

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA-BEJAIA

FACULTE DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE Génie Electrique.

Mémoire de fin de cycle

*En vue de l'obtention du diplôme de master
en Automatique*

Spécialité : Automatique et systèmes

THEME

**PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES A
TEMPS OPTIMAL EN UTILISANT
L'APPROCHE PAR OPTIMISATION
CONVEXE**

Réalisé par:

M^{elle}. BENNICHE Kahina

M: BOUCHEFFA Yanis Larbi

Encadré par :

M: HADDAR Hocine

Examiné par :

M : Lehouche Hocine

Mme : Mezzah Samia

Année : 2017/2018

Remerciements

Dix-huit ans d'études vont être couronnés avec ce mémoire.

C'est grâce au grand Dieu tout puissant qui nous a donnés courage et patience que nous avons pu réaliser cette tâche.

Au terme de ce travail, nous tenons à exprimer notre gratitude et nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribués à sa réalisation.

Nous tenons à remercier les membres du jury, dont monsieur H. HADDAR, notre encadreur, pour ses conseils, son encouragement et sa disponibilité.

Nous présentons nos sincères remerciements à la famille BENNICHE et la famille BOUCHEFFA.

Nos profonds remerciements à nos amis qui ont témoigné de leurs amitiés, soutiens et sympathies

Nos profonds remerciements à tous nos professeurs qui nous ont accompagnés pendant ce parcours universitaire ainsi que l'administration et l'ensemble administratifs et collectifs

Et à toutes les personnes qui nous sont chères et qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en principe aux personnes les plus importantes de ma vie; mon père et ma mère qui ont été toujours présents pour moi pendant tout mon cursus et ma vie, mais surtout qui ont toujours su trouver les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient à aller de l'avant.

Je dédie ce mémoire à mon binôme YANIS sans lequel il n'aurait pas pu être réalisé.

Je dédie aussi ce travail à toute ma famille qui était toujours derrière moi pour me fortifier pendant mes moments difficiles, en particulier : Mes sœurs et mes frères.

Je veux dédier ce travail en particulier à mes chers amis qui ne m'ont jamais oubliés et qui étaient présents en cas de besoin: LATIFA, THANINA, LEILA, YANIS.

Enfin à toutes personnes qui me sont chères et que j'aime.

B/KAHINA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en principe aux personnes les plus importantes de ma vie ; ma mère et mon oncle et sa femme (ma tante) et au défunt (mon père) qui ont été présents pour moi pendant tout mon cursus et ma vie, mais surtout qui ont toujours su trouver les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient à aller de l'avant.

Je dédie ce mémoire à mon binôme KAHINA sans laquelle il n'aurait pas pu être réalisé.

Je dédie aussi ce travail à toute ma famille qui était toujours derrière moi pour me fortifier pendant mes moments difficiles, en particulier : Mes sœurs et mes frères, HAKIM, YAZID, NADJET, HASSINA et NOURA, HACHEMI, AMER, KAMILIA, DOUNA, DIHIA, NAIMA et KHADIRA.

Je veux dédier ce travail en particulier à mes chères amies qui ne nous ont jamais oubliés et qui étaient présents en cas de besoin : TIGHZERTH.L, OUARET.A, YANIS, HALIM, LYNDA, INTISSAR, et MERIEM.

Enfin à toutes personnes qui me sont chères et que j'aime.

BYANIS LARBI

Sommaire

Liste des notations

Liste des abréviations

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale.....1

Chapitre I : Notion fondamentales sur la robotique

I.1. Introduction.....3

I.2. Historique.....3

I.3. Définitions générales.....3

I.3.1. Définition du robot.....3

I.3.2.Schéma synoptique d'un robot manipulateur.....4

I.3.3.Constituants d'un robot.....4

I.3.4.Degré de liberté d'un robot.....6

I.3.5.Différents types de robots.....6

I.4. Domaines d'application de la robotique.....7

I.4.1. La production.....7

I.4.2. Exploration.....7

I.4.3. Appareils pour les personnes à mobilité réduite.....7

I.5. Transformations homogènes.....7

I.5.1. Représentation d'un point dans l'espace.....7

I.5.2. Représentation d'une direction.....8

I.5.3.Changement de repère.....8

I.5.4.Matrice de translation.....9

I.5.5.Matrice de rotation.....9

I.5.6. Rotations Composées.....10

I.6.Modélisation des robots manipulateurs.....11

I.6.1.Modèle géométrique.....	11
I.6.1.1. Modèle géométrique direct (MGD).....	11
I.6.1.2. Modèle géométrique inverse (MGI).....	12
I.6.2. Modèle cinématique.....	13
I.6.2.1.Modèle cinématique direct.....	13
I.6.2.2.Modèle cinématique inverse.....	14
I.6.3. Modèle dynamique.....	15
I.7.Conclusion.....	19
 Chapitre II : Commande optimale, planification de trajectoire et optimisation	
II.1. Introduction.....	20
II.2.Commande optimale.....	20
II.2.1.Définition d'un problème de commande optimale.....	20
II.2.2. Contrôlabilité.....	22
II.2.3. Conditions nécessaire d'optimalité.....	22
II.2.3.1.Principe d'optimalité de Bellman.....	22
II.2.3.2.Principedu minimum de Pontriaguine.....	22
II.2.3.3. Equation d'Euler-Lagrange.....	24
II.2.3.4.Commande bang-bang.....	24
II.2.4.Méthodes de résolution du problème de commande optimale.....	25
II.2.4.1.Méthodes indirectes.....	25
II.2.4.2. Méthodes directes.....	26
II.2.4.3. Méthodes de discrétisation.....	26
II.2.4.4. Méthodes de paramétrisation.....	27
II.3 Planification de la trajectoire et planification du chemin.....	29

II.3.1. Définition.....	29
II.3.2. Différentes méthodes de planification de trajectoire.....	30
II.3.2.1. Les méthodes probabilistes (Book planification).....	30
II.3.2.2. Méthodes par décomposition cellulaire.....	31
II.3.2.3. Méthodes de résolution de type rétraction.....	32
II.3.2.4. Méthode du potentiel.....	33
II.3.2.5. Méthode des contraintes.....	33
II.4. Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires sous contraintes	
.....	34
II.4.1. Généralités.....	34
II.4.2. Optimisations locale et globale.....	35
II.4.3. La méthode d'optimisation convexe.....	36
II.4.3.1. Convexité.....	36
II.4.3.2. Optimisation convexe.....	37
II.4.3. Conditions d'optimalité en optimisation avec contraintes.....	40
II.4.3.1. Les conditions de Lagrange.....	40
II.4.3.2. Les conditions de Kuhn et Tucker.....	43
II.5. Conclusion.....	43
 Chapitre III : calcul de trajectoire et optimisation convexe sur un robot manipulateur SCARA	
III.1. Introduction	44
III.2 Etude du robot SCARA.....	44
III.3 Spécification des chemins pris en considération.....	51

III.4 Problème de poursuite à temps optimal du chemin.....	52
III.5. Fonctions objectives convexes et contraintes d'inégalité linéaires....	54
III.5.1. Energie thermique	54
III.5.2. Intégral de la valeur absolue du taux de variation couple	54
III.5.3. Incorporation de contraintes d'inégalité	54
III.5.3.1. Contraintes d'inégalité sur la vitesse articulaire.....	54
III.5.3.2. Contraintes sous forme de bornes sur l'accélération.....	55
III.6. Formulation généralisée du problème de commande optimale correspondant au problème de planification.....	55
III.7. Solution numérique du problème de planification de trajectoire à temps optimal.....	56
III.7.1. Application au robot SCARA.....	58
III.8. Résultats de simulation.....	62
III.9 Conclusion	68
Conclusion générale.....	69
Références bibliographiques	

Liste des notations

m	Nombre de degrés de liberté
R	Articulation rotoïde
P	Articulation prismatique
w	Facteur d'échelle
(p_x, p_y, p_z)	coordonnées cartésiennes
$R_{x,\alpha}$	Matrice de rotation autour de l'axe ox
$R_{y,\alpha}$	Matrice de rotation autour de l'axe oy
$R_{z,\alpha}$	Matrice de rotation autour de l'axe oz
X	variable opérationnelle
$J(q)$	Matrice jacobienne
θ ou q	position articulaire
$\dot{\theta}$ ou \dot{q}	Vitesse articulaire
\ddot{q} ou $\ddot{\theta}$	Accélération articulaire
f_e	Vecteurs des efforts extérieurs
Γ	Vecteurs des couples des actionneurs
K	Énergie cinétique
U	Énergie potentielle
$M(q)$	Matrice d'inertie
$C(q, \dot{q})\dot{q}$	vecteur des couples de Coriolis et des forces centrifuges
$G(q)$	force de gravité
s	Position articulaire
\dot{s}	Vitesse articulaire
\ddot{s}	Accélération articulaire
r	Vecteur position
\dot{r}	Vecteur de vitesse
t_f	Temps final
r_c	Position du centre de masse
\dot{r}_c	Vitesse du centre de masse
τ	Le couple
$\tau_{imin}(\theta, \dot{\theta})$	Le couple minimal
$\tau_{imax}(\theta, \dot{\theta})$	Le couple maximal
m_1	Masse du segment 1
m_2	Masse du segment 2
m_3	Masse du segment 3
m_4	Masse du segment 4
Ker	Noyau de la matrice
Im	Imaginaire

Liste des abréviations

ddl	Nombre de degré de liberté
MGD	Modèle géométrique direct
MGI	Modèle géométrique inverse
MCD	Modèle cinématique direct
MCI	Modèle cinématique inverse
MD	Modèle dynamique
<i>PC</i>	Problème général, avec Contraintes d'inégalité et d'égalité
<i>PCE</i>	Problème avec Contraintes d'Égalité
<i>PCI</i>	Problème avec Contraintes d'Inégalité
<i>P</i>	Problème sans contraintes
HJB	Hamilton Jacobi Bellman
NLTPBP	Non Linear Two Points Boundry Value Problem
DAE	Défibrillation Automatique Externe
SCARA	Selective Compliance Articulated Robot Arm

Liste des figures

Figure I.1 : Schéma synoptique d'un robot manipulateur.....	4
Figure I.2 : symbole de l'articulation rotoïde.....	6
Figure I.3 : symbole de l'articulation prismatique.....	6
Figure I.4 : Représentation d'un point dans l'espace.....	8
Figure I.5 : rotation autour de l'axe ox	9
Figure I.6 : Modèle géométrique directe et inverse.....	12
Figure II.1 : Les trois étapes de <i>PRM</i> : a) Phase d'apprentissage b) Phase de recherche. c) Phase de lissage.....	30
Figure II.2 : problème d'optimisation globale.....	35
Figure II.3 : problème d'optimisation locale.....	36
Figure II.4 : représentation d'objet convexe et non convexe.....	36
Figure II.5 : Exemple de fonctions convexes.....	38
Figure III.1 : Représentation des centres de masse des segments ainsi que les repères attachés aux centres de masses du robot.....	44
Figure III.2 : Les repères attachés aux différents segments du robot.....	45
Figure III.3 : Représentation de la projection du robot sur le plan (xy)	46
Figure III.4 : Evolution des variables articulaires en fonction du temps le long de la trajectoire optimale correspondant au chemin sous forme d'une ellipse selon le critère <i>J1</i>	64
Figure III.5 : Evolution des vitesses articulaires le long de la trajectoire optimale pour un chemin en ellipse selon le critère <i>J1</i>	65
Figure III.6 : Evolution des accélérations articulaires le long de la trajectoire optimale pour un chemin en ellipse selon le critère <i>J1</i>	65
Figure III.7 : Evolution des couples articulaires le long de la trajectoire optimale selon le critère <i>J1</i>	66
Figure III.8 : Evolution de l'orientation de l'organe terminal le long de la trajectoire optimale.....	67
Figure III.9 : Couples articulaires optimaux pour le cas où le critère utilisé est <i>J2</i>	68

Introduction générale

Introduction générale

La robotique est la science qui s'intéresse aux robots. En effet, il s'agit d'un domaine multidisciplinaire : on y trouve des aspects concernant la mécanique, l'informatique, l'électronique et l'automatique. De nos jours, les robots sont devenus des outils nécessaires dans l'environnement de fabrication, permettant des tâches à automatiser s'étendant du plus répétitif au plus complexe. L'avancement des technologies a impliqué l'évolution de la robotique pour être plus précis et pratique [1]. La manipulation d'objets est l'un des sujets de recherche qui passionnent depuis longtemps les chercheurs en robotique. Les robots assurant cette tâche s'appellent les robots manipulateurs. On les retrouve dans les chaînes de production dans l'industrie d'automobile et l'industrie électronique ou dans les milieux hostiles ; les milieux à haute pression (milieux sous-marins), basse pression (l'exploration spatiale), hautes températures, fortes radiations [2].

De ce fait, on peut dire la planification de mouvements à temps optimal joue un rôle essentiel en robotique, des méthodes sont proposées et selon ces dernières, la résolution de ce problème majeur est dévisée en deux étapes. La première consiste à étudier juste le modèle géométrique du robot et essayer de planifier une trajectoire que doit suivre l'outil terminal, cette méthode nous donne la position cartésienne de l'outil terminal. Deuxièmement, paramétrer cette trajectoire, mais cette fois-ci il faut prendre en considération les limites imposées par les dynamiques du robot et en minimisant le temps. Le premier problème peut être considéré comme essentiellement résolu en théorie et en pratique. Cependant le deuxième problème qui consiste à l'optimisation du temps suivant certaines contraintes imposées manquent encore de solutions générales et efficaces. Pour le traiter, trois familles de méthodes sont proposées :

La première est basée sur la division du plan en une grille de points. La deuxième consiste à la discrétisation de l'axe s , ensuite, convertir le problème en un problème d'optimisation convexe. La troisième famille de méthodes est basée sur l'application du Principe de Maximum de Pontryagin.

Notre problématique est de traiter le problème de planification de trajectoire à temps optimal convexe. C'est-à-dire la recherche d'une paramétrisation à temps optimal d'un chemin prédéfinie pour un robot manipulateur en utilisant la famille des méthodes basées sur la transformation d'un problème de commande optimale en un problème d'optimisation convexe. Cela consiste à définir la fonction du coût à minimiser et définir les différentes contraintes d'égalité et d'inégalité, le Principe de cette méthode consiste à discrétiser la variable s en un

Introduction générale

ensemble de points cela induit la discrétisation de tout le problème d'optimisation. Ainsi on disposera d'un algorithme de calcul de la solution optimale du temps.

