République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Thème

Quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires

Réalisé par :

M^{lle} BENAMOURA Yasmina   M^{lle} ABERBACHE Mélissa

Soutenu le 02/07/2019 devant le jury composé de :

Président	M^r. BOUKOUCHA Rachid	Maître de conf. A	U. A/Mira Béjaia.
Examinateur	M^r. MEZINE Ouahmed	Maître assistant. B	U. A/Mira Béjaia.
Promoteur	M^r. KHELOUFI Arezki	Maître de conf. A	U. A/Mira Béjaia.

Année Universitaire : 2018/2019

Remerciements

Nous remercions Dieu, qui nous a donné la force et la patience afin de parvenir à terminer ce travail.

Nous témoignons toutes nos gratitudes à tous ceux qui ont contribué à nos formations et nous tenons à remercier tous nos enseignants durant toute notre vie scolaire.

Nos vifs remerciements vont à :

M^r A. KHELOUFI pour son encadrement, sa disponibilité, sa confiance et ses précieuses remarques.

M^r R. BOUKOUCHA pour l'honneur qu'il a bien voulu nous faire en acceptant de présider le jury.

M^r O. MEZINE pour avoir accepté d'examiner ce mémoire, ce qui nous inspire un grand honneur.

Enfin, nous tenons à remercier nos familles pour l'écoute, la présence, le soutien, les encouragements et l'amour qu'elles nous portent de jour en jour, que ce soit dans les moments d'euphorie et de joie ou dans ceux de doute et de remise en question.

Dédicaces

Nous dédions cet humble et modeste travail :

A nos chers parents.

A nos chers frères.

A nos chères soeurs.

A toutes nos familles.

A nos chers professeurs.

A tous nos amis.

M^{lles} Mélissa et Yasmina.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la résolution des problèmes aux limites non linéaires avec la méthode du point fixe et la méthode des opérateurs monotones. Notre objectif principal est de savoir utiliser ces méthodes pour prouver l'existence de solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires . Pour la méthode de point fixe, nous avons présenté quatre théorèmes principaux. Il s'agit des théorèmes du point fixe de Banach, de Brouwer, de Schauder et de Leray-Schauder, avec des exemples illustratifs. Ensuite nous avons introduit la méthode des opérateurs monotones dont le résultat principal est le théorème de Minty. Cette méthode a été illustrée par plusieurs exemples.

Mots-clés : e.d.p., e.d.o., problèmes aux limites non linéaires, méthode du point fixe, méthode des opérateurs monotones.

Table des matières

Notations

Ω	ouvert de $\mathbb{R}^N$,
Γ	frontière de Ω,
$B(x_0, r)$	boule ouverte de centre x_0 et de rayon r,
$mes(\Omega)$	mesure de Lebesgue de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,
$\mathrm{d}\sigma$	mesure de surface sur Γ,
X'	espace dual de X,
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	crochet de dualité,
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire dans (l'espace de Hilbert) H,
$\lvert x \rvert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$	module de x,
$\lVert \cdot \rVert_X$	norme dans l'espace X,
$\rightarrow$	convergence forte,
$\rightharpoonup$	convergence faible,
p'	exposant conjugué de p, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$,
p.p.	presque partout ,
$\sim$	la relation d'équivalence de l'égalité presque partout des fonctions mesurables,
$div(u)$	divergence de u,
$\mathrm{D}^\alpha u$	dérivée partielle par rapport au multi-indice α,
$\lvert \alpha \rvert$	longueur du multi-indice α,
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$	gradient de u,
Δu	laplacien de u,
V, W	espaces de Banach séparables, réflexifs,

$\mathrm{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact contenu dans Ω,
$\mathrm{D}'(\Omega)$	le dual de $\mathrm{D}(\Omega)$,
$\mathrm{C}^0(\Omega)$	espace des fonctions réelles continues sur Ω,
$\mathrm{L}^2(\Omega)$	espace des fonctions de carré intégrable sur Ω,
$\mathrm{L}^p(\Omega)$	$\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\vert u$ mesurable , $\int_\Omega \vert u\vert^p dx<\infty\}$,
$\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$	espace dual de $\mathrm{L}^p(\Omega)$,
$\mathrm{L}^\infty(\Omega)$	$\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\vert u$ mesurable , et il existe C tel que $\vert u(x)\vert\leq C$ p.p. dans $\Omega\}$,
$W^{m,p}(\Omega)$	espaces de Sobolev d'ordre m, constuits sur $L^p(\Omega)$,
$W_0^{m,p}(\Omega)$	adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$,
$W^{-m,p'}(\Omega)$	dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Introduction générale

Ce mémoire est consacré à l'étude de quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires. Il s'agit de la méthode du point fixe et de la méthode des opérateurs monotones. Notre objectif est de savoir utiliser ces méthodes pour prouver l'existence de solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Ce manuscrit est composé essentiellement de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des rappels de quelques notions d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent les notions des topologies faible et *-faible ainsi que les définitions et propriétés de certains espaces fonctionnels qui nous seront d'une grande utilité, comme les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode du point fixe. Plus précisément, nous présentons les quatre principaux théorèmes de cette théorie. Il s'agit des théorèmes de Banach (1922), de Brouwer (1910), de Schauder (1930) et de Leray-Schauder (1932). Nous donnerons aussi plusieurs applications de ces théorèmes dans la résolution des e.d.p. non linéaires.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation de la méthode des opérateurs monotones qui a été initiée par G. Minty en 1962. Les méthodes employées jusqu'au début de la deuxième moitié du siècle dernier utilisent surtout la compacité et conduisent à des théorèmes de point fixe. Elles sont fondées sur le principe suivant : remplacer le problème à l'aide de la compacité par un problème approché en dimension finie. Dans la théorie des opérateurs monotones on se ramène par projection sur de sous espaces de dimension finie. Ceci permet de se franchir de l'hypothèse de compacité, qui sera remplacée par des conditions de continuité.

Nous donnerons également dans ce chapitre quelques applications de cette méthode dans la résolution de certains problèmes elliptiques non linéaires.

CHAPITRE 1 Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et resultats utilisés tout au long de ce mémoire.

1.1 Généralités et quelques notions de base

Topologie faible

Définition 1.1.1. *Soient X un espace de Banach et X' son dual topologique. On appelle topologie faible sur X et que l'on note $\sigma(X, X')$, la topologie la moins fine, c'est-à-dire celle qui a le moins d'ouverts possibles, qui rend continues toutes les formes linéaires sur X, c'est-à-dire tous les éléments de X'.*

Définition 1.1.2. *Si $x_n \to x$ dans $\sigma(X, X')$, on notera $x_n \rightharpoonup x$ et on dira que x_n converge faiblement vers x dans X.*

Définition 1.1.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Alors*

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \, \forall f \in X'.$$

Définition 1.1.4. *Soient X et Y deux espace de Banach et $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur. Soit $x_\infty \in X$. On dit que A est*

- *fortement continu au point $x_\infty \in X$ si*

$$x_n \to x_\infty \text{ dans } X \Rightarrow Ax_n \to Ax_\infty \text{ dans } Y.$$

- *faiblement continu au point $x_\infty \in X$ si*

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \text{ dans } X \Rightarrow Ax_n \rightharpoonup Ax_\infty \text{ dans } Y.$$

– *fortement (respectivement, faiblement) continu sur X s'il est fortement (respectivement, faiblement) continu en tout point de X.*

Proposition 1.1.1. *Soient X un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On a*

1. *Si $x_n \to x$ alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et*
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X')$ et $f_n \to f$ dans X', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Topologie *-faible

Soient X un espace de Banach, X' son dual muni de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|,$$

et X'' son bidual topologique muni de la norme

$$\|\varphi\|_{X''} = \sup_{\substack{f\in X'\\ \|f\|_{X'}\leq 1}} |\langle \varphi, f\rangle|.$$

On a une injection canonique $J : X \longrightarrow X''$. En effet, tout élément $x \in X$ définit un élément $J_x \in X''$ par

$$\langle J_x, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X} \ \forall x \in X,\ \forall f \in X'.$$

J_x est une forme linéaire continue sur X', puisque

$$|\langle J_x, f\rangle| = |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|_X \|f\|_{X'}.$$

On a $\|J_x\|_{X''} = \|x\|_X$, $\forall x \in X$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|J_x\| &= \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle J_x, f\rangle| \\
&= \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \\
&= \|x\|.
\end{aligned}$$

On a $J(X) \subset X''$, ainsi on définit une nouvelle topologie.

Définition 1.1.5. *On désigne par la topologie *-faible notée $\sigma(X', X)$ la topologie la moins fine sur X' rendant continues les formes linéaires*

$$f \longmapsto \langle f, x\rangle, \; \forall x \in X.$$

Proposition 1.1.2. *Soit X un espace de Banach, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X', alors f_n converge vers f pour la topologie *-faible si et seulement si*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \; \forall x \in X.$$

Espaces réflexifs

Soient X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow X''$ l'injection canonique de X dans X'' définie par :

$$\langle J_x, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X}, \;\; \forall x \in X, \, \forall f \in X'.$$

Définition 1.1.6. *L'espace X est dit réflexif si $J(X) = X''$.*

Théorème 1.1.1. *Soit X un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans X admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Pour la preuve de ce théorème on peut voir H.Brezis [4] (Théorème 3.27 page 50). ■

Espaces séparables

Définition 1.1.7. *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.*

Corollaire 1.1.1. *Soit X un espace de Banach séparable alors de toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X' on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie $\sigma(X', X)$.*

Démonstration. Pour la preuve de ce corollaire on peut voir H.Brezis [4] (corollaire 3.26 page 50). ■

Rappels sur les espaces L^p

Définition 1.1.8. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle* ***espace de Lebesgue*** L^{p} *l'espace vectoriel des classes de fonctions u de Ω dans $\mathbb{R}$, Lebesgue mesurables, vérifiant*

1. *si $1 \leq p < +\infty$, $\int_\Omega |u(x)|^p \; dx < +\infty$,*
2. *si $p = +\infty$, $\underset{x\in\Omega}{supess}|u(x)| < +\infty$, où*

$$\underset{x\in\Omega}{supess}|u(x)| = \inf\{M| \; |u(x)| \leq M \; p.p. \; x \in \Omega\}.$$

Propriété 1.1.1. 1. *L'application $\|\cdot\|$ définie de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ par*

$$u \longmapsto \begin{cases} \|u\|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p \; dx)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \|u\|_\infty = \underset{x\in\Omega}{supess}|u(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

définit une norme sur $\mathrm{L}^p(\Omega)$, qui en fait un espace de Banach.

2. *Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$, le dual $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $\mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. L'application de dualité est définie par*

$$\mathrm{L}^p(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}, \; (u, v) \longmapsto \int_\Omega u(x)v(x) \; dx,$$

pour tout réel $p \in [1, +\infty[$. Le bidual de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $\mathrm{L}^p(\Omega)$. On dit que l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est ***réflexif***.

Théorème 1.1.2. ***(Inégalité de Hölder)***
Soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $fg \in \mathrm{L}^1$ et on a

$$\int_\Omega |fg| \; dx \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Remarque 1.1.1. *Si $p = p' = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\int_\Omega |fg| \; dx \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2}\|g\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Pour la preuve, voir H.Brezis [4] (Théorème 4.6 page 50).

Théorème 1.1.3. ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathrm{L}^1(\Omega)$. On supppose que

1. *$f_n(x) \to f(x)$ p.p. $x \in \Omega$ et*
2. *il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \; p.p. \; x \in \Omega.$$

Alors $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \to 0$.

1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soient $m \geq 1$ un entier naturel et $p \in [1, +\infty[$ un nombre réel. On pose

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \tag{1.2.1}$$

ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.2.1. $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable, et est réflexif si* $1 < p < \infty$.

Remarque 1.2.1.

1. *Pour $p = 2$, on a $W^{m,2}(\Omega) = \mathcal{H}^m(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u|v)_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

qui en fait un espace de Hilbert.

2. *Pour un ouvert Ω dont la frontière Γ est bornée et "assez régulière", la norme* (1.2.1) *est équivalente à la norme*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

Définition 1.2.1. $D(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω, c'est-à-dire*

$$\mathrm{D}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\, ;\, u \in C^\infty(\Omega) \text{ et } supp(u) \subset K \subset \Omega,\ K \text{ compact}\}.$$

Définition 1.2.2. *On note $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathrm{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$ l'adhérence de $\mathrm{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.2.1. *$D(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Dans toute la suite, on travaillera avec $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$$

ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

Pour Ω borné, on peut le munir de la norme équivalente

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = (\int_\Omega |\nabla u|^p \; dx)^{\frac{1}{p}}$$

dite norme du gradient. L'équivalence des normes est basée sur le résultat suivant :

Théorème 1.2.2. ***(Inégalité de Poincaré)***
On suppose que Ω est borné. Alors, il existe une constante C (dépendente de Ω et de p) telle que

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}, \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \; 1 \leq p < \infty.$$

L'application $u \longmapsto \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à celle induite par $\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Théorème 1.2.3. ***(Rellich)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe C^1, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \underset{compact}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^p(\Omega).$$

Autrement dit, de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que

$$u_{n_k} \to u \; dans \; \mathrm{L}^p(\Omega), \; u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.2.4. ***(Formule de Green)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe C^1 dont la frontiére est bornée, alors pour tout $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ et pour tout $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v \; dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \; d\sigma$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i$ est la dérivée normale et $n = {}^t(n_1, \ldots, n_N)$ est la normale unitaire.

