

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de master en mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par

BENSIDHOUM INELA et CHERGUI NADJET

Thème
Modélisation et systèmes dynamiques

Soutenu le 03 juillet 2019 devant le jury composé de :

Mme.F. TALBI	M.C.A	Université de Bejaia	<i>Présidente.</i>
Mme.N. MOHDEB	M.C.A	Université de Bejaia	<i>Promotrice.</i>
Mr.M. S. BOUKHLIFA	M.A.A	Université de Bejaia	<i>Éxamineur.</i>

Promotion 2018/2019

Remerciements

Nous remercions très chaleureusement notre directrice de recherche Mme MOHDEB Nadia qui nous a initiées à la recherche, un grand merci pour vos encouragements, votre disponibilité, votre confiance, votre bienveillance, votre soutien et votre gentillesse sans faille, tout autant que pour vos avis et conseils toujours très éclairants.

Nos remerciements sont également anticipés aux membres de jury qui ont accepté de lire et d'évaluer notre travail.

Enfin, nos plus vifs remerciements vont à tous ceux qui de près ou de loin nous ont aidés à réaliser ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- ✓ Ma mère qui est la personne la plus chère dans ma vie.
- ✓ Mon père qui rien au monde ne vaut ses efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être, et je te dit que tu est le meilleur papa du monde.
- ✓ À ma très chère soeur NIHAD, et mon très chère frère YACINE.
- ✓ À ma grande mère, mes tantes et à mes oncles, ainsi que toutes mes cousines et mes cousins.
- ✓ À mes chères copines et amis.

À toute la famille BENSIDHOUM, BENABBAS, RIAH, OUATMANI.

Inela

C'est avec une grande émotion et immense plaisir que je dédie ce modeste travail à :

Mon cher papa Ahcene CHERGUI et à ma chère maman F. AMRIOUI, pour leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

Mes chères soeurs Kahina, Sihem, Tiziri et Sabrina.

Mes chers frères Rachid, Farhet et Ghiles.

Mes chères copines et chers amis.

Merci d'être toujours là pour moi.

Nadjat

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	7
1 Préliminaires sur les notions de la modélisation et des systèmes dynamiques	10
1.1 Modélisation	11
1.2 Systèmes dynamiques	14
1.3 Étude du comportement des solutions des équations différentielles ordinaires	16
1.3.1 Stabilité des points stationnaires	18
2 Modèles démographiques d'une seule population	23
2.1 Modèle de Malthus	24
2.1.1 Résolution analytique du Modèle de Malthus	25
2.1.2 Représentation graphique de la solution du modèle de Malthus	25
2.1.3 L'interprétation des graphes	26
2.1.4 Temps de doublement et le temps de demi-vie	27
2.2 Le modèle logistique	29
2.2.1 Étude qualitative de l'équation logistique	31
2.2.2 Étude analytique de l'équation logistique	35

2.2.3	Comparaison entre le modèle de Malthus et le modèle logistique (Malthus modifié) :	39
2.3	Le modèle de Gompertz	40
2.3.1	Étude qualitative du modèle de Gompertz	40
2.3.2	Étude analytique du modèle de Gompertz	42
2.3.3	Comparaison entre le modèle de Verhulst et le modèle de Gompertz .	44
2.4	Cas général des modèles démographiques d'une seule population	45
3	Modèle démographique de deux populations en interaction	49
3.1	Petite histoire	50
3.2	Modèle de deux populations en interaction	50
3.3	Modèle de Lotka-Volterra	51
3.4	Étude qualitative du système de Lotka-Volterra	52
3.5	Graphes des deux composantes U et V de la solution du modèle de Lotka-Volterra	59
	Conclusion	61

INTRODUCTION

La modélisation mathématique est devenue un processus important dans plusieurs études et recherches dans différents domaines scientifiques. La modélisation de la science de la population progressait au *XIX^{ème}* siècle, les premières modélisations démographiques ont été basées sur les systèmes dynamiques.

L'étude des systèmes dynamiques revient au milieu des années 1600. En cette période, Isaac Newton a découvert certaines lois de mouvements des corps. La dynamique des points matériels lui semblait bien prédictible, c'est-à-dire l'état futur du mouvement était prévisible (ce qu'on appelle système déterministe). Il suffisait de traduire le mouvement en équations différentielles et les résoudre d'une manière explicite. Par la suite, les scientifiques ont remarqué que le comportement des solutions pour différentes conditions initiales et leurs caractères asymptotiques sont parfois difficiles à déterminer et qu'ils avaient besoin d'autres méthodes qui les aidera à déterminer les caractéristiques qualitatives. En 1609 l'astrologue allemand Jonaesk Kepler montra que les planètes décrivaient des ellipses autour du soleil, chaque'une d'elles se retrouvait à sa position initiale et retraça la même ellipse. En 1687, Newton publia sa loi physique de gravitation universelle où il expliquait l'attraction entre les planètes et le soleil : chaque planète est attirée par le soleil suivant un mouvement élliptique (Keplérien), elle est en même temps attirée par d'autres planètes (une autre force s'exerce sur elle), ce qui va perturber les trajectoires et ne seront plus des ellipses invariantes

(fixes). C'est ce qui a poussé les mathématiciens ainsi que les physiciens à se demander s'ils pouvaient déterminer les positions exactes des planètes à tout instant, c'est ce qui les a amené à poser la question : « le système solaire est-il stable ? » Vers la fin du XIX^{eme} siècle, le physicien et philosophe français Henri Poincaré répond à la question du problème de la stabilité du système solaire suivant une nouvelle méthode d'analyse qui est l'approche qualitative.

Dans ce mémoire, nous consacrons le premier chapitre aux *Préliminaire sur les notions de la modélisation et des systèmes dynamiques*. Nous allons en particulier citer le théorème important de Hartman-Grobman qui permet dans le cas d'un point stationnaire hyperbolique de décrire d'une façon précise le comportement des trajectoires des équations différentielles en question au voisinage de ce point.

Dans le deuxième chapitre intitulé : *Modèles démographiques d'une seule population*, nous allons présenter quelques modèles classiques continus utilisés en écologie ainsi qu'en biologie tels que le modèle de Malthus qui a été introduit par Tomas Malthus en 1798, dans le but de prévoir la dynamique de la population américaine. On va ensuite déterminer le temps nécessaire pour que la taille d'une population passe au double ou plutôt se divise en deux. Ce modèle apparaissait irréaliste pour certains mathématiciens, chose qui les a poussés à introduire un terme correctif qui conduit à ce que l'effectif d'une population isolée converge vers un effectif constant, d'où vient l'idée à Verhulst en 1836 à poser son modèle appelé *modèle logistique* qui n'est autre qu'une modification voire amélioration du modèle de Malthus. On va juste après présenter une comparaison entre le modèle de Malthus et le modèle logistique. Cette comparaison va nous permettre de voir à quel point le modèle de Verhulst décrit mieux la réalité. Par la suite, nous allons présenter le modèle concurrent du modèle logistique qui a été introduit par Gompertz. Ce modèle est plus utilisé dans l'étude de la croissance d'une tumeur concrèteuse. On va également présenter nos petits programmes écrits sous Maple, qui nous permettra de tracer les courbes illustrant l'évolution des solutions de ces modèles en fonction du temps t . À la fin de ce chapitre nous allons présenter une généralisation des modèles de ce type, c'est-à-dire les équations différentielles modélisant des démographies d'une seule population.

Le troisième chapitre intitulé : *Modèle démographique de deux populations en interactions* est consacré à décrire l'évolution des systèmes modélisant l'interaction entre deux

populations proies-prédateurs, et à montrer l'existence des solutions périodiques dans le système différentiel représentant le modèle de Lotka-Volterra. On va aussi établir un programme sous Maple qui va nous permettre de visualiser ces solutions périodiques de ce modèle.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES SUR LES NOTIONS DE LA MODÉLISATION ET DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Vu la complexité des phénomènes réels et la difficulté de les travailler directement sur la réalité, il est nécessaire de traduire ces phénomènes en problèmes mathématiques afin de leur établir des outils mathématiques pour faciliter leur étude, d'où vient l'importance et l'utilité de la modélisation. Nous allons donc nous intéresser dans la première partie de ce chapitre au processus de la modélisation. Par la suite dans la seconde partie, nous allons définir les systèmes dynamiques et donner quelques notions et outils de base pour leur étude qualitative.

1.1 Modélisation

1) Notions de modélisation

Ici nous allons donner quelques notions de modélisation.

a) Modélisation, modéliser et modèle :

Modélisation est un processus qui permet de traduire un phénomène réel en un modèle (qu'on définira ci-dessous) afin de lui appliquer des outils mathématiques, dans le but de décrire et prévoir le comportement de ce phénomène. [15]

Modéliser un phénomène réels revient à représenter en un problème mathématique ce qui était exprimé en langage courant auparavant, en utilisant des outils mathématiques.[15]

Le modèle est la mise en système d'expressions mathématiques (équations différentielles, polynômes, contraintes, ...) du phénomène en question.[3], [15]

Voici quelques exemples de modélisation :

Exemple 1. *Problème du sac à dos pour faire une randonnée.*

Supposons qu'on a besoin de n objets X_1, \dots, X_n pour faire une randonnée, par exemple : lampe, chargeur, tente, ...

Soit $P_i, i = \overline{1, n}$ leurs poids respectifs. Supposons que U_1, \dots, U_n représentent l'utilité de chaque objet.

Ainsi

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si l'objet est dans le sac,} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant que le randonneur peut porter un poids maximal P . Le problème posé est « Comment maximiser l'utilité du sac à dos sous les contraintes du poids » ?

Le modèle mathématique consiste donc à trouver :

$$\max(X_1U_1 + X_2U_2 + \dots + X_nU_n),$$

tel que

$$X_1P_1 + X_2P_2 + \dots + X_nP_n \leq P.$$

Exemple 2. *Soit un ballon qui se dégonfle au cours du temps.*

On veut déterminer comment évolue le volume V de ce ballon au cours du temps, en sachant

le taux de variation de son rayon r .

On sait que :

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

En utilisant la dérivation des fonctions

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt}. \quad (1)$$

où : $\frac{dr}{dt}$ est connu, $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ et $\frac{dV}{dt}$ est inconnu à trouver.

En remplaçant les valeurs connues dans (1) on obtient le modèle du problème posé :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

d) Le modélisateur :

Le modélisateur est un spécialiste d'une stratégie de construction et d'utilisation d'un modèle [15] (le modélisateur n'est pas forcément un mathématicien mais il doit maîtriser le minimum des mathématiques).

2) Modéliser ce n'est pas forcément théoriser

Le modèle est souvent considéré comme un moyen précieux dans la démarche théorique, mais la modélisation n'est pas une fin en soit, par contre un outil d'obtention des résultats [15] .

3) Élaboration d'un modèle

On distingue deux démarches de construction d'un modèle mathématique [17] :

a) Phase expérimentale

Cette démarche implique l'acquisition des données à partir d'une expérimentation.

b) Phase théorique

Cette démarche nécessite de mettre en équations le problème dans une théorie en se basant sur des connaissances théoriques.

4) Caractéristique d'un modèle

Pour que le modèle élaboré soit valable, il doit vérifier certaines caractéristiques [17] telles que :

- Il doit être prédictible, c'est à dire il nous permet d'avoir des valeurs proches à celles mesurées expérimentalement.
- Il doit répondre aux objectifs de la modélisation.
- Il doit être traduisible à nouveau en langage naturel compréhensible par tout le monde.

5) Le choix du bon formalisme

Afin de modéliser un phénomène, on peut aboutir à plusieurs modèles qui le décrivent. Le fait de choisir un modèle parmi les autres ne dépend pas que de la ressemblance la plus proche entre le modèle et le phénomène réel, mais aussi de la meilleure interprétation des données du phénomène par des expressions mathématiques, des modèles logique ($A \wedge B \implies C$), des modèles géométriques (exemple : courbes, diagrammes, ...)[17].