Ce mémoire se compose de trois chapitres qui peuvent être résumés comme suit :

Le premier chapitre est une étude bibliographique dédiée au contexte de l'étude. Il contient deux parties. La première est consacrée à la description des robots manipulateurs. La deuxième partie se focalise sur la modélisation.

Le deuxième chapitre présente les différentes méthodes de commande optimale et de planification de trajectoires, ainsi que les différents problèmes d'optimisation.

Dans le troisième chapitre, nous allons combiner les algorithmes qui existent dans la littérature en vue d'implémenter un programme sous MATLAB qui sera utilisé pour déterminer la solution optimale désirée.

Chapitre I

Notions fondamentales sur

la robotique

I.1. Introduction

La robotique est un ensemble de disciplines techniques (mécanique, électronique, automatique, informatique) articulées autour d'un objectif et d'un objet communs. Cet objectif est l'automatisation flexible de nombreux secteurs de l'activité humaine réputés jusqu'à très récemment comme ne pouvant se passer de la présence de l'homme, et l'objet est le robot, sorte de machine universelle dont l'homme rêve depuis toujours.

L'automatisation des tâches dans l'industrie a donné naissance aux robots manipulateurs. Ces derniers prennent chaque jour une place plus importante à la fois dans le milieu industriel et les opérations en milieux hostiles.

I.2. Historique

Au début des années 1920 le monde a vu naître le mot robot, ce dernier provenant du mot tchèque <<robota>> ne signifiant rien d'autre que travaux forcés. Mais c'est au début des années 1950 précisément 1947 que le premier robot manipulateur électrique fut créé, en 1954 vient le tour d'inventer le premier robot programmable, sept ans après c'est la naissance d'Unimation, le 1^{er} robot industriel descendant direct des télémanipulateurs développé pour besoin de nucléaire, il fut utilisé par General Motors dans sa ligne d'assemblage vu sa résistance dépassant une charge de 150kg grâce à son bras articulé de 1.5 tonne.

Dans les années 60, les ingénieurs ont créé le premier robot mobile « shakey » et en 1972 Nissan ouvre sa première chaîne de production totalement robotisée.

I.3. définitions générales

I.3.1. définition du robot

Un robot est un système mécanique articulé commandé en position, reprogrammable polyvalent (à usage multiple) à plusieurs degrés de liberté. Capable de manipuler les matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches.

I.3.2. Schéma synoptique d'un robot manipulateur

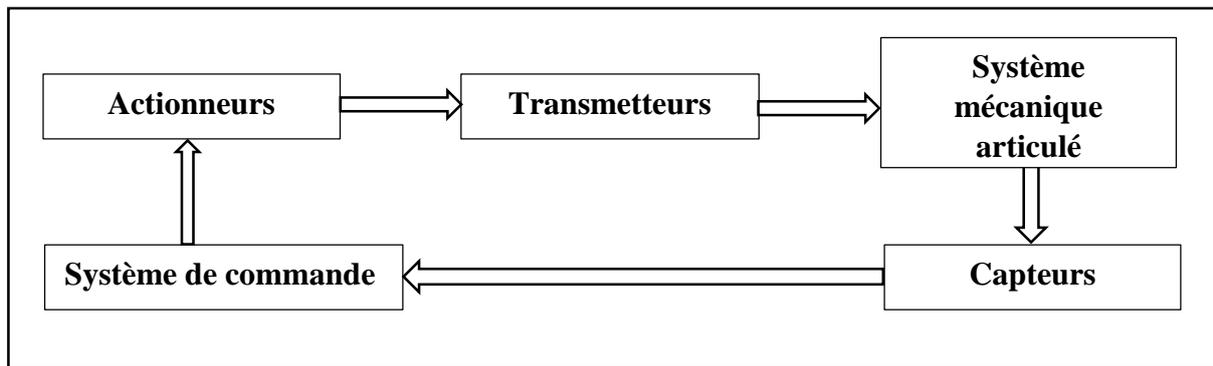


Figure I.1 : Schéma synoptique d'un robot manipulateur

- **Système mécanique articulé** : c'est la partie qui exécute les tâches du robot.
- **Actionneurs** : produisent l'effort nécessaire à transmettre aux différentes articulations du robot.
- **Transmetteurs** : assurent le transfert d'effort l'adaptation du mouvement des actionneurs du robot.
- **Capteurs** : dits proprioceptifs lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (positions et vitesses des articulations) et extéroceptifs lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement (détection de présence, de contact, mesure de distance, vision artificielle).
- **Système de commande** : synthétise les consignes des asservissements pilotant les actionneurs, à partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur.

S'ajoutent à cela :

- L'interface homme-machine à travers laquelle l'utilisateur programme les tâches que le robot doit exécuter.
- Le poste de travail, ou l'environnement dans lequel évolue le robot.

I.3.3. constituants d'un robot

Un robot manipulateur est constitué d'un système mécanique articulé et d'un ensemble d'organes associés :

- **Élément porteur**

Sa motorisation est réalisée par des actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés.

- **Espace opérationnel**

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal (on considère donc autant d'espaces opérationnels qu'il y a d'organes terminaux). Sa dimension est égal au nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire la situation de l'organe terminal dans l'espace. Dans l'espace tridimensionnel, ce nombre est de six (trois pour placer un point du corps en un point quelconque de cette espace et trois pour orienter ce corps de façon quelconque).

- **Redondance**

Un robot est redondant lorsque le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre de degrés de liberté de l'espace articulaire (nombre d'articulations motorisées). Cette propriété permet d'augmenter le volume du domaine accessible et de préserver les capacités de déplacement de l'organe terminal en présence d'obstacles.

- **Actionneur**

Les actionneurs utilisent fréquemment des moteurs électriques à aimant permanent, à courant continu, à commande par l'induit (la tension n'est continue qu'en moyenne car en général l'alimentation est un hacheur de tension à fréquence élevée du moteur fait qu'il est suivi d'un réducteur, ce qui permet d'amplifier le couple moteur). On trouve de plus en plus des moteurs à commutation électrique (sans balais) ou, pour de petits robots, des moteurs pas-à-pas. Pour les robots devant manipuler de lourdes charges (par exemple, une pelle mécanique), les actionneurs sont plus souvent hydrauliques, agissant en translation (vérin hydraulique) ou en rotation (moteur hydraulique).

- **L'organe terminal (effecteur)**

L'effecteur est l'organe terminal du robot, fixé au poignet. Ce dernier se termine généralement par une plaque percée de trous filetés ; cela permet la fixation de différents effecteurs à un robot universel et donc l'adaptation de celui-ci à des tâches spécifiques.

- **Articulations**

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degrés de liberté (ddl) d'une part rapport à l'autre. Soit m le nombre de degrés de liberté résultant, encore appelé mobilité de l'articulation. La mobilité est telle que $0 < m \leq 6$.

Lorsque $m=1$, ce qui est le cas le plus fréquent en robotique, l'articulation est soit rotoïde, soit prismatique.

- Articulation rotoïde

Une articulation rotoïde est une articulation de type pivot réduisant le mouvement entre les deux corps à une rotation autour d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle de cet axe, et est représentée par le symbole **R**.

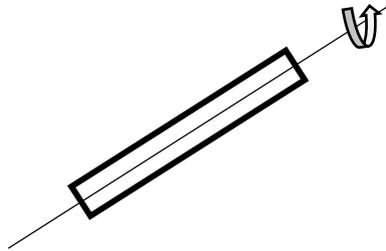


Figure I.2 : symbole de l'articulation rotoïde

- Articulation prismatique :

Est une articulation de type glissière réduisant le mouvement entre les deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par distance le long de cet axe, et représentée par le symbole **P** [4] [5].

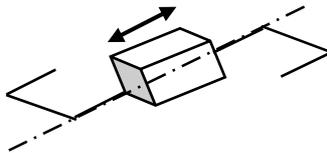


Figure I.3 : symbole de l'articulation prismatique

I.3.4. degré de liberté d'un robot

C'est le nombre de paramètres indépendants qui permet le positionnement et l'orientation de l'organe terminal. En général, c'est le nombre d'articulations constituant le robot manipulateur.

I.3.5. différents types de robots

Il existe deux types principaux :

- **Robots mobiles**

Les robots mobiles sont des robots dont la base de support est mobile par opposition aux robots manipulateurs.

Ils sont capables de se déplacer dans un environnement donné. Ils sont destinés à explorer des environnements où l'homme ne peut pas se rendre (exploration spatiale).

Chapitre I : Notions fondamentales sur la robotique

Du fait de leur mobilité, ils peuvent être utilisés en zone dangereuse (nucléaire, incendie, sécurité civile, déminage), inaccessible (océanographie). De tels robots font appel à des capteurs et à des logiciels sophistiqués.

- **Robots manipulateurs**

Ils sont ancrés physiquement à leur place de travail et généralement mis en place pour réaliser une tâche précise ou répétitive.

Ils sont très implantés sur les lignes d'assemblage dont le but est de prendre et de déplacer des objets (pièces ou outils). Ils ont plusieurs degrés de liberté, ils peuvent être commandés par un opérateur, une unité de commande électronique ou un système logique [3].

I.4. domaines d'application de la robotique

On distingue trois principaux domaines d'application de la robotique qui ne doivent pas être considérés séparément puisqu'ils sont reliés :

I.4.1. la production

Les industries utilisent les robots afin d'assurer une automatisation complète du processus de production donnant une qualité meilleure du produit final, ainsi qu'une meilleure commandabilité et adaptabilité et réduire la main d'œuvre.

I.4.2. exploration

Durant les opérations d'exploitation, les tâches sont effectuées dans un milieu hostile, les robots peuvent donc être utilisés comme robot autonome ou systèmes télé opérés.

I.4.3. appareils pour les personnes à mobilité réduite

Les robots de forme plus ou moins humaine sont représentés dans les films. Ils aident l'homme à effectuer des tâches difficiles et dangereuses et facilitent les conditions de vie des personnes à mobilité réduite [3].

I.5. transformations homogènes

I.5.1. représentation d'un point dans l'espace

Un point P de l'espace peut être désigné par ses coordonnées homogènes (coordonnées cartésiennes), si $w = 1$ en 3D sous la forme $(x, y, z, 1)$.

Les coordonnées homogènes sont alors utilisées pour appliquer des transformations à un point.

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

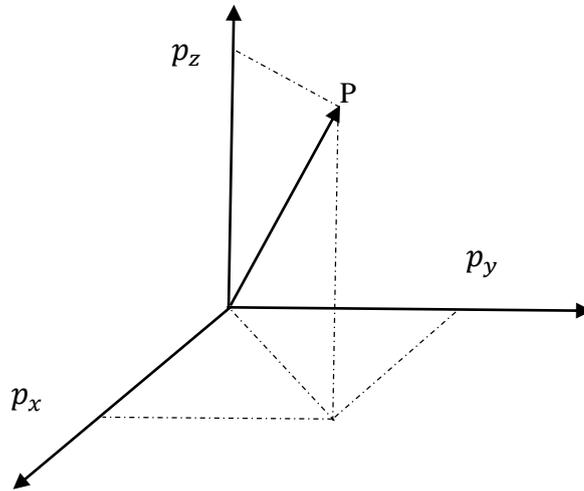


Figure I.4 : Représentation d'un point dans l'espace

I.5.2. représentation d'une direction

La représentation d'une direction (vecteur libre) se fait aussi par quatre composantes, mais la quatrième est nulle, indiquant un point à l'infini. Si l'on note u_x, u_y, u_z les coordonnées cartésiennes d'un vecteur unitaire u , en coordonnées homogènes on écrit :

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

I.5.3. changement de repère

Les coordonnées homogènes prennent tout leur intérêt dans ce cas précis. En effet, cette notation permet de traduire les changements de repère. Si le nouveau repère est translaté par rapport à l'ancien d'un vecteur $P_{3 \times 1} = (P_x, P_y, P_z)$ et voit son orientation dans le même temps changée, la rotation étant décrite par la matrice $R_{3 \times 3}$. Une matrice de transformation homogène est de la forme :

$$T = {}^A T_B = T_A^B = {}_B^A T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & P_x \\ n_y & s_y & a_y & P_y \\ n_z & s_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

I.5.4. matrice de translation

Une représentation dans l'espace peut être notée sous forme matricielle. La matrice traduisant une translation dans l'espace écrite sous la forme d'un vecteur (p_x, p_y, p_z) est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

I.5.5. matrice de rotation

Soient :

- un repère fixe avec les axes (x, y, z) et les vecteurs unitaires associés.
- (B) un repère mobile (rotatif) d'axes (x', y', z') ayant la même origine que (A).
- Une rotation de (B) d'un angle α autour de l'axe ox du repère de référence (A), selon la figure ci-contre, peut être décrite comme suit :

$$(A) = R_A^B \cdot (B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} (B) \quad (\text{I.5})$$

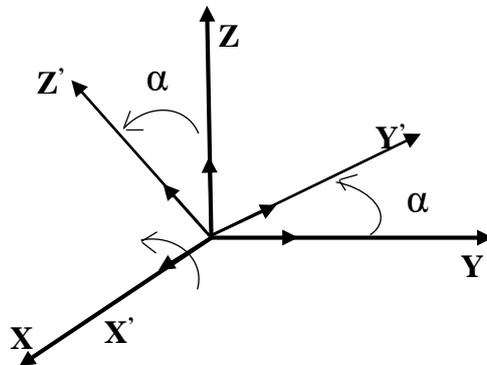


Figure I.5 : rotation autour de l'axe ox

Avec R_A^B notée souvent par $R_{x,\alpha}$ est la matrice de rotation propre orthogonale ($\det=1$) avec :

$$(R_{x,\alpha})^{-1} = (R_{x,\alpha})^T$$

dont les éléments peuvent être obtenus par le produit scalaire :

$$R_A^B = \begin{bmatrix} x \cdot x' & x \cdot y' & x \cdot z' \\ y \cdot x' & y \cdot y' & y \cdot z' \\ z \cdot x' & z \cdot y' & z \cdot z' \end{bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

Comme le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est égal au cosinus de l'angle entre eux, $R_{x,\alpha}$ est appelée matrice des cosinus directeurs.