De façon plus générale la formule de Green est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. ***(Formule de Green)***

Soient Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *lipschitzienne (voir [9] page* 11) *et* $1 < p < \infty$. *Alors, pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et pour tout* $v \in W^{-1,p'}(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx \;\; = \;\; -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_\Gamma uv v_i \, d\sigma, \; i = 1 \ldots N, \tag{1.2.2}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *et* $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ *sont prises au sens des distributions,* v_i *est la i-ème composante du vecteur unitaire de la normale à* $\partial\Omega$. *Ici,* $W^{-1,p'}(\Omega)$ *dénote l'espace dual de* $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Fonction de Carathéodory

Définition 1.2.3. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Une fonction* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite de Carathéodory si elle vérifie*

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \; \textit{la fonction } f(.,s) \; \textit{est mesurable sur } \Omega. \\ \textit{Pour p.p. } x \in \Omega, \; \textit{la fonction } f(x,.) \; \textit{est continue sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lemme 1.2.1. (*de Carathéodory, voir [8]*)

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p, \; p' < +\infty$ *des réels et* f *une fonction de Carathéodory de* $\Omega \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe* $b \geq 0$ *et* $a(.) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ *tels que la condition de croissance suivante est satisfaite*

$$\textit{pour tout } \; s \in \mathbb{R} \;\; \textit{et} \;\; \textit{p.p. sur } \Omega, \;\; |f(.,s)| \leq a(.) + b\,|s|^{\frac{p}{p'}} . \tag{1.2.3}$$

Pour toute fonction u *mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$, *on définit un opérateur* B *en posant*

$$(Bu)(x) = f(x, u(x)).$$

Alors B *est continu de* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *dans* $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$.

Remarque 1.2.2. *D'après la condition* (1.2.3), *si* $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *alors* Bu *est dans* $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. *Le lemme de Carathéodory montre que si l'opérateur* B *est défini partout sur* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *alors il est continu.*

1.3 Solutions d'équations différentielles et de problèmes aux limites

1.3.1 Solutions classiques

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les fonctions $a_\alpha(x,\xi)$ d'ordre $2m$ (α sont des N-multi-indice, $|\alpha| \leq m$) définies pour $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ admettent des dérivées d'ordre $|\alpha|$ (par rapport à toutes les variables) continues. Autrement dit, $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$.

Définition 1.3.1. *Soit $f \in C^0(\Omega)$, on dit qu'une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution classique de l'équation*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^\alpha D^\alpha (a_\alpha(x, \delta_m u(x))) = f(x), \textit{ dans } \Omega, \tag{1.3.1}$$

avec δ_m une fonction vectorielle définie par

$$\delta_m u = (D^\alpha u)_{|\alpha|\leq m)} = (u, \tfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial^m u}{\partial x_N^m}),$$

si $u \in C^{2m}(\Omega)$ $\forall x \in \Omega$ et si u satisfait (1.3.1).

1.3.2 Solutions faibles

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p > 1$ un nombre réel. Pour tout $x \in \Omega$ considérons l'opérateur d'order $2m$ défini par

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^\alpha D^\alpha (a_\alpha(x, \delta_m u(x))). \tag{1.3.2}$$

L'opérateur A est dit formel car (1.3.2) n'est qu'un symbôle formel, puisqu'on ne peut calculer par exemple, les dérivées figurant dans (1.3.2).
a_α sont des fonctions à croissance polynômiale (notées par $Car(p)$) qui vérifient

1. a_α est de Carathéodory et
2. il existe $g_\alpha \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ et une constante $C_\alpha \geq 0$ telle que a_α satisfait

$$|a_\alpha(x,\xi)| \leq g_\alpha(x) + C_\alpha \sum_{|\beta|\leq m} |\xi_\beta|^{p-1}, \; \forall \xi \in \mathbb{R}^m, \; x \;\text{ p.p. dans } \Omega.$$

Théorème 1.3.1. *Soit A l'opérateur différentiel donné par* (1.3.2)*. Si ses coefficients a_α ($|\alpha| \leq m$) sont dans $Car(p)$, A définit l'opérateur*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow (W^{m,p}(\Omega))' \\ u &\longmapsto \mathcal{A}u \end{aligned}$$

avec

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_m u(x)) D^\alpha v(x)\ dx, \forall v \in W_0^{m,p}(\Omega). \tag{1.3.3}$$

Définition 1.3.2. *Soit l'opérateur différentiel A donné par* (1.3.2) *et soit $f \in (W_0^{m,p}(\Omega))'$. Nous dirons qu'une fonction $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation différentielle* (*formelle*) *:*

$$Au = f$$

si l'on a

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur continu de $W^{m,p}(\Omega)$ dans son dual $(W^{m,p}(\Omega))'$, défini par (1.3.3).

Lemme 1.3.1. (*de $Lax - Milgram$, voir* [*13*])
Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique satisfaisant

1. $|a(u, v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H$, $\forall u, v \in H$ *($M > 0$ une constante).*
2. $a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2$, $\forall u \in H$ *($\alpha > 0$ une constante).*

Alors, pour toute forme linéaire continue F sur H, il existe une fonction unique $u \in H$ telle que

$$a(u, \varphi) = \langle F, \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in H.$$

De plus on a l'estimation $\|u\|_H \leq \dfrac{1}{\alpha}\|F\|_H$.

CHAPITRE 2 Méthode du point fixe

Dans ce chapitre, nous présentons une des méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires à savoir la méthode du point fixe. Plus précisément, nous présentons les quatre principaux théorèmes de cette théorie. Il s'agit des théorèmes de Banach (1922), de Brouwer (1910), de Schauder (1930) et de Leray-Schauder (1932). Nous donnerons aussi plusieurs applications de ces théorèmes dans la résolution des e.d.p. non linéaires.

Définition. Soit f une application définie d'un ensemble X dans lui même. On dit que $x \in X$ est un point fixe de f s'il vérifie $f(x) = x$.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach est un résultat fondamental dans la théorie du point fixe. C'est un principe qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace de Banach dans lui-même.

Théorème 2.1.1. *Soit T un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui même. Supposons qu'il existe une constante k vérifiant $0 < k < 1$ et telle que*

$$\forall x, y \in X,\ \|Tx - Ty\|_X \leq k\ \|x - y\|_X .$$

Alors, T admet un unique point fixe.

Démonstration. On montre d'abord l'existence d'un point fixe, puis son unicité.

1. **Existence** : Soient y un point quelconque de X et $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X définie par

$$\begin{cases} u_0 = y, \\ u_{n+1} = Tu_n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X. Soient n, $m \in \mathbb{N}^*$ tels que m < n. En utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\|u_m - u_n\|_X \leq \|u_m - u_{m+1}\|_X + \|u_{m+1} - u_{m+2}\|_X + ... + \|u_{n-1} - u_n\|_X.$$

Comme l'opérateur T est contractant, on obtient

$$\|u_m - u_{m+1}\|_X = \|Tu_{m-1} - Tu_m\|_X \leq k\ \|u_{m-1} - u_m\|_X.$$

En répétant cette inégalité m fois, on obtient

$$\|u_m - u_{m+1}\|_X \leq k^m\ \|u_1 - u_0\|_X.$$

On fait la même chose pour les autres termes, on trouve

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|_X &\leq (k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + ... + k^{n-1})\|u_1 - u_0\|_X\\ &\leq k^m(\frac{1-k^{n-m}}{1-k})\|u_1 - u_0\|_X\\ &\leq \frac{k^m}{1-k}\|u_1 - u_0\|_X,\ \text{(puisque } |k| < 1).\end{aligned}$$

Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus ($m \to +\infty$), on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\|u_m - u_n\|_X = 0.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X qui est complet. Donc

$$\exists u \in X \text{ tel que } u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } X.$$

Comme l'opérateur T est contractant, alors il est continu et donc

$$u = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} T(u_{n-1}) = T(\lim_{n\to+\infty} u_{n-1}) = Tu.$$

Donc u est un point fixe de T.

2. **Unicité** : On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe u_1, $u_2 \in X$ tels que

$$Tu_1 = u_1 \text{ et } Tu_2 = u_2.$$

Par suite, $\|u_1 - u_2\|_X = \|Tu_1 - Tu_2\|_X \leq$ k $\|u_1 - u_2\|_X < \|u_1 - u_2\|_X$ (car $0 < k < 1$). Par conséquent, le point fixe est unique. ■

2.1.1 Application à la résolution d'une e.d.o. semi-linéaire

Considérons le problème suivant : trouver $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ solution du problème

$$(P)\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ \quad u(1) = u(0) = 0 \end{cases}$$

où $f \in \mathrm{C}^0([0,1])$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions données avec g lipschitzienne. La non linéarité de ce problème est portée par g. On peut transformer ce problème comme suit : résoudre l'équation

$$Au = f \in \mathrm{C}^0([0,1])$$

où

$$D_A = \{u \in \mathrm{C}^2([0,1]) | u(0) = u(1) = 0\}$$

et

$$Au(x) = -u''(x) + g(u(x)),\ x \in [0,1].$$

Soit $v \in \mathrm{C}^0([0,1])$ une fonction fixée, mais choisie arbitrairement, et considérons le problème aux limites linéaire, trouver $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$(Q)\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(v(x)),\ x \in]0,1[\\ \quad u(1) = u(0) = 0. \end{cases}$$

Comme le problème homogène associé à (Q) n'admet que la solution triviale nulle, alors il existe une et une seule fonction G dite de Green telle que la solution u du problème (Q) s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$u(t) = \int_0^1 G(x,t)F(t)\ dt,\ t \in [0,1],$$

où $F(t) = f(t) - g(v(t))$, $t \in [0,1]$ et G est donnée par

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-x)t & \text{pour } 0 \le t \le x \le 1 \\ (1-t)x & \text{pour } 0 \le x < t \le 1. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$Tv(x) = \int_0^1 G(x,t)(f(t) - g(v(t)))\ dt \tag{2.1.1}$$

avec $v \in C^0([0,1])$, alors T définit un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui même. En fait, on a $Tv \in D_A$ (Tv est l'unique solution de (Q)) et chercher une solution du problème (P) revient à trouver un point fixe de T dans $C^0([0,1])$, i.e., trouver $u \in C^0([0,1])$ tel que $Tu = u$.

Lemme 2.1.1. *Soient a et b deux réels et G la fonction de Green associée au problème :*

$$(Q_H)\begin{cases} -u^{''} = 0 \ sur\ ]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\int_a^b |G(x,t)|\ dt \leq \frac{(b-a)^2}{8},\ \forall x \in [a,b].$$

Démonstration. Soient $x,\ t \in [a,b]$ et G la fonction de Green associée au problème (Q_H) définie par

$$G(x,t) = -\frac{1}{b-a}\begin{cases} (t-a)(x-b) & \text{pour } a \leq t \leq x \leq b \\ (x-a)(t-b) & \text{pour } a \leq x < t \leq b. \end{cases}$$

Montrons que $\displaystyle\int_a^b |G(x,t)|\ dt \leq \frac{(b-a)^2}{8}$, $\forall x \in [a,b]$. On a

$$\begin{aligned} \int_a^b |G(x,t)|\ dt &= \int_a^x |G(x,t)|\ dt + \int_x^b |G(x,t)|\ dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^x (t-a)(x-b)\ dt + \frac{1}{b-a}\int_x^b (x-a)(t-b)\ dt \\ &= \frac{1}{2}(x-a)(x-b). \end{aligned}$$

Posons $g(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)$, $\forall x \in [a,b]$ et montrons que $\max\limits_{x\in[a,b]}|g(x)| = \frac{(b-a)^2}{8}$. On a $g^{'}(x) = x - (\frac{a+b}{2})$ et

$$g^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{a+b}{2}.$$

g est une fonction croissante sur l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{a+b}{2}, b]$, d'où

$$\max_{x\in[a,b]}|g(x)| = g(\tfrac{a+b}{2})$$

donc

$$\int_a^b |G(x,t)|\ dt \leq \frac{(b-a)^2}{8},\ \forall x \in [a,b].$$

■

Le problème (P) sera résolu uniquement si l'opérateur T défini par (2.1.1) possède un point fixe. Il suffit de montrer que T est une contraction sur $X = C^0([0,1])$, muni de la norme de la convergence uniforme.

Lemme 2.1.2. *Si la fonction* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifie la condition de Lipschitz :*

$$|g(s) - g(t)| \leq h|s - t|, \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ avec } 0 < h < 8,$$

alors l'opérateur $T : X = \mathrm{C}^0([0,1]) \longrightarrow X$ *défini par*

$$Tv(x) = \int_0^1 G(x,t)(f(t) - g(v(t)))\, dt,\ v \in X$$

est une contraction.