6) Étapes principales d'une modélisation

1^{ère} étape : Phase de l'observation

En premier lieu, on fait une description simplifiée et précise du phénomène. En suite, on détermine les variables connues (les données) et les variables inconnues du problème. En dernier lieu, on identifie les lois scientifiques (physiques, chimiques,...) qui permettent de former une hypothèse sur la nature du problème .

2^{ème} étape : Phase de la mathématisation du problème

Le but de cette étape est de décrire le phénomène à l'aide de fonctions et d'équations de la façon suivante :

On reprend les variables identifiées dans la phase d'observation, on indique celles qui sont dépendantes et celles qui sont indépendantes et on écrit mathématiquement les relations reliant ces variables, ensuite on traduit les hypothèses en expressions mathématiques. Cela consiste à revoir les lois scientifiques (déjà identifiées dans la phase de l'observation).

L'ensemble des fonctions et d'équations obtenues forme le modèle correspondant à l'énoncé du problème posé.

3^{ème} étape : Phase de l'examination du modèle

On examine le modèle afin de déterminer les démarches à suivre, entre autres les calculs à effectuer, les fonctions à représenter et sur quel domaine travailler ainsi les simulations à effectuer sur certains paramètres.

4^{ème} étape : Phase de l'expérimentation et de vérification du modèle

Après l'examen du modèle, on réalise une expérience (c'est à dire effectuer les opérations prévues dans la phase précédente) et on vérifie si ces résultats obtenus sont raisonnables et les commenter. Si les résultats mathématiques sont proches des résultats obtenus expérimentalement, alors le modèle est dit valide, sinon on doit modifier ou améliorer la phase de la mathématisation et reconstruire à nouveau le modèle.

5^{ème} étape : Phase de l'interprétation des résultats

C'est la dernière étape de la modélisation. Il s'agit dans cette étape de résumer tous les résultats dégagés dans l'étude du modèle, étudier les solutions du problème en indiquant le nombre de solutions, leurs dépendances aux conditions initiales, leurs natures, ... etc, et les interpréter afin d'avoir une idée globale sur l'évolution de ces solutions [8].

1.2 Systèmes dynamiques

La dynamique est un processus évolutif dans le temps, l'ensemble des équations décrivant cette dynamique est appelé un système dynamique.

Définition 1. *Un système dynamique est un modèle mathématique qui décrit un phénomène évoluant dans le temps.*

Définition 2. [9] *Un système dynamique est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire son évolution au cours du temps en connaissant son état à un instant donné.*

On distingue trois classes de systèmes dynamiques [14] : déterministes, stochastiques (ou non déterministes) et semi-déterministes.

Types de systèmes dynamiques

Un système dynamique peut être représenté à temps continu ou à temps discret.

a) Système dynamique continu : Un système dynamique continu [5] consiste en un espace X et une famille d'applications à un paramètre $\{f^t : X \rightarrow X\}_{t \in \mathbb{R}}$ tel que

$$f^{t+s} = f^t \circ f^s$$

et $f^0 = Id_X$, avec f une fonction continue sur X .

La variable t est généralement interprétée comme le temps.

Exemple 3. *Le système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy}{dt} = bx(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ \frac{dz}{dt} = x(t)y(t) - cz(t). \end{cases}$$

est un système dynamique continu. C'est un modèle atmosphérique proposé par E.Lorenz.

Un système dynamique continu est dit :

- a) *Autonome* : si la fonction f ne dépend pas explicitement de la variable t .
- b) *Non autonome* : si la fonction f dépend du temps explicitement.

b) Système dynamique discret :

Soit E un sous ensemble de \mathbb{C} . Un système dynamique discret [1],[12] est défini généralement par une application $f : E \rightarrow E$ et une condition initiale $x_0 \in \mathbb{C}$, comme une séquence d'itérations suivantes :

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

On écrit en général :

$$\underbrace{f(f \dots (f(x_0)))}_{n \text{ fois}} = f^n(x_0)$$

Notons $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0)) = f(x_1)$, ... etc. On obtient alors la forme générale du système dynamique discret suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Exemple 4. *Le système*

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases}$$

est un système dynamique discret posé par Hénon, lorsque il voulait simplifier le système dynamique de Lorenz.

Remarque 1. *Pour remonter dans le passé pour le système discret, il suffit d'inverser la fonction f lorsque celle-ci est bijective.*

Remarque 2. *On peut passer d'un système continu à un système discret en réalisant par exemple une approximation d'Euler d'une équation différentielle.*

1.3 Étude du comportement des solutions des équations différentielles ordinaires

Un des modèles les plus élaborés dans la modélisation en sciences des vivants et de l'ingénierie est l'équation différentielle. Étude de comportement des solutions de ces équations peut s'effectuer selon trois méthodes importantes.

Méthodes d'étude du comportement d'une équation différentielle

a) *La méthode analytique :*

Cette méthode permet d'obtenir des solutions exactes sous la forme explicite.

L'inconvénient de cette méthode est le fait qu'elle ne soit pas applicable à tous les types d'équations différentielles.

b) *La méthode numérique :*

La méthode numérique permet de se rapprocher de la solution exacte par des approximations effectuées sur un intervalle de temps borné et pour des conditions initiales données. Le principe de ces méthodes est de discrétiser cet intervalle (domaine d'étude). On peut citer par exemple, la méthode de Rung-Kutta et la méthode d'Euler.

c) *L'étude qualitative :*

En général, on procède à cette méthode lorsqu'il n'est pas possible de résoudre l'équation différentielle analytiquement. Elle consiste à étudier les points stationnaires, la stabilité, le comportement asymptotique des solutions de ces équations, l'existence de solutions particulières telles que les solutions périodiques, ... [17]

Dans ce qui suit, on va s'intéresser à cette dernière méthode. Tout d'abord nous allons présenter quelques notions importantes pour cette étude.

Considérons maintenant le système différentiel autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y), \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x, y \in \mathbb{R}$ et f_1, f_2 sont des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire qu'on suppose que le système (1.1) vérifie les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité des solutions).

a) Trajectoires :

Une trajectoire [10] (dite aussi orbite) du système différentiel (1.1) est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), y(t))$ qui parcourent le plan (x, y) lorsque t parcourt \mathbb{R} .

En d'autres termes, une trajectoire est défini par l'ensemble suivant :

$$\{(x(t), y(t)) ; t \in \mathbb{R}\}.$$

g) Portrait de phase :

On appelle portrait de phase [10] d'un système différentiel (1.1) l'ensemble de ses trajectoires. En pratique, tracer le portrait de phase de (1.1), c'est tracer suffisamment de trajectoires pour qu'on puisse les imaginer toutes.

b) Courbes de niveaux :

Soit f une fonction à deux variables de surface S , et k un réel.

La courbe d'intersection de la surface S avec un plan d'équation $z = k$ est appelée la courbe de niveau k de la fonction f .

c) Solution périodique :

On appelle solution périodique [4] du système (1.1) toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) telle qu'il existe un nombre réel $T > 0$, vérifiant $x(t + T) = x(t)$ et $y(t + T) = y(t)$.

Remarque 3. *Une solution périodique du système (1.1) correspond à une trajectoire fermée dans le portrait de phase correspondant. Dans ce cas, cette trajectoire est dite un cycle.*

d) Champ de vecteurs :

Un champ de vecteurs [10] est défini par l'application :

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)). \end{aligned}$$

En chaque point $M = (x, y)$ du plan, on associe le vecteur $V(M) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

À noter également que si $V(M) \neq (0, 0)$, la trajectoire qui passe par le point M est tangente à $V(M)$ en ce point.

e) Isoclines :

Les isoclines [10] sont les ensembles sur lesquels les composantes \dot{x} ou \dot{y} s'annulent, on distingue donc deux types d'isoclines :

1) Isocline horizontale :

L'isocline horizontale est l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $f_2(x, y) = 0$.

Sur l'isocline horizontale, le champs de vecteurs est horizontal, dirigé vers la droite si $f_1(x, y) > 0$ et vers la gauche si $f_1(x, y) < 0$.

2) Isocline verticale :

L'isocline verticale est l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $f_1(x, y) = 0$.

Sur l'isocline verticale, le champs de vecteurs est vertical, dirigé vers le haut si $f_2(x, y) > 0$ et vers le bas si $f_2(x, y) < 0$.

f) Points stationnaires :

Un point stationnaire [16],[19] $M = (x^*, y^*)$ (dit aussi point singulier ou point d'équilibre) du système (1.1) est un point de \mathbb{R}^2 vérifiant $f_1(x^*, y^*) = f_2(x^*, y^*) = 0$.

Autrement dit, un point stationnaire est l'intersection d'une isocline verticale avec une isocline horizontale.

Un point stationnaire $M=(x^*, y^*)$ du système (1.1) est dit **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $D_F(x^*, y^*)$ ($F = (f_1, f_2)$) associée à (1.1) en M ont la partie réelle non-nulle.

Dans le cas contraire, le point M est dit **non-hyperbolique**.

Remarque 4. *Un système différentiel peut admettre aucun, un seul ou plusieurs points stationnaires.*

1.3.1 Stabilité des points stationnaires

Nous allons commencer par la présentation de l'étude de la stabilité des points stationnaires d'un système linéaire homogène de \mathbb{R}^2 .

En ce basant sur cette étude nous allons présenter l'étude de la stabilité des points stationnaires d'un système non linéaire.

I) Systèmes linéaires

On considère l'équation différentielle de \mathbb{R}^2 :

$$\dot{X} = AX. \quad (1.2)$$

où $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice d'ordre 2 à coefficients constants.

On constate que le point $(0,0)$ est toujours un point stationnaire du système (1.2).

Supposons que $\det(A) \neq 0$, (c'est-à-dire $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de la matrice A).

Ainsi l'origine est l'unique point stationnaire du système (1.2).

La stabilité du point stationnaire $(0,0)$ dépend du signe des valeurs propres de la matrice A .

1^{er} cas : la matrice A admet deux valeurs propres λ_1, λ_2 réelles.

- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: l'origine est un *noeud instable* (*répulsif*).
- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: l'origine est un *noeud stable* (*attractif*).
- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$: l'origine est un *point selle* (dit aussi un *col*).

2^{eme} cas : la matrice A admet une valeur propre double λ réelle.

- Dans ce cas, l'origine est un *noeud instable* (respectivement : *stable*) lorsque $\lambda > 0$ (respectivement : lorsque $\lambda < 0$).

3^{eme} cas : la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$).

- Si $\alpha > 0$, alors l'origine est un *foyer instable*.
- Si $\alpha < 0$, alors l'origine est un *foyer stable*.
- Si les deux valeurs propres sont purement imaginaires (c'est-à-dire $\alpha = 0$), l'origine est alors un *centre*.

II) Systèmes non linéaires

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\dot{X} = F(X). \quad (1.3)$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et $F(X) = (f_1(X), f_2(X))$ est une fonction vectorielle non linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qu'on suppose de classe \mathcal{C}^1 (pour garantir l'existence et l'unicité des solutions).

Soit $M = (x^*, y^*)$ un point stationnaire du système (1.3).

Pour prédire la nature du point stationnaire M , On linéarise le système (1.3) au voisinage de ce point, en utilisant le développement de Taylor, afin d'approcher le système non linéaire (1.3) par un système linéaire.