- Les lignes de $R_A^B =$ vecteurs unitaires du repère fixe (A) exprimés dans (B) :

$$R_A^B = \begin{pmatrix} e1_B^A \\ e2_B^A \\ e3_B^A \end{pmatrix} \quad (I.7)$$

- Les colonnes de $R_A^B =$ vecteurs unitaires du repère mobile (B) exprimés dans (A) :

$$R_A^B = (e1_B^A \quad e2_B^A \quad e3_B^A) \quad (I.8)$$

- Les rotations autour des axes oy et oz donnent :

$$R_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

$$R_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.10)$$

Remarque : selon la littérature, la matrice de rotation décrivant l'orientation de (B) par rapport à (A) est notée par :

$$R_A^B = {}^A_B R = {}^A R_B \quad (I.11)$$

I.5.6. Rotations composées

I.5.6.1. Rotation de (B) autour des axes de (A)

Soit 3 rotations successives : $R_{x,\alpha} \rightarrow R_{z,\theta} \rightarrow R_{y,\phi}$. La matrice de rotation résultante correspond à une prémultiplication des 3 matrices :

$$\begin{aligned} R &= R_{y,\phi} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \sin \theta \cos \alpha & \cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta & -\cos \theta \sin \alpha \\ -\sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha & \cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \theta \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (I.12)$$

Dans le cas des 3 rotations : $R_{y,\phi} \rightarrow R_{z,\theta} \rightarrow R_{x,\alpha}$, la matrice de rotation composée:

$$R = R_{x,\alpha} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{y,\phi}.$$

I.5.6.2. Rotation de (B) autour de ses propres axes :

Les matrices précédentes concernent la rotation du repère (B) autour des axes du repère (A). Une rotation de (B) autour de ses propres axes correspond à une post-multiplication [6] [7].

Soit 3 rotations successives : $R_{y, \varphi} \rightarrow R_{z', \theta} \rightarrow R_{x', \alpha}$ La matrice de rotation composée : $R = R_{y, \varphi} \cdot I_3 \cdot R_{z', \theta} \cdot R_{x', \alpha}$

I.6. Modélisation des robots manipulateurs

I.6.1. Modèle géométrique

Il permet de déterminer la configuration (position, orientation) de l'effecteur d'un robot en fonction de la configuration de ses liaisons, l'effecteur peut être une pince, une caméra, une pompe de peinture. La modélisation des robots de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie.

I.6.1.1. Modèle géométrique direct (MGD)

Le modèle géométrique d'un mécanisme regroupe les contraintes géométriques qui doivent être respectées par les variables articulaires θ_i (ou bien q_i) afin d'établir la relation entre la configuration du mécanisme définie dans l'espace des coordonnées généralisées et la configuration du mécanisme décrite dans le repère cartésien. Le modèle géométrique direct est unique et est donné sous forme d'équations explicites :

$$X_i = f(\theta_i) \quad (\text{I.13})$$

Où :

$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \in \mathbb{R}^n$: vecteur des variables articulaires.

$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$: vecteur des variables opérationnelles.

▪ Calcul du MGD

Pour calculer le MGD, on suppose que les segments du robot sont parfaitement rigides et les articulations mécaniquement parfaites, il existe plusieurs méthodes pour déterminer le MGD, la plus répandue est celle de Denavit-Hartenberg. Mais cette méthode, développée pour des structures ouvertes simples, présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots ayant des structures fermées ou arborescentes.

I.6.1.2. Modèle géométrique inverse (MGI)

Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. Le modèle s'écrit :

$$\theta = f^{-1}(x) \quad (\text{I.14})$$

Chapitre I : Notions fondamentales sur la robotique

La détermination du modèle géométrique inverse (MGI) est un problème complexe. On doit inverser un système d'équations non linéaires ce qui n'est pas trivial. Toutefois et selon la structure du manipulateur étudié, il existe des méthodes permettant de résoudre le MGI sous une forme explicite. Nous présentons trois méthodes de calcul du MGI :

- ✓ La méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des robots industriels.
- ✓ La méthode de Pieper qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïde d'axes concourants ou trois articulations prismatiques.
- ✓ La méthode générale de Raghavan et Roth donnant la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égal à 16.

Pour la plupart des manipulateurs utilisés dans l'industrie, la méthode de Paul Permet de donner les solutions du MGI sous forme explicite. Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse, on peut calculer une solution particulière par des procédures numériques. La solution obtenue est locale en ce sens qu'elle dépend des conditions initiales. Citons par exemple :

- ✓ Les méthodes de type Newton-Raphson procédant par linéarisation de la matrice de passage du mécanisme.
- ✓ Les méthodes fondées sur le modèle différentiel inverse.
- ✓ Les méthodes fondées sur la transposée de la matrice jacobienne.

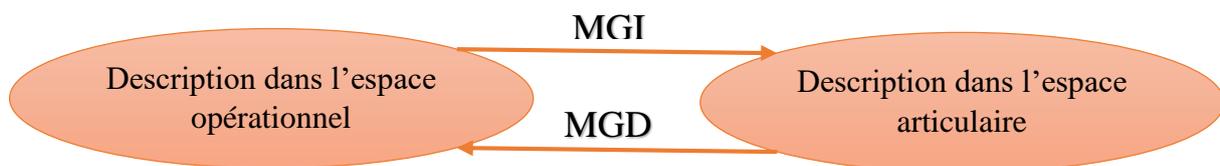


Figure I.6 : Modèle géométrique direct et inverse

I.6.2. Modèle cinématique

Le modèle cinématique permet de trouver une solution au problème géométrique inverse, quelle que soit la structure du robot. Il permet aussi d'introduire la notion de vitesse de déplacement du mécanisme, pour calculer les vitesses de translation et de rotation du corps terminal en fonction des vitesses articulaires. Il est donc à la base de leur commande en vitesse.

L'outil nécessaire à mettre en œuvre pour ce faire est le modèle cinématique inverse. Dans ce modèle en utilisant la matrice jacobéenne de base. Cette matrice peut être décomposée en deux ou trois matrices contenant des termes plus simples.

I.6.2.1. Modèle cinématique direct (MCD)

Le modèle cinématique complète le modèle géométrique, il permet de déterminer la vitesse de l'organe terminal dans l'espace opérationnel en fonction de la vitesse des variables articulaires. La propriété intéressante du modèle cinématique est sa linéarité par rapport aux vitesses. Ainsi il est plus simple à manipuler que le modèle géométrique et permet d'utiliser des propriétés qui découlent de la résolution des systèmes linéaires. Le modèle est décrit par l'équation :

$$\dot{X} = J(q) \dot{q} \quad (\text{I.15})$$

Où : $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice jacobienne de dimension $(m \times n)$ du mécanisme, égal à : $\frac{\partial X}{\partial q}$

et fonction de la configuration articulaire q . La même matrice jacobienne intervient dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires dX des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires dq , soit :

$$dX = J(q) dq \quad (\text{I.16})$$

L'intérêt de la matrice jacobienne est multiple :

- ✓ Elle est à la base du modèle différentiel inverse, permettant de calculer une solution locale des variables articulaires q connaissant les coordonnées opérationnelles X .
- ✓ En statique, on utilise la jacobienne pour établir la relation liant les efforts exercés par l'organe terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs.
- ✓ Elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot.

L'une des méthodes utilisées pour le calcul de la matrice jacobéenne est la dérivation du modèle géométrique direct :

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

I.6.2.2. Modèle cinématique inverse (MCI)

L'objectif du modèle cinématique inverse est de calculer, à partir d'une configuration q donnée, les vitesses articulaires \dot{q} qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle \dot{X} imposée. Cette définition est analogue à celle du modèle différentiel inverse : ce dernier permet de déterminer la différentielle articulaire correspondant à une différentielle des coordonnées opérationnelles dX spécifiée. Pour obtenir le modèle cinématique inverse, on inverse le modèle cinématique direct en résolvant un système d'équations linéaires. Il existe plusieurs méthodes pour la détermination du modèle cinématique inverse en considérant trois cas, selon que le manipulateur est régulier, en configuration singulière ou redondante. Ces méthodes sont soit analytiques, soit numériques.

- ✓ La solution analytique : les méthodes analytiques conviennent pour résoudre le problème inverse lorsque la matrice jacobienne associée au mécanisme est régulière. Leur mise en œuvre est simplifiée lorsque le poignet du mécanisme possède trois articulations rotoïdes d'axes concourants : le problème se réduit alors à l'inversion de deux matrices régulières d'ordre trois. Elle a l'avantage de diminuer considérablement le nombre d'opérations, mais on doit traiter séparément tous les cas singuliers.
- ✓ Les méthodes numériques : sont plus générales, la plus répandue étant fondée sur la notion de pseudo-inverse : les algorithmes traitent de façon unifiée les cas réguliers, singuliers et redondants. Elles nécessitent un temps de calcul relativement important [1].

I.6.3. Modèle dynamique (MD)

Le modèle dynamique exprime les couples (les forces) moteurs des actionneurs des différents bras en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires et des forces extérieures exercées par ou bien exercées sur l'organe terminal. Il exprime l'équilibre entre les couples d'entraînement et les couples de freinages dus aux inerties, aux forces centrifuges et celles de Coriolis ainsi qu'aux forces de gravitation.

La relation suivante est la représentation du modèle dynamique :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \quad (\text{I.18})$$

$\Gamma \in \mathcal{R}^n$: Vecteurs des couples/forces des actionneurs, selon le fonctionnement de l'articulation voir (rotoïde ou prismatique).

$q \in \mathcal{R}^n$: Vecteur des positions articulaires.

$\dot{q} \in \mathcal{R}^n$: Vecteur des vitesses articulaires.

$\ddot{q} \in \mathcal{R}^n$: Vecteur des accélérations articulaires.

f_e : Vecteurs des efforts extérieurs (forces et moments) qu'exerce le robot sur l'environnement extérieur (l'environnement qui l'entoure).

La relation précédente (I.18) est appelé modèle dynamique inverse ou simplement modèle dynamique.

On utilise cette dernière pour les objectifs suivants :

- Le dimensionnement des actionneurs (moteurs).
- L'identification des paramètres inertiels et des paramètres de frottement du robot.

Le modèle dynamique direct est défini comme celui qui exprime les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses, couples des articulations. Ce type de modèle est représenté par la relation suivante :

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e) \quad (\text{I.19})$$

Le modèle dynamique direct est surtout utilisé pour la commande

Les recherches faites sur la représentation (modélisation) dynamique ont aboutis à plusieurs manières qui permettent l'obtention de ce dernier et généralement les plus utilisés sont :

- Formalisme de Lagrange-Euler.
- Formalisme de Newton-Euler.

Pour ce travail on utilisera la première méthode (Lagrange-Euler) [8].

I.6.3.1. Aperçu théorique sur le formalisme Lagrange-Euler

La méthode d'Euler-Lagrange décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du système, ce qui se traduit lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul par l'équation :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (\text{I.20})$$

Avec : $i = 1, \dots, n$

Où L est la fonction de Lagrange donnée par l'équation :

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (\text{I.21})$$

Avec :

$K(q, \dot{q})$: Énergie cinétique.

$U(q)$: Énergie potentielle.

I.6.3.1.1. Calcul de l'énergie cinétique :

Considérons un point dans l'articulation i de vecteur ${}^i r$ de coordonnées dans le R_i . Les coordonnées de ce point dans le repère R_0 de la base du robot sont exprimées par le vecteur :

$$r = {}^0 T_i {}^i r \quad (I.22)$$

Avec ${}^0 T_i$ est une fonction des variables articulaires q_1, q_2, \dots, q_j

Le vecteur de vitesse V du point considéré par rapport au repère R_0 s'écrit :

$$V = \frac{dr}{dt} = \sum_{j=1}^i \left[\frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r \quad (I.23)$$

L'énergie cinétique d'une masse infinitésimale dm en ${}^i r$ ayant un vecteur de vitesse

$V = [v_x, v_y, v_z]^T$ est défini par :

$$\begin{aligned} DK_i &= \frac{1}{2} \text{trace} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) dm \\ &= \frac{1}{2} \text{trace} (V V^T) dm \end{aligned} \quad (I.24)$$

On remplace (I.23) dans (I.24) on obtient :

$$DK_i = \frac{1}{2} \text{trace} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_j} ({}^i r {}^i r^T dm) \frac{\partial}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (I.25)$$

L'énergie cinétique de l'articulation i est donnée par :

$$K_i = \int_{\text{articulation } i} dK_i \quad (I.26)$$

Seul le terme ${}^i r {}^i r^T$ dépend de la variable d'intégration de l'équation (I.25) alors nous définissons une pseudo-matrice d'inertie $\in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$ pour l'articulation i :

$$I_i = \int_{\text{articulation } i} {}^i r {}^i r^T dm \quad (I.27)$$

$$I_i = \begin{bmatrix} \int x^2 dm & \int yx dm & \int zx dm & \int x dm \\ \int xy dm & \int y^2 dm & \int zy dm & \int y dm \\ \int xz dm & \int yz dm & \int z^2 dm & \int z dm \\ \int x dm & \int y dm & \int z dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (I.28)$$

L'énergie cinétique totale du robot manipulateur s'écrit :

$$K = \sum_{i=1}^n K_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{trace} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial {}^0T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (\text{I.29})$$

Sachant que la trace d'une somme de matrice est égale à la somme des traces individuelles de chaque matrice, on a donc :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (\text{I.30})$$

Nous obtenons donc la forme simplifiée de l'énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (\text{I.31})$$

Où $M(q)$ Est la matrice d'inertie

$$\text{Avec : } m_{jk}(q) = \sum_{i=1}^n \text{trace} \left(\frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial {}^0T_i^T}{\partial q_k} \right) \quad (\text{I.32})$$

Remarque :

- La matrice d'inertie $M(q)$ est symétrique, et définie positive.
- L'énergie cinétique K dépend des variables articulaires q et \dot{q} .

I.6.3.1.2. Calcul de l'énergie potentielle

Le calcul de l'énergie potentielle d'un robot manipulateur est comme suit :

$$U(q) = \sum_{j=1}^n U_j(q) \quad (\text{I.33})$$

Avec :

U_j : Énergie potentielle d'un corps C_j qui s'exprime par la relation :

$$U_j(q) = -m_j {}^0g^T {}^0P_j \quad (\text{I.34})$$

${}^0g \in \mathfrak{R}^3$: Vecteur de l'accélération de la gravité exprimée dans le repère R_0 de la base du robot ;

${}^0P_j \in \mathfrak{R}^3$: Vecteur des coordonnées du centre de masse du corps C_j par rapport au repère R_0 .