Démonstration. Soient u et v deux fonction de X. On a

$$\|Tu - Tv\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |Tu(x) - Tv(x)|$$

et puisque

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq \int_0^1 G(x,t)|g(u(t)) - g(v(t))|\, dt,$$

g est lipschitzienne et $\displaystyle\int_0^1 G(x,t)\, dt \leq \frac{1}{8}$, alors

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq \frac{h}{8}\|u - v\|_X.$$

D'où

$$\|Tu - Tv\|_X \leq k\ \|u - v\|_X,\ \forall u, v \in X$$

avec $0 < k = \dfrac{h}{8} < 1$. L'opérateur T est donc une contraction dans X. ∎

D'après le Théorème 2.1.1, l'opérateur T possède un unique point fixe u dans X et comme $Tu \in D_A$, alors le problème (P) possède une solution unique.

2.1.2 Application à la résolution d'une e.d.p. semi-linéaire

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$ et considérons le problème suivant : trouver $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution du problème non linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + g(u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

où $f \in C^0(\Omega)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions données avec g lipschitzienne. En linéarisant, on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = F(x) & \text{dans } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $F(x) = f(x) - g(v(x))$, $v \in C^0(\overline{\Omega})$ fixé. En essayant de résoudre ce problème, on est confronté à beaucoup de difficultés plus sérieuses que dans le cas $N = 1$. Par exemple :

a) Le problème linéaire n'admet pas toujours de solutions pour tout $F \in C^0(\Omega)$. On est obligé d'imposer à f, g et v des conditions plus restrictives que celles nécessaires dans le cas $N = 1$.

b) Dans le cas où on peut résoudre le problème linéaire, la fonction de Green n'est pas explicitement connue et ces propriétés ne sont pas aussi bonnes que pour $N = 1$.

Donc la méthode de linéarisation utilisant le théorème du point fixe de Banach n'est pas très souhaitable pour déterminer les solutions classiques d'un problème aux limites non linéaire. On se contente de montrer l'existence des solutions faibles dans la plupart des problèmes et parfois de montrer l'unicité. Mais expliciter la solution est pratiquement impossible dans la plupart des cas.

Soit f un élément de $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ et étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (2.1.2). On dennera en particulier une condition suffisante liant la constante de lipschitz de g et l'ouvert Ω pour que la résolution soit possible. On définit

$$\begin{aligned} T: \ \mathrm{L}^2(\Omega) &\longrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega) \\ v &\longmapsto T(v) = u \end{aligned}$$

avec u solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega g(v)\varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), f \in \mathcal{H}^{-1}(\Omega) \\ u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.1.3}$$

On prend $V = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert. On le munit de la norme du gradient $(\|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)})$. Considérons la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} a: \ V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, \varphi) &\longmapsto a(u, \varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx. \end{aligned}$$

- a est continue car
$$|a(u, \varphi)| \leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla \varphi| \, dx \leq \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.$$
- a est coercive car
$$a(u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.$$

On pose $L(\varphi) = \langle f, \varphi\rangle - \int_\Omega g(v)\varphi\, dx$. L est linéaire car c'est la différence de deux formes linéaires et on a

$$\begin{aligned}
|L(\varphi)| &\leq |\langle f, \varphi\rangle| + \int_\Omega |g(v)||\varphi|\, dx \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} + \int_\Omega |g(0)||\varphi|\, dx + \int_\Omega l|v||\varphi|\, dx \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} + |g(0)|\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{2}} + l\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&\leq c\|\varphi\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} + l\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}C_\Omega\|\varphi\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\
&\leq C\|\varphi\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc L est continue puisqu'elle est linéaire (i.e. $L \in V' = \mathcal{H}^{-1}(\Omega)$). D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique élément $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ solution du (2.1.3). Rappelons que

$$\begin{aligned}
T:\ \mathrm{L}^2(\Omega) &\longrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega) \\
v &\longmapsto T(v) = u
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle - \int_\Omega g(v)\varphi\, dx,\ \forall\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Montrons que T est contractante. Soient $u, v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tels que

$$Tv = u \in V \text{ et } Tw = z \in V$$

avec

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle - \int_\Omega g(v)\varphi\, dx,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \tag{2.1.4}$$

$$\int_\Omega \nabla z \cdot \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle - \int_\Omega g(w)\varphi\, dx,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{2.1.5}$$

En faisant la différence (2.1.4) – (2.1.5), on obtient

$$\int_\Omega (\nabla u - \nabla z)\nabla\varphi\, dx = \int_\Omega [g(v) - g(w)]\varphi\, dx,\quad \forall\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

On prend $\varphi = u - z \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u - z)|^2\, dx &= \int_\Omega [g(v) - g(w)][u - z]\, dx \\
&\leq \int_\Omega l|v - w||u - z|\, dx \\
&\leq l\|v - w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|u - z\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&\leq lC_\Omega\|v - w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|u - z\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|u-z\|^2_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} \leq lC_\Omega \|v-w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|u-z\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}.$$

Par suite,

$$\|u-z\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} \leq lC_\Omega \|v-w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

On sait que

$$\|u-z\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u-z\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)}.$$

Donc

$$\|u-z\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq lC^2_\Omega \|v-w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Par suite,

$$\|Tv-Tw\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq lC^2_\Omega \|v-w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Donc T est une contraction si $lC^2_\Omega < 1$. Si ceci est vérifié, on peut utiliser le théorème du point fixe de Banach pour voir que T admet un point fixe $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.
Mais $u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ (u est plus que dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ il est dans $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$). Donc $Tu = u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$.
Finalement,

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega) \\ \text{et } \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \langle f, \varphi\rangle - \int_\Omega g(v)\varphi \, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{H}^1_0(\Omega). \end{cases}$$

2.2 Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder et applications

Dans la section précédente, nous avons vu comment utiliser le théorème de point fixe de Banach pour trouver la solution classique d'un problème aux limites à une dimension ainsi que la solution faible d'un problème aux limites de dimension N, $N > 1$. Dans ce qui suit, nous donnerons des généralisations du principe de contraction de Banach. Il s'agit des théorèmes de point fixe de Brouwer et de Schauder. Ces théorèmes permettent de montrer l'existence de solutions faibles pour certains problèmes aux limites non linéaires, mais ne disent rien sur l'unicité de ces solutions.

2.2.1 Théorèmes du point fixe de Brouwer

Définition 2.2.1. *On dit qu'un espace topologique X possède la propiété du point fixe si toute application continue f de X dans lui-même possède un point fixe.*

Exemple 1. *Tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, muni de la topologie de sous-espace, possède la propriété du point fixe.*

Notons par B^N la boule euclidienne unité fermée de $\mathbb{R}^N$. Nous allons donner un résultat dû à Brouwer dont on aura besoin pour la démonstration du théorème de Schauder.

Théorème 2.2.1. (***Brouwer,*** 1910)

a) *B^N possède la propriété du point fixe.*

b) *Tout sous-ensemble convexe compact non vide C de $\mathbb{R}^N$ (ou de E^N, espace euclidien de dimension N) possède la propriété du point fixe.*

Pour une peuve de ce théorème, on peut voir ([9], page 42).

Remarque 2.2.1. *Dans le cas où nous somme dans $\mathbb{R}$, le théorème se démontre comme suit : soit l'application continue $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$. Montrons que f admet un point fixe. Pour cela considérons l'application continue g suivante :*

$$g(x) = f(x) - x, \; \forall x \in [a, b].$$

On a

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ et } g(b) = f(b) - b \leq 0$$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f.

2.2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est un résultat qui prolonge celui de Brouwer à des espaces de dimension infinie. Il a été prouvé d'abord dans le cas des espaces de Banach et il est notamment utile dans la résolution des problèmes aux limites non linéaires.

Théorème 2.2.2. (***Schauder,*** 1930) *Tout convexe C, non vide, compact dans un espace de Banach X possède la propriété du point fixe.*

Démonstration. Soient X un espace de Banach, C un compact convexe, non vide de X et $f : C \longrightarrow C$ une application continue. Comme C est compact alors f est uniformément continue sur C. Autrement dit,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in C,\ \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

De plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, ..., x_p\} \subset C$ tel que les boules ouvertes de centre $x_j,\ j = 1, 2, ..., p$ et de rayon δ recouvrent C

$$C \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta).$$

Soient $L = vect(f(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ et $C^* = C \cap L$. On a L et C^* sont de dimension finie. De plus, C^* est compact et convexe. On définit $\psi_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq p$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta, \\ 1 - \dfrac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{si } \|x - x_j\| < \delta. \end{cases}$$

On remarque que $\psi_j > 0$ sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors. On a donc

$$\forall x \in C,\ \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0.$$

Par suite, on définit $\varphi_j,\ j = 1, 2, ..., p$ des fonctions continues positives sur C par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{k=1}^{p} \psi_k(x)},\ x \in C.$$

Les fonctions $\varphi_j,\ j = 1, 2, ..., p$ vérifient bien

$$\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1,\ \forall x \in C.$$

Posons alors

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j),\ x \in C.$$

g est continue comme somme de fonctions continues et prend ses valeurs dans C^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$). Considérons la restriction $g|_{C^*} : C^* \longrightarrow C^*$. Par le théorème de Brouwer, g possède un point fixe $y \in C^*$. De plus

$$f(y) - y = f(y) - g(y) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j),$$

car $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) = 1$. Par suite,

$$f(y) - y = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)).$$

Si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, donc $\|f(y) - f(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a pour tout $j = 1, 2, ..., p$,

$$\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| < \varphi_j(y)\varepsilon.$$

D'où

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\| \leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\varepsilon = \varepsilon.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, posons $\varepsilon = 2^{-m}$, on peut toujours trouver un point $y_m \in C$ tel que

$$\|f(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}.$$

Comme C est compact, alors on peut extraire de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{m_k})_k$ qui converge vers un point y^* de C. Puisque f est continue, alors la suite $f(y_{m_k})$ converge vers $f(y^*)$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient que

$$\|y^* - f(y^*)\| \leq \|y^* - y_{m_k}\| + \|y_{m_k} - f(y_{m_k})\| + \|f(y_{m_k}) - f(y^*)\|.$$

Les trois termes du membre de droite de cette inégalité tendent vers zéro quand k tend vers l'infini, par les convergences que nous venons de montrer. Par conséquent, $y^* = f(y^*)$ est un point fixe de f sur C. ■

2.2.3 Application à la résolution d'une e.d.p. elliptique non linéaire

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. On considère le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Il faut d'abord reformuler le problème (P) sous forme d'un problème de point fixe d'une certaine application. Pour cela, on énonce le résulat d'existence et d'unicité suivant :

Proposition 2.2.1. *Soit $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, alors il existe un unique $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta v = g$ au sens de $D'(\Omega)$. Cette fonction v est l'unique solution du problème variationnel*

$$\forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega gw \, dx. \tag{2.2.1}$$

De plus, l'application $g \longmapsto (-\Delta)^{-1}g = v$ est continue de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Prenons $V = \mathcal{H}^1_0(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert. On le munit de la norme du gradient ($\|u\|_{\mathcal{H}^1_0(\Omega)} = \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$). Posons

$$\begin{aligned} a: \quad V \times V \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \quad &\longmapsto a(v, w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx. \end{aligned}$$

– $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $V \times V$.

– $a(\cdot,\cdot)$ est continue. En effet,

$$\begin{aligned} |a(v,w)| &\leq \int_\Omega |\nabla v||\nabla w| \, dx \\ &\leq \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_V \|w\|_V, \ \forall v, w \in V. \end{aligned}$$

– $a(\cdot,\cdot)$ est coercive car

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = \|v\|_V^2.$$

Posons $L(w) = \displaystyle\int_\Omega gw \, dx$, $\forall w \in V$.

– $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue. En effet,

$$\begin{aligned} |L(w)| &= |\int_\Omega gw \, dx| \\ &\leq \|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|w\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\ &\leq C\|w\|_V, \ \forall w \in V \end{aligned}$$

avec $C = \|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$.

D'après le lemme de Lax-Milgram, il existe un unique $v \in V$ solution de (2.2.1). L'application $g \longrightarrow (-\Delta)^{-1} g = v$ est continue de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ dans V. En effet, comme v vérifie

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega gw \, dx, \ \forall w \in V,$$

alors pour $w = v$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx &= |\int_\Omega gv \, dx| \\ &\leq \|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Par suite,

$$\|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Donc $\|v\|_V = \|(-\Delta)^{-1} g\|_V \leq M$ avec $M = C_\Omega \|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} > 0$. ■

Lemme 2.2.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$. Pour tout couple de fonctions mesurables u_1 et u_2 sur Ω, si $u_1 \backsim u_2$ alors $f \circ u_1 \backsim f \circ u_2$. Ici, $\sim$ représente la relation d'équivalence de l'égalité presque partout des fonctions mesurables.*

Démonstration. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^0(\mathbb{R})$ et u_1 et u_2 deux fonctions mesurables sur Ω. Montrons que $f \circ u_1 \backsim f \circ u_2$, i.e., $f \circ u_1 = f \circ u_2$ presque partout sur Ω. Remarquons que si u est une fonction mesurable sur Ω, alors par continuité de f, $f \circ u$ l'est aussi. Par hypothèse, on a $u_1 = u_2$ presque partout sur Ω. Alors, il existe un ensemble négligable N tel que

$$\text{si } x \notin N \text{ alors } u_1(x) = u_2(x).$$

Par suite,

$$\text{si } x \notin N \text{ alors } f(u_1(x)) = f(u_2(x)),$$

d'o*ù* le résultat. ■

Théorème 2.2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que*

$$|f(t)| \leq a + b|t|,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

On définit pour toute classe d'équivalence de fonctions mesurables sur Ω la classe d'équivalence $f(u) = f \circ u$. Alors l'application $\widetilde{f} : u \longrightarrow f \circ u$ envoie $\mathrm{L}^2(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et est continue pour la topologie forte.

