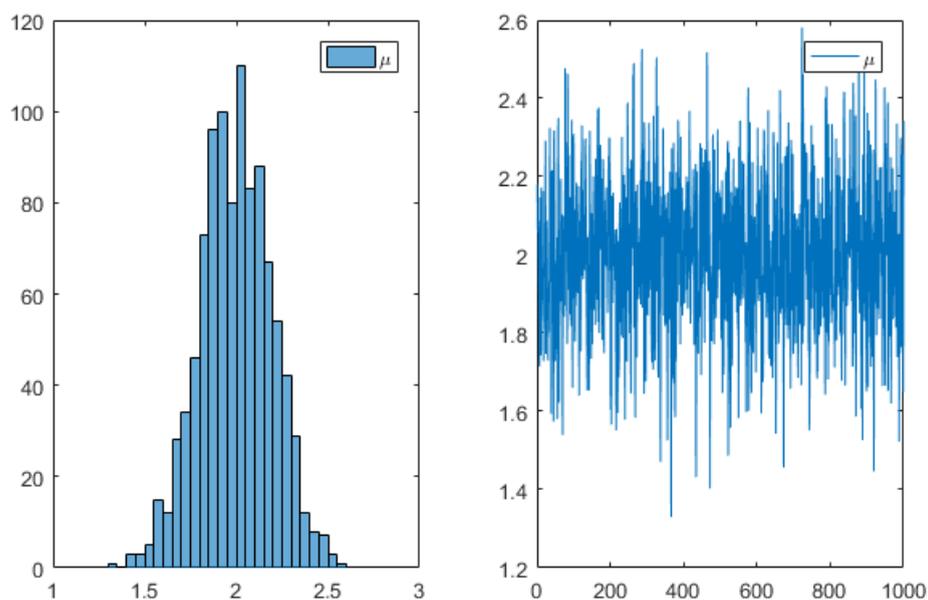


FIGURE 3.9: Histogramme et graphe du paramètre  $\mu$  de modèle  $H_2/M/1/4$  avec arrivées négatives.

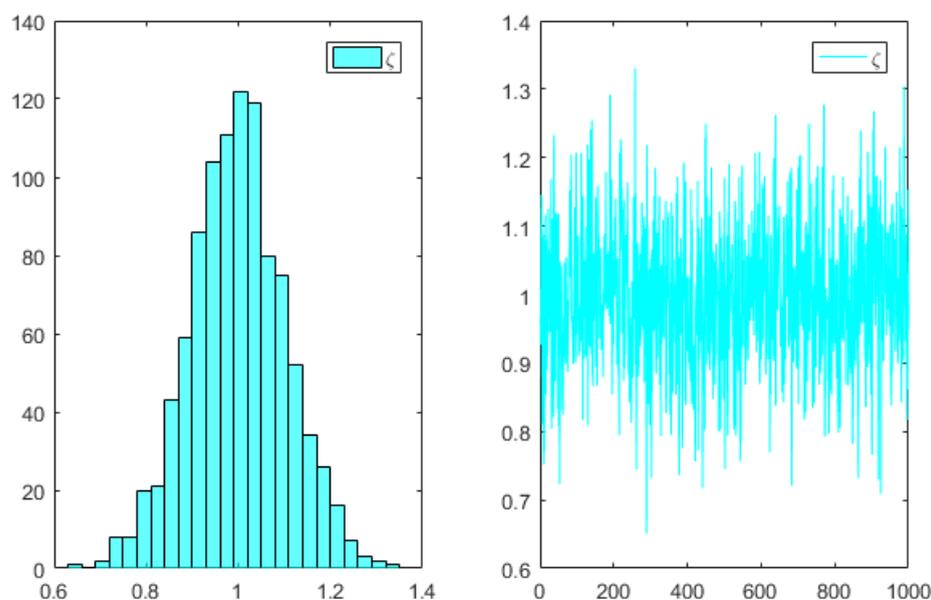


FIGURE 3.10: Histogramme et graphe du paramètre  $\zeta$  de modèle  $H_2/M/1/4$  avec arrivées négatives.

### 3.3.4 Sur le modèle $E_2/M/1/4$ avec arrivées négatives

Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les paramètres les plus influents pour chaque composante  $\pi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  de la distribution stationnaire  $\pi_{\lambda_1, \lambda_2}$ , et le paramètre  $\lambda$  est considéré comme un paramètre déterministe.