Tout d'abord on doit translater le point stationnaire M à l'origine par le changement de variables

$$\begin{cases} h = x - x^*, \\ k = y - y^*. \end{cases}$$

Puisque on a

$$\begin{cases} \dot{h} = \dot{x}, \\ \dot{k} = \dot{y}. \end{cases}$$

En remplaçant dans (1.3), on obtient

$$\begin{cases} \dot{h} = f_1(x, y), \\ \dot{k} = f_2(x, y). \end{cases}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{h} = f_1(x^* + h, y^* + k), \\ \dot{k} = f_2(x^* + h, y^* + k). \end{cases}$$

Le développement de Taylor au voisinage du point (x^*, y^*) des deux fonctions f_1 et f_2 donne

$$\begin{cases} \dot{h} = f_1(x^*, y^*) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*)h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*)k + R_1(h, k), \\ \dot{k} = f_2(x^*, y^*) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*)k + R_2(h, k). \end{cases} \quad (1.4)$$

où les restes $R_1(h, k)$, $R_2(h, k)$ sont des fonctions négligeables au voisinage de $(0, 0)$ devant les termes de degrés 1 en h et k lorsque ceux ci ne sont pas nuls.

On pose

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*), & b &= \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*), \\ c &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*), & d &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*). \end{aligned}$$

Soit le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{h} = ah + bk, \\ \dot{k} = ch + dk. \end{cases} \quad (1.5)$$

Le système (1.5) s'écrit aussi sous la forme :

$$\dot{H} = JH. \quad (1.6)$$

où $H = (h, k)$ et $J = D_F(x^*, y^*)$ qui est la matrice jacobienne de F au point (x^*, y^*) .

Le système (1.6) est appelé le *linéarisé* du système (1.3).

Le comportement du système (1.3) est donné par le théorème de Hartman-Grobman ci-dessous .

Sans perte de généralité suppose que $M = (0,0)$ et $J = D_F(0,0)$.

Définition 3. *Deux systèmes différentiels autonomes sont dits topologiquement conjugués dans un voisinage de l'origine (point stationnaire des deux systèmes), s'il existe un homéomorphisme H d'un ouvert U contenant l'origine, dans un ouvert V contenant aussi l'origine, préservant la paramétrisation des trajectoires par le temps.*

Théoreme 1.3.1. *(de Hartman-Grobman) [16]*

Si la matrice Jacobienne J n'admet aucune valeur propre de partie réelle nulle, alors les deux systèmes (1.3) et (1.6) sont topologiquement conjugués.

En d'autre terme, si le point stationnaire du linéarisé (1.6) du système (1.3) est stable (respectivement instable) alors le point stationnaire du système non linéaire est aussi stable (respectivement instable), si la matrice J admet une valeur propre de partie réel nulle (c'est-à-dire l'origine est un point non hyperbolique). Dans ce cas les comportements qualitatifs des solutions des deux systèmes (système non linéaire et son système linéarisé) au voisinage des points stationnaires peuvent être complètement différents.

Remarque 5. *Dans le cas d'un centre ($Re(\lambda) = 0$) pour le système (1.6), le point stationnaire du système (1.3) est soit un centre, soit un foyer. Pour trouver sa nature il faudra faire une étude plus poussée.*

Exemple 5.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.7)$$

$(0, 0)$ est un point stationnaire de système (1.7).

La linéarisation du système (1.7) montre que l'origine est un centre, mais l'étude de ce système montre que l'origine est un foyer stable. En effet, par passage aux coordonnées polaires, le système (1.7) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

On a θ croissant et tend vers l'infini quand t tend vers l'infini, et r est décroissant. Ceci signifie que l'origine est un foyer stable.

CHAPITRE

2

MODÈLES DÉMOGRAPHIQUES D'UNE SEULE POPULATION

Ce chapitre est consacré à l'étude des modèles les plus classiques de la *dynamique des populations* isolées, utilisés en biomathématique.

Une *population* est un ensemble d'individus définis par les mêmes critères mais possédant diverses valeurs pour différents attributs. La caractéristique principale d'une population est donc sa *taille* qui est le nombre d'individus constituant cette population [6].

L'étude de la dynamique des populations s'intéresse à l'évolution de la taille d'une population au cours du temps.

2.1 Modèle de Malthus

Le modèle de Malthus [1]-[3], [13] dit aussi le modèle exponentiel (dont on verra ci-dessous l'origine de cette appellation) est l'un des premiers modèles de la dynamique des populations, proposé par l'économiste britannique Tomas Robert Malthus en 1798, pour décrire l'évolution d'une populations dans le temps. Les hypothèses posées par Malthus dans son modèle sont les suivantes :

- Il considère une population de taille $N(t)$ à l'instant t , dont il n'y a aucune différence entre les individus.
- les taux de natalité et de mortalité sont constants.
- le taux de migration des individus est négligable.

L'hypothèse de base de Malthus est la suivante :

- Le nombre de naissances N_n et le nombre de décès N_m sont proportionnels à la taille de population N , c'est-à-dire

$$N_n(t) = bN(t) \quad \text{et} \quad N_m(t) = dN(t).$$

avec :

- $b \geq 0$, est le taux de natalité.
- $d \geq 0$, est le taux de mortalité.

Dans un intervalle de temps Δt , on a

$$N(t + \Delta t) - N(t) = (N_n(t) - N_m(t)) \Delta t. \quad (2.1)$$

Autrement dit

$$N(t + \Delta t) - N(t) = kN(t)\Delta t.$$

où $k = b - d$. Le coefficient de proportionnalité k , est appelé *le coefficient de Malthus*.

En divisant les deux membres de l'équation (2.1) par Δt , on aura

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = kN(t),$$

Par passage à la limite quand Δt tend vers 0, on obtient :

$$N'(t) = kN(t). \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) est une équation différentielle linéaire autonome du premier ordre.

2.1.1 Résolution analytique du Modèle de Malthus

Pour résoudre l'équation (2.2) concrètement, il suffit de connaître la valeur de $N(t)$ à un instant t donné. On suppose donc que N_0 est la taille de la population à l'instant $t = 0$ c'est-à-dire $N(0) = N_0$.

Il s'agit donc de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} N'(t) = kN(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

où la fonction N définie de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ et continue.

On a l'équation (2.2) est équivalente à

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k,$$

Par passage à l'intégral, on aura

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)} dt = \int k dt.$$

Ainsi

$$\ln(N(t)) = kt + c_1,$$

avec $c_1 \in \mathbb{R}$. Ceci est équivalent à

$$N(t) = c_2 e^{kt}, \quad (2.4)$$

où $c_2 = e^{c_1}$. On remplace $N(t)$ dans (2.4) par la condition initiale $N(0) = N_0$, on obtient $c_2 = N_0$.

D'où l'unique solution du problème de Cauchy (2.3) est :

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

On comprend mieux maintenant grâce à l'expression de $N(t)$ d'où vient l'appellation « modèle exponentiel ».

2.1.2 Représentation graphique de la solution du modèle de Malthus

Le comportement de la solution $N(t)$ change selon le signe de k .

La figure 2.1 qui suit représente la variation de la taille de la population en fonction du temps, pour des différentes valeurs de k . On a réalisé la figure 2.1 grâce à l'algorithme suivant qu'on a écrit avec Maple :

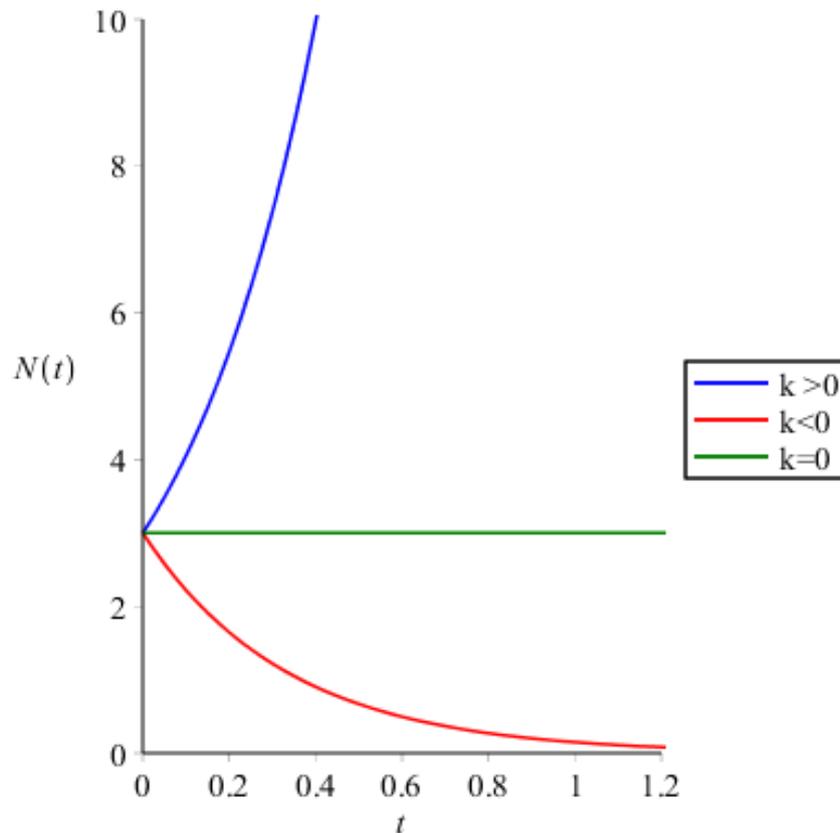


FIGURE 2.1 – Variation de N en fonction de t pour $k > 0$, $k < 0$ et $k = 0$.

```

> g := x -> 3 exp(3 .x) :
> a := plot(g(x), x = 0 .. .5, y = 0 .. .20, color = blue) :
> k := x -> 3 exp(-3 .x) :
> b := plot(k(x), x = 0 .. .5, y = 0 .. .20, color = red) :
> s := x -> 3 :
> c := plot(s(x), x = 0 .. .5, y = 0 .. .20, color = black) :
> with(plots) :
> display(a, b, c)

```

2.1.3 L'interprétation des graphes

On remarque à travers la figure 2.1 que la taille de la population augmente de manière exponentielle vers l'infini lorsque le nombre de natalité est supérieur au nombre de mortalité, et reste constant si le nombre de natalité est égal au nombre de mortalité. Par ailleurs on constate une extinction de la population lorsque le nombre de natalité est inférieur au nombre de mortalité.

2.1.4 Temps de doublement et le temps de demi-vie

Dans la phase de développement d'un organe, les cellules mères se divisent en deux cellules filles au bout d'un temps T , c'est-à-dire si N_0 est le nombre de cellules à l'instant $t = 0$ alors aux temps $T, 2T, 3T, \dots$, le nombre de cellules sera respectivement $2N_0, 4N_0, 8N_0, \dots$,

On a obtenu précédemment la fonction :

$$N(t) = N_0 e^{k \cdot t}.$$

où k caractérise la rapidité de croissance ou de décroissance de la population.

Soit T le temps de l'évolution de la taille d'une population suivant le signe de k , comme suit :

- En doublant la taille de la population si $k > 0$. Dans ce cas T est dit *temps de doublement*.
- En diminuant de moitié la taille de la population si $k < 0$. Dans ce cas T est dit *temps de demi-vie*.

1) Détermination du temps de doublement et de demi-vie [6]

On a

$$N(t + T) = N_0 e^{k(t+T)}$$

Ce qui est équivalent à

$$N(t + T) = N_0 e^{kt} e^{kT}$$

Ainsi

$$N(t + T) = e^{kT} N(t).$$

Pour avoir le double de la taille d'une population donnée, c'est-à-dire

$$N(t + T) = 2N(t)$$

Il suffit donc de résoudre l'équation

$$e^{kT} = 2 \tag{2.5}$$

En appliquant la fonction logarithmique des deux côtés de l'égalité (2.5), on obtient

$$kT = \ln 2.$$

Ainsi

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

est le temps nécessaire pour que la taille d'une population $N(t)$ évolue à son double.

On constate qu'un faible taux de croissance k peut donc conduire à des augmentations énormes de la période T .