Pour une preuve de ce théorème, on pourrait voir ([9], page 55).

Théorème 2.2.4. *Soint Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Il existe au moins une solution $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ du problème -$\Delta u = f(u)$ au sens de $D'(\Omega)$.*

Démonstration. Soit l'espace de Banach $E = \mathrm{L}^2(\Omega)$. D'après le Théorème 2.2.3, si $v \in E$ alors $f(v) \in E$ (or $f(v) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$). On pose

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & (-\Delta)^{-1} f(v). \end{array}$$

L'application T est continue car elle est la composée des applications continues suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{L}^2(\Omega) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathrm{L}^2(\Omega) & \xrightarrow{-\Delta^{-1}} & \mathcal{H}_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\textit{injection}} & \mathrm{L}^2(\Omega) \\ v & \longmapsto & f(v) & \longmapsto & T(v) & \longmapsto & T(v) \end{array}$$

• Maintenant il faut vérifier que tout point fixe de T est une solution de notre problème. Soit $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $T(u) = u$. Comme $T(u) = (-\Delta)^{-1}f(u)$, on en déduit que $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. De plus, par définition de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$

$$-\Delta T(u) = f(u) \text{ au sens de } D'(\Omega).$$

Et donc u est une solution du problème modèle (et réciproquement). Pour appliquer le théorème de Schauder, il faut encore choisir un convexe. Nous prenons ici

$$C = \{v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega); \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq M\}$$

où M est une constante à choisir ultérieurement (on prend ici $\|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$).

• Vérifions que C est compact. Par le théorème de Rellich, l'injection de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte, donc C est borné dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et relativement compact dans E. De plus, c'est un fermé de E. En effet, si $v_n \in C$ est une suite qui converge vers $v \in E$ dans E, alors v_n est bornée dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et contient donc une sous-suite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un élément de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, lequel ne peut être que v. De plus,

$$\|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{m\to\infty} \|v_m\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq M.$$

Autrement dit, $v \in C$. Par conséquent, C est compact dans E.

• Pour une constante M bien choisie, montrons que $T(C) \subset C$. D'après la Proposition 2.2.1, $T(v)$ est une solution du problème variationnel

$$\forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla T(v).\nabla w \; dx = \int_\Omega f(v)w \; dx.$$

Prenons $w = T(v)$ dans l'équation précédente, il vient que

$$\|\nabla T(v)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega \mid f(v)T(v) \mid dx \leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} \int_\Omega |T(v)| \; dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$\|\nabla T(v)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} \; (mes(\Omega))^{1/2} \; \|T(v)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante a_Ω telle que pour tout $T(v)$ dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ on ait

$$\|T(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq a_\Omega \ \|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous obtenons donc

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq a_\Omega \ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(mes(\Omega))^{1/2}, \ \forall v \in E.$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, il suffit donc de prendre $M = a_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(mes(\Omega))^{1/2}$, (En fait, on a $T(E) \subset C$). Finalement, Les hypothèses du théorème de Schauder sont satisfaites. Donc, il existe au moins une solution du problème (P) dans l'ensemble C. ■

Corollaire 2.2.1. (***Second théorème de Schauder***) *Soit C un convexe fermé, non vide dans un espace normé X et soit T une application continue de C dans un compact K de C $(K \subset C)$. Alors T possède un point fixe.*

Remarque 2.2.2. *Dans $\mathbb{R}$, le corollaire précédent s'énonce comme suit : toute application continue bornée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un point fixe.*

2.3 Théorème du point fixe de Leray-Schauder

2.3.1 Quelques rappels

Soient E un espace topologique et A une partie de E. On dit que :

- A est **séquentiellement fermée** si et seulement si A contient les limites de toutes ses suites convergentes.
- A est **relativement séquentiellement compacte** si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente.
- A est **séquentiellement compacte** si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente **dans** A**.**

Si E est un **espace métrique,** alors

- A est fermée si et seulement si A est séquentiellement fermée.
- A est relativement compacte si et seulement si A est séquentiellement relativement compacte.
- A est compacte si et seulement si A est séquentiellement compacte.

Définition 2.3.1. *On dit d'un opérateur* **continu** *entre deux espaces de Banach X et Y qu'il est* **compact** *si l'image de toute partie bornée dans X est relativement compacte* (*i.e., d'adhérence compacte*) *dans Y.*

2.3.2 Théorème de Leray-Schauder : cas particulier

Théorème 2.3.1. *Soit T un opérateur compact d'un espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x \in X,\ \forall \sigma \in [0,1],\ x = \sigma T x \Rightarrow \|x\|_X < M. \tag{2.3.1}$$

Alors T possède un point fixe.

Démonstration. Soit T^* l'opérateur défini comme suit :

$$T^* x = \begin{cases} Tx & \text{si } \|Tx\|_X < M \\ \dfrac{M}{\|Tx\|_X} Tx & \text{si } \|Tx\|_X \geq M. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

– La continuité de l'opérateur T^* découle de la continuité de T.

– Il est clair que T^* applique $\overline{B}_M = \overline{B}(0, M)$ (en fait X tout entier) dans lui même.

– $T^*(\overline{B}_M)$ est relativement compact :

Cela résulte du fait que $T(\overline{B}_M)$ l'est aussi. En effet, soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $T^*(\overline{B}_M)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\overline{B}_M$, telle que

$$y_n = T^* x_n,\ \forall n \geq 1.$$

On distingue deux cas :

a) il existe une sous-suite $(a_j)_{j\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $\|Ta_j\|_X < M, \forall j \geq 1$ et

b) il existe une sous-suite $(b_j)_{j\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $\|Tb_j\|_X \geq M, \forall j \geq 1$.

Dans le premier cas, on a $T^* a_j = T a_j,\ \forall j \in \mathbb{N}^*$ ($\|a_j\|_X < M, \forall j \geq 1$ car c'est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$ de $\overline{B}_M$) et comme T est compact, on peut donc extraire de $(Ta_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ (donc aussi de $(T^* a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$) une sous-suite convergente.

Dans le second cas, la compacité de T permet d'extraire de $(Tb_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente vers un élément $y \in X$. Notons cette sous-suite de la même manière, on a alors

$$\|Tb_j\|_X \to \|y\|_X$$

de sorte que

$$T^* b_j = \frac{M}{\|Tb_j\|_X} Tb_j \to \frac{M}{\|y\|_X} y.$$

Autrement dit, on a pû extraire de la suite $(T^*b_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente. Cela finit de démontrer que $T^*(\overline{B}_M)$ est relativement compact. Nous sommes donc dans la situation suivante :

$$T^* : \underbrace{\overline{B}_M}_{\text{convexe, fermé}} \longrightarrow T^*(\overline{B}_M) \subset \underbrace{\overline{T^*(\overline{B}_M)}}_{\text{compact}} \subset \overline{B}_M$$

avec $\overline{B}_M$ est un convexe fermé et $\overline{T^*(\overline{B}_M)}$ est un compact. D'où, d'après le Corollaire 2.2.1, l'opérateur T^* possède un point fixe, i.e.,

$$\exists\, x \in \overline{B}_M : T^*x = x,$$

qui est encore un point fixe de T. En effet,

– si $\|Tx\|_X < M$, on a alors

$$x = T^*x = Tx$$

car $T^*x = Tx$, si $\|Tx\|_X < M$.

– Si $\|Tx\|_X \geq M$,

$$x = T^*x = \sigma Tx \;\text{ avec } \sigma = \frac{M}{\|Tx\|_X},\; \sigma \in]0,1].$$

Or

$$\|x\|_X = \|T^*x\|_X = M.$$

Cela contredit (2.3.1). Donc, $\|Tx\|_X < M$ et par suite $x = T^*x = Tx$. ■

2.3.3 Théorème de Leray-Schauder : cas général

Théorème 2.3.2. *Soient X un espace de Banach et T un opérateur compact de $X \times [0,1]$ dans X tel que*

$$T(x, 0) = 0,\; \forall x \in X.$$

Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall (x,\sigma) \in X \times [0,1] \;(x = T(x,\sigma) \Rightarrow \|x\|_X < M). \tag{2.3.3}$$

Alors, l'opérateur T_1 de X dans lui même, défini par

$$T_1(x) = T(x,1),\;\; x \in X,$$

possède un point fixe.

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant qui est une conséquence du Corollaire 2.2.1.

Lemme 2.3.1. *Soit $B_M = B(0, M)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $M > 0$ dans l'espace de Banach X. Soit T une application continue de $\overline{B}_M$ dans X telle que $T(\overline{B}_M)$ soit relativement compacte et $T(\partial B_M) \subset B_M$. Alors T possède un point fixe.*

Démonstration. On considère l'opérateur T^* défini par

$$T^*x = \begin{cases} Tx & \text{si } \|Tx\|_X < M \\ \dfrac{M}{\|Tx\|_X} Tx & \text{si } \|Tx\|_X \geq M. \end{cases}$$

L'opérateur T^* est continu de $\overline{B}_M$ dans lui même, comme $T(\overline{B}_M)$ est relativement compact, $T^*(\overline{B}_M)$ l'est aussi (voir la démonstration ci-dessus). Le Corollaire 2.2.1 implique que l'opérateur T^* possède un point fixe, i.e.,

$$\exists \, x \in \overline{B}_M : T^*x = x.$$

– Si $\|Tx\|_X < M$, on a alors

$$x = T^*x = Tx$$

i.e., x est un point fixe de T.

– Si $\|Tx\|_X \geq M$,

$$x = T^*x = \frac{M}{\|Tx\|_X} Tx.$$

Or

$$\|x\|_X = \|T^*x\|_X = M,$$

de sorte que l'hypothèse $T(\partial B_M) \subset B_M$ implique $\|Tx\|_X < M$, ce qui est une contradiction.

■

Démonstration. (**du Théorème 2.3.2**)

Soient $\varepsilon \in]0, M[$ et ξ_ε la fonction réelle définie sur $[0, M]$ par

$$\xi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < M - \varepsilon \\ \dfrac{M - t}{\varepsilon} & \text{si } M - \varepsilon \leq t \leq M. \end{cases}$$

On peut vérifier que ξ_ε est lipschitzienne :

$$|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)| \leq \frac{1}{\varepsilon}|t - s|, \; \forall t, s \in [0, M].$$

En effet, si $s, t \in [0, M-\varepsilon[$ on a

$$|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)| = 0 \leq \frac{1}{\varepsilon}|t-s|.$$

Si $s, t \in [M-\varepsilon, M[$,

$$\xi_\varepsilon(s) = \frac{M-s}{\varepsilon},\ \xi_\varepsilon(t) = \frac{M-t}{\varepsilon}.$$

$$\begin{aligned} |\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)| &= \frac{1}{\varepsilon}|M-t-(M-s)| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}|s-t| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}|t-s|. \end{aligned}$$

Il reste deux cas, le cas où $s \in [0, M-\varepsilon[$ et $t \in [M-\varepsilon, M]$ et le cas où $t \in [0, M-\varepsilon[$ et $s \in [M-\varepsilon, M]$. Il suffit d'étudier l'un d'eux car le second résulte du premier en échangeant les rôles joués par s et t. Soient $s \in [0, M-\varepsilon[$ et $t \in [M-\varepsilon, M]$, on a

$$\xi_\varepsilon(s) = 1,\ \xi_\varepsilon(t) = \frac{M-t}{\varepsilon}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)| &= |\frac{M-t}{\varepsilon} - 1| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}|M-t-\varepsilon| \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(t-M+\varepsilon) \quad \text{car } t \in [M-\varepsilon, M]. \end{aligned}$$

Or $s < M-\varepsilon$, donc $-M+\varepsilon < -s$ et par suite $t-M+\varepsilon < t-s$. Donc

$$|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)| \leq \frac{1}{\varepsilon}|t-s|.$$

Considérons l'application T_ε^* définie par

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^* : \overline{B}_M &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto T_\varepsilon^* x = T(x, \xi_\varepsilon(\|x\|_X)). \end{aligned}$$

T_ε^* s'écrit $T_\varepsilon^* = T \circ R_\varepsilon$ avec

$$\begin{aligned} R_\varepsilon : \overline{B}_M &\longrightarrow X \times [0,1] \\ x &\longmapsto R_\varepsilon x = (x, \xi_\varepsilon(\|x\|_X)). \end{aligned}$$