Afin de simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire, nous allons faire appel à un nouveau modèle pour les paramètres incertains  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 + \sigma_{\lambda_1} \epsilon_{\lambda_1}, \quad (3.3.7)$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_2 + \sigma_{\lambda_2} \epsilon_{\lambda_2}, \quad (3.3.8)$$

où

$\bar{\lambda}_1$  : la moyenne de paramètre incertain  $\lambda_1$ .

$\sigma_{\lambda_1}$  : l'écart-type de  $\lambda_1$ .

$\epsilon_{\lambda_1}$  : le bruit blanc associé à  $\lambda_1$ ,  $\epsilon_{\lambda_1} \sim N(0, 1)$ .

$\bar{\lambda}_2$  : la moyenne de paramètre incertain  $\lambda_2$ .

$\sigma_{\lambda_2}$  : l'écart-type de  $\lambda_2$ .

$\epsilon_{\lambda_2}$  : le bruit blanc associé à  $\lambda_2$ ,  $\epsilon_{\lambda_2} \sim N(0, 1)$ .

La représentation des histogrammes et des graphes pour les nouvelles formules de modèle 3.3.7 et 3.3.8 est donnée dans la figure (3.11) et (3.12) respectivement.

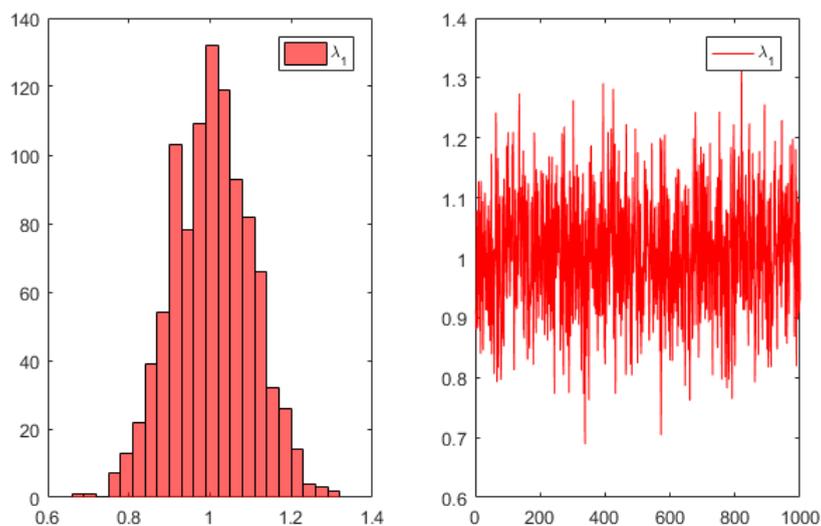


FIGURE 3.11: Histogramme et graphe du paramètre  $\lambda_1$  de modèle  $E_2/M/1/4$  avec arrivées négatives.

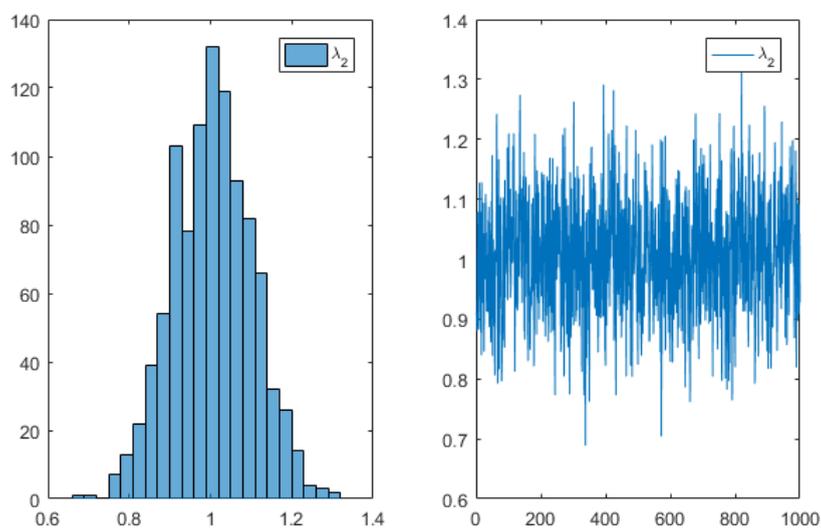


FIGURE 3.12: Histogramme et graphe du paramètre  $\lambda_2$  de modèle  $E_2/M/1/4$  avec arrivées négatives.