Le vecteur 0P_j étant en fonction des positions articulaires q , l'énergie potentielle U dépend des variables articulaires q [3] [8].

I.6.3.1.3. Forme générale des équations dynamiques

L'énergie cinétique du système est une fonction des vitesses articulaires, elle s'écrit :

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (I.35)$$

Avec :

M : matrice ($n \times n$) d'inertie.

En remplaçant les équations (I.33) et (I.35) dans l'équation (I.21) puis dans (I.20), nous obtenons la forme générale des équations dynamiques :

$$\Gamma = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (I.36)$$

L'utilisation des symboles de Christoffel $C_{kj,i}(q, \dot{q})$ permet d'écrire :

$$C_{kj,i}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \frac{\delta m_{ij}(q)}{\delta q_k} + \frac{\delta m_{ki}(q)}{\delta q_j} - \frac{\delta m_{jk}(q)}{\delta q_i} \dot{q}_k = C_{kj,i}(q, \dot{q}) \dot{q}_k \quad (I.37)$$

Où :

$C(q, \dot{q})\dot{q}$: Vecteur de dimension ($n \times 1$) qui représente les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges.

$G(q) = [G_1, \dots, G_n]$: vecteur des couples/forces de gravité [8].

I.6.3.1.4. Propriétés structurelles du modèle dynamique

Dans cette partie nous allons essayer de donner certaines propriétés concernant les éléments constituant le modèle dynamique qui jouent un rôle important dans la synthèse des correcteurs ou bien sur les éléments constituant l'objet de commande du robot :

A) Propriété de la matrice d'inertie du robot

La matrice d'inertie $M(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est symétrique et définie positive, elle vérifie :

$$m_1 I_n \leq M(q) \leq m_2 I_n \quad (I.38)$$

Où m_1 et m_2 sont deux scalaires positifs et $I_n \in \mathcal{R}^{n \times n}$ La matrice identité.

B) Propriété du vecteur des forces centrifuges et celle de Coriolis

Propriété 1 : la matrice $\mathcal{N}(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ Est antisymétrique

Propriété 2 : La matrice $C(q, \dot{q})$ vérifie la relation suivante :

$$C(q,x)y = C(q,y) x, \forall x, y \in \mathcal{R}^n \quad (\text{I.39})$$

C) Propriétés des vecteurs des forces de gravité

Le vecteur $G(q)$ vérifie la relation $\|G(q)\| \leq g_m$

Où $\|\cdot\|$ désigne n'importe quelle norme vectorielle et g_m est une fonction scalaire [3].

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné quelques notions sur les robots manipulateurs, l'historique des robots, leurs constituants, les différents types et leurs domaines d'applications. Ensuite, nous avons abordé la présentation des points, des vecteurs et des plans. Après cela, sont aussi évoquées les matrices de transformations homogènes. On a discuté aussi leurs modélisations et nous avons exposé les différents modèles utilisés pour décrire les mouvements des articulations d'un manipulateur (géométrique, cinématique, dynamique).

Chapitre II

***Commande optimale,
planification de trajectoire et
optimisation***

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.1. Introduction

Dans ce chapitre on va s'intéresser aux éléments essentiels reliant la dynamique du robot à sa commande (commande optimale) et on essayera de voir comment transformer ce problème de commande optimale à un problème d'optimisation non linéaire en prenant en considération le problème de planification de trajectoires.

II.2. commande optimale

II.2.1. définition d'un problème de commande optimale

La commande optimale a comme rôle élémentaire de déterminer une commande d'entrée $u^*(t)$ ou bien $u^*(x, t)$ qui force le système à satisfaire des contraintes physiques tout en minimisant ou maximisant un critère de performance J .

Un problème de commande optimale consiste en les éléments distincts suivant :

En premier, La modélisation mathématique du système à contrôler qui est décrite par un ensemble d'équations d'états du système donnés sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{II.1})$$

Et de condition initiale $x(t_0) = x_0$, Où : $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les signaux u et x sont des fonctions de \mathbb{R} vers respectivement \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . Pour la condition initiale x_0 et la commande u , l'équation d'état (1) définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$. Celle-ci est fonction de la condition initiale x_0 et de la commande u sur $[t_0, t_f]$.

Le deuxième élément est l'indice de performance qui doit être minimisé ou maximisé. Cet indice de performance décrit quelques spécifications désirées sous forme d'une équation mathématique scalaire. Cet indice de performance qui nous intéresse peut être formulé comme suit :

$$J = \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{II.2})$$

Avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et L ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le critère scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une fonctionnelle. On peut noter que différents critères existent dans la littérature :

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

- le problème de Lagrange :

$$\int_{t_0}^{t_f} \psi(x, u, t) dt \quad (\text{II.3})$$

- le critère de Bolza :

$$\theta(x_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (\text{II.4})$$

- le critère de Mayer :

$$\sigma(x_f, t_f) \quad (\text{II.5})$$

Éventuellement au moyen d'une augmentation d'état du système, il est intéressant de noter qu'ils sont équivalents. En plus de l'équation d'état qui lie les trajectoires de u et de x , d'autres contraintes peuvent intervenir (sans pour autant remettre en cause le critère choisi).

Typiquement :

- l'instant final peut être imposé ou libre.
- la commande peut appartenir à un ensemble $u \in \mathcal{U} \neq \mathbb{R}^m$.
- des contraintes peuvent exister sur l'état final : $x_f = \chi$.

Le problème de la commande optimale consiste alors à trouver la commande \tilde{u} minimisant $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in \mathcal{U}} J(x_0, t_0, u) \quad (\text{II.6})$$

On notera alors \tilde{x} la trajectoire correspondante de l'état et $J(x_0, t_0, \tilde{u})$ la valeur du critère [9].

Existence de trajectoires optimales. En effet, au problème de la commande s'ajoute un second problème original, celui de l'existence d'une trajectoire qui minimise la solution reliant x_0 à x_1 , cela revient à trouver une trajectoire qui minimise la fonction cout $J(T, u)$.

Une telle trajectoire, si elle existe, est dite optimale pour ce cout. Il faut noter aussi que l'existence des trajectoires optimale dépend de la régularité du système est du cout. Il se peut aussi qu'une commande optimale n'existe pas dans la classe des commandes considérées, mais existe dans un espace plus grand. C'est pour cela qu'il est avantageux de travailler dans un espace de contrôle complet et qui ait de bonnes propriétés de compacité : voilà pourquoi l'étude de l'environnement est intéressante [4].

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.2.2. Contrôlabilité

On veut savoir ou bien répondre à la question : étant donné le système (II.1), où peut-on aller en temps T en faisant varier la commande u . On rappelle tout d'abord la notion d'ensemble accessible. L'ensemble accessible en temps T pour le système (II.1) noté $acc(x_0, T)$, est l'ensemble des extrémités au temps T des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$.

II.2.3. Conditions nécessaires d'optimalité

II.2.3.1. Principe d'optimalité de Bellman

Soit le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (\text{II.7})$$

La trajectoire optimale sur $[x_f, t_f]$ est \tilde{u} et le critère optimal :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u_{[x_f, t_f]}} J(x_0, t_0, u) \quad (\text{II.8})$$

Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$.

Autrement dit :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u_{[t_0, t_1]}} \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \quad (\text{II.9})$$

Bien que les développements suivants ne s'appuient pas directement sur ce principe, mais sur le principe du maximum, ce principe est un résultat classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la littérature. Il permet d'obtenir une solution optimale en découpant l'intervalle et en résolvant un problème récursif.

II.2.3.2. Principe du minimum de Pontriaguine

Soit le système d'équations d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (\text{II.10})$$

Et le critère de performance :

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (\text{II.11})$$

On définit l'Hamiltonien du système :

$$H(x, u, p, t) = \phi(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \quad (\text{II.12})$$

Où p est appelé état-adjoint. Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise l'Hamiltonien du système. Autrement dit :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{p}) \leq H(\tilde{x}, u, \tilde{p}) \quad \forall u \in U$$

Le long de la trajectoire optimale, on dispose d'un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations sont généralement établies en utilisant le calcul des variations. Pour plus d'informations, se reporter à un ouvrage de référence. L'extrémalité de la solution conduit à un jeu d'équations, appelées équations canoniques de Hamilton, qui régissent les dynamiques de l'état d'une part et de l'état adjoint d'autre part :

- état

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \quad (\text{II.13})$$

- état adjoint

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad (\text{II.14})$$

Les équations provenant des conditions dites terminales, en t_0 d'une part et en t_f d'autre part sont appelées équations de transversalité :

- à l'origine

$$\left(-H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0}\right) \delta t_0 + \left(p(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0}\right)^T \delta x_0 = 0 \quad (\text{II.15})$$

- à l'arrivée

$$\left(H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial t_f}\right) \delta t_f + \left(-p(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f}\right)^T \delta x_f = 0 \quad (\text{II.16})$$

Enfin, selon la nature du problème, on aura encore certaines relations additionnelles :

- si aucune contrainte (de type saturation) n'est imposée sur $u(t)$ à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0 \quad (\text{II.17})$$

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

- si H n'est pas une fonction explicite du temps, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.18})$$

II.2.3.3. Equation d'Euler-Lagrange

L'équation d'Euler-Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant T , l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique, le principe de moindre action énoncé par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (\text{II.19})$$

Notons q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (\text{II.20})$$

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u \quad (\text{II.21})$$

L'Hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + p^T \dot{q} \quad (\text{II.22})$$

Et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p} \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + p = 0 \quad (\text{II.24})$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant \dot{p} grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (\text{II.25})$$

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.2.3.4. Commande bang-bang

Un type de commande optimal particulier bien connu est la commande à temps minimal. Prenons un exemple : vous commandez l'accélération d'un véhicule que vous devez amener d'une position initiale d'arrêt à une position finale, également à l'arrêt, dans le temps le plus court possible. Si l'on considère un mouvement en ligne droite, on conçoit intuitivement que la commande optimale est dans ce cas une accélération maximale jusqu'à un certain instant à partir duquel il faudra freiner au maximum.

On parle de commande bang-bang parce que la commande est toujours saturée, alternativement à sa valeur minimale ou à sa valeur maximale. Quant à la robustesse de la commande, c'est-à-dire la capacité à remplir la mission de manière précise, lorsque la masse du véhicule est imparfaitement estimée, vous imaginez bien que ce genre de commande n'est pas très recommandable [9].

II.2.4. Méthodes de résolution du problème de commande optimale

II.2.4.1. Méthodes indirectes

Ces méthodes sont divisées en deux catégories : les méthodes en boucle fermée et les méthodes en boucle ouverte :

II.2.4.1.1. Méthodes en boucle fermée

Parmi les méthodes proposées pour obtenir la commande optimale en boucle fermée on citera les approches suivantes.

1. La première approche pour obtenir une approximation de la commande optimale en boucle fermée est basée sur l'utilisation du développement en séries de puissance pour résoudre soit l'équation de HJB soit le NLTPBP.
2. La seconde approche, pour obtenir cette commande, est basée sur la linéarisation des conditions nécessaires d'optimalité autour de la solution optimale ou via le développement de l'indice de performance jusqu'à l'ordre 2 et les contraintes jusqu'à l'ordre 1 autour de la solution optimale.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.2.4.1.2. Méthode en boucle ouverte

Parmi elles. On peut citer entre autres : les méthodes du gradient, les méthodes de quasi-linéarisation, les méthodes de la fonction de pénalité, etc. Ce sont des méthodes standard pour résoudre les problèmes de la commande optimale.

II.2.4.2. Méthodes directes

Quand elles s'appliquent aux problèmes de la commande optimale, ces méthodes offrent quelques avantages dont :

1. La possibilité de convertir le problème de la commande optimale dynamique en un problème d'optimisation statique, plus facile à résoudre que le problème initial.
2. L'existence d'algorithmes plus élaborés pour résoudre les problèmes de programmation non linéaire
3. La possibilité de traiter facilement différents types de contraintes.

Le problème de commande optimale peut être converti en un problème de programmation mathématique soit en utilisant la technique de discrétisation, soit en se servant de la technique de paramétrisation.

II.2.4.3. Méthodes de discrétisation

Toutes les techniques de discrétisation divisent l'intervalle de temps en n segments

$$t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t_f$$

Où les points t_i sont appelés nœuds

Une approche qui applique cette méthode discrétise les variables d'état et les variables de contrôle ; nous avons donc la séquence des valeurs inconnues des variables d'état et de contrôle suivantes :

$$Z = (x_0, x_1, \dots, x_n, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$$

Et le système d'équations d'état est remplacé par un ensemble d'équations algébriques qui peuvent être considérées comme des contraintes d'égalité. Ce problème peut ainsi être

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

résout en utilisant les techniques de la programmation non linéaire. L'inconvénient majeur de cette approche est la dimension élevée du vecteur z .

Une autre approche possible serait de discrétiser la variable de contrôle seule :

$$z = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$$

Et d'intégrer ensuite le système d'équations d'état pour trouver les variables d'état en fonction des variables de contrôle.

II.2.4.4. Méthodes de paramétrisation

Cette technique de paramétrisation offre la possibilité d'être appliquée de trois manières différentes :

II.2.4.4.1. Paramétrisation de la commande

Cette technique est basée sur l'approximation des variables de la commande en choisissant une structure appropriée de la forme :

$$u_k(t) = \sum_{i=0}^N c_i^{uk} \varphi_i(t) \quad K=1,2,\dots,m \quad (\text{II.26})$$

Où les c_i^{uk} sont les paramètres inconnus et les φ_i dénotent un ensemble approprié de fonctions formant une base de l'espace de commande à dimension finie. Les variables d'état sont obtenues en fonction des paramètres inconnus en intégrant les équations d'état du système et en substituant les variables approximatives de la commande et les variables d'état correspondantes dans l'indice de performance. Le problème de la commande optimale est ainsi converti en un problème de programmation non linéaire à paramètres statiques, plus facile à résoudre que le problème initial.