En remplaçant dans la fonction $N(t)$ le nombre k par $\frac{\ln 2}{T}$, on aura

$$N(t) = N_0 e^{\frac{t}{T} \ln 2}$$

On obtient ainsi une nouvelle expression de $N(t)$ dépendante du temps T :

$$N(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}.$$

On remarque :

- Si $t = 0$ on a $N(t) = N_0$,
- Si $t = T$ on a $N(t) = 2N_0$,
- Si $t = 2T$ on a $N(t) = 4N_0$,
- Si $t = 3T$ on a $N(t) = 8N_0$,
- \vdots

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, t = nT \Rightarrow N(nT) = 2^n N_0.$$

Donc à chaque fois qu'on attend T unités (le temps de doublement), la taille de la population N double.

De la même manière pour $k < 0$, on aura la moitié de la taille d'une population donnée lorsque

$$e^{kT} = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$T = -\frac{\ln 2}{k}.$$

est le temps nécessaire pour que la taille d'une population diminue à sa moitié.

En remplaçant dans la fonction de départ k par $-\frac{\ln 2}{T}$, on obtient :

$$N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

On constate alors que :

- Si $t = 0$ on a $N(t) = N_0$,
- Si $t = T$ on a $N(t) = \frac{1}{2}N_0$,
- Si $t = 2T$ on a $N(t) = \frac{1}{4}N_0$,
- Si $t = 3T$ on a $N(t) = \frac{1}{8}N_0$,
- \vdots

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, t = nT \Rightarrow N(nT) = \frac{1}{2^n}N_0.$$

Donc à chaque fois qu'on attend T unités (le temps de demi-vie) la taille de la population se divise ainsi par deux.

2.2 Le modèle logistique

Le modèle précédent (modèle exponentiel) est critiquable car il ne prend pas en considération plusieurs facteurs (exemple : la limitation des ressources) qui interviennent dans le développement des populations, et en général irréaliste pour une longue période. Le mathématicien belge Pierre François Verhulst inspiré par le modèle de Malthus a eu l'idée que la croissance d'une population devrait être limitée, en raison du milieu qui permet de nourrir que N^* individus, il proposa donc en 1836 le modèle logistique [1]-[3], [11], [13] sous les hypothèses suivantes :

- Le nombre d'individus de la population est limité par une valeur maximale $N^* \in \mathbb{R}^+$ qui est la capacité limite du milieu. Donc le nombre d'individus ne peut pas dépasser cette valeur quoi qu'il en soit.
- Les taux de natalité ou de mortalité ne sont pas constants pour la raison que, lorsque le nombre d'individus d'une population augmente, les ressources étant limitées, il résulte que le taux de natalité diminue avec l'effectif de la population ou le taux de mortalité augmente avec l'effectif.

On peut donc traduire et exprimer le taux de natalité par une fonction linéaire décroissante en effectif :

$$b(N) = b_0 - \alpha N,$$

où :

- les valeurs b_0 et α sont des constantes strictement positives.

• la valeur b_0 représente le taux de natalité à l'instant initial t_0 .

De même on définit le taux de mortalité par une fonction linéaire croissante en effectif :

$$d(N) = d_0 + \beta N,$$

où :

• les valeurs d_0 et β sont des constantes strictement positives.

• la valeur d_0 est le taux de mortalité à l'instant t_0 .

Dans ce cas, le coefficient de proportionalité k qui est égale à $b - d$, varie en fonction de N .

On le note alors $k(N)$.

On a

$$k(N) = b(N) - d(N).$$

Ceci est équivalent à

$$k(N) = (b_0 - \alpha N) - (d_0 + \beta N),$$

Ce qui implique

$$k(N) = (b_0 - d_0) - (\alpha + \beta)N.$$

Ainsi

$$k(N) = (\alpha + \beta) \left(\frac{b_0 - d_0}{\alpha + \beta} - N \right).$$

On pose

$$k_0 = \alpha + \beta,$$

et

$$N_1 = \frac{b_0 - d_0}{\alpha + \beta}.$$

On a ainsi

$$k(N) = k_0(N_1 - N)$$

On peut dire ainsi que $k(N)$ est proportionnel à N et on peut remarquer de même que $k(N)$ décroît avec la croissance de la taille N de la population.

On remplace k par $k(N)$ dans le modèle précédent (2.2), On obtient :

$$N'(t) = k_0(N_1 - N)N. \tag{2.6}$$

L'équation différentielle autonome non linéaire du premier ordre obtenue (2.6) est dite *l'équation de croissance logistique*.

- On a $k_0 > 0$ (car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$).
- On suppose que $b_0 > d_0$, pour dire que le taux de croissance intrinsèque ($b_0 - d_0$) est positif. D'où $N_1 > 0$.

2.2.1 Étude qualitative de l'équation logistique

Posons

$$f(N) = k_0(N_1 - N)N. \quad (2.7)$$

Alors

$$N'(t) = f(N(t)). \quad (2.8)$$

avec f une fonction de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

1) Les points stationnaires de l'équation (2.6)

On remarque que l'équation différentielle (2.8) admet deux points stationnaires, donnés par

$$f(N) = 0.$$

Ceci signifie que ces deux points stationnaires sont : $N = 0$ et $N = N_1$.

Pour étudier la stabilité de ces points, on linéarise l'équation (2.8) aux voisinages de ces points stationnaires.

2) Stabilité des points stationnaires de l'équation (2.6)

a) Stabilité du point stationnaire $N = 0$

On a la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Le point stationnaire $N = 0$ est instable pour le système (2.8).*

Preuve. 1^{ère} méthode :

Le développement de Taylor de la fonction f à l'ordre 1 donne

$$f(N) = f(0) + f'(0)N + \varepsilon(N),$$

où

$$\lim_{N \rightarrow 0} \varepsilon(N) = 0.$$

Comme $f(0) = 0$ (car $N = 0$ est un point stationnaire), alors

$$f(N) = f'(0)N + \varepsilon(N).$$

On obtient ainsi l'équation linéaire homogène suivante :

$$N'(t) = f'(0)N(t). \quad (2.9)$$

qui est bien une approximation linéaire de l'équation non linéaire (2.8) au voisinage du point stationnaire $N = 0$.

La solution générale de l'équation (2.9) est donnée par :

$$N(t) = ce^{f'(0)t}.$$

avec c une constante réelle.

Le comportement de la solution de l'équation (2.9) au voisinage du point stationnaire $N = 0$ dépendra donc du signe de $f'(0)$. D'après l'expression (2.7) on a

$$f'(N) = k_0N_1 - 2k_0N.$$

Donc

$$f'(0) = k_0N_1.$$

On a $f'(0)$ est strictement positive (car $k_0 > 0$ et $N_1 > 0$), ce qui implique que $N(t)$ croît de manière exponentielle. Par conséquent, l'origine ($N = 0$) est un point stationnaire instable pour l'équation (2.9).

Puisque $f'(0) \neq 0$ ($k_0 \neq 0$ et $N_1 \neq 0$), alors l'origine est un point stationnaire hyperbolique de (2.9), ce qui veut dire (d'après le théorème de Hartman-Grobman) que le comportement local (au voisinage de l'origine) des solutions de l'équation (2.6) est topologiquement équivalent au comportement local des solutions du système (2.9). D'où le point stationnaire $N = 0$ est aussi instable pour l'équation (2.6) (Figure 2.2).

2^{eme} méthode :

On peut tout simplement remarquer d'après l'équation (2.6) que

$$N' > 0 \quad \text{si} \quad N > 0,$$

et que

$$N' < 0 \quad \text{si} \quad N < 0.$$

Comme le deuxième cas est exclu, puisque $N > 0, \forall t > 0$, alors les solutions issues d'une condition initiale dans un certain voisinage du point $N = 0$ s'éloignent de ce point pour tout $t \geq 0$.

Par conséquent, le point $N = 0$ est instable pour l'équation (2.8). \square

b) Stabilité du point stationnaire $N = N_1$

Proposition 2.2.2. *Le point stationnaire $N = N_1$ est stable pour le système (2.8).*

Preuve. 1^{ère} méthode :

Posons le changement de variables suivant :

$$M(t) = N(t) - N_1.$$

Ainsi

$$M'(t) = N'(t).$$

En remplaçant $N'(t)$ par sa valeur dans l'équation (2.8), on obtient

$$M'(t) = f(N(t)),$$

où encore

$$M'(t) = f(M(t) + N_1).$$

Le développement de Taylor de $f(M(t) + N_1)$ au voisinage de $M = 0$ (donc au voisinage de $N = N_1$) donne :

$$M'(t) = f(N_1) + M(t)f'(N_1) + M(t)\varepsilon(M(t))$$

où

$$\lim_{M \rightarrow 0} \varepsilon(M) = 0$$

En tenant compte du fait que N_1 étant un point stationnaire de l'équation (2.8), on obtient :

$$M'(t) = M(t)f'(N_1) + M(t)\varepsilon(M(t))$$

Ainsi, l'équation linéaire :

$$M'(t) = M(t)f'(N_1) \tag{2.10}$$

est une approximation de l'équation (2.8) au voisinage du point stationnaire $N = N_1$.

On a

$$f'(N_1) = -k_0 N_1,$$

et k_0 étant strictement positif, alors $f'(N_1)$ est strictement négatif.

Par conséquent, le point stationnaire $N = N_1$ est stable pour l'équation (2.10).

D'après le théorème Hartman-Grobman, puisque $f'(N_1) \neq 0$ le comportement local (au voisinage de N_1) des solutions de l'équation (2.6) est topologiquement conjugué au comportement local des solutions du système (2.10). D'où le point stationnaire $N = N_1$ est aussi stable pour l'équation (2.6) (voir Figure 2.2).

2^{eme} méthode :

On peut constater d'après l'équation (2.6) que

$$N' > 0 \quad \text{si} \quad N < N_1,$$

et que

$$N' < 0 \quad \text{si} \quad N > N_1.$$

Ceci signifie que les solutions issues d'une condition initiale dans un certain voisinage du point $N = N_1$ s'approche de ce point pour tout $t \geq 0$.

Par conséquent, le point $N = N_1$ est stable pour l'équation (2.6). □

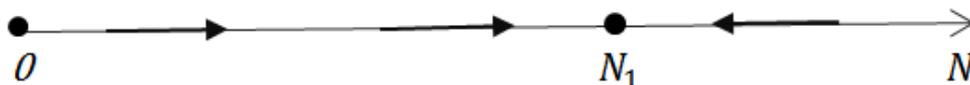


FIGURE 2.2 – Stabilité du point stationnaire $N = N_1$ et instabilité du point stationnaire $N = 0$ pour l'équation (2.6).

2.2.2 Étude analytique de l'équation logistique

1) Résolution de l'équation (2.6)

L'équation (2.6) est équivalente à

$$N'(t) - k_0 N_1 N(t) + k_0 N^2(t) = 0. \quad (2.11)$$

On remarque que l'équation (2.11) est de Bernoulli. Pour $N(t) \neq 0$, on divise l'équation (2.11) par $N^2(t)$ on obtient

$$N^{-2}(t)N'(t) - k_0 N_1 N^{-1}(t) + k_0 = 0. \quad (2.12)$$

Posons

$$P(t) = N^{-1}(t).$$

Alors

$$P'(t) = -N^{-2}(t)N'(t).$$

En remplaçant $P(t)$ et $P'(t)$ par leurs valeurs dans l'équation (2.12), on obtient

$$P'(t) + k_0 N_1 P(t) = k_0. \quad (2.13)$$

L'équation différentielle (2.13) est linéaire du premier ordre non homogène. La solution de cette équation est de la forme :

$$P(t) = P_0(t) + P_1(t).$$

où :

- $P_0(t)$ est la solution de l'équation sans second membre associé à l'équation (2.13).
- $P_1(t)$ est la solution particulière de (2.13).

Par la méthode de séparation des variables, la solution $P_0(t)$ est donnée par :

$$P_0(t) = C e^{-k_0 N_1 t},$$

avec C est une constante positive.