Il est clair que l'application R_ε est continue (car ξ_ε l'est), donc T_ε^* est continue comme composée d'applications continues (T est continue car elle est compacte). Montrons que T_ε^* est compacte : l'image $T_\varepsilon^*(\overline{B}_M)$ est séquentiellement relativement compacte. En effet, soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de $T_\varepsilon^*(\overline{B}_M)$, donc

$$z_n = T_\varepsilon^*(x_n) = T(x_n, \xi_\varepsilon(\|x_n\|_X)),\ x_n \in \overline{B}_M,\ \forall n \geq 1.$$

Comme la suite $(x_n, \xi_\varepsilon(\|x_n\|_X))_{n\geq 1}$ est bornée dans $X \times [0,1]$ et l'application

$$T : X \times [0,1] \longrightarrow X$$

est compacte, alors on peut extraire de $(z_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite $(z_{n_i})_{i\geq 1}$ convergente dans X et comme $(z_{n_i})_{i\geq 1}$ est une suite d'éléments de $T_\varepsilon^*(\overline{B}_M)$ puisqu'elle s'écrit

$$z_{n_i} = T_\varepsilon^* x_{n_i},\ x_{n_i} \in \overline{B}_M,\ i \geq 1,$$

cela montre que $T_\varepsilon^*(\overline{B}_M)$ est séquentiellement relativement compacte donc relativement compacte. On a aussi $T_\varepsilon^*(\partial B_M) = \{0\}$, grâce à la condition exigeant $T(x,0) = 0,\ \forall x \in X$. En effet, soit $z \in T_\varepsilon^*(\partial B_M)$. Donc

$$z = T_\varepsilon^* x = T(x, \xi_\varepsilon(\|x\|_X)),\ x \in \partial B_M.$$

On a $x \in \partial B_M$ $(\|x\|_X = M)$, donc $\xi_\varepsilon(M) = 0$. Par suite, $z = T(x,0)$ et donc $z = 0$. Ce qui montre que $T_\varepsilon^*(\partial B_M) = \{0\}$. Grâce au Lemme 2.3.1, T_ε^* possède au moins un point fixe $x(\varepsilon)$ dans $\overline{B}_M$

$$T_\varepsilon^* x(\varepsilon) = x(\varepsilon),\quad x(\varepsilon) \in \overline{B}_M.$$

Prenons successivement $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, $k = k_0, k_0+1, \ldots$ avec k_0 suffisamment grand pour avoir $\dfrac{1}{k_0} < M$. On obtient alors une suite de points $(x_k)_{k\geq k_0}$ de $\overline{B}_M$ telle que

$$x_k = x(\frac{1}{k}),\ T_{\frac{1}{k}}^* x_k = T(x_k, \sigma_k) = x_k,\ \text{avec}\ \sigma_k = \xi_{\frac{1}{k}}(\|x_k\|_X),\ \forall k \geq k_0.$$

Comme la suite $((x_k, \sigma_k))_{k\geq k_0}$ est bornée dans $X \times [0,1]$ et T est compacte alors, il existe une sous-suite $(x_{k_i})_{i\geq 1}$ de $(x_k)_{k\geq 1}$ qui converge dans X vers un élément $x \in \overline{B}_M$

$$x_{k_i} \to x,\ i \to \infty,\quad \text{dans } X$$

et donc

$$\|x_{k_i}\| \to \|x\|,\ i \to \infty.$$

La suite $(\sigma_{k_i})_{i\geq 1}$ admet une sous-suite $(\sigma_{k'_i})_{i\geq 1}$ convergente dans $\mathbb{R}$ vers un élément $\sigma \in [0,1]$ (car $\sigma_{k_i} \in [0,1]$ qui est compact)

$$\sigma_{k'_i} \to \sigma,\ i \to \infty, \ \text{ dans } [0,1].$$

Donc

$$(x_{k'_i}, \sigma_{k'_i}) \to (x,\sigma),\ i \to \infty, \ \text{ dans } X \times [0,1].$$

Compte tenu de la continuité de T (du fait qu'elle est compacte), on a

$$x_{k'_i} = T(x_{k'_i}, \sigma_{k'_i}) \to T(x,\sigma),\ i \to \infty.$$

On a aussi

$$x_{k'_i} \to x,\ i \to \infty.$$

Grâce à l'unicité de la limite de la suite convergente $(x_{k'_i})_{i\geq 1}$, on a

$$x = T(x,\sigma).$$

Si $\sigma = 1$, le théorème est démontré. Si $\sigma < 1$, on a $\sigma_{k'_i} < 1,\ \forall i \geq i_0$. Donc, grâce à la définition de ξ_ε on a

$$M - \frac{1}{k'_i} \leq \|x_{k'_i}\|_X,\ \forall k'_i \geq k'_{i_0} \tag{2.3.4}$$

car

$$\sigma_{k'_i} = \xi_{\frac{1}{k'_i}}(\|x_{k'_i}\|_X) < 1$$

ce qui implique que $\|x_{k'_i}\|_X \geq M - \dfrac{1}{k'_i}$. D'où $\|x\|_X = M$. En effet, $\|x\|_X \leq M$ découle du fait que $x \in \overline{B}_M$ et $\|x\|_X \geq M$ s'obtient par passage à la limite dans (2.3.4). Donc on a

$$x = T(x,\sigma) \text{ et } \|x\|_X = M,$$

ce qui contredit l'hypothèse (2.3.1) du théorème de Leray Schauder. Donc, le cas $\sigma < 1$ est exclu et par conséquent $\sigma = 1$ et $T(x,1) = x$. Ce qui prouve que $T_1 : X \longrightarrow X$ possède un point fixe. ■

2.3.4 Application à la résolution d'un problème de Dirichlet semi-linéaire

Soient Ω un demaine borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $g(s)s \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$ et

$$|g(s)| \leq C_0 + C_1|s|, \forall s \in \mathbb{R} \tag{2.3.5}$$

avec C_0 et C_1 deux constantes positves.

On cherche à trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Utilisons le théorème de Leray-Schauder pour résoudre ce problème. Considérons l'opérateur T défini sur $X \times [0,1]$ avec $X = \mathrm{L}^2(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} T : X \times [0,1] &\longrightarrow X \\ (v,\sigma) &\longmapsto T(v,\sigma) = u \end{aligned}$$

où u est l'unique solution du problème aux limites linéarisé suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \sigma(f - g(v)) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Pour voir l'existence et l'unicité d'une solution faible dans $V = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ muni de la norme du gradient $\|v\|_{\mathrm{V}} = \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$, on prend la forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur $V \times V$

$$a(u,w) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx, \quad u, w \in V$$

et la forme linéaire sur V

$$F(w) = \sigma \int_\Omega (f - g(v)) w \, dx, \ \forall w \in V$$

qui est une continue sur V. En effet, d'après (2.3.5) et l'identitée de Poincaré, on a

$$|F(w)| \quad \leq \quad \sigma(\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + C_0|\Omega|^{\frac{1}{2}} + C_1\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)})C_\Omega\|w\|_{\mathrm{V}}, \forall w \in V$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Lebesgue de Ω. On appliquera le théorème de Lax-Milgram pour conclure.

Il est clair que $T(v,0) = 0, \forall v \in X$ car l'unique solution de problème homogène de (2.3.7) est la solution nulle.

Estimation de la solution

Comme la solution du problème (2.3.7) vérifie

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \sigma \int_\Omega (f - (g(v))\varphi \, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

alors pour $\varphi = u$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx &= \sigma \int_\Omega |f - g(v)| u\, dx \\ &\leq \|f - g(v)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où, en utilisant (2.3.5) et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} &\leq C_\Omega \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + C_\Omega C_1 \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + C_\Omega C_0 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + 1)\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

où C est une constante indépendante de v.

Continuité de T

Soit $((v_n, \sigma_n))_{n\geq 1}$ une suite de $\mathrm{L}^2(\Omega) \times [0,1]$ convergeant vers (v, σ) dans cet espace. Donc

$$v_n \to v \text{ dans } \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ et } \sigma_n \to \sigma \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On a $\|u_n\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \|T(v_n, \sigma_n)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}$, alors grâce *à* (2.3.8), on obtient

$$\|T(v_n, \sigma_n)\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + 1) \leq R,\, \forall n \geq 1$$

avec R une constante indépendante de n. Or $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on peut alors grâce à la réflexivité de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et à la compacité de son injection dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ extraire une sous-suite $(u_m)_{m\geq 1}$ telle que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ dans } \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ et } u_m \to u \text{ dans } \mathrm{L}^2(\Omega).$$

En passant à la limite dans l'identité intégrale :

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla \varphi\, dx = \sigma_m \int_\Omega (f - g(v_m))\varphi\, dx,\, \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

il vient que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx = \sigma \int_\Omega (f - g(v))\varphi\, dx,\, \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Puisque (2.3.7) admet une unique solution faible u alors

$$T(v, \sigma) = u.$$

Soit $(u_l)_{l\geq 1}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_l = T(v_l, \sigma_l)$, or avec la suite $((v_l, \sigma_l))_{l\geq 1}$ on peut refaire tout le travail fait pour aboutir une sous-suite $((v_{l'}, \sigma_{l'}))_{l'\geq 1}$ telle que

$$u_{l'} \to u \text{ dans } \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Donc c'est toute la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers u dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Ce qui montre la continuité de T.

Compacité de T

Soit $\widetilde{B}$ un borné de $\mathrm{L}^2(\Omega) \times [0,1]$. Donc $\widetilde{B}$ est contenu dans un produit du type $B \times [0,1]$ avec B un borné de $\mathrm{L}^2(\Omega)$, qu'on peut supposer être une boule de center 0 et de rayon $r > 0$. Pour $u \in T(\widetilde{B})$, on a, grâce à (2.3.8)

$$\|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + r + 1) \equiv \rho,$$

avec $u = T(v,\sigma)$, $(v,\sigma) \in B \times [0,1]$. Ce qui montre que T applique $\widetilde{B}$ dans la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$. Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $T(\widetilde{B})$ avec $u_n = T(v_n,\sigma_n)$, $(v_n,\sigma_n) \in \widetilde{B}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ demeure dans un borné de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement vers un élément u de $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Cela montre que

$$\overline{T(\widetilde{B})}^{\mathrm{L}^2(\Omega)} \text{ est compact.}$$

Donc T est compact.

Estimation des éléments de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ tels que $v = T(v,\sigma)$. On a

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi \, dx = \sigma \int_\Omega (f - (g(v))\varphi \, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Pour $\varphi = v$, et puisque on a supposé que $g(s)s \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = \sigma \int_\Omega fv \, dx - \sigma \int_\Omega g(v)v \, dx \leq \sigma \int_\Omega fv \, dx.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} (\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}. \tag{2.3.9}$$

D'où d'après l'inégalité de Poincaré et (2.3.9), on a

$$\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega^2 \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} < C_\Omega^2 \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + 1 = M.$$

Finalement, d'après le théorème de Leray-Schauder, l'opérateur $T_1 : \mathrm{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$ défini par $T_1(u) = T(u,1)$ possède un point fixe. Ce qui montre l'existence de la solution du problème

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_\Omega g(u)\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. *On peut prendre dans le problème précédent f dans l'espace $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ le dual de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Il suffit d'identifier $g(v)$ qui est dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ avec l'élément G_v de $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ défini par*

$$\langle G_v, \varphi \rangle = \int_\Omega g(v)\varphi \, dx, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Remarque 2.3.2. *Puisque le théorème de Leray-Schauder ne dit rien sur l'unicité du point fixe, l'utilisation de ce théorème pour prouver l'existence de solution d'un problème aux limites est complétée par une étude séparée de la question d'unicité. Cette étude est souvent difficile.*

Dans le problème (2.3.7), *pour avoir l'unicité il suffit de supposer que la fonction g est croissante. En effet, soient u_1 et u_2 deux solutions faibles du problème* (2.3.7) *on a par soustraction*

$$\begin{cases} u_1 - u_2 \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (g(u_1) - g(u_2))\varphi \, dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Pour la fonction teste $\varphi = u_1 - u_2$, on a

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, dx + \int_\Omega (g(u_1) - g(u_2))(u_1 - u_2) \, dx = 0.$$

Comme g est croissante, cela implique que

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx = 0.$$

D'où $u_1 = u_2$ puisque $u_1 - u_2 \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

CHAPITRE 3 Méthode des opérateurs monotones

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode des opérateurs monotones qui a été initiée par G. Minty en 1962. Nous donnons aussi quelques applications de cette méthode dans la résolution de certains problèmes elliptiques non linéaires.

3.1 Opérateurs monotones

Dans tout ce qui suit, V dénote un espace de Banach et $V^{'}$ son dual topologique.