Pour l'approximation des variables de la commande, plusieurs fonctions ont été utilisées parmi lesquelles on peut citer : les fonctions constantes par morceaux, les fonctions linéaires par morceaux, les fonctions splines d'ordre donné. L'application de cette technique d'approximation nécessite l'intégration des équations d'état, ce qui représente un processus coûteux en termes de temps de calcul.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.2.4.4.2. Paramétrisation d'état-commande

Cette approche est basée sur l'approximation des variables d'état et de commande à la fois par une séquence de fonctions connues avec des paramètres inconnus :

$$u_k(t) = \sum_{i=0}^N c_i^{uk} \varphi_i(t) \quad k=1,2,\dots,m \quad (\text{II.27})$$

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^N c_i^{uj} \varphi_i(t) \quad j=1,2,\dots,m \quad (\text{II.28})$$

Où les c_i^{uk} et c_i^{xj} sont des paramètres inconnus et les φ_i sont un ensemble de fonctions appropriées. En utilisant cette méthode, le problème de la commande optimale se convertit en un problème de programmation mathématique non linéaire. L'inconvénient principal de cette approche est le nombre important de paramètres que l'on doit déterminer. Cependant, suivant cette approche, nous aboutirons à un problème de programmation non linéaire à dimensions très élevées en termes de nombre de paramètres inconnus et du nombre de contraintes d'égalité.

II.2.4.4.3. Paramétrisation d'état

L'idée de cette technique est de faire l'approximation uniquement de la variable d'état du système :

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^N c_i^{uj} \varphi_i(t) \quad j=1,2,\dots,m \quad (\text{II.29})$$

Dans cette technique, les variables de commande sont obtenues à partir des équations d'état.

Cette technique recèle quelques avantages :

1. On peut se passer du besoin d'intégrer les équations d'état.
2. Les paramètres inconnus sont moins nombreux en regard d'autres techniques.
3. Les paramètres peuvent être manipulés directement.

Néanmoins cette technique présente quelques inconvénients :

1. Il est difficile de traiter les systèmes non linéaires du fait qu'on ne trouve pas systématiquement des variables de commande comme fonction de variables d'état.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

2. Cette technique n'a pas de voie d'application systématiquement aux problèmes de la commande optimale à aspect général quand le nombre de variables d'état et de commande est différent [2].

II.3 Planification de trajectoire et planification du chemin

II.3.1. définition

La planification du chemin fournit une description géométrique du mouvement du robot, mais elle ne précise pas les aspects dynamiques du mouvement. Par exemple, Qu'elles devraient être les vitesses et les accélérations articulaires tout en traversant le chemin ? Ces questions sont traitées par un planificateur de trajectoire. Le planificateur de trajectoire calcule une fonction $q^d(t)$ de classe C^2 qui spécifie complètement le mouvement du robot pendant qu'il traverse le chemin.

On peut définir un problème de planification de trajectoires comme étant un problème qui consiste à calculer une trajectoire pour un robot entre une position initiale et une autre finale. Il peut être sommairement posé de la façon suivante : étant donné un robot évoluant dans un environnement parsemé d'obstacles, trouver s'il existe un mouvement amenant ce robot d'une position à une autre, respectant ses contraintes cinématiques, tout en évitant les obstacles. L'algorithmique de la planification de mouvement débute avec l'introduction de la notion d'espace de configurations par Lozano-Pérez. Il a substitué la recherche d'un chemin sans collision pour un robot évoluant parmi des obstacles par la recherche de chemin d'un point évoluant dans l'espace de configurations du robot. La planification de mouvement devient rapidement un domaine de recherche très actif, se focalisant sur quatre approches principales : la décomposition cellulaire, les champs de potentiels et la construction de graphe (roadmaps).

Traditionnellement l'algorithmique du mouvement conduisait soit à des méthodes exactes et complètes, soit à des méthodes heuristiques. La complexité des premières rend leur utilisation rédhibitoire dès qu'il s'agit de systèmes de dimension élevée. Les secondes souffrent des inconvénients liés aux non-complétudes.

Les nouvelles méthodes de planification dites "méthodes probabilistes" permettent de faire face à la complexité exponentielle du problème. Par ailleurs, elles

vérifient une propriété de complétude probabiliste (garantissant en probabilité de trouver une solution en temps fini, lorsqu'elle existe). Certes cette propriété est moins forte que la complétude déterministe vérifiée par les méthodes exactes, mais ces nouvelles approches sont désormais moins sensibles à la dimension de l'espace de recherche et s'avèrent très efficaces en pratique.

Dans la section suivante, nous présenterons en détail ces nouvelles approches ainsi que les différentes variantes du schéma classique proposées dans la littérature.

II.3.2. Différentes méthodes de planification de trajectoire

II.3.2.1. Les méthodes probabilistes (Book planification)

Plus récemment, plusieurs approches non déterministes sont apparues, elles ne reposent plus sur une construction préalable d'une représentation exacte ou approchée de l'espace de configurations. Certaines de ces méthodes se basent sur l'exploration de l'espace de configurations admissibles, d'autres visent à capturer sa connectivité. Ces nouvelles méthodes de planification dites "méthodes probabilistes " permettent de faire face à la complexité exponentielle du problème. Par ailleurs, elles vérifient une propriété de complétude probabiliste (garantissant en probabilité de trouver une solution en temps fini, lorsqu'elle existe).

Plusieurs variantes de ces méthodes ont été proposées dans la littérature, mais toutes se basent sur le même concept. La technique développée se décompose en trois phases : phase d'apprentissage, phase de recherche et une phase de lissage des chemins. La figure (II.1) illustre les trois étapes d'une méthode probabiliste classique permettant la résolution d'un problème de planification de mouvement.

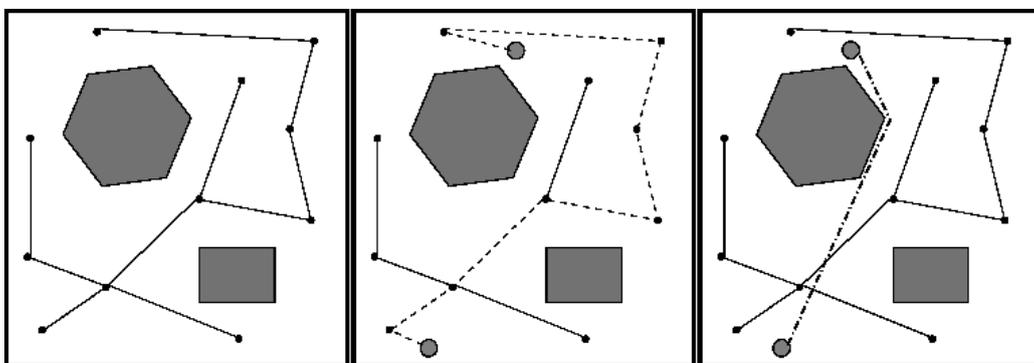


Figure II.1 : Les trois étapes de PRM : a) Phase d'apprentissage. b) Phase de recherche. c) Phase de lissage.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.3.2.2. Méthodes par décomposition cellulaire

Une première approche pour la planification de chemin est connue sous le nom d'approche par décomposition cellulaire. Elle consiste à partitionner l'espace des configurations (ou de travail) libres du robot en un ensemble de régions connexes adjacentes. La description de la décomposition obtenue est alors capturée dans un graphe de connectivité dont les nœuds correspondent aux différentes régions (ou cellules) et les arcs aux relations d'adjacence entre elles. Le problème de planifier un mouvement entre deux configurations situées initialement dans deux cellules différentes est résolu en deux étapes :

- a) exploration du graphe de connectivité et détermination d'un chemin reliant les cellules contenant les deux configurations initiales du graphe.
- b) recherche de la solution au problème de planification à partir de l'enveloppe définie par la liste de cellules adjacentes trouvée en a.

De par sa généralité, l'approche par décomposition a été adoptée dans plusieurs travaux et a conduit à la mise en œuvre de nombreuses méthodes. Celles-ci sont généralement classées en deux catégories et se distinguent par les modèles de décomposition qu'elles utilisent et leur complétude quant à la résolution du problème de planification.

II.3.2.2.1. Méthodes exactes

La première catégorie regroupe les méthodes de résolution dites exactes en ce sens que la décomposition effectuée se base sur un recouvrement exact de l'espace libre du robot de ses contacts en cellules convexes. La complétude et la capacité de ce type de méthode à apporter une réponse quant à la résolution du problème général de planification ont été démontrées par Schwartz et Sharir. Le problème de planification est formulé sous forme algébrique en considérant une décomposition de l'espace libre du robot sous forme de composantes cylindriques semi-algébriques (cellules de Collins).

Par cette formulation, les auteurs aboutissent à l'un des résultats importants sur la complexité de la planification, à savoir qu'elle est polynômiale en la complexité de l'environnement et doublement exponentiels en la dimension de l'espace des configurations. La complexité de l'environnement est mesurée par le nombre et le degré des polynômes utilisés pour la description semi-algébrique de l'espace libre. A ce point une remarque s'impose, car le

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

mot "cellule" peut prêter à confusion. Il est important en effet de noter que cette décomposition de l'espace libre est une méthode dite exacte, qui doit être distinguée des méthodes non exactes.

Au premier rang de ces dernières, on peut citer la discrétisation de l'espace cartésien en cellules cubiques de tailles données, qui produit des solutions pour une résolution donnée.

II.3.2.2. Méthodes approchées

Afin de remédier à cette complexité, des méthodes dites approchées sont généralement appliquées. Elles se distinguent des précédentes par la simplicité de la structure des cellules utilisées pour la décomposition et l'approximation faite de l'espace libre du robot. La structure de celui-ci est généralement capturée dans une représentation hiérarchique en cellules élémentaires identiques et permettant l'adaptation de la taille de celles-ci à la géométrie des zones à recouvrir.

Plusieurs types de cellularisation de l'espace du robot sont généralement utilisés en pratique : représentation en octrees, découpage en tranches, ou encore en polyèdres. En comparant les deux approches de décomposition, il ressort que les méthodes exactes sont plus complètes en théorie que les méthodes approchées. Toutefois, la complexité de leur mise en œuvre les rend moins appropriées en pratique que les techniques approchées même si celles-ci restent parfois limitées à des espaces de dimension réduite.

II.3.2.3. Méthodes de résolution de type rétraction

Une seconde grande approche pour la résolution du problème de planification consiste à ramener la recherche du mouvement du robot dans un espace de plus faible dimension que celle de l'espace admissible. Cela consiste à représenter la connectivité de l'espace libre du robot par un réseau de courbes unidimensionnelles pouvant être entièrement dans l'espace libre ou des contacts du robot.

La planification de mouvement entre deux configurations données est alors résolue en trois étapes :

- détermination d'un chemin ramenant le robot de sa configuration initiale à un point situé sur l'une des courbes du réseau de connectivité.
- détermination d'un chemin entre la configuration finale et le réseau.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

- exploration de celui-ci afin d'en extraire un chemin reliant les deux points connectés aux configurations initiale et finale.

Une première méthode basée sur ce concept a été proposée par Nelsson pour un espace de travail bidimensionnel encombré d'obstacles polygonaux. Dans cette méthode, le réseau est décrit par un graphe, dit graphe de visibilité, où les nœuds correspondent aux sommets des obstacles et les arêtes à des segments de droite reliant ces sommets dans l'espace libre. L'inconvénient de cette méthode est que les solutions obtenues conduisent le robot à être en contact avec les obstacles en certains de leurs points (les sommets) même en présence d'une solution entièrement contenue dans l'espace libre.

Afin d'y remédier, une seconde méthode, connue sous le nom de rétraction et développée par Ô'Dùnlaing et Yap, consiste à utiliser un diagramme de Voronoi pour capturer la connectivité de l'espace libre et générer des solutions éloignées le plus des obstacles. Une telle méthode, bien qu'elle soit générale en théorie, reste limitée à des espaces de dimension peu élevée. Une autre variante de cette méthode est développée par Brooks pour des espaces de travail polygonaux et se base sur la représentation de ceux-ci par des cylindres généralisés. Les chemins à suivre par le robot sont alors déterminés en considérant la connectivité entre les axes de ces cylindres.

Enfin, une dernière méthode de type rétraction a été présentée par Canny dans le cadre de la résolution du problème général de la planification. L'algorithme proposé est exponentiel en la dimension de l'espace des configurations, et constitue l'un des résultats les plus importants sur la complexité du problème de planification de mouvement.

II.3.2.4. Méthode du potentiel

Une première méthode, largement utilisée dans la littérature, consiste à assimiler le robot à une particule contrainte à se déplacer dans un champ de potentiel fictif obtenu par la composition d'un premier champ attractif au but et d'un ensemble de champs répulsifs modélisant la présence d'obstacles dans l'espace du robot. Les déplacements de celui-ci sont alors calculés itérativement par un algorithme de descente du gradient du potentiel obtenu. Un tel concept a été initialement introduit par Khatib et utilisé pour la commande et l'évitement d'obstacles pour un bras manipulateur, et étendu par la suite pour la planification de mouvement.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.3.2.5. Méthode des contraintes

Dans le cadre d'une approche locale, Faverjon et Tournassoud proposent une méthode, dite des contraintes, qui aborde le problème de l'évitement d'obstacles en modélisant localement chacun de ceux-ci par l'ensemble de ses plans tangents. La génération des mouvements du robot est obtenue par la minimisation d'un critère quadratique sur la tâche à effectuer en présence de contraintes linéaires associées aux équations des plans tangents aux obstacles. À la différence de la méthode du potentiel, les obstacles n'agissent sur le robot pendant le processus de minimisation que quand il est très proche et a tendance à y pénétrer. Toutefois, la méthode reste sensible à la présence de minimums locaux [10].

II.4. Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires sous contraintes

II.4.1. Généralités

La formulation générale d'un problème d'optimisation est la suivante :

$$(PC) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Où x sont les variables d'optimisation. La ou les solutions de (PC) sont généralement symbolisées par x^* . Notons que nous nous intéressons ici à l'optimisation continue puisque les variables sont prises dans \mathbb{R}^n . f désigne les fonctions coûts. $g(x)$ désigne ce que nous appellerons les contraintes d'inégalité et h les contraintes d'égalité. f, g et h constituent les critères d'optimisation. f, g et h seront typiquement non-linéaires.

Le tableau (I.1) présente quelques types de problèmes d'optimisation couramment rencontrés.

Type	Fonction objectif f	Ensemble des contraintes
Linéaire	Linéaire	Polyèdre convexe
Quadratique	Forme quadratique	Polyèdre convexe
Convexe	Convexe	Convexe ou ensemble convexe
Non linéaire	Quelconque	Ensemble quelconque

Tableau II.1. Classification des problèmes d'optimisation.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

L'objet est la présentation de techniques permettant de résoudre le problème (PC). Pour cela, nous nous intéresserons à des sous-problèmes sans contraintes, ou alors avec un seul des deux types de contraintes. Nous noterons ainsi ces familles de problèmes :

- (PC) Problème général, avec contraintes d'inégalité et d'égalité.
- (PCE) Problème avec contraintes d'égalité.
- (PCI) Problème avec contraintes d'inégalité.
- (P) Problème sans contraintes.