Le tableau (3.2) englobe les résultats obtenus de l'application numérique sur l'estimation de l'espérance et la variance par la simulation de Monte Carlo pour les différents modèles d'attente étudiés :

Modèle avec arrivées négatives	Simulation de Monte Carlo	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$
$M/M/1/N$	Espérance	0.6682	0.2232	0.0749	0.0252	0.0085
	Variance $\times 10^{-04}$	4.6370	0.5840	0.5770	0.1840	0.0420
$D/M/1/N$	Espérance	0.9365	0.0590	0.0042	0.0003	0.0000
	Variance $\times 10^{-04}$	5.2420	3.7860	0.0960	0.0020	0.0000
$H_2/M/1/N$	Espérance	0.6674	0.2231	0.0752	0.0255	0.0088
	Variance $\times 10^{-04}$	8.4200	1.0370	1.0480	0.3440	0.0820
$E_2/M/1/N$	Espérance	0.9994	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
	Variance $\times 10^{-04}$	0.8301	0.8268	0.0001	0.0000	0.0000

TABLE 3.2: Espérances et variances par la simulation de Monte Carlo pour les quatre modèles étudiés.

D'après l'analyse effectuée dans ce tableau, nous remarquons qu'une perturbation de 10% de chaque paramètre entraîne une variance maximale de  $8.42 \times 10^{-04}$  de tous les modèles, ce qui nous prouve la robustesse du modèle  $G/M/1/4$  avec arrivées négatives, par rapport à l'incertitude infligée dans les paramètres influents. Autrement dit, une petite perturbation sur les paramètres d'entrés engendre une petite perturbation dans les paramètres de sorties.

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

En premier lieu, nous nous sommes focalisés sur l'analyse de sensibilité dans un modèle  $G/M/1/4$  avec arrivées négatives, où nous avons considéré les paramètres d'entrées comme des variables aléatoires. Nous avons étudié l'influence de la variabilité des entrées du modèle sur la variabilité de la sortie dont la fonction de modèle est la distribution stationnaire  $\pi$ . Nous avons utilisé les indices de Sobol comme méthode d'analyse, et pour estimer ces indices, nous avons fait appel à la simulation de Monte Carlo. Cette méthode nous a permis de dégager les paramètres d'entrées les plus influents sur la variabilité de la réponse (sortie) du modèle et les paramètres les moins influents sont considérés comme déterministes.

En deuxième lieu, nous nous sommes intéressés à une méthode de propagation bien précise, c'est la méthode de Monte Carlo, afin de propager l'incertitude épistémique infligée dans la détermination de certains paramètres à travers le calcul de la distribution stationnaire du système de file d'attente  $G/M/1/4$  avec arrivées négatives, où nous avons considéré l'incertitude liée aux paramètres auxquels le modèle étudié est sensible, ceux déterminés dans l'analyse de sensibilité. Nous avons simulé les valeurs de chaque composante de la distribution stationnaire du modèle considéré, tout en calculant son espérance et sa variance.

Nous concluons par donner certaines perspectives :

- Estimer les indices de Sobol avec d'autres méthodes, à savoir la méthode de Taylor, la méthode de chaos,..etc.
- Appliquer la même procédure pour les modèles stochastiques plus complexes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Artalejo. G-networks : A versatile approach for work removal in queueing networks. *European Journal of Operational Research*, 126(2) :233–249, 2000.
- [2] B. Ayyub and G. Klir. *Uncertainty modeling and analysis in engineering and the sciences*. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [3] B. Baynat. *La théorie des files d’attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit*. Hermes, 1999.
- [4] N. Bilal. Implementation of sobol’s method of global sensitivity analysis to a compressor simulation model. 2014.
- [5] P. Brémaud. *Initiation aux Probabilités : et aux chaînes de Markov*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [6] R. Faivre et al. *Analyse de sensibilité et exploration de modèles : application aux sciences de la nature et de l’environnement*. Editions Quae, 2016.
- [7] D. Foata and A. Fuchs. Processus stochastiques-processus de poisson, chaînes de markov et martingales. *Dunod, Parigi*, 2002.
- [8] E. Gelenbe. Random neural networks with negative and positive signals and product form solution. *Neural computation*, 1(4) :502–510, 1989.
- [9] E. Gelenbe. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of applied probability*, 28(3) :656–663, 1991.
- [10] E. Gelenbe. G-networks : a unifying model for neural and queueing networks. *Annals of Operations Research*, 48(5) :433–461, 1994.