Définition 3.1.1. *On dit d'un opérateur $A : V \longrightarrow V^{'}$ qu'il est :*

1. *Monotone si $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$, $\forall u, v \in V$.*
2. *Strictement monotone si $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$, $\forall u, v \in V, u \neq v$.*
3. *Fortement monotone s'il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, telle que*

$$\gamma(0) = 0,\ \gamma(t) > 0,\ \forall t > 0, \quad et \ \lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty,$$

   vérifiant :

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \|u - v\|\gamma(\|u - v\|),\ \forall u, v \in V. \tag{3.1.1}$$

4. *Uniformément monotone si l'inégalité* (3.1.1) *est vérifiée avec la fonction $t \longmapsto t\gamma(t)$ croissante.*

Remarque 3.1.1. *La définition donnée ci-dessus reste vraie si l'opérateur A est défini seulement sur son domaine* $\mathrm{D(A)} \subset V$. *Dans ce cas, les éléments u et v seront pris dans* $\mathrm{D(A)}$. *Cette remarque est valable pour toutes les définitions de ce chapitre.*

Remarque 3.1.2. *La monotonie généralise la notion de fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. En identifiant $\mathbb{R}$ avec son dual $(\mathbb{R}')$, on voit que l'opérateur f est monotone :*

$$\langle f(x) - f(y), x - y\rangle = [f(x) - f(y)][x - y] \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

car f est croissante.

Exemple 2. *Soit A une matrice $N \times N$ à coefficients réels, symétrique et définie positive. Alors l'opérateur $A : \mathbb{R}^N \longrightarrow (\mathbb{R}^N)' = \mathbb{R}^N$ est uniformément monotone. Cela résulte de l'existence d'un nombre $\alpha > 0$ tel que*

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1.2}$$

En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} \langle Ax - Ay, x - y\rangle &= \langle A(x - y), x - y\rangle \\ &\geq \alpha\|x - y\|^2 = \alpha\|x - y\| id(\|x - y\|). \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre $\gamma(t) = t$ dans la définition de la forte monotonie (dans ce cas, $t \longmapsto t\gamma(t) = t^2$ est une fonction croissante). Montrons maintenant l'inégalité (3.1.2). Comme la matrice A est définie positive, la fonction ψ donnée par

$$\psi(x) = \langle Ax, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^N$$

est telle que

$$\psi(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ x \neq 0$$

et comme elle est continue sur $\mathbb{R}^N$, son minimum sur la sphère unité de $\mathbb{R}^N$ est strictement positif : $\alpha = \min\limits_{S} \psi(x) > 0$. Cela implique que

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\|.\| \text{ est la norme euclidienne de } \mathbb{R}^N).$$

Exemple 3. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et A l'opérateur de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$, défini par*

$$Au = -\Delta u = -div\nabla u,\ u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

avec

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx,\ \forall u,\ v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Munissons $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ de la norme du gradient, c'est-à-dire

$$\|v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Alors, A est un opérateur uniformément monotone. En effet, soient $u,\ v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle &= \langle A(u-v), u-v\rangle \\
&= \int_\Omega \nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v)\,dx \\
&= \|u-v\|^2_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} \\
&= \|u-v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)} id(\|u-v\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Exemple 4. *Soient $p > 1$ un nombre réel et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors l'opérateur*

$$\begin{aligned}
A :\ W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\
u \quad &\longmapsto Au = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)
\end{aligned}$$

est monotone. La preuve utilise le fait que l'opérateur

$$\begin{aligned}
Q :\ \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\
x \quad &\longmapsto Q(x) = |x|^{p-2}x
\end{aligned}$$

est monotone. En effet, soient $x,\ y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}
\langle Q(x) - Q(y), x - y\rangle &= \langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y\rangle \\
&= |x|^p - |y|^{p-2}x.y - |x|^{p-2}x.y + |y|^p
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
|y|^{p-2}|xy| &\leq |y|^{p-1}|x| \ (\textit{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\
&\leq \frac{1}{p'}|y|^p + \frac{1}{p}|x|^p \ (\textit{inégalité de Young}).
\end{aligned}$$

De même

$$|x|^{p-2}|xy| \leq \frac{1}{p'}|x|^p + \frac{1}{p}|y|^p.$$

Donc

$$\langle Q(x) - Q(y), x-y\rangle \geq |x|^p - \frac{1}{p'}|y|^p - \frac{1}{p}|x|^p - \frac{1}{p'}|x|^p - \frac{1}{p}|y|^p + |y|^p.$$

Par suite,

$$\langle Q(x)-Q(y),x-y\rangle \geq |x|^p-(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p})|y|^p-(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p})|x|^p+|y|^p=0. \quad (3.1.3)$$

Retour à l'exemple : soient $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, *on a*

$$\begin{aligned}\langle Au-Av,u-v\rangle &= \langle Au,u-v\rangle-\langle Av,u-v\rangle\\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla(u-v)\,dx-\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla(u-v)\,dx\\ &= \int_\Omega(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u-v)\,dx.\end{aligned}$$

On pose $x=\nabla u,\ y=\nabla v$ *et on applique* (3.1.3)

$$\langle Au-Av,u-v\rangle\geq\int_\Omega 0\,dx=0.$$

3.2 Opérateurs bornés, Opérateurs hémicontinus

Opérateurs bornés

Définition 3.2.1. *Soit A un opérateur d'un espace de Banach V dans un espace de Banach W. On dit que A est borné s'il transporte les bornés de V dans les bornés de W, c'est-à-dire*

$$\forall\rho>0,\ \exists\ C_\rho>0 \text{ tel que } A(B_V(0,\rho))\subset B_W(0,C_\rho)$$

où $B_V(0,\rho)$ (respectivement, $B_W(0,C_\rho)$) désigne la boule ouverte dans V (respectivement, W) de centre 0 et de rayon ρ (respectivement, C_ρ).

Exemple 5. *Pour $p>1$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, l'opérateur*

$$\begin{aligned}A:\ W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)\\ u &\longmapsto Au=-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\end{aligned}$$

est borné, ($V=W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme du gradient $\|v\|_V=\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$). En effet, pour $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a par définition

$$\langle Au,\varphi\rangle=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx.$$

Montrons que A est borné de V dans $V'=W^{-1,p'}(\Omega)$. Soit $\rho>0$, pour $u\in B_V(0,\rho)$, on peut écrire

$$\|Au\|_{V'}=\sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|_V\leq 1}}|\langle Au,\varphi\rangle|=\sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|_V\leq 1}}|\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx|.$$

Or

$$|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi| \, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\|Au\|_{V'} \leq (\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'} \, dx)^{\frac{1}{p'}}(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_V^{p-1}\|\varphi\|_V \leq \rho^{p-1}.$$

D'où $\|Au\|_{V'} \leq \rho^{p-1}$. *Donc, on a bien* $A(B_V(0,\rho)) \subset B_{V'}(0,\rho^{p-1})$.

Opérateurs hémicontinus

Définition 3.2.2. *Soit V un espace de Banach réflexif. Un opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est dit hémicontinu si l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle \end{aligned}$$

est continue pour tout u, v, $w \in V$.

Exemple 6. *L'opérateur*

$$\begin{aligned} A: \ \mathcal{H}_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{H}^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto Au = -\Delta u = -div(\nabla u), \end{aligned}$$

est hémicontinu. En effet ; soient $u, v, w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \langle A(u+\lambda v), w\rangle &= \int_\Omega \nabla(u+\lambda v)\cdot\nabla w \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w \, dx + \lambda\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w \, dx \\ &= a + \lambda b. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda \longmapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle$ est continue.

Remarque 3.2.1.
Soit l'opérateur $Au = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + L(x,u)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $L(x,u)$ non monotone (croissant) en u, par exemple $L(x,u) = |u|$. Dans ce cas, l'opérateur A n'est pas monotone.

Il existe une classe particulière d'opérateurs qu'on appelle :

3.3 Opérateurs pseudo-monotones

Définition 3.3.1. *Soit V un espace de Banach réflexif. On dit que l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est pseudo-monotone s'il est borné et vérifie :*

$$(*) \left\{ \begin{array}{c} u_j \rightharpoonup u \ \textit{dans}\ V\ , \limsup\limits_{j\to+\infty} \langle A(u_j), u_j - u \rangle \leq 0 \\ \Rightarrow \\ \forall v \in V, \liminf\limits_{j\to+\infty} \langle A(u_j), u_j - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle. \end{array} \right.$$

Théorème 3.3.1. *Soit V un espace de Banach et $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur. Si A est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone.*

Démonstration. Puisque A est borné, il reste à vérifier la propriété $(*)$. Supposons que (u_j) est une suite de V qui vérifie $u_j \rightharpoonup u$ et que $\limsup\limits_{j\to\infty} \langle A(u_j), u_j - u \rangle \leq 0$. En utilisant la monotonie de A, on obtient

$$\langle A(u_j), u_j - u \rangle \geq \langle A(u), u_j - u \rangle \to 0, \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

Alors

$$\liminf_{j\to+\infty} \langle A(u_j), u_j - u \rangle \geq 0.$$

Ce qui conduit à

$$0 \leq \liminf_{j\to+\infty} \langle A(u_j), u_j - u \rangle \leq \limsup_{j\to+\infty} \langle A(u_j), u_j - u \rangle \leq 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{j\to+\infty} \langle A(u_j), u_j - u \rangle = 0. \tag{3.3.1}$$

Soient $v \in V$ et $0 < \theta < 1$. On pose $w = \theta v + (1-\theta)u$. On a

$$\langle A(u_j) - A(w), u_j - w \rangle \geq 0$$

En remplaçant w par $\theta v + (1-\theta)u = u + \theta(v-u)$, on obtient

$$\theta \langle A(u_j), u - v \rangle \geq -\langle A(u_j), u_j - u \rangle + \langle A(w), u_j - u \rangle + \theta \langle A(w), u - v \rangle$$

et en utilisant (3.3.1), on arrive à

$$\theta \liminf_{j\to+\infty} \langle A(u_j), u - v \rangle \geq \theta \langle A(w), u - v \rangle.$$

D'où

$$\liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u-v\rangle \geq \langle A(w), u-v\rangle.$$

Puisque

$$\langle A(u_j), u_j - v\rangle = \langle A(u_j), u_j - u\rangle + \langle A(u_j), u-v\rangle,$$

on a nécessairement

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j-v\rangle &\geq \liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u-v\rangle \\ &\geq \langle A(w), u-v\rangle.\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de l'hémicontinuité de A et en faisant tendre θ vers 0 (dans ce cas w tend vers u), on aura

$$\forall v \in V,\ \liminf_{j\to+\infty}\langle A(u_j), u_j-v\rangle \geq \langle A(u), u-v\rangle.$$

Ce qui montre que A est pseudo-monotone. ■

Remarque 3.3.1. *On ne peut pas déduire la pseudo-monotonie directement à partir de la monotonie sans vérifier la bornitude et l'hémicontinuité de l'opérateur. La propriété de monotonie n'est ni plus forte, ni plus faible que la propriété de pseudo-monotonie. Pour plus de détails, voir [14] et [15].*

3.4 Théorème de Minty et applications

3.4.1 Théorème de Minty

Théorème 3.4.1. *Soit V un espace de Banach réflexif et séparable. Supposons que l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ vérifie*

1. *A monotone, borné et hémicontinu*
2. *A coercif, au sens que*
$$\lim_{\|v\|_V\to+\infty}\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_V} = +\infty.$$

Alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in V$ tel que $Au = f$. De plus, si A est strictement monotone, l'élément u est unique, i.e. A est une bijection entre V et V'.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.1. *Soit*

$$P : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \longmapsto P(x),$$

une application continue. Supposons qu'il existe $\rho > 0$ tel que

$$(P(x), x) \geq 0,\ \forall x \in S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = \rho\}. \tag{3.4.1}$$

Alors, il existe $\xi \in \overline{B}_\rho = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq \rho\}$ tel que $P(\xi) = 0$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $P(x) \neq 0,\ \forall x \in \overline{B}_\rho$ et considérons l'application

$$R : \overline{B}_\rho \longrightarrow \overline{B}_\rho,\ x \longmapsto R(x) = -\frac{\rho}{\|P(x)\|}P(x)$$

qui est alors continue. En utilisant le théorème du point fixe de Brouwer, on obtient l'existence d'un point ξ de $\overline{B}_\rho$ tel que $R(\xi) = \xi$. On a alors

$$\begin{aligned}
(P(\xi), \xi) &= (P(\xi), -\frac{\rho}{\|P(\xi)\|}P(\xi)) \\
&= -\frac{\rho}{\|P(\xi)\|}(P(\xi), P(\xi)) \\
&= -\frac{\rho}{\|P(\xi)\|}\|P(\xi)\|^2 \\
&= -\rho\|P(\xi)\|.
\end{aligned}$$

Donc $(P(\xi), \xi) < 0$ et

$$\begin{aligned}
\|\xi\| &= \|R(\xi)\| \\
&= \| - \frac{\rho}{\|P(\xi)\|}P(\xi)\| \\
&= \rho.
\end{aligned}$$

Ce qui contredit (3.4.1). Par suite, il existe $\xi_0 \in \overline{B}_\rho$ tel que $P(\xi_0) = 0$. ∎

Remarque 3.4.1. *Si $m = 1$ dans le lemme précédent, alors on retrouve le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, l'hypothèse* (3.4.1) *s'écrit*

$$P(\rho)\rho \geq 0 \ \ \textit{et}\ P(-\rho)(-\rho) \geq 0$$

car dans ce cas $S_\rho = \{-\rho, \rho\}$. Ce qui signifie que $P(\rho)$ et $P(-\rho)$ sont de signes contraires. La continuité de P implique l'existence de $\rho_0 \in\ ]-\rho, \rho[\ : P(\rho_0) = 0$.