Il va de soi que la plupart des problèmes réels ou industriels ne sont pas initialement sous une des formes proposées. C'est pourquoi un des premiers travaux consiste en général à mettre le problème initial sous une forme standard. Par exemple, un problème donné sous la forme :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$$

Se mettra sous la forme standard (P) en posant $f(x) = -g(x)$. La mise sous forme standard nécessite en général un peu plus de travail, comme nous pouvons le voir dans les exemples moindres carrés, positionnement d'antennes, ou équilibre d'une corde.

II.4.2 Optimisations locale et globale

Trouver la ou les solutions x^* , du problème (PC) (ou de ses versions simplifiées (P), (PCI), (PCE)) est, dans l'absolu, un problème d'optimisation globale. Ce problème peut être arbitrairement compliqué, typiquement quand il y a des solutions isolées :

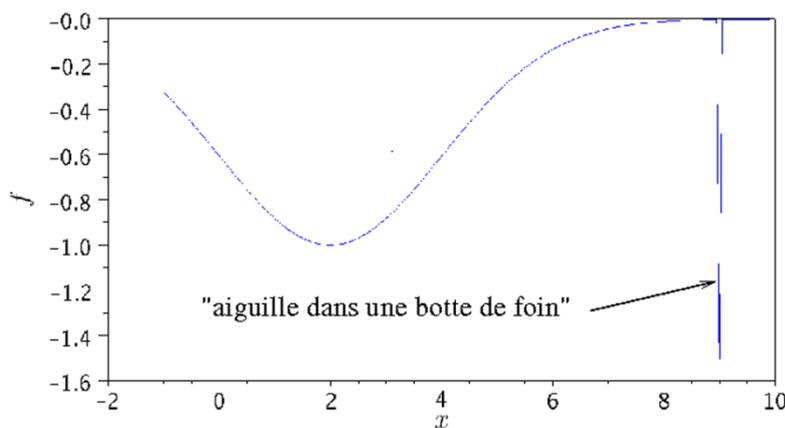


Figure II.2 : problème d'optimisation globale

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

Pour éviter les complications liées à la multi-modalité de la fonction et permettre l'élaboration d'algorithmes plus rapides (requérant moins d'appels au simulateur), on diminue les ambitions en s'intéressant au problème de l'optimisation locale :

$$(PCL) = \begin{cases} \text{trouver } x^l = \arg \min_{x \in v(x^l) \subset \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Où $v(x^l)$ est un voisinage de x^l

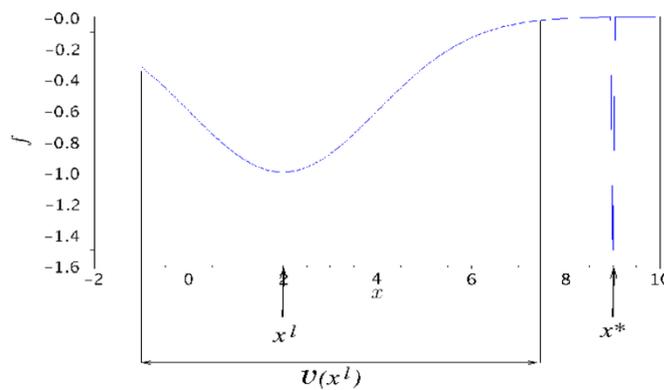


Figure II.3 : problème d'optimisation locale

II.4.3. la méthode d'optimisation convexe

II.4.3.1. Convexité

Définition 1 :

La convexité est à la base une propriété géométrique, qui permet de caractériser certains objets. On voit assez bien ce qu'est un objet convexe dans un espace à deux ou trois dimensions. Nous allons maintenant montrer comment cette propriété peut aussi s'appliquer aux fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

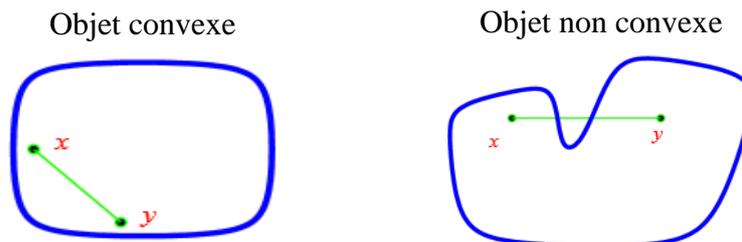


Figure II.4 : représentation d'objet convexe et non convexe

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

Définition 2 : Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout couple $(x, y) \in K^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

Cette définition peut s'interpréter en disant que le segment reliant x et y doit être dans K . Elle se généralise de la façon suivante : on dira qu'un vecteur y est une combinaison convexe des points $\{x^1, \dots, x^p\}$ si on a

$$y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i \quad (\text{II.32})$$

Avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

On peut citer quelques cas particuliers : \mathbb{R}^n tout entier est un ensemble convexe, de même qu'un singleton $\{a\}$.

Propriété : Soit une famille $\{K_i\}_{i=1..p}$ d'ensembles convexes et $S = \bigcap_{i=1}^p K_i$. Alors S est convexe.

Définition 3 : On dit qu'une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un ensemble convexe K , est convexe si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On dira que f est strictement convexe si

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y, \forall \lambda \in]0, 1[, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

De plus, la fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.

Lorsque $n = 1$ cette définition s'interprète bien géométriquement : le graphe de la fonction est toujours en dessous du segment reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

II.4.3.2. Optimisation convexe

Les problèmes d'optimisation convexes sont des cas spécifiques de problèmes non linéaires pour lesquels la fonction objectif et l'ensemble des contraintes sont exprimés sous forme convexe. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker appliquées aux problèmes convexes justifient l'existence d'un point-col. L'existence d'un point-col défini sur la fonction de Lagrange L signifie qu'il s'agit de l'optimum global du problème.

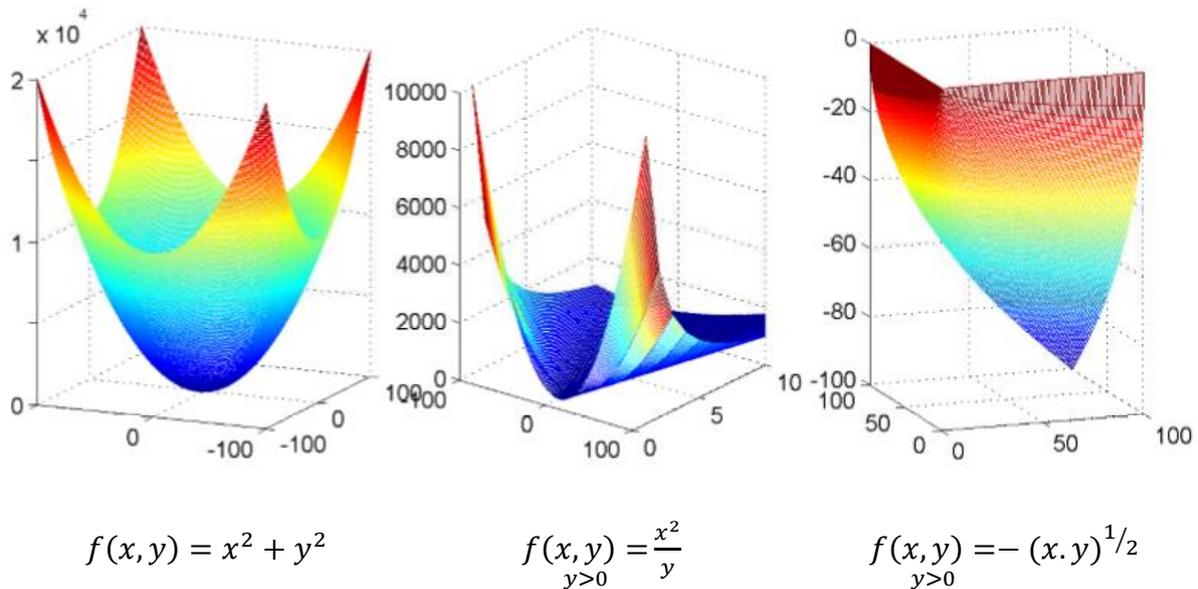


Figure II.5 : Exemple de fonctions convexes

L'optimisation convexe est un outil applicable à ce genre de problématique. La fonction objective est liée aux variables de dimensionnement des composants ainsi qu'à la commande du système (consommation de carburant). Les modèles de comportement des composants sont approximés par des fonctions de type convexe.

Les concepts d'optimisation convexe sont largement décrits dans Boyd et Vandenberghe. On notera ici $\text{Dom}(f)$ le domaine de f .

Définition 1 :

Soit le problème

$$(P) \begin{cases} \text{minimiser } f(x) \\ \text{contraint par } \begin{matrix} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, m \\ x \in \mathcal{X} \end{matrix} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Le problème (P) est convexe si $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe, les fonctions $f(x)$ et $g_i(x)$ sont des fonctions convexes, $h_j(x)$ sont affines dans l'espace des variables de décision x .

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

Théorème 1 :

Une intersection $S = \cap S_i$, d'ensembles convexes S_i , est un ensemble convexe.

Théorème 2 :

Une fonction cumulative non négative $\sum_{i \in \{0, \dots, m\}} \omega_i f_i$ avec $\omega_i \geq 0$, de fonctions convexes f_i , est une fonction convexe. Cette propriété peut s'étendre aux sommes et intégrales infinies.

Théorème 3 :

Un maximum local $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ de fonctions convexes $f_i(x), i = 1, \dots, m$ est une fonction convexe. De façon similaire, un minimum local $f(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ de fonctions concave $f_i(x), i = 1, \dots, m$ est une fonction concave.

La résolution numérique des problèmes d'optimisation convexe peut faire appel à différentes méthodes :

- Méthode des points intérieurs (Nemirovskii and Nesterov).
- Méthode des plans sécants.
- Méthode du gradient projeté.
- Algorithme de génération de colonnes de Dantzig.

II.4.3. Conditions d'optimalité en optimisation avec contraintes

II.4.3.1. Les conditions de Lagrange

On s'intéresse maintenant à des problèmes d'optimisation de la forme

$$(PC) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Où les fonctions f , g et h sont différentiables au moins une fois, et f est typiquement non-linéaire.

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

II.4.3.1.1. Problème avec contraintes d'égalité

On va tout d'abord s'intéresser au problème suivant, dit problème d'optimisation avec contraintes d'égalité seulement :

$$(PC) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

La raison majeure justifiant que l'on s'intéresse en premier au problème (PCE) et que (PC) est un problème du type (PCI) dont on ne sait pas quelles sont les contraintes actives. Nous allons dans un premier temps nous intéresser au cas où les contraintes sont linéaires.

II.4.3.1.2. Problème avec contraintes d'égalité linéaires

Un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité linéaires prend la forme :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ Ax - b = 0 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Où A est une matrice $p \times n$ avec $p < n$ et $b \in \mathbb{R}^p$. On notera

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax - b = 0\}$$

Nous allons maintenant définir le concept de direction admissible dans S .

Définition : On dit que $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible en $x \in S$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x + td \in S, \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

Dans notre cas, on a $A(x + td) - b = tAd$ puisque $x \in S$, et donc les directions admissibles d sont caractérisées par

$$Ad = 0$$

Rappelons maintenant un résultat bien utile d'algèbre linéaire :

Théorème 1 : Soit A une matrice $p \times n$. On a la relation suivante

$$(\text{Ker}A)^\perp = \text{Im}(A^T)$$

On peut donc énoncer les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (II.36) :

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

Théorème 2 : Soit $\hat{x} \in S$ solution du problème (II.36), vérifiant donc :

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in S$$

Alors il existe nécessairement un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\nabla f(\hat{x}) + A^T \lambda = 0$$

Si de plus A est de rang p alors λ est unique.

II.4.3.1.3. Problème avec contraintes d'égalité non linéaires

Nous étudions maintenant le problème :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable. On note comme précédemment

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0\}$$

Le concept de direction admissible dans S ne peut pas être défini comme pour les contraintes linéaires, car pour $\hat{x} \in S$ il peut ne pas exister $\alpha > 0$ et $d \in \mathbb{R}^n$ tels que $\hat{x} + td \in S$. On doit donc définir le concept de courbe admissible.

Considérons une courbe $x(t)$ définie pour $t \geq 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} x(t) \in S, \forall t \in [-\alpha, \alpha], \alpha > 0 \\ x(0) = \hat{x} \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Puisque $x(t) \in S$ on a $h_i(x(t)) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ et on peut écrire que :

$$\frac{d}{dt} h_i(x(t)) = \nabla h_i(x(t))^T \dot{x}(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq p$$

Si on note $y = \dot{x}(0)$ le vecteur tangent à la courbe $x(t)$ en $t = 0$, on a donc

$$\nabla h_i(\hat{x})^T y = 0, \quad 1 \leq i \leq p$$

Définition 2 : On dit que \hat{x} est un point régulier pour la contrainte $h(x) = 0$ si

- $h(\hat{x}) = 0$,
- Les vecteurs $\nabla h_i(\hat{x})$ sont linéairement indépendants.

Si on note $\nabla h(\hat{x})$ la matrice $n \times p$

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

$$\nabla h(\hat{x}) = [\nabla h_1(\hat{x}) \dots \nabla h_p(\hat{x})]$$

la condition d'indépendance linéaire des $\nabla h_i(\hat{x})$ peut s'écrire

$$\text{Rang} \nabla h(\hat{x}) = p$$

et on a donc $\nabla h(\hat{x}) > \dot{x}(0) = 0$ pour toute courbe admissible $x(t)$.