- 
- [11] E. Gelenbe et al. *Introduction to queueing networks*. Wiley New York, 1998.
- [12] E. Gelenbe et al. The first decade of g-networks. *European Journal of Operational Research*, 126(2) :231–232, 2000.
- [13] J. Gentle. *Random number generation and Monte Carlo methods*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [14] M. Granger et al. Uncertainty : a guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis. *University of Cambridge, New York. HB*, 615 :M665, 1990.
- [15] Y. Guivarch and J. Hardy. Théorèmes limites pour une classe de chaînes de markov et applications aux difféomorphismes d’anosov. *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*, 24(1) :73–98, 1988.
- [16] P. Harrison et al. Reliability modelling using g-queues. *European Journal of Operational Research*, 126(2) :273–287, 2000.
- [17] W. Hoeffding. A non-parametric test of independence. *The annals of mathematical statistics*, 19(4) :546–557, 1948.
- [18] J. Jacques. *Contributions à l’analyse de sensibilité et à l’analyse discriminante généralisée*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2005.
- [19] J. Jacques. Pratique de l’analyse de sensibilité : comment évaluer l’impact des entrées aléatoires sur la sortie d’un modèle mathématique. *Lille : SN*, 2011.
- [20] L. Kleinrock. Queueing systems. *A Wiley-Interscience Publication*, 1975.
- [21] P. Lévy. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio mathematica*, 7 :283–339, 1940.
- [22] M. McKay et al. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2) :239–245, 1979.
- [23] S. Meyn and R. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [24] J. Norris. *Markov chains*. Number 2. Cambridge university press, 1998.
- [25] S. Ouazine and K. Abbas. Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation. *Applied Mathematical Modelling*, 40(2) :1137–1156, 2016.

- 
- [26] S. Ouazine and K. Abbas. A functional approximation for retrial queues with two way communication. *Annals of Operations Research*, 247(1) :211–227, 2016.
- [27] E. ROCQUIGNY. La maîtrise des incertitudes dans un contexte industriel. 1re partie : une approche méthodologique globale basée sur des exemples. *Journal de la Société française de statistique*, 147(3) :33–71, 2006.
- [28] S. Ross. *Initiation aux probabilités*. PPUR Presses Polytechniques, 2007.
- [29] A. Saltelli et al. Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models. *Chichester, England*, 2004.
- [30] A. Saltelli et al. Sensitivity analysis practices : Strategies for model-based inference. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(10-11) :1109–1125, 2006.
- [31] I. Sobol. On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4) :784–802, 1967.
- [32] I. Sobol. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical modelling and computational experiments*, 1(4) :407–414, 1993.
- [33] I. Sobol. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55(1-3) :271–280, 2001.
- [34] W. Walker et al. Defining uncertainty : a conceptual basis for uncertainty management in model-based decision support. *Integrated assessment*, 4(1) :5–17, 2003.

# *Résumé*

Dans ce travail, nous avons opté en premier lieu, pour l'analyse de sensibilité globale en utilisant les indices de Sobol de premier ordre simulé par la méthode de Monte Carlo, afin de voir et de déterminer les paramètres auxquelles la distribution stationnaire de modèle  $GI/M/1/N$  avec arrivées négatives est sensible. En deuxième lieu, nous avons fait appel à la méthode de Monte Carlo afin de propager l'incertitude des paramètres de la distribution stationnaire de modèle d'attente  $GI/M/1/N$  avec arrivées négatives, tout en estimons ses statistique (espérance et variance).

---

## *Abstract*

In this work, we opted first, for the global sensitivity analysis using the Sobol indices of first order simulated by the Monte Carlo method, to see and determine the parameters to which the stationary distribution of model  $GI/M/1/N$  with negative arrivals is sensitive. Secondly, we used the Monte Carlo method to propagate the uncertainty of the parameters of the stationary distribution of  $GI/M/1/N$  queuing model with negative arrivals, while estimating its statistics ( esperance and variance).

---