Démonstration. (**du Théorème 3.4.1**)

1. Soit $f \in V'$. Puisque V est séparable, alors il existe une base dénombrable $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ dense dans V. Définissons l'espace V_m de dimension finie engendré par l'ensemble des vecteurs $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, c'est-à-dire

$$V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m].$$

Cherchons une fonction $u_m \in V_m$, vérifiant

$$\langle A(u_m), w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle, \ j = 1, 2, ..., m. \tag{3.4.2}$$

Et pour trouver

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j,$$

on définit l'opérateur

$$P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \longmapsto P(\xi)$$

comme suit

$$P(\xi) = (\langle A(u_m) - f, w_1 \rangle, \langle A(u_m) - f, w_2 \rangle, ..., \langle A(u_m) - f, w_n \rangle).$$

On a

$$P(\xi) - P(\nu) = \sum_{i=1}^{n} (P(\nu_1, ..., \nu_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, ..., \xi_n) - P(\nu_1, ..., \nu_{i-1}, \nu_i, \xi_{i+1}, ..., \xi_n))$$

et la composante d'indice k de cette expression est

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \langle A(\sum_{j=1}^{i-1} \nu_j w_j + \sum_{j=i+1}^{n} \xi_j w_j + \xi_i w_i) - f, w_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle A(\sum_{j=1}^{i-1} \nu_j w_j + \sum_{j=i+1}^{n} \xi_j w_j + \nu_i w_i) - f, w_k \rangle \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} \langle A(\sum_{j=1}^{i-1} \nu_j w_j + \sum_{j=i+1}^{n} \xi_j w_j + \xi_i w_i) - A(\sum_{j=1}^{i-1} \nu_j w_j + \sum_{j=i+1}^{n} \xi_j w_j + \nu_i w_i), w_k \rangle \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} \langle A(\mu_i + \xi_i w_i) - A(\mu_i + \nu_i w_i), w_k \rangle
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{i-1} \nu_j w_j + \sum_{j=i+1}^{n} \xi_j w_j.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on sait que A est hémicontinu, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\xi - \nu| < \alpha \Rightarrow |A(\mu_i + \xi_i w_i) - A(\mu_i + \nu_i w_i)| < \frac{\varepsilon}{n}$$

(car $|\xi - \nu| < \alpha \Rightarrow |\xi_i - \nu_i| < \alpha$). Par suite,

$$\sum_{i=1}^{n} |A(\mu_i + \xi_i w_i) - A(\mu_i + \nu_i w_i)| < \varepsilon.$$

Ce qui signifie la continuité de la composante d'indice arbitraire k, par suite, on a la continuité de P. De plus, la condition 2) du Théorème 3.4.1 implique que pour chaque $\alpha > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$\langle A(u), u\rangle \geq \alpha\|u\|, \ \forall \|u\| \geq \rho.$$

En choisissant, $\alpha \geq \|f\|$, il existe $\rho > 0$ vérifiant

$$\forall \|u\| \geq \rho, \ \langle A(u) - f, u\rangle \geq \alpha\|u\| - \|f\|\|u\| \geq 0.$$

En utilisant le Lemme 3.4.1, il existe $u_m \in V_m$ telle que

$$A(u_m) = f.$$

Mais (3.4.2) donne

$$\langle A(u_m), u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle, \ \forall m = 1, 2, ...$$

Par conséquent,

$$\frac{\langle A(u_m), u_m\rangle}{\|u_m\|_V} \leq \|f\|_{V'}. \tag{3.4.3}$$

Ce qui entraine $\|u_m\|_V \leq C$ (en utilisant la condition 2) du Théorème 3.4.1 et puisque A est un opérateur borné, on a

$$\|A(u_m)\|_{V'} \leq C \ \ \forall m = 1, 2, ...$$

et puisque V est réflexif, il existe une sous suite (u_k) telle que

$$\begin{cases} u_k \to u \text{ dans V faible} \\ A(u_k) \to \psi \text{ dans } V' \text{ faible .} \end{cases}$$

En utilisant (3.4.2), on a

$$\langle A(u_k), w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle, \ \forall j = 1, 2, ..., k.$$

En fixant j et en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\langle \psi, w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle, \ \forall j = 1, 2, ...$$

Par suite, $\psi = f$. La relation (3.4.2) implique aussi

$$\langle A(u_k), u_k\rangle = \langle f, u_k\rangle \to \langle f, u\rangle.$$

Par conséquent

$$\lim_{k\to+\infty}\langle A(u_k),u_k\rangle=\langle f,u\rangle$$

ou bien

$$\lim_{k\to+\infty}\langle A(u_k),u_k\rangle=\langle \psi,u\rangle. \tag{3.4.4}$$

Pour terminer la démonstration, on utilise la monotonie de A pour obtenir

$$\langle A(u_k)-A(v),u_k-v\rangle\geq 0,\ \ \forall v\in V.$$

Ce qui donne

$$\langle A(u_k),u_k\rangle-\langle A(u_k),v\rangle-\langle A(v),u_k-v\rangle\geq 0.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ et en utilisant (3.4.4), on arrive à

$$\langle \psi,u\rangle-\langle \psi,v\rangle-\langle A(v),u-v\rangle\geq 0$$

et par suite

$$\langle \psi-A(v),u-v\rangle\geq 0\ \ \forall v\in V. \tag{3.4.5}$$

On prend $v=u-\lambda w$ dans (3.4.5) où $\lambda>0$, et $w\in V$ pour obtenir

$$\lambda(\psi-A(u-\lambda w),w)\geq 0,\ \ \forall w\in V$$

et donc

$$(\psi-A(u-\lambda w),w)\geq 0,\ \ \forall w\in V,\ \forall\lambda>0.$$

En faisant tendre λ vers 0 et en utilisant l'hémicontinuité de l'opérateur A, on obtient

$$(\psi-A(u),w)\geq 0,\ \ \forall w\in V \tag{3.4.6}$$

et en prenant $v=u+\lambda w$ dans (3.4.5) et en reprenant les étapes précédentes, on arrive à

$$(\psi-A(u),w)\leq 0,\ \ \forall w\in V. \tag{3.4.7}$$

De (3.4.6) et (3.4.7), on a

$$(\psi-A(u),w)=0,\ \ \forall w\in V.$$

Finalement,

$$A(u)=\psi=f\in V'.$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.4.1. ■

3.4.2 Applications

Premières applications :

1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Comme l'opérateur $A = -\Delta$ (le laplacien) est hémicontinu de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$, fortement monotone, borné (prendre $p = 2$ dans un exemple précédent) et coercif (grâce à la forte monotonie), donc A est un isomorphisme de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ et ceci grâce au théorème précédent car $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif et séparable. Donc le problème

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

admet une seule solution pour tout $f \in \mathcal{H}^{-1}(\Omega)$.

2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on veut montrer l'existence d'une solution faible au problème :

$$\begin{cases} A(u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f, & \text{sur } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4.8}$$

où $1 < p < +\infty$ et $f \in W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour vérifier les conditions du Théorème 3.4.1, on considère l'espace de Banach $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|v\| = \|\nabla v\|_{\mathrm{L^p}(\Omega)}, \; \forall v \in V$$

Notons que la bornitude et la monotonie de l'opérateur A ont été démontrées précedemment. Donc, il nous reste à vérifier que A est coercif et hémicontinu.

<u>Coercivité de A :</u> Soit $v \in V$, on a

$$\langle A(v), v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^p \, dx = \|v\|_V^p$$

Ce qui donne

$$\frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|_V} = \|v\|_V^{p-1} \to +\infty, \text{ lorsque } \|v\|_V \to +\infty, \text{ car } p > 1.$$

Donc A est coercif.

<u>Hémicontinuité de A :</u> Soient $u, v, w \in V$, on définit

$$\begin{aligned} g(t) &= \langle A(u+tv), w\rangle \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\frac{\partial(u+tv)}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial(u+tv)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx \end{aligned}$$

Pour montrer que A est hémicontinu, on montre que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Prenons une suite (t_k) de $\mathbb{R}$ telle que $t_k \to t,\ t \in \mathbb{R}$ et on écrit

$$g(t_k) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} |\frac{\partial(u+t_kv)}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial(u+t_kv)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx.$$

En utilisant le fait que la fonction $s \longmapsto |s|^{p-2}s$ est continue pour tout $p > 1$, on arrive à

$$|\frac{\partial(u+t_kv)}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial(u+t_kv)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} \to |\frac{\partial(u+tv)}{\partial x_i}|^{p-2}\frac{\partial(u+tv)}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}$$

et cela pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $i = 1, 2, \dots, N$. Il existe une constante $m > 0$ telle que $|t_k| \leq m$ pour tout k car (t_k) est convergente. Par conséquent,

$$|\frac{\partial(u+t_kv)}{\partial x_i}|^{p-1}|\frac{\partial w}{\partial x_i}| \leq C(|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-1}|\frac{\partial w}{\partial x_i}| + |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^{p-1}|\frac{\partial w}{\partial x_i}|). \tag{3.4.9}$$

Puisque le membre du côté droit de (3.4.9) est une fonction de l'espace $\mathrm{L}^1(\Omega)$, alors on peut appliquer maintenant le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On en déduit que $g(t_k) \to g(t)$. Ce qui montre que g est une fonction continue. Par suite, l'opérateur A est hémicontinu.

En appliquant le Théorème 3.4.1, on déduit que le problème (3.4.8) admet une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

<u>Unicité :</u> L'unicité de la solution du problème (3.4.8) résulte du fait que l'opérateur A est strictement monotone.

Une autre application du Théorème 3.4.1

Considérons l'opérateur A défini par

$$A : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$$
$$u \longmapsto Au = -div(a(x, \nabla u)),$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \in]1, +\infty[$ et $a(\cdot,\cdot)$ vérifie les hypothèses suivantes :

a. $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est de Carathéodory.

b. $a(\cdot,\cdot)$ est coercive, i.e.,

$\exists \alpha > 0$ tel que $a(x,\xi)\cdot\xi \geq \alpha\|\xi\|^p_{\mathbb{R}^N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$,

c. Il existe $C > 0$ et une fonction positive $a_0 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$, telles que

$$\|a(x,\xi)\|_{\mathbb{R}^N} \leq C(\|\xi\|^{p-1}_{\mathbb{R}^N} + a_0(x)),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \text{p.p. en } x \in \Omega,$$

d. $a(\cdot,\cdot)$ est strictement monotone, i.e.,

$$(a(x,\xi)-a(x,\xi'))\cdot(\xi-\xi')>0,\ \forall\xi,\xi'\in\mathbb{R}^N,\ \xi\neq\xi' \text{ p.p. en } x\in\Omega.$$

Théorème 3.4.2. *Sous les hypothèse précédentes sur a, pour tout $f\in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$, il existe un unique $u\in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, solution de*

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u))=f & dans\ \Omega \\ u=0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $V=\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme du gradient. On a pour tout $u,\varphi\in V$

$$\langle Au,\varphi\rangle=\langle -div(a(x,\nabla u)),\varphi\rangle=\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx.$$

1. Pour tout $u\in V$, Au est bien défini et A est borné car d'après (c) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} |\langle Au,\varphi\rangle| &\leq C\int_\Omega(|\nabla u|^{p-1}+a_0)\cdot|\nabla\varphi|\,dx \\ &\leq C(\|\nabla u\|^{p-1}_{\mathrm{L}^p(\Omega)}+\|a_0\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)})\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

2. A est coercive, car d'après (b)

$$\langle Au,u\rangle=\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,dx\geq\alpha\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx=\alpha\|u\|_V^p.$$

3. Montrons que A est hémicontinu. Soient $u,v,w\in$ V et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \langle A(u+\lambda v),w\rangle=\int_\Omega a(x,\nabla(u+\lambda v))\cdot\nabla w\,dx \end{aligned}$$

est continue. Soit (λ_n) une suite de $\mathbb{R}$ convergeant vers $\lambda\in\mathbb{R}$. D'après (a), on a

$$a(x,\nabla(u+\lambda_n v))\to a(x,\nabla(u+\lambda v)) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Et d'après (c) et comme (λ_n) est bornée, on trouve

$$\begin{aligned} |a(x,\nabla u+\lambda\nabla v)\cdot\nabla w| &\leq C(|\nabla u+\lambda_n\nabla v|^{p-1}+a_0)\cdot|\nabla w| \\ &\leq C_p(|\nabla u|^{p-1}+|\lambda_n|^{p-1}|\nabla v|^{p-1}+a_0)\cdot|\nabla w| \\ &\leq C(|\nabla u|^{p-1}+|\nabla v|^{p-1}+a_0)\cdot|\nabla w| \end{aligned}$$

avec $C_p=C\max\{1,2^{p-2}\}$. Alors, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u+\lambda_n v), w\rangle = \langle A(u+\lambda v), w\rangle.$$

4. A est strictement monotone car d'après (d) on a

$$\forall u, v \in V \text{ avec } u \neq v,\ \langle Au - Av, u-v\rangle = \int_\Omega (a(x,\nabla u) - a(x,\nabla v))\cdot(\nabla u - \nabla v)\, dx > 0.$$

Donc, d'après le Théorème 3.4.1, pour tout $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $Au = f$.