On a la proposition suivante :

Si \hat{x} est un point régulier pour la contrainte $h(x) = 0$, alors

$$\nabla h(\hat{x})^T y = 0 \Rightarrow y \in T(\hat{x})$$

II.4.3.2. Les conditions de Kuhn et Tucker

- **Problème avec contraintes d'inégalité**

On s'intéresse maintenant au problème suivant, dit problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité seulement :

$$(PCI) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, est différentiable (il n'y a ici aucune condition sur m). On notera K l'ensemble des points admissibles, c'est-à-dire :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$$

Au point solution de (PCI) il va de soi que les contraintes effectivement actives vérifieront $g_i(\hat{x}) = 0$. Cependant, puisque l'on ne sait pas a priori quelles sont ces contraintes, le passage de (PCI) à un problème du type (PCE) n'est pas direct

Définition 1 : On appelle contraintes saturées en \hat{x} l'ensemble des indices i telque $g_i(\hat{x}) = 0$, et on note :

$$I(\hat{x}) = \{i \mid g_i(\hat{x}) = 0\}$$

On note alors $S(\hat{x})$ l'ensemble :

$$S(\hat{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) = 0, \quad i \in I(\hat{x})\}$$

Le concept de direction admissible se définit comme suit :

Chapitre II : commande optimale, planification de trajectoire et optimisation

Définition 2 : On dit que $y \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible en $\hat{x} \in K$ s'il existe $\alpha > 0$ et une courbe $x(t)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x(t) \in K, \quad \forall t \in [-\alpha, \alpha], \quad \alpha > 0 \\ x(0) = \hat{x} \\ \dot{x}(0) = y \end{cases}$$

On notera alors $y \in C(\hat{x})$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ une direction admissible en $\hat{x} \in K$, alors on a nécessairement [11] [12]:

$$\nabla g_i(\hat{x}) \cdot y \leq 0, \quad i \in I(\hat{x})$$

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes méthodes de commande optimale : méthodes directes, méthodes indirectes. Aussi, nous avons rappelé les méthodes de planification de trajectoires telle que la méthode de probabiliste, la décomposition cellulaire...etc. ensuite pour finir nous fais un petit rappel sur les différents problèmes d'optimisation.

Chapitre III

*Calcul de trajectoire à temps
optimal en utilisant
l'optimisation convexe*

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter une étude du robot SCARA (modèles géométrique, géométrique inverse et dynamique) en vue de l'utiliser comme un exemple d'application de notre programme. Nous allons donner aussi une étude théorique de l'approche de planification de trajectoires à temps optimal que nous avons programmée. On commence par la formulation du problème sous forme d'un problème de commande optimale, ensuite, on donne la procédure de sa discrétisation et sa reformulation sous forme d'un problème d'optimisation convexe. A la fin du chapitre, nous donnons les résultats de simulation.

III.2. Etude du robot SCARA :

Nous considérons le robot SCARA représenté par la figure suivante. La figure représente seulement les repères attachés aux centres de gravité des différents segments en plus du repère de la base. Les articulations sont ordonnées comme RRRP. La position pour laquelle $\theta_i = 0, i = 1, \dots, 4$ correspond à la pose de la figure où le robot est complètement étendu.

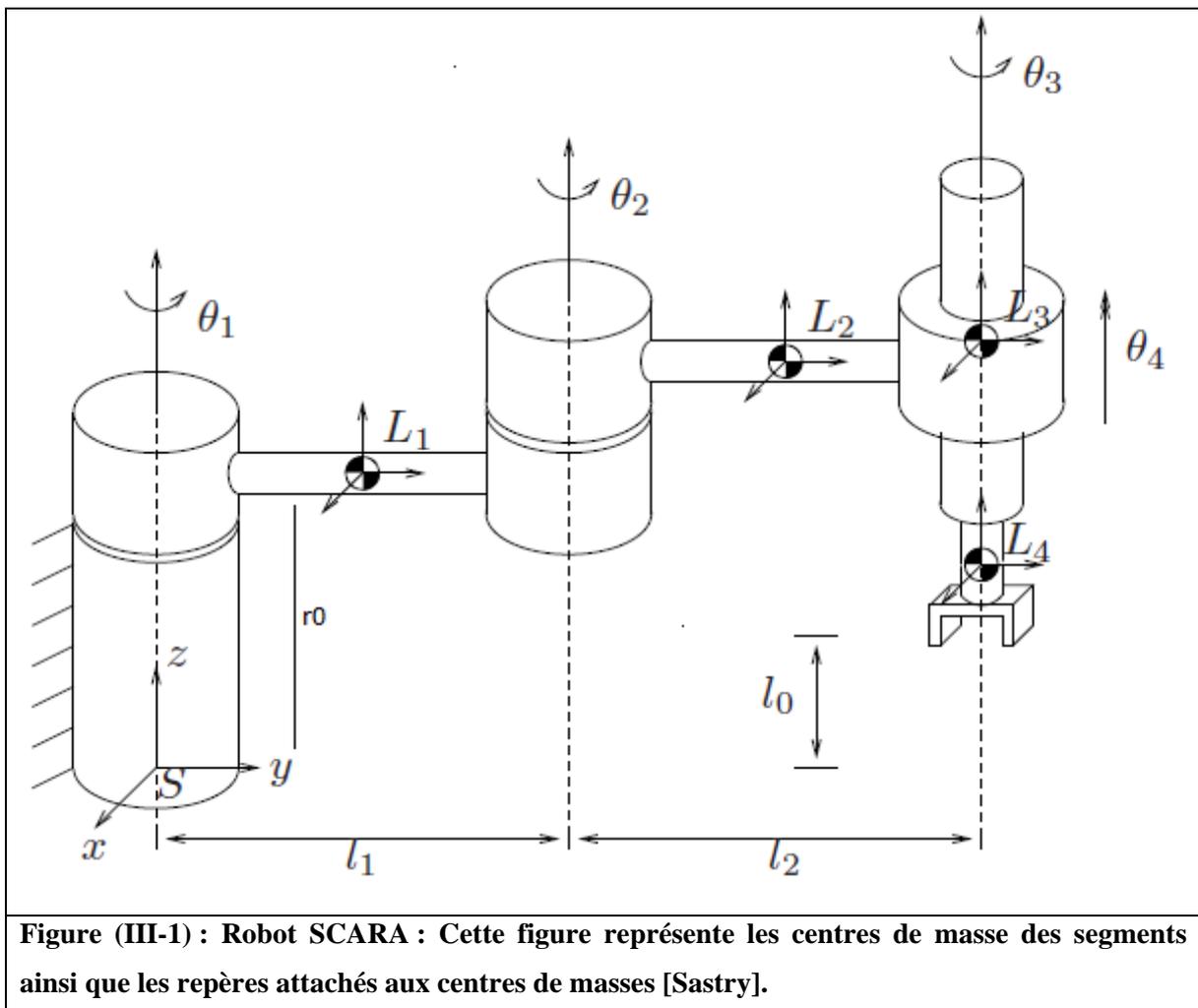


Figure (III-1) : Robot SCARA : Cette figure représente les centres de masse des segments ainsi que les repères attachés aux centres de masses [Sastry].

La figure suivante représente les repères attachés aux différents segments, chaque repère $\{i\}$ est attaché au segment i . Ici il faut noter que les repères $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$ sont sur le même niveau r_0 et le repère $\{4\}$ est situé à une hauteur l_0 . Les angles θ_i sont nuls quand l'axe y_i est aligné avec l'axe y du repère fixe de la base. Le déplacement de l'outil θ_4 est supposé être nul quand l'outil est au niveau l_0 .

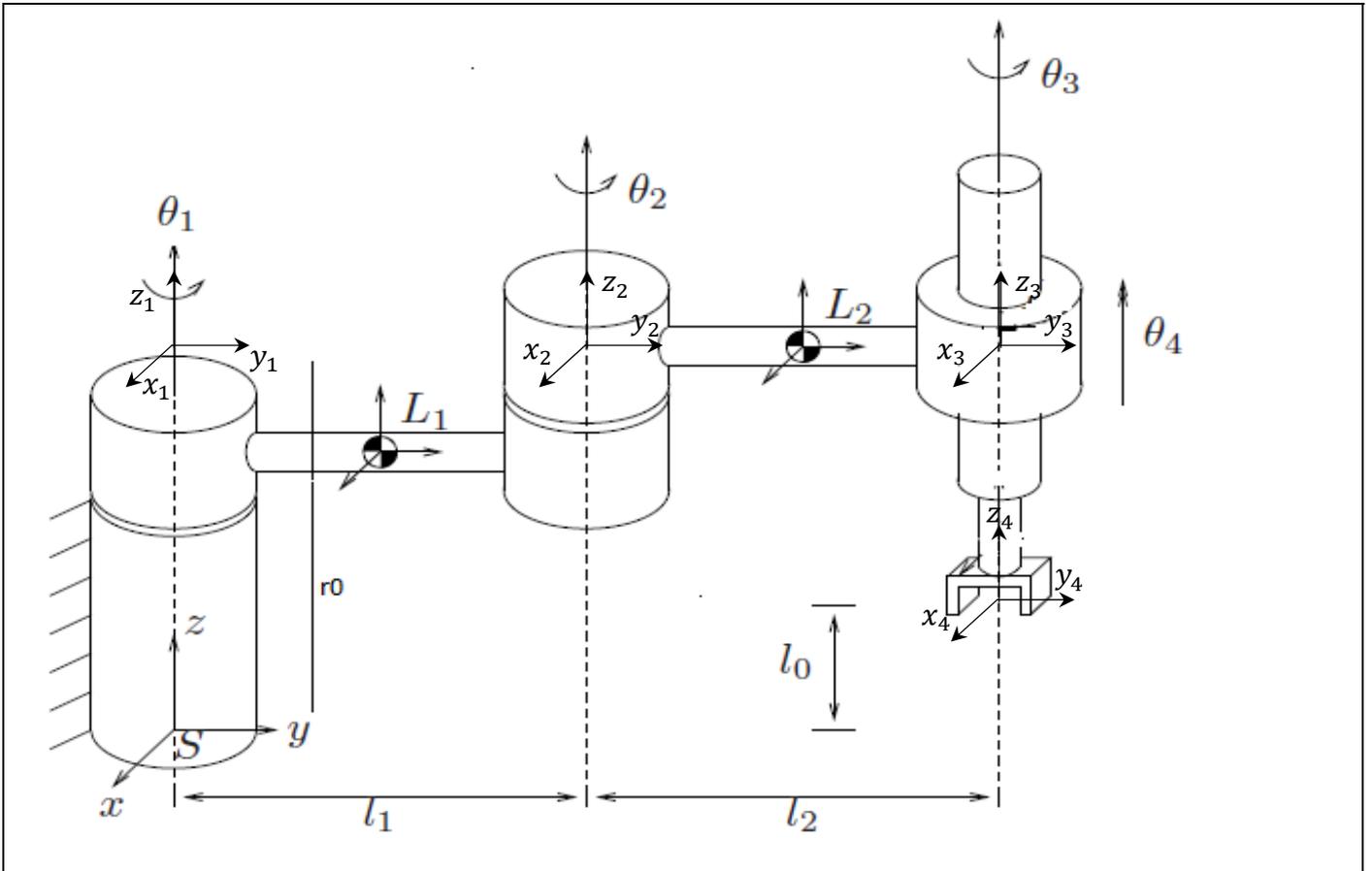


Figure (III-2) : Robot SCARA : Les repères attachés aux différents segments. Ici il faut noter que les repères $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$ sont sur le même niveau r_0 et le repère $\{4\}$ est situé à une hauteur l_0 . Les angles θ_i sont nuls quand l'axe y_i est aligné avec l'axe y du repère fixe de la base. Le déplacement de l'outil θ_4 est supposé être nul quand l'outil est au niveau l_0 [Sastry].

On supposera que les centres de masse des trois premiers segments se trouvent sur le même niveau r_0 et que le centre de masse du dernier segment se trouve à une hauteur $l_0 + \theta_4$.

Les transformations homogènes qui permettent de déterminer les positions et les orientations des différents repères attachés aux segments sont comme suit :

$${}^B_1T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^2_1T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (III-1)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(r_0 - l_0) + \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-2})$$

La transformation homogène qui permet le passage entre le repère de l'outil et celui de la base est donnée par (Transforme les coordonnées du repère de l'outil vers le repère de la base :

$${}^E_B T = {}^B_1 T {}^1_2 T {}^2_3 T {}^3_4 T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & l_0 + \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & x \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & 0 & H_{24} \\ 0 & 0 & 1 & H_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-3})$$

Calcul du modèle géométrique inverse :

Le calcul du modèle géométrique inverse consiste à déterminer les coordonnées articulaires $\theta_1, \dots, \theta_4$ à partir de la position et l'orientation de l'outil spécifiées sous forme d'une matrice de transformation homogène H . Cette matrice H doit avoir la même structure que ${}^E_B T$ pour qu'une solution existe. C'est-à-dire que $H_{31}, H_{32}, H_{13}, H_{23}, H_{41}, H_{42}, H_{43}$ doivent toutes être nulles et $H_{33} = H_{44} = 1$. Nous supposons que la dernière colonne de H est $[x \ y \ z \ 1]^T$ où x, y, z sont les coordonnées de l'outil. Alors la projection sur le plan (xy) donne la figure suivante :

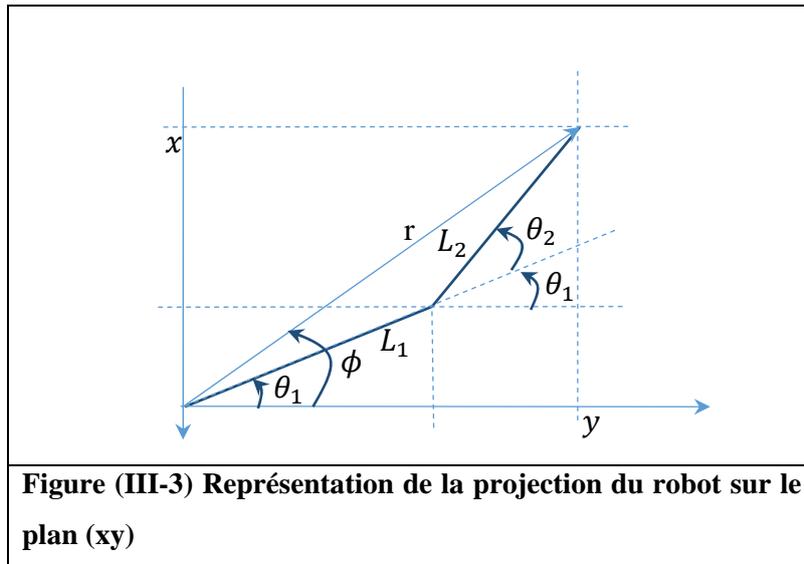


Figure (III-3) Représentation de la projection du robot sur le plan (xy)

A partir de cette figure, nous pouvons écrire :

$$\|r\|^2 = x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos(\theta_2) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} = \rho_1 \quad (\text{III-4})$$

Avec $x = H_{14}$; $y = H_{24}$ et $z = H_{34}$.