Pour trouver la solution particulière P_1 de l'équation différentielle (2.13), on utilise la méthode de la variation des constantes, c'est-à-dire on cherche $P_1(t)$ sous la forme :

$$P_1(t) = C(t) e^{-k_0 N_1 t}.$$

On a donc :

$$P_1'(t) = C'(t)e^{k_0 N_1 t} - k_0 N_1 C(t)e^{-k_0 N_1 t}.$$

En remplaçant $P(t)$ et $P'(t)$ dans l'équation (2.13), on obtient :

$$C'(t)e^{-k_0 N_1 t} - k_0 N_1 C(t)e^{-k_0 N_1 t} + k_0 N_1 C(t)e^{-k_0 N_1 t} = k_0,$$

C'est-à-dire

$$C'(t)e^{-k_0 N_1 t} = k_0.$$

D'où

$$C'(t) = k_0 e^{k_0 N_1 t}.$$

Par passage à l'intégrale, on obtient

$$C(t) = \int k_0 e^{k_0 N_1 t} dt.$$

C'est à dire que

$$C(t) = \frac{1}{N_1} e^{k_0 N_1 t} + k_1,$$

avec $k_1 \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$P_1(t) = \left(\frac{1}{N_1} e^{k_0 N_1 t} + k_1 \right) e^{-k_0 N_1 t}.$$

D'où la solution générale de l'équation (2.13) est donnée par

$$P(t) = \left(\frac{1}{N_1} e^{k_0 N_1 t} + C + k_1 \right) e^{-k_0 N_1 t},$$

avec

$$P(0) = \frac{1}{N_1} + C + k_1,$$

ce qui implique que

$$C + k_1 = P(0) - \frac{1}{N_1},$$

On aura donc

$$P(t) = \left(P(0) - \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_1} e^{k_0 N_1 t} \right) e^{-k_0 N_1 t}.$$

C'est-à-dire

$$P(t) = \left(P(0) - \frac{1}{N_1} \right) e^{-k_0 N_1 t} + \frac{1}{N_1}.$$

D'où

$$N(t) = \frac{N_1}{1 + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1 \right) e^{-k_0 N_1 t}}.$$

avec $N(0) = N_0$ la condition initiale, qui est la taille de la population du départ à l'instant $t_0 = 0$.

On appelle la solution $N(t)$ de l'équation (2.6) la *fonction Logistique*.

2) Représentation graphique de la solution de l'équation différentielle (2.6)

La monotonie de la fonction $N(t)$ dépend du signe de sa dérivée, c'est à dire de $f(N)$. Or

$$f(N) = -k_0 N(N - N_1)$$

donc :

- $f(N) > 0$ si $N < N_1$.
- $f(N) < 0$ si $N > N_1$.

Ceci signifie que :

- Si $N < N_1$, alors la fonction $N(t)$ est croissante.
- Si $N > N_1$, alors la fonction $N(t)$ est décroissante.

D'autre part, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_1}{1 + \left(\frac{N_1}{N_0} - 1\right)e^{-k_0 N_1 t}},$$

et comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-k_0 N_1 t} = 0,$$

ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = N_1.$$

On peut maintenant tracer le graphe de la fonction $N(t)$ en fonction du temps t .

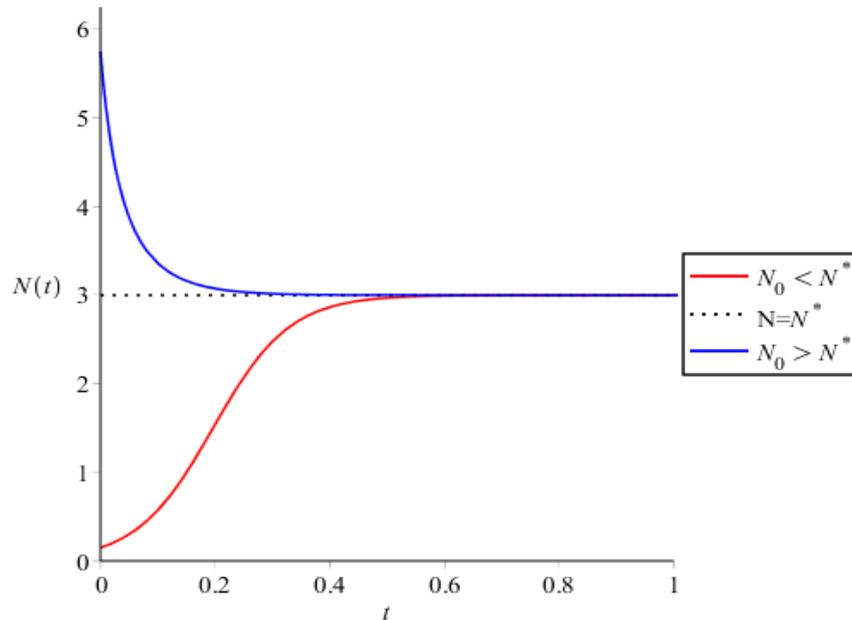


FIGURE 2.3 – La variation de la taille N en fonction de t pour $N_0 > N^*$ et $N_0 < N^*$ pour le modèle logistique.

Nous avons utilisé l'algorithme suivant pour tracer la figure (2.3).

```

> g := x -> 3 / (1 + ((3 / 0.15) - 1) * exp(-5 * 3 * x)) :
> g1 := plot(g(x), x = 0 .. 0.4, y = 0 .. 6) :
> f := x -> 3 :
> with(plots) : g2 := plot(f(x), x = 0 .. 0.4, y = 0 .. 5) :
> j := x -> 3 / (1 + ((3 / 5.75) - 1) * exp(-5 * 3 * x)) : g5 := plot(j(x), x = 0 .. 0.4, y = 0 .. 6) :
> display(g1, g2, g5)

```

3) Interprétation de la figure 2.3

On remarque sur la figure 2.3, lorsque t tend vers l'infini, la taille de la population converge vers le point stationnaire N_1 , qui n'est rien d'autre que la taille maximale de la population N^* .

2.2.3 Comparaison entre le modèle de Malthus et le modèle logistique (Malthus modifié) :

La figure 2.4 qui suit, nous permettra de détecter la différence entre le modèle de Malthus et le modèle logistique dans le cas où le taux de croissance est strictement positif.

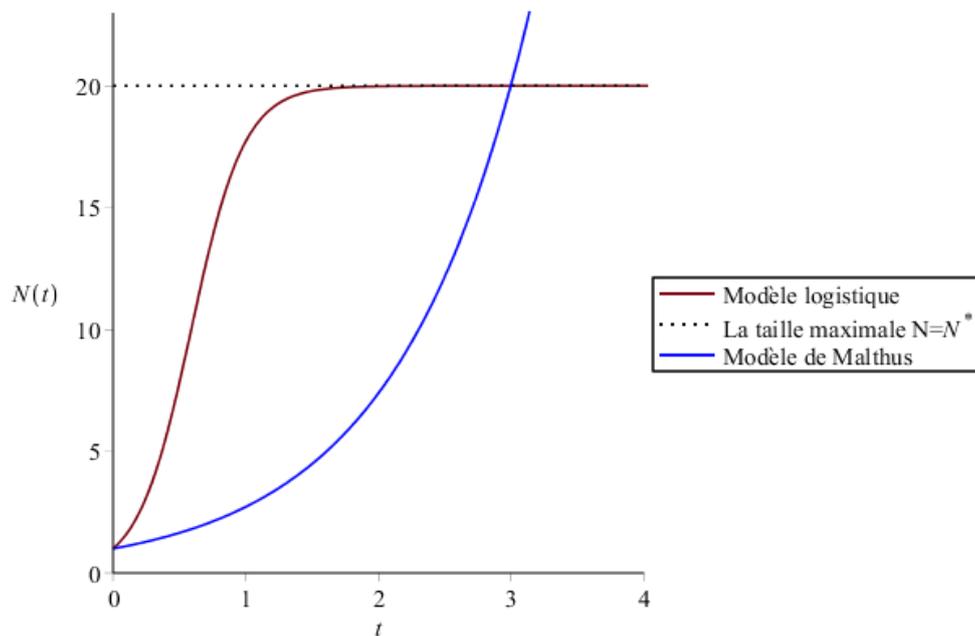


FIGURE 2.4 – Comparaison du modèle de Malthus et du modèle logistique.

Interprétation la figure 2.4

On remarque que d'après la figure 2.4 que le modèle de Malthus conduit à une explosion de la population, lorsque le taux de croissance k est positif. Par contre, selon le modèle logistique, la taille de la population va se stabiliser et converger vers une taille maximale dépendante du milieu, ce qui décrit mieux la réalité.

2.3 Le modèle de Gompertz

Le modèle de Gompertz [1],[2] est un modèle de la dynamique des populations qui a été introduit par le mathématicien britannique Benjamin Gompertz en 1825.

C'est l'un des modèles les plus employés en médecine (pour représenter la croissance de certains organismes, ainsi la croissance de tumeurs concréreuses), il s'agit d'un raffinement de la loi exponentielle.

Pour le modèle de Gompertz, le coefficient de proportionnalité k (défèni dans le modèle de Malthus) dépend de la taille N et évolue de manière logarithmique quand N tend vers l'effectif maximal N^* de la population. C'est-à-dire :

$$k(N) = \gamma(\ln(N^*) - \ln(N)),$$

Ce qui est équivalent à

$$k(N) = \gamma \ln \left(\frac{N^*}{N} \right).$$

où γ et N^* sont des constantes strictement positives, telles que γ est le taux de croissance intrinsèque et N^* est la capacité limite du milieu.

En remplaçant $k(N)$ dans (2.2), on obtient une nouvelle équation différentielle

$$N'(t) = \gamma N(t) \ln \left(\frac{N^*}{N(t)} \right). \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est appelée le *modèle de Gompertz*.

2.3.1 Étude qualitative du modèle de Gompertz

Posons

$$G(N) = \gamma N \ln \left(\frac{N^*}{N} \right).$$

1) Les points stationnaires de l'équation (2.14)

Les points stationnaires de l'équation différentielle (2.14) sont donnés par l'équation

$$G(N) = 0$$

Ce qui implique que

$$N = 0 \text{ ou } \ln\left(\frac{N^*}{N}\right) = 0.$$

C'est-à-dire

$$N = 0 \text{ ou } N = N^*$$

L'équation (2.14) possède donc deux points stationnaires, l'origine et la capacité limite N^* .

2) Stabilité des points stationnaires de l'équation (2.14)

Proposition 2.3.1. *Le point stationnaire $N = 0$ est instable et le point stationnaire $N = N^*$ est stable pour l'équation (2.14).*

Preuve. a) **Stabilité du point stationnaire $N = 0$:**

La fonction G n'est pas définie à l'origine, mais on peut calculer sa limite. On a
on a

$$\lim_{N \rightarrow 0} G(N) = +\infty$$

Par conséquent, l'origine est un point stationnaire instable pour l'équation (2.14). Ceci qui signifie que toute condition initiale proche du point $N = 0$ donne lieu à une augmentation (puisque $N'(t) > 0$ pour tout N telle que $0 < N < N^*$) de l'effectif, et donc à une solution qui s'éloigne de $N = 0$.

b) **Stabilité du point stationnaire $N = N^*$:**

On a

$$\ln\left(\frac{N^*}{N}\right) > 0 \quad \text{si } N < N^*,$$

et

$$\ln\left(\frac{N^*}{N}\right) < 0 \quad \text{si } N > N^*.$$

Comme $\gamma > 0$ et $N^* > 0$, alors,

$$G(N) > 0 \quad \text{si } N < N^*,$$

et

$$G(N) < 0 \quad \text{si } N > N^*.$$

Autrement dit,

$$N' > 0 \quad \text{si } N < N^*,$$

et

$$N' < 0 \quad \text{si} \quad N > N^*.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation (2.14) issues d'un certain voisinage du point $N = N^*$ tend vers celui-ci.