Pour montrer l'unicité, on suppose que il existe u_1 et u_2 tels que

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_i)\nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle\ ,\ \forall \varphi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega), i = 1, 2.$$

Par soustraction, on trouve

$$\int_\Omega (a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2))\cdot\nabla\varphi\, dx = 0,\ \forall\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

En posant $\varphi = u_1 - u_2$, on trouve

$$\int_\Omega (a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2))\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx = 0$$

et grâce à (d), on obtient le resultat suivant :

$$(a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2))\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Ce qui implique que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. dans Ω. Puisque $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, on a $u_1 = u_2$ p.p. dans Ω. ■

3.5 Une autre méthode utilisant la monotonie des opérateurs

Maintenant, on va voir une autre méthode où la monotonie de l'opérateur joue un rôle important. On commence par un lemme principal

Lemme 3.5.1. *Soit* $A : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *une fonction vérifiant pour deux constante* $\alpha > 0$ *et* $C > 0$:

a) $|A(\xi) - A(\xi')| \leq C|\xi - \xi'|, \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$,

b) $(A(\xi) - A(\xi'))\cdot(\xi - \xi') \geq \alpha|\xi - \xi'|^2,\ \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$.

Alors, pour tout $b \in \mathbb{R}^N$, *il existe une unique solution du système*

$$A(\xi) = b. \tag{3.5.1}$$

Démonstration. Il est clair que le système (3.5.1) est équivalent au système

$$\xi - \varepsilon A(\xi) + \varepsilon b = \xi$$

où $\varepsilon > 0$ sera choisi ultérieurement. On considère la suite récurrente $(\xi^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\xi^{(0)} \in \mathbb{R}^N \text{ donné et}$$
$$\xi^{(p+1)} = \xi^{(p)} - \varepsilon A(\xi^{(p)}) + \varepsilon b.$$

On a

$$\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)} = \xi^{(p)} - \xi^{(p-1)} - \varepsilon(A(\xi^{(p)}) - A(\xi^{(p-1)})). \tag{3.5.2}$$

En considérant la norme euclidienne du vecteur $\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)}$ et en utilisant (3.5.2), on arrive à

$$|\xi^{(p+1)}-\xi^{(p)}|^2 = |\xi^{(p)}-\xi^{(p-1)}|^2-2\varepsilon(A(\xi^{(p)})-A(\xi^{(p-1)}))\cdot(\xi^{(p)}-\xi^{(p-1)})+\varepsilon^2|A(\xi^{(p)})-A(\xi^{(p-1)})|^2.$$

En utilisant les deux conditions a) et b) du Lemme 3.5.1, il vient que

$$|\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)}|^2 \leq (1 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 C^2)|\xi^{(p)} - \xi^{(p-1)}|^2.$$

On choisit maintenant $\varepsilon > 0$ telle que $k^2 = 1 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 C^2 < 1$. Par suite, on a

$$|\xi^{(p+1)} - \xi^{(p)}| \leq k|\xi^{(p)} - \xi^{(p-1)}|, \quad k < 1.$$

Donc $(\xi^{(p)})$ est une suite convergente vers une limite (qu'on notera ξ) vérifiant

$$A(\xi) = b.$$

Pour montrer l'unicité, supposons que ξ et ξ' sont deux solutions du système (3.5.1). On aura alors

$$A(\xi) - A(\xi') = 0.$$

Ce qui implique que

$$0 = (A(\xi) - A(\xi'))(\xi - \xi') \geq \alpha|\xi - \xi'|^2.$$

Par conséquent, $\xi = \xi'$. ■

Supposons maintenant qu'en plus des hypothèses du Lemme 3.5.1, on a $A(0) = 0$. Remarquons que cette hypothèse est technique et est toujours vérifiée quitte à remplacer $A(\xi)$ par $A(\xi) - A(0)$. Sous ces conditions, on veut trouver une solution au problème

$$\begin{cases} -div(A(\nabla u)) = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5.3}$$

Théorème 3.5.1. *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in \mathcal{H}^{-1}(\Omega)$. *Alors, le problème* (3.5.3) *admet une unique solution faible* $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, *vérifiant*

$$\int_\Omega A(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \; \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On commence par démontrer l'unicité. On suppose que le problème (3.5.3) admet deux solutions u_1, $u_2 \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. On a alors

$$\int_\Omega [A(\nabla u_1) - A(\nabla u_2)] \cdot \nabla v \, dx = 0, \; \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

En prenant $v = u_1 - u_2$, on arrive à

$$0 = \int_\Omega [A(\nabla u_1) - A(\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \, dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \, dx.$$

Par suite $u_1 - u_2 = 0$ car $u_1 - u_2 \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Ce qui montre l'unicité de la solution dans le cas *où* elle existe.

Maintenant, on étudie l'existence de la solution. Considérons une base dénombrable orthonormale $\{w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots\}$ de l'espace $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ (pour le produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\Omega)$) et on définit les espaces de dimensions finies

$$V_m =< w_1, w_2, \ldots, w_m >, \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

Cherchons une solution $u_m = \sum_{j=1}^{m} c_j w_j$ du problème approché

$$\int_\Omega A(\nabla u_m) \nabla v_m \, dx = \langle f, v_m \rangle, \forall v_m \in V_m \tag{3.5.4}$$

qui est équivalent au problème

$$\int_\Omega A(\nabla u_m) \nabla w_j \, dx = \langle f, w_j \rangle, \forall j = 1, \ldots, m. \tag{3.5.5}$$

A cet effet, on définit $B : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ comme suit $B = (B_1, \ldots, B_N)$ *où*

$$B_j(\xi) = \int_\Omega A(\nabla (\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i)) \cdot \nabla w_j \, dx, \forall j = 1, \ldots, m \tag{3.5.6}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ et on pose $b_j = \langle f, w_j \rangle$. Par suite, le problème (3.5.5) est équivalent à trouver une solution pour

$$B_j(c) = b_j.$$

On remarque que la condition $A(0) = 0$ conduit à $B(0) = 0$, et que la condition $a)$ de la fonction A (du Lemme 3.5.1) implique que B vérifie la même condition. Vérifions que B satisfait aussi la condition $b)$. On a

$$\begin{aligned}(B(\xi) - B(\xi')) \cdot (\xi - \xi') &= \sum_{j=1}^{m}(B_j(\xi) - B_j(\xi'))(\xi_j - \xi'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega [A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i)) - A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi'_i w_i))] \cdot \nabla w_j (\xi_j - \xi'_j)\, dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et la condition $a)$ sur A, on obtient

$$\begin{aligned}(B(\xi) - B(\xi')) \cdot (\xi - \xi') &= \int_\Omega [A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i)) - A(\nabla(\sum_{i=1}^{m} \xi'_i w_i))] \cdot \nabla(\sum_{j=1}^{m}(\xi_j - \xi'_j) w_j)\, dx \\ &\geq \alpha \|\nabla(\sum_{j=1}^{m}(\xi_j - \xi'_j) w_j)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\ &\geq \beta |\xi - \xi'|^2\end{aligned}$$

où β est une constante. La dernière égalité est réalisée grâce au fait que la base $\{w_1, \ldots, w_m, \ldots\}$ est orthonormale. Finalement, B vérifie la condition $b)$ du Lemme 3.5.1. En utilisant le même lemme, il existe une unique solution $c \in \mathbb{R}^m$ de telle sorte que (3.5.4) est vérifiée. En prenant $u_m = v_m$ dans (3.5.4) et en utilisant la condition $a)$ et $b)$ et l'hypoythèse $A(0) = 0$, on obtient

$$\alpha \|\nabla u_m\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m \, dx \leq C \|f\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)} \|\nabla u_m\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

où C est une constante. On en déduit

$$\|\nabla u_m\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{\mathcal{H}^{-1}(\Omega)}, \forall m = 1, 2, \ldots,$$

ce qui signifie que la suite des solutions approchées (u_m) est bornée dans $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$. Par suite, il existe une sous-suite (qu'on notera encore (u_m)) faiblement convergente dans $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$

$$u_m \rightharpoonup u \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$$

et puisque Ω est borné, l'injection $\mathcal{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, on peut extraire une sous-suite (qu'on notera encore (u_m)) telle que

$$u_m \to u \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Ce qui entraine encore une fois l'existence d'une sous-suite (notée (u_m)) telle que

$$u_m \to u \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Soient $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et v_m une suite de V_m vérifiant

$$\begin{array}{rcl} v_m & \rightarrow & v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ \nabla v_m & \rightarrow & \nabla v \text{ p.p. } x \in \Omega \end{array}$$

et cela est possible (quite à extraire une sous-suite). En utilisant (3.5.4), on obtient

$$\int_\Omega [A(\nabla u_m) - A(\nabla v_m)] \cdot (\nabla u_m - \nabla v_m)\, dx - \int_\Omega A(\nabla v_m) \cdot (\nabla v_m - \nabla u_m)\, dx = \langle f, u_m - v_m \rangle.$$

En utilisant la propriété de monotonie de la fonction A, on trouve

$$\int_\Omega A(\nabla v_m) \cdot (\nabla v_m - \nabla u_m)\, dx \geq \langle f, v_m - u_m \rangle,\ \forall m = 1, 2, \ldots \tag{3.5.7}$$

En prenant la limite dans (3.5.7), on obtient

$$\int_\Omega A(\nabla v) \cdot (\nabla v - \nabla u)\, dx \geq \langle f, v - u \rangle,\ \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{3.5.8}$$

En posant $v = u + tw$ où w est arbitraire dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$, cela nous conduit à partir de (3.5.8) la relation

$$\int_\Omega A(\nabla(u + tw)) \cdot \nabla w\, dx \geq \langle f, w \rangle,\ \forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{3.5.9}$$

En utilisant la continuité de A et en faisant tendre $t \rightarrow 0$ on aura

$$\int_\Omega A(\nabla(u)) \cdot \nabla w\, dx \geq \langle f, w \rangle,\ \forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{3.5.10}$$

Et en remplaçant w par $-w$ dans (3.5.10), on obtient

$$\int_\Omega A(\nabla(u)) \cdot \nabla w\, dx \leq \langle f, w \rangle,\ \forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{3.5.11}$$

De (3.5.10) et (3.5.11), on a

$$\int_\Omega A(\nabla(u)) \cdot \nabla w\, dx = \langle f, w \rangle,\ \forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \tag{3.5.12}$$

■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté deux méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires. Il s'agit des méthodes du point fixe et des opérateurs monotones.

Concernant la méthode du point fixe, les quatre principaux théorèmes de cette théorie ont été présentés. Il s'agit des théorèmes de Banach, de Brouwer, de Schauder et de Leray-Shauder. Ces théorèmes sont des outils performants et permettent la résolution d'une large classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Plusieurs exemples illustratifs ont été donnés.

Ensuite, nous avons introduit la méthode des opérateurs monotones qui a été initiée par G. Minty en 1962. Le résultat principal de cette théorie est le Théorème 3.4.1 qui assure la bijectivité d'un opérateur monotone. L'application de cette méthode à la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires a été illustrée par plusieurs exemples.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, New York (1975).

[2] Y. Atik, Introduction aux problème aux limites non linéaires. Cours de Magister d'Analyse Fonctionnelle, Alger (1999-2002).

[3] J. F. Babadjian, Equations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires. Cours, Université Paris-Sud (2018).

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. Dunod, Paris (1999).

[5] R. Chill, Quelque méthodes de résolution pour les équations non linéaire. Master 2 Recherche de Mathématiques, Université de Metz (2008).

[6] T. Gallouët, R. Herbin, Equations aux dérivées partielles. Cours, Université Aix Marseille (2018).

[7] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, Berlin (1983).

[8] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. Institut Elie Cartan, Université de Nancy I, Paris, New York (1993).

[9] H. Le Dret, Equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. Springer, Berlin (2013).

[10] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle. Ellipses, Paris (2013).

[11] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris (1969).

[12] C. Minazzo, K. Rider, Théorèmes du point fixe et applications aux équation différentielles. Mémoire, Université de Nice-Sophia Antipolis (2007).

[13] S. Nicaise, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : Cours et problèmes résolus. Dunod, Paris (2000).

[14] M. Renardy, R. C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations. First Edition, Text in Applied Mathematics, Springer-Verlag (1992).

[15] T. Roubicek, Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. First Edition, Birkhauser (2005).

[16] B. K. Sadallah, S. A. Messaoudi, Théorie des distributions et applications. Première Edition, Obeikan, Arabie Saoudite (2013).