On déduit alors que le points stationnaire $N = N^*$ est stable. □

2.3.2 Étude analytique du modèle de Gompertz

1) Résolution de l'équation (2.14)

Pour résoudre l'équation (2.14), on pose le changement de variables suivant :

$$u(t) = \ln \left(\frac{N(t)}{N^*} \right).$$

Donc

$$u'(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}.$$

On remplace $u(t)$ et $u'(t)$ dans (2.14), on aura

$$u'(t) = -\gamma u(t),$$

Ce qui implique, lorsque $u(t) \neq 0$, que

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -\gamma,$$

On calcule la primitive des deux membres de cette dernière égalité, on trouve

$$\ln |u(t)| = -\gamma t + c,$$

où c est une constante dans \mathbb{R} .

En passant à l'exponentiel, on obtient

$$|u(t)| = e^{-\gamma t + c}.$$

Ainsi

$$u(t) = ke^{-\gamma t}.$$

où $k = \pm e^c$. D'après le changement de variable précédent, on a donc

$$\ln \left(\frac{N(t)}{N^*} \right) = ke^{-\gamma t}.$$

D'où

$$N(t) = N^* \exp(k \exp(-\gamma t)),$$

qui est la solution de l'équation différentielle (2.14).

En prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$, on obtient $k = \ln\left(\frac{N_0}{N^*}\right)$.

D'où la solution exacte du modèle de Gompertz (2.14) (voire Figure 2.5) est

$$N(t) = N^* \exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{N^*}\right) \exp(-\gamma t)\right).$$

2) Représentation graphique de la solution du modèle de Gompertz

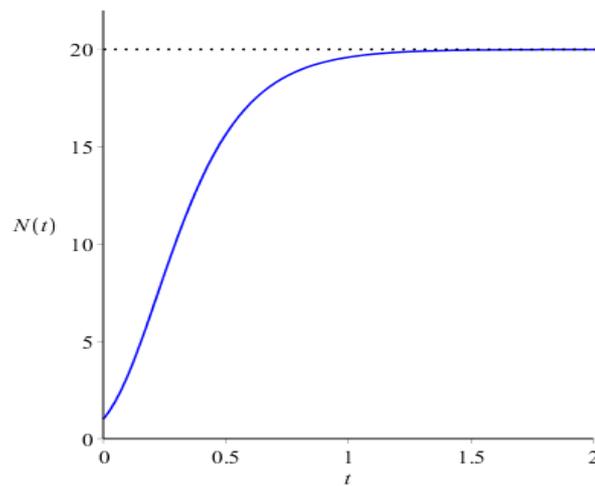


FIGURE 2.5 – La solution de l'équation Gompertz.

On a tracé la figure 2.5 avec le logiciel Maple en utilisant l'algorithme suivant :

```
> f := x -> 20 :  
> f1 := plot(f(x), x = 0 .. 5, y = 0 .. 30, color = black) :  
> G := x -> 20 * exp(log(1/20) * exp(-5 * x)) :  
> G1 := plot(G(x), x = 0 .. 5, y = 0 .. 30, color = blue) :  
> with(plots) :  
> display(f1, G1)
```

3) Interprétation de la figure 2.5

Après l'analyse de la figure 2.5, on constate que lorsque t tend vers l'infini, la taille de la population converge vers le point stationnaire N^* qui représente la taille maximale de la population.

2.3.3 Comparaison entre le modèle de Verhulst et le modèle de Gompertz

Afin de comparer, On trace une solution du modèle de Verhulst et une autre du modèle de Gompertz issue d'une même condition initiale.

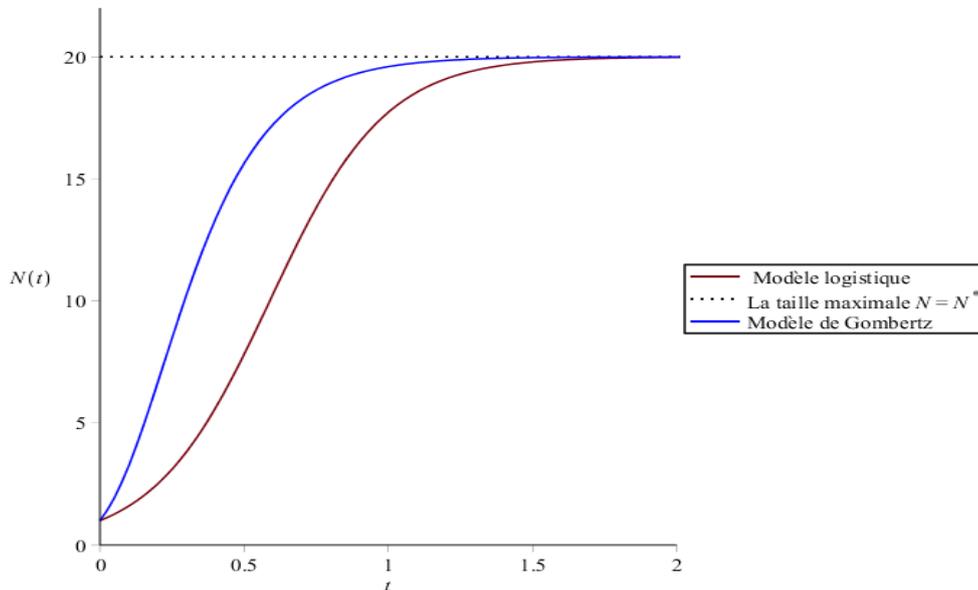


FIGURE 2.6 – Comparaison des solutions de l'équation de Gompertz et l'équation logistique issues de la condition initiale $N_0 = 1$.

Interprétation de la figure 2.6

On observe un comportement similaire des deux équations, c'est-à-dire l'équation de Gompertz possède un comportement dynamique qualitativement équivalent à celui de l'équation de croissance logistique. On constate aussi que le modèle de Gompertz a une croissance plus rapide que celle du modèle logistique.

2.4 Cas général des modèles démographiques d'une seule population

Les modèles de la croissance démographique pour une seule population (une population isolée) sont des équations différentielles non linéaires, autonomes de premier ordre. Leur forme général est décrite par [11], [13], :

$$N'(t) = g(N(t)), \tag{2.15}$$

avec une condition initiale $N(t_0) = N_0$, où g est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 .

Les états d'équilibres (les points stationnaires) de la croissance démographique sont donnés par les solutions de l'équation

$$g(N) = 0.$$

Soit \bar{N} un état d'équilibre (point stationnaire de (2.15))

Pour décrire le comportement des solutions de (2.15) au voisinage du point stationnaire $N = \bar{N}$, on linéarise l'équation (2.15) au voisinage de ce point. Pour cela on pose le changement de variables suivant :

$$n(t) = N(t) - \bar{N}.$$

On remplace ce changement de variables dans (2.15), ceci donne

$$n'(t) = g(n(t) + \bar{N}).$$

Comme g est de classe \mathcal{C}^1 , d'après la formule de Taylor à l'ordre 1, on a

$$g(\bar{N} + n) = g(\bar{N}) + ng'(\bar{N}) + n\varepsilon(n).$$

où $\varepsilon(n)$ est une fonction qui tend vers 0 quand n tend vers 0. Ainsi,

$$n'(t) = g(\bar{N}) + n(t)g'(\bar{N}) + n(t)\varepsilon(n(t)).$$

En tenant compte du fait que \bar{N} est un point stationnaire de l'équation (2.15), c'est-à-dire $g(\bar{N}) = 0$, on obtient

$$n'(t) = n(t)g'(\bar{N}) + n(t)\varepsilon(n(t)).$$

Dans un certain voisinage du point $n = 0$, le terme $n\varepsilon(n)$ est négligeable devant la partie linéaire $ng'(\bar{N})$ lorsque celle-ci est non nulle.

On a les deux cas suivants selon les valeurs de $g'(\bar{N})$:

1^{er} cas :

Si $g'(\bar{N}) = 0$, on ne peut pas conclure sur la stabilité du point de stationnaire $N = \bar{N}$ par cette étude. On doit alors faire une étude plus poussée pour pouvoir déduire la stabilité de ce point pour l'équation (2.15).

2^{eme} cas :

Si $g'(\bar{N}) \neq 0$, alors le point stationnaire \bar{N} est un point hyperbolique de (2.15). Ainsi la

stabilité de \bar{N} dépendra du signe de $g'(\bar{N})$.

Dans ce cas, deux situations sont possibles indiquées dans la proposition suivante :

Proposition 2.4.1. *Le point stationnaire $N = \bar{N}$ est stable si $g'(\bar{N}) < 0$ et instable si $g'(\bar{N}) > 0$.*

Preuve. 1) Si $g'(\bar{N}) < 0$ alors $N = \bar{N}$ est un point stationnaire stable (voir Figure 2.7) ; en effet :

Lorsque

$$N > \bar{N},$$

on a

$$n > 0.$$

Donc

$$ng'(\bar{N}) < 0,$$

ce qui implique que

$$n' < 0.$$

Puisque $n' = N'$, alors

$$N' < 0.$$

De même, on montre que si

$$N < \bar{N},$$

alors,

$$N' > 0.$$

D'où les solutions de l'équation (2.15) issues de conditions initiales dans un certain voisinage de $N = \bar{N}$ vont s'approcher de part et d'autre de ce point.

On déduit donc que le point stationnaire $N = \bar{N}$ est stable pour l'équation (2.15).

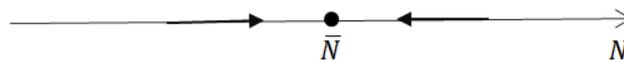


FIGURE 2.7 – Stabilité du point stationnaire $N = \bar{N}$ pour l'équation (2.15).

2) Si $g'(\bar{N}) > 0$ alors le point stationnaire instable $N = \bar{N}$ est (voir Figure 2.8); en effet :

$$\text{si } N > \bar{N} \text{ alors } N' > 0,$$

et

$$\text{si } N < \bar{N} \text{ alors } N' < 0.$$

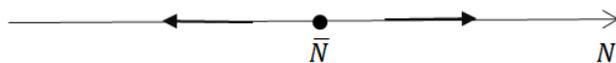


FIGURE 2.8 – Instabilité du point stationnaire $N = \bar{N}$ pour l'équation (2.15).

D'où les solutions de l'équation (2.15) issues d'un certain voisinage de point $N = \bar{N}$ vont s'éloigner de ce point. \square

CHAPITRE

3

MODÈLE DÉMOGRAPHIQUE DE DEUX POPULATIONS EN INTERACTION

Jusqu'à présent, nous avons vu la dynamique d'une population isolée ; nous nous intéressons maintenant dans ce chapitre à la dynamique de deux populations en interaction. Plus précisément, nous allons nous intéresser au modèle de lotka-Volterra.

3.1 Petite histoire

L'un des premiers modèles dans la littérature sur l'interaction de deux populations est dû au physico-chimiste américain Alfred James Lotka.

En 1925, Lotka modélise dans un contexte de cinétique chimique une population d'animaux herbivores (qu'il considère comme première population), et qui se nourrissent de plantes (qu'il considère comme deuxième population), par un système de deux équations différentielles.

Par ailleurs, le biologiste (zoologiste) italien Umberto D'Ancona a constaté après la première guerre mondiale (1914-1918) (période durant laquelle la pêche avait été diminuée) que le nombre de poissons prédateurs était plus élevé que dans les années qui précèdent la guerre, contrairement au nombre de poissons proies. Il demanda alors au mathématicien italien Vit-Volterra (qui s'intéresse à la dynamique des populations) son avis mathématique pour la cause de ce phénomène [18].

En 1926, Volterra avait publié son premier ouvrage où il présente le même modèle que celui de Lotka sans connaître le travail de ce dernier, c'est pour cela que le modèle est appelé modèle de *mdèle de Lotka-Volterra*.

3.2 Modèle de deux populations en interaction

Considérons deux populations en interaction d'effectifs U et V qui se modélise en un système de deux équations différentielles ordinaires non-linéaires, dont le second membre de chaque une d'elles est composée de deux termes, où le premier $f(U)$ pour la première équation différentielle (respectivement $g(V)$ pour la deuxième) correspond à la croissance de la population isolée, et le second terme $h(U, V)$ (respectivement $k(U, V)$) correspond à l'interaction entre les deux populations.[1]-[3], [11], [13]

Ceci conduit d'une manière générale au modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{U} = f(U) + h(U, V) \\ \dot{V} = g(V) + k(U, V) \end{cases}$$

Le choix des fonctions $h(x, y)$ et $k(x, y)$ dépend de la nature de l'interaction entre les deux populations.

Nous allons nous intéresser ici à l'interaction proies-prédateurs (plus précisément le modèle de Lotka-Volterra), dont l'une des populations à un effet positif sur la croissance de l'autre, mais on a l'effet inverse dans l'autre sens.

3.3 Modèle de Lotka-Volterra

Pour le modèle de Lotka-Volterra, plusieurs hypothèses sont imposées sur la dynamique des deux populations proies-prédateurs telles que :

- Le nombre de proies croît de manière exponentielle en absence des prédateurs, car on suppose que le seul facteur qui intervient dans leur croissance est la présence de prédateurs.
- L'effectif de la population prédateur décroît de manière exponentielle en absence de proies, car on suppose que le nombre de prédateurs est limité par la quantité de proies dont ils disposent.
- Le nombre de rencontres entre les proies et les prédateurs est proportionnel aux deux effectifs (proies et prédateurs) qu'on suppose aussi proportionnel au produit des deux effectifs.
- Le nombre de rencontres favorise les prédateurs et défavorise les proies, c'est-à-dire que le taux de disparition des proies et le taux de croissance des prédateurs se produisent par ces rencontres proies-prédateurs.

Avec ces hypothèses, le modèle de Lotka-Volterra s'écrit sous la forme du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{U} = \alpha U - \beta UV, \\ \dot{V} = -\gamma V + \delta UV. \end{cases} \quad (3.1)$$

où α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$, avec :

α : représente le taux de croissance des proies en absence des prédateurs.

β : représente le taux de proies chassés par les prédateurs et le signe $(-)$ qui précède le terme βUV est justifié du fait que le nombre de rencontre défavorise les proies.

γ : représente le taux de mortalité naturelle des prédateurs en absence des proies.

δ : représente le taux de croissance des prédateurs qui n'est pas nécessairement égale au taux de proies chassées.

Le système (3.1) peut se factoriser et s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{U} = U(\alpha - \beta V); \\ \dot{V} = V(\delta U - \gamma); \end{cases} \quad (3.2)$$

On peut trouver quelques fonctions qui vérifient ce système différentiel, mais on ne peut pas trouver l'expression explicite de sa solution, pour cela on utilise l'étude qualitative pour connaître le comportement des solutions du système (3.2).

3.4 Étude qualitative du système de Lotka-Volterra

1) Les isoclines du système (3.2)

a) Isocline verticale : elle est donnée par l'équation

$$\dot{U} = 0,$$

c'est à dire

$$U(\alpha - \beta V) = 0.$$

Donc

$$U = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha - \beta V = 0.$$

D'où

$$U = 0 \quad \text{ou} \quad V = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ainsi l'isocline verticale du système (3.2) est constituée de la réunion de l'axe des ordonnées ($U = 0$) avec la droite horizontale d'équation $V = \frac{\alpha}{\beta}$.

b) Isocline horizontale : elle est donnée par l'équation

$$\dot{V} = 0,$$

c'est à dire

$$V(\delta U - \gamma) = 0.$$

Alors

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad \delta U - \gamma = 0.$$

Ainsi

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad U = \frac{\gamma}{\delta}.$$

D'où l'isocline horizontale du système (3.2) est constituée de la réunion de l'axe des abscisses ($V = 0$) avec la droite verticale $U = \frac{\gamma}{\delta}$.

2) Le champ de vecteurs du système (3.2) sur les isoclines

Le sens du champ de vecteurs sur les isoclines du système (3.2) est comme suit :

a) Sur l'isocline verticale :

• On a pour $U = 0$, $\dot{V} < 0$. Donc le champ de vecteurs sur cette isocline verticale est dirigé vers le bas.

• De même pour la seconde partie de l'isocline verticale $V = \frac{\alpha}{\beta}$, on a

$$\dot{V} > 0,$$

c'est-à-dire

$$V(\delta U - \gamma) > 0.$$

Ainsi

$$\delta U - \gamma > 0.$$

Donc

$$U > \frac{\gamma}{\delta}.$$

D'où le sens du champ de vecteurs sur cette partie de l'isocline est dirigé vers le haut dans la partie droite du point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$, et est dirigé vers le bas dans la partie gauche de ce point.

b) Sur l'isocline horizontale :

• Pour $V = 0$ on a $\dot{U} > 0$. Donc le champ de vecteurs sur cette isocline est dirigé vers la droite.

• Pour la deuxième partie de l'isocline horizontale $U = \frac{\gamma}{\delta}$, on a

$$\dot{U} > 0,$$

c'est-à-dire

$$U(\alpha - \beta V) > 0.$$

Donc

$$\alpha - \beta V > 0.$$

D'où

$$V < \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ainsi le sens du champ de vecteurs du système (3.2) sur cette isocline est dirigé vers la droite, dans la partie située en bas du point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$, et est dirigé vers la gauche, dans la partie située en haut de ce point.

L'étude précédente nous permet de tracer le schéma de la figure 3.1 :

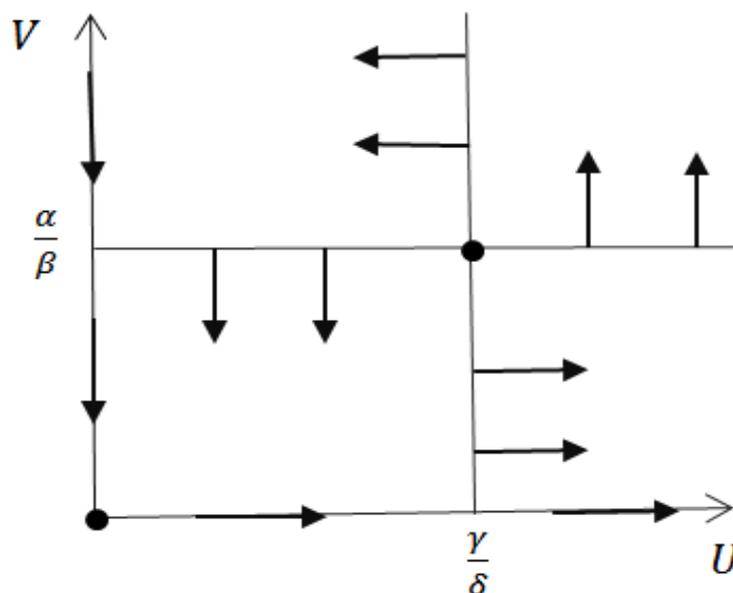


FIGURE 3.1 – Isoclines et champ de vecteurs sur les isoclines du modèle de Lotka-Volterra (3.2) dans le premier quadrant du plan.

On a la proposition suivante :

Proposition 3.4.1. *Le premier quadrant du plan est invariant par le système (3.2).*

Preuve. :

On a les deux axes de coordonnées $U = 0$ et $V = 0$ sont des solutions du système (3.2), et comme les fonctions $f(U)$, $g(V)$, $h(U, V)$ et $k(U, V)$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , alors d'après le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle ordinaire, plus précisément l'unicité des solutions, on en déduit que les trajectoires du système (3.2) ne coupent pas les axes. Ceci signifie que toute trajectoire du système (3.2) issue d'une condition initiale dans le premier quadrant du plan reste dans ce quadrant pour tout $t > 0$. On en déduit que le premier quadrant du plan est invariant par le système (3.2). \square

3) Les points stationnaires et leurs stabilité

Proposition 3.4.2. *Le modèle de Lotka-Volterra admet deux points stationnaires, l'origine qui est un col et le point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ qui est un centre.*

Preuve. Le modèle de Lotka-Volterra (3.2) possède deux points stationnaires : le point $(0, 0)$ qui correspond à l'absence des proies et des prédateurs, ainsi que le point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ qui est non-trivial et qui appartient au premier quadrant du plan.

Pour étudier la stabilité de ces deux points stationnaires, on utilise la linéarisation du système (3.2).

La matrice jacobienne associée au système (3.2) en un point (U^*, V^*) est donnée par

$$J_{(U^*, V^*)} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta V^* & -\beta U^* \\ \delta V^* & \delta U^* - \gamma \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice jacobienne associée au système (3.2) au point stationnaire $(0, 0)$ est :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

La matrice $J_{(0,0)}$ est diagonale et admet deux valeurs propres distinctes et de signes opposés ; en effet

$$\lambda_1 = \alpha > 0, \quad \lambda_2 = -\gamma < 0.$$

On en déduit donc que l'origine est un col, c'est-à-dire instable.

De même, la matrice jacobienne associée au système (3.2) au point stationnaire $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ est donné par

$$J_{(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a la matrice $J_{(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})}$ admet deux valeurs propres purement imaginaires $\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}$.

La linéarisation prévoit des centres autour du point stationnaire $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre. Par contre le théorème de linéarisation de Hartman-Grobman ne permet pas de conclure si ce point stationnaire est aussi un centre pour le système non linéaire (3.2).

Pour étudier la stabilité du point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ pour le système (3.2), on va chercher l'existence

d'une intégrale première du système (3.2).

On a pour $U \neq \frac{\gamma}{\delta}$ et $V \neq 0$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{U(\alpha - \beta V)}{V(\delta U - \gamma)}.$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{\delta U - \gamma}{U} dU = \frac{\alpha - \beta V}{V} dV,$$

ou encore à

$$\left(\delta - \frac{\gamma}{U}\right) dU = \left(\frac{\alpha}{V} - \beta\right) dV. \quad (3.3)$$

On intègre les deux membre de l'équation (3.3), on obtient

$$\delta U - \gamma \ln U = \alpha \ln V - \beta V + k.$$

où k est une constante de \mathbb{R} .

On pose

$$H(U, V) = \delta U - \gamma \ln U - \alpha \ln V + \beta V.$$

Les trajectoires du système (3.2) sont donc données par les courbes de niveaux de la fonction H .

Montrons maintenant que H admet un extremum en point $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

Comme H est de classe \mathcal{C}^2 , on utilise le développement en série de Taylor à l'ordre deux au voisinage de ce point, on aura :

$$H(U, V) = H\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\partial H}{\partial U}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(U - \frac{\gamma}{\delta}\right) + \frac{\partial H}{\partial V}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(V - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial U^2}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(U - \frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial U \partial V}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(U - \frac{\gamma}{\delta}\right) \left(V - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial V^2}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(V - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \|(U - \frac{\gamma}{\delta}, V - \frac{\alpha}{\beta})\| R\left(\left(U - \frac{\gamma}{\delta}\right), \left(V - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right).$$

où $R(u, v)$ est le reste du développement de Taylor vérifiant

$$\lim_{\|(u,v)\| \rightarrow (0,0)} R(u, v) = 0.$$

Puisque

$$H(U, V) = k,$$

on a

$$\frac{\partial H}{\partial U}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial V}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0.$$

On a aussi

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U^2}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\delta^2}{\gamma}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial V^2}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\beta^2}{\alpha},$$

et

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U \partial V}\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0.$$

Donc

$$H(U, V) = H\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\delta^2}{2\gamma}(U - \frac{\gamma}{\delta})^2 + \frac{\beta^2}{2\alpha}(V - \frac{\alpha}{\beta})^2 + R\left(\left(U - \frac{\gamma}{\delta}\right)^3, \left(V - \frac{\alpha}{\beta}\right)^3\right).$$

Comme le reste $R(u, v)$ est négligeable devant le terme

$$H\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\delta^2}{2\gamma}(U - \frac{\gamma}{\delta})^2 + \frac{\beta^2}{2\alpha}(V - \frac{\alpha}{\beta})^2$$

lorsque celui ci n'est pas nul, alors pour tout point (U, V) dans un voisinage du point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ on a :

$$H(U, V) - H\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) > 0.$$

Par conséquent la fonction H présente un minimum local en $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Ceci montre que les courbes de niveaux $H(U, V) = k$ se referment au voisinage du point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$, ce qui implique que les trajectoires du modèle de Lotka Volterra sont des cycles (solution périodique), c'est-à-dire le point stationnaire $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ est un centre pour le système non linéaire (3.2) (figure 3.2). □

5) Portrait de phase du système (3.2)

Le portrait de phase du système (3.2) est présenté sur la figure 3.2. On a tracé cette

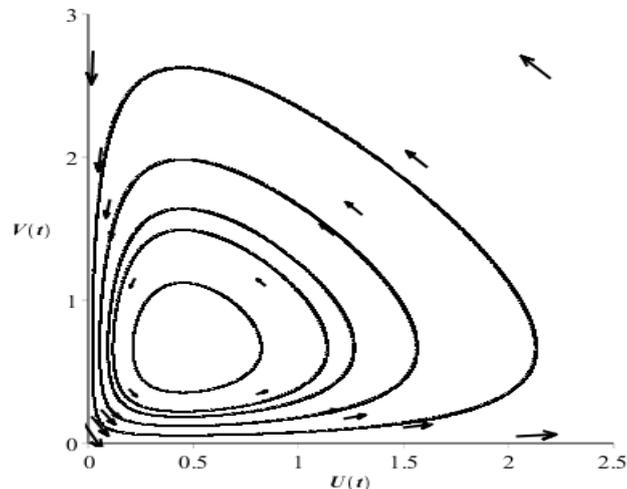


FIGURE 3.2 – Portrait de phase du modèle de Lotka Volterra dans le 1^{er} quadrant du plan.

figure 3.2 grâce au programme qu'on a écrit sous Maple, qui est le suivant

```

> with(DEtools) : with(plots) :
Q := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · 0.5 - 0.75 · y(t) · x(t), D(y)(t) = y(t) · (0.80 · x(t) - 0.36)], [x(t), y(t)], t = -500
..500, [[x(0) = 0.1, y(0) = 0.1]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = black, thickness = 1, dirfield
= [2, 2], arrows = smalltwo, size = 0.1, color = black, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC,
10]) :
H := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · 0.5 - 0.75 · y(t) · x(t), D(y)(t) = y(t) · (0.80 · x(t) - 0.36)], [x(t), y(t)], t = -500
..500, [[x(0) = 0.2, y(0) = 0.3]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = black, thickness = 1, dirfield
= [2, 2], arrows = smalltwo, size = 0.1, color = black, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC,
10]) :
R := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · 0.5 - 0.75 · y(t) · x(t), D(y)(t) = y(t) · (0.80 · x(t) - 0.36)], [x(t), y(t)], t = -500
..500, [[x(0) = 0.3, y(0) = 0.4]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = black, thickness = 1, dirfield
= [2, 2], arrows = smalltwo, size = 0.1, color = black, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC,
10]) :
S := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · 0.5 - 0.75 · y(t) · x(t), D(y)(t) = y(t) · (0.80 · x(t) - 0.36)], [x(t), y(t)], t = -500
..500, [[x(0) = 0.4, y(0) = 0.5]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = black, thickness = 1, dirfield
= [2, 2], arrows = smalltwo, size = 0.1, color = black, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC,
10]) :
Z := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · 0.5 - 0.75 · y(t) · x(t), D(y)(t) = y(t) · (0.80 · x(t) - 0.36)], [x(t), y(t)], t = -500
..500, [[x(0) = 0.13, y(0) = 0.2]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = black, thickness = 1, dirfield
= [2, 2], arrows = smalltwo, size = 0.1, color = black, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC,
10]) :
plots[display](Q, H, R, S, Z);

```

3.5 Graphes des deux composantes U et V de la solution du modèle de Lotka-Volterra

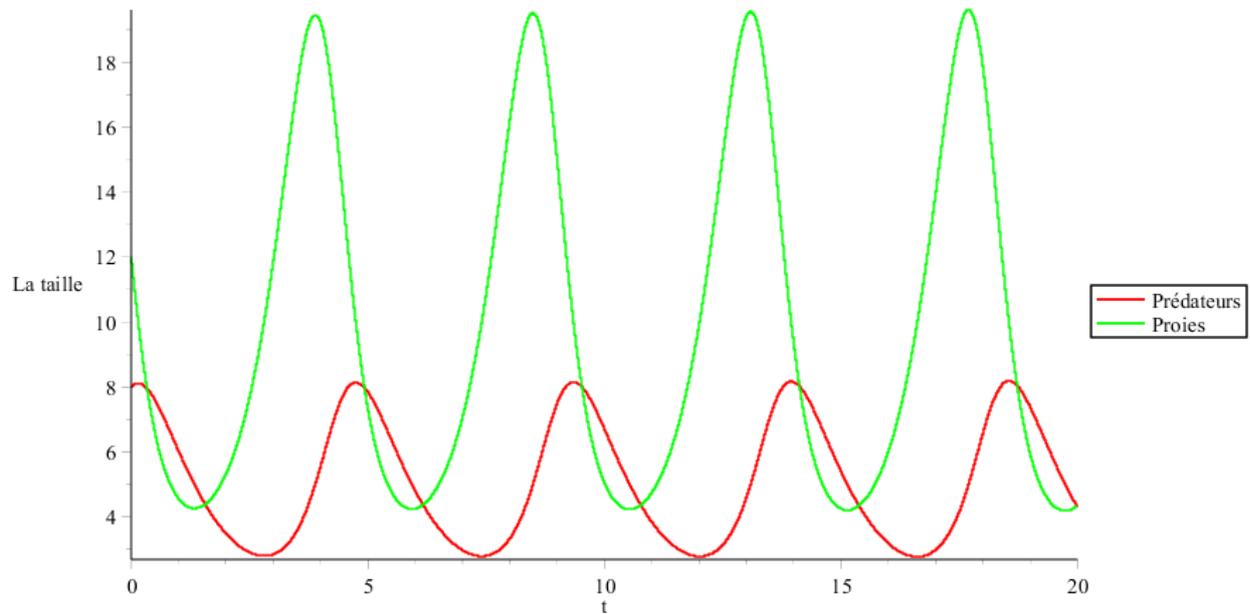


FIGURE 3.3 – Courbes de variations des populations de proies et de prédateurs en fonction du temps t .

On a tracé sur la figure 3.5 les composantes $U(t)$ et $V(t)$ de la solution du système (3.2) en fonction de temps t , issues de la condition initiale (U_0, V_0) , avec Maple, dont le programme est le suivant :

```

> LVEuler := proc(s0, r0, a, b, c, d, T, h)
  local i, s, r, k, L, predateur, prois :
  k :=  $\frac{T}{h}$ ;
  L := [seq(i*h, i = 0..k)];
  s := Matrix(k+1, 1);
  r := Matrix(k+1, 1);
  s(1, 1) := s0;
  r(1, 1) := r0;

  for i from 2 to k+1 do
    s(i, 1) := s(i-1, 1) + h*(a*s(i-1, 1) - b*s(i-1, 1)*r(i-1, 1));
    r(i, 1) := r(i-1, 1) + h*(-c*r(i-1, 1) + d*s(i-1, 1)*r(i-1, 1));
  od;
  with(plots) :

  predateur := plot([seq([L[i], r(i, 1)], i = 1..k+1)], color = red);
  prois := plot([seq([L[i], s(i, 1)], i = 1..k+1)], color = green);
  display([predateur, prois]);

  end;
> LVEuler(12, 8, 2, 0.4, 1, 0.1, 20, 0.001)

```

Interprétation des résultats

Les solutions du modèle de Lotka-Volterra sont périodiques dans un voisinage du point $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Ainsi une baisse de la taille des proies a provoqué également une baisse de la taille des prédateurs, ce qui est dû au manque de nourriture. Par la suite, cette diminution des prédateurs favorise une augmentation de l'effectif des proies en raison de manque de chasse, néanmoins les prédateurs se développent d'avantage à l'aide du développement de la taille des proies et inversement, c'est-à-dire que la taille des proies augmente pendant la diminution de la taille des prédateurs.

Au point stationnaire $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ les tailles des proies et des prédateurs demeurent constantes donc invariantes au fil du temps, ce qui justifie bien son nom de point d'équilibre.

CONCLUSION

À la lumière de cette étude, nous avons illustré l'utilité de la modélisation en mathématiques et vice-versa. La théorie des équations différentielles ordinaires nous a permis de faire une description qualitative et quantitative des systèmes biologiques, plus précisément des systèmes démographiques.

Les systèmes biologiques qui ont été étudiés dans ce mémoire sont composés soit d'une seule population tels que le modèle de Malthus, le modèle logistique de Verhulst et le modèle de Gompertz, soit de deux populations tel que le modèle de Lotka-Volterra. Il existe aussi des modèles mathématiques à plus de deux espèces, il serait intéressant de s'y intéresser d'avantage dans le cadre d'une étude plus approfondie du sujet.

Ce domaine des mathématiques appliquées a eu un rôle important dans la compréhension de la dynamique des phénomènes réels.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Auger, C. Lett, J-C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*, Dunod, 2010.
- [2] S. Bassaid, *Etude mathématique de quelques problèmes de dynamique des populations*, Thèse de Doctorat, Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen, 2017.
- [3] C. Bergeron, *Vision mathématique sur l'équilibre de la biodiversité*, Association mathématique du Québec, 2015.
- [4] Z. Bouderbala, *Solutions périodiques des équations différentielles ordinaires*, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar -Annaba-, 2016.
- [5] M. Brin, G. Suck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge university press, 2003.
- [6] G. Caselli, J. Vallin, G.Wunsch, *Demography : Analysis and Synthesis*, Elsevier, 2006.
- [7] H. Dang-Vu, C. Delcarte, *Bifurcations et chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Ellipse, 2000.
- [8] P. Etchecopar, C. Saint-Pierre, *Démarche de modélisation en mathématiques*, Activité pédagogique réalisée au Cégep de Rimouski.
- [9] E.Goncalvès, *Introduction aux systèmes dynamiques et chaos*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique De Grenoble, 2014.
- [10] J. Hubbard, B. West, *Differential equations : A dynamical systems approach*, Higher dimensional systems, Springer-Verlag, 1995.

- [11] J. Istas, *Introduction aux modélisations mathématiques pour les sciences du vivant*, Springer, 2000.
- [12] G.C. Layek, *An introduction of dynamical systems and Chaos*, Springer, 2015.
- [13] J.D Murray, *Mathematical Biology : An Introduction, Third Edition*, Springer, 2002.
- [14] G. Osipenko, *Dynamical systems graphe and algorithms*, Springer, 1889.
- [15] A. Pavé, *Modélisation des systèmes vivants*, Lavoisier, 2012.
- [16] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [17] A. Saglam, *Les équations différentielles en mathématiques et en Physique*, Thèse de doctorat, Université Josef Fourier, 2004.
- [18] Y.Takeuchi, *Global dynamical properties of lotka-volterra systems*, World Scientific, 1996.
- [19] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer Verlag, 2003.

Résumé

L'objectif de ce mémoire consiste à mettre en évidence l'importance et l'utilité de la modélisation mathématique pour mieux comprendre l'évolution de la dynamique d'une population isolée ou en interaction.

Ce contexte porte sur la théorie des équations différentielles ordinaires qui nous permettent de connaître les comportements des solutions des systèmes différentiels modélisant l'évolution démographique d'une certaine populations, en se focalisant sur les modèles suivants : le modèle de Malthus, le modèle logistique, le modèle de Gompertz et le modèle de Lotka-Volterra.