En faisant la projection sur les axes Ox et Oy nous obtenons aussi :

$$\begin{cases} x = -L_1 \sin(\theta_1) - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ y = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \Rightarrow (x + L_1 \sin(\theta_1))^2 + (y - L_1 \cos(\theta_1))^2 = L_2^2 \quad (\text{III-5})$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme :

$$y \cos(\theta_1) - x \sin(\theta_1) = \frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1} \Rightarrow \cos(\theta_1 - \phi) = \frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1 \sqrt{x^2 + y^2}} = \rho_3 \quad (\text{III-6})$$

Avec $\cos(\phi) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\sin(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et par conséquent :

$$\theta_1 = \text{atan2}(\rho_3, \pm \sqrt{1 - \rho_3^2}) + \text{atan2}(y, x); \quad \text{avec : } \text{atan2}(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \alpha \quad (\text{III-7})$$

$$\begin{cases} x = -L_1 \sin(\theta_1) - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ y = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \Rightarrow (x + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))^2 + (y - L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))^2 = L_1^2 \quad (\text{III-8})$$

Cette dernière équation peut être développée en :

$$y \cos(\theta_1 + \theta_2) - x \sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{x^2 + y^2 + L_2^2 - L_1^2}{2L_2} \Rightarrow \cos((\theta_1 + \theta_2) - \phi) = \frac{x^2 + y^2 + L_2^2 - L_1^2}{2L_2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \rho_2 \quad (\text{III-9})$$

Ainsi :

$$\frac{\cos((\theta_1 + \theta_2) - \phi)}{\cos(\theta_1 - \phi)} = \frac{\cos(\theta_1 - \phi) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1 - \phi) \sin(\theta_2)}{\cos(\theta_1 - \phi)} = \cos(\theta_2) - \tan(\theta_1 - \phi) \sin(\theta_2) = \frac{\rho_2}{\rho_3} \quad (\text{III-10})$$

$$\therefore \sin(\theta_2) = \frac{-1}{\tan(\theta_1 - \phi)} \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_3} - \rho_1 \right\} \quad (\text{III-11})$$

Enfin :

$$\theta_2 = \text{atan2}(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) = \text{atan2} \left(\rho_1, \frac{1}{\tan(\theta_1 - \phi)} \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_3} - \rho_1 \right\} \right) \quad (\text{III-12})$$

Pour obtenir θ_3 , il suffit de remarquer que :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = H_{11}; \quad \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = H_{21} \quad (\text{III-13})$$

Ces deux équations donnent facilement θ_3 :

$$\theta_3 = \{ \text{atan2}(H_{11}, H_{21}) - \theta_1 - \theta_2 \} \quad (\text{III-14})$$

La variable θ_4 est alors donnée par :

$$\theta_4 = H_{34} - l_0 \quad (\text{III-15})$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} atan2(\rho_3, \pm\sqrt{1-\rho_3^2}) + atan2(H_{14}, H_{24}) \\ atan2\left(\rho_1, \frac{1}{\tan(\theta_1-\phi)}\left\{\frac{\rho_2}{\rho_3} - \rho_1\right\}\right) \\ \{atan2(H_{11}, H_{21}) - \theta_1 - \theta_2\} \\ H_{34} - l_0 \end{bmatrix}; \quad \text{avec } \phi = atan2(H_{24}, H_{14}) \quad (\text{III-16})$$

Calcul du modèle dynamique :

On supposera que les centres de masse des trois premiers segments se trouvent sur le même niveau r_0 et que le centre de masse du dernier segment se trouve à une hauteur $l_0 + \theta_4$.

Les vecteurs de positions des centres de masse des quatre segments sont données par :

$$\begin{aligned} r_{c1} &= \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \sin(\theta_1) \\ \frac{l_1}{2} \cos(\theta_1) \\ r_0 \end{bmatrix}; & r_{c2} &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ r_0 \end{bmatrix}; \\ r_{c3} &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ r_0 \end{bmatrix}; & r_{c4} &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ r_0 + \theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

Pour calculer les vitesses et par suite les énergies cinétiques des différents centres de masse il suffit de dériver ces vecteurs par rapport au temps.

$$\dot{r}_{c1}^T \dot{r}_{c1} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 & -\frac{l_1}{2} \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ -\frac{l_1}{2} \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{l_1^2}{4} \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{III-18})$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{c2}^T \dot{r}_{c2} &= \left[-l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2 + \left[-l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2 = \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (\text{III-19})$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{c3}^T \dot{r}_{c3} &= \left[-l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2 + \left[-l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2 = \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{c4}^T \dot{r}_{c4} &= \left[-l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2 + \left[-l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right]^2 + \\ &= \dot{\theta}_4^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \dot{\theta}_4^2 \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad \omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}; \quad \omega_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

Nous prenons les inerties dans les repères qui ont comme origine les centres de masse des segments, ceci permettra d'obtenir des expressions simples pour l'énergie cinétique. Les énergies cinétiques des différents segments sont donnés par :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_{C1}^T \dot{r}_{C1} + \frac{1}{2} \omega_1^T I_1 \omega_1 = \frac{1}{2} m_1 \frac{l_1^2}{4} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1zz} \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{III-23})$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_{C2}^T \dot{r}_{C2} + \frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2 = \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right\} + \frac{1}{2} I_{2zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (\text{III-24})$$

$$E_{C3} = \frac{1}{2} m_3 \dot{r}_{C3}^T \dot{r}_{C3} + \frac{1}{2} \omega_3^T I_3 \omega_3 = \frac{1}{2} m_3 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right\} + \frac{1}{2} I_{3zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \quad (\text{III-25})$$

$$E_{C4} = \frac{1}{2} m_4 \dot{r}_{C4}^T \dot{r}_{C4} + \frac{1}{2} \omega_4^T I_4 \omega_4 = \frac{1}{2} m_4 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \dot{\theta}_4^2 \right\} + \frac{1}{2} I_{4zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \quad (\text{III-26})$$

L'énergie potentielle des segments 1,2 et 3 n'aura aucun effet sur les dynamiques car ses segments sont tout le temps à la même hauteur. Par contre l'énergie potentielle du quatrième segment change car ce dernier change d'hauteur à cause du déplacement vertical de la dernière articulation :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = m_4 g \theta_4 \quad (\text{III-27})$$

Le Lagrangien du système est donnée par :

$$L = E_C - V = \frac{1}{2} m_1 \frac{l_1^2}{4} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1zz} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right\} + \frac{1}{2} I_{2zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right\} + \frac{1}{2} I_{3zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} m_4 \left\{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \dot{\theta}_4^2 \right\} + \frac{1}{2} I_{4zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 - m_4 g \theta_4 \quad (\text{III-28})$$

Ainsi :

$$L = \left(\frac{1}{8} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{1}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \right) l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} m_4 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} I_{1zz} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{2zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} I_{3zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} I_{4zz} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{\theta}_4^2 - m_4 g \theta_4 \quad (\text{III-28})$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & 2 \left(\frac{1}{8} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2 \left(\frac{1}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \right) l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \\ & \left(l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \{ -\sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \cos(\theta_2) (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \} \right) + I_{1zz} \ddot{\theta}_1 + I_{2zz} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \\ & (I_{3zz} + I_{4zz}) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (\text{III-29})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left\{ \left(\frac{1}{4} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1^2 + \left(\frac{1}{4} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_2^2 + I_{1zz} + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} + 2l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. m_3 + m_4 \right) \cos(\theta_2) \right\} \ddot{\theta}_1 + \\ & \left\{ \left(\frac{1}{4} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_2^2 + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} + l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \cos(\theta_2) \right\} \ddot{\theta}_2 + \{ I_{3zz} + I_{4zz} \} \ddot{\theta}_3 - \\ & l_1 l_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (\text{III-30})$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = & \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + 2 \left(\frac{1}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \right) l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \\ & \ddot{\theta}_2) + \left\{ - \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_1 \right\} + I_{2zz} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \\ & I_{3zz} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + I_{4zz} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (\text{III-31})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \left\{ \left(\frac{1}{4} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_2^2 + \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \cos(\theta_2) + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} \right\} \ddot{\theta}_1 + \left\{ \left(\frac{1}{4} m_2 + m_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. m_4 \right) l_2^2 + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} \right\} \ddot{\theta}_2 + (I_{3zz} + I_{4zz}) \ddot{\theta}_3 + \left(\frac{1}{2} m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (\text{III-32})$$

$$\tau_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = (I_{3zz} + I_{4zz}) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \quad (\text{III-33})$$

$$\tau_4 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) + \frac{\partial L}{\partial \theta_4} = m_4 g + m_4 \ddot{\theta}_4 \quad (\text{III-34})$$

Les équations des dynamiques du robot peuvent être rassemblées sous une forme compacte donnée par :

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + g(\theta) \quad (\text{III-35})$$

Avec $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4]^T$, $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]^T$. La matrice $M(\theta)$ est la matrice de masse du robot. C'est une matrice qui caractérise les inerties du robot elle est symétrique et définie strictement positive.

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{4}m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right) l_1^2 \\ + \left(\frac{1}{4}m_2 + m_3 + m_4\right) l_2^2 \\ + I_{1zz} + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} \\ + 2l_1 l_2 \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right) \cos(\theta_2) \\ + m_4 \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} + \left(\frac{1}{4}m_2 + m_3\right) l_2^2 \\ + m_4 \\ + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} \\ + l_1 l_2 \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right) \cos(\theta_2) \\ + m_4 \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \{I_{3zz} + I_{4zz}\} \\ \\ \\ \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{4}m_2 + m_3 + m_4\right) l_2^2 \\ + \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right) l_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ + m_4 \\ + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} \\ + (I_{3zz} + I_{4zz}) \\ 0 \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{4}m_2 + m_3\right) l_2^2 \\ + m_4 \\ + I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} \\ \\ \\ (I_{3zz} + I_{4zz}) \\ 0 \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} (I_{3zz} + I_{4zz}) \\ \\ \\ \\ \\ (I_{3zz} + I_{4zz}) \\ 0 \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \\ \\ \\ \\ 0 \\ m_4 \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (\text{III-36})$$

36)

La matrice $C(\theta, \dot{\theta})$ est linéaire en $\dot{\theta}$ et elle caractérise les force centrifuges et les effets Corriollis. Elle est donnée par :

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -l_1 l_2 \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 & -l_1 l_2 \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right) \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3 + m_4\right) l_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-37})$$

La matrice $G(\theta)$ caractérise les forces de gravité

$$G(\theta) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad m_4 g]^T \quad (\text{III-38})$$

Cette matrice est remplacée par une matrice $N(\theta, \dot{\theta})$ qui dépend aussi de $\dot{\theta}$ pour le cas où on considère les forces de frottement. Dans ce cas le modèle dynamique sera décrit par :

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) \quad (\text{III-39})$$

III.3. Spécification des chemins pris en considération :

Le premier exemple sur lequel nous allons faire nos simulations est une ellipse de centre $(0,0,3,20)$. Les deux rayons de l'ellipse sont $a_x = 0.35, a_z = 0.1$. Pour le robot nous prenons $L_1 = 0.3, L_2 = 0.2$ et $-0.1 \leq \theta_4 \leq 0.2$ et $l_0 = 0.1$.

La première trajectoire est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = a_x \cos(2\pi s) \\ y = 0.3 \\ z = a_z \sin(2\pi s) + 0.2 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \text{ L'orientation de l'outil est constante} \end{cases} \quad (\text{III-40})$$

III.4. Problème de poursuite à temps optimal du chemin :

Dans l'approche découlée, le problème de planification de mouvement est découpé en deux étapes. Dans la première étape (l'étape de planification du chemin), un planificateur de niveau supérieur détermine un chemin géométrique en prenant en considération les spécifications de la tâche à réaliser, l'évitement d'obstacle et d'autres aspects (de niveau supérieur) d'habitude géométriques. Cette étape, ignore les aspects de niveau inférieur tels que les dynamiques du robot. La deuxième étape consiste en la poursuite du chemin. Pendant cette étape une trajectoire à temps optimal est déterminée le long du chemin géométrique dans laquelle les dynamiques du robot et les contraintes sur les actionneurs sont prises en considération. Dans ce qui suit, nous allons suivre la procédure donnée dans [2009,2013] pour la formulation du problème de poursuite à temps optimal sous forme d'un problème de commande optimale convexe.

Considérons un chemin $\theta(s)$ spécifié dans l'espace articulaire comme fonction d'une coordonnée scalaire 's'. Cette coordonnée scalaire détermine la géométrie spatiale du chemin, alors que la dépendance de la trajectoire sur le temps sera déterminée par la relation $s(t)$ entre la coordonnée du chemin 's' et le temps. Sans perte de généralité, il est supposé que la trajectoire démarre à $t = 0$ et se termine à $t = T$ et que $s(0) = 0 \leq s(t) \leq 1 = s(T)$. Nous supposons que le mouvement se fait toujours dans le sens direct $\dot{s}(t) \geq 0$ (il n'y a pas de mouvement vers l'arrière puisqu'il s'agit de mouvement à temps optimal) et que $\dot{s}(t) > 0$ presque partout.

Dans le cas où le chemin est spécifié dans l'espace opérationnel, le modèle cinématique inverse sera utilisé pour obtenir le chemin correspondant dans l'espace articulaire.

Pour le chemin donnée, les vitesses et les accélérations articulaires peuvent être déterminées par :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(s) = \frac{\partial \theta}{\partial s} \dot{s} \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{\partial \theta}{\partial s} \ddot{s} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \dot{s}^2 \end{cases} \quad (\text{III-41})$$

Si on remplace $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ dans le modèle dynamique, nous obtenons l'équation de mouvement suivante :

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \mathbf{m}(s)\ddot{s} + \mathbf{c}(s)\dot{s}^2 + g(s) \text{ avec} \\ \mathbf{m}(s) &= M(\theta(s)) \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \mathbf{c}(s) &= M(\theta(s)) \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + C\left(\theta(s), \frac{\partial \theta}{\partial s}\right) \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ g(s) &= G(\theta(s)) \end{aligned} \quad (\text{III-42})$$

Le problème de poursuite de chemin à temps optimal pour le robot manipulateur soumis à des contraintes de limite supérieure et limite inférieure des couples articulaires peut être exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser}_{s(\cdot), \tau(\cdot)} T \\
 & \text{soumis à : } \tau(t) = \mathbf{m}(s(t))\ddot{s}(t) + \mathbf{c}(s(t))\dot{s}^2(t) + \mathbf{g}(s(t)) \\
 & \quad s(0) = 0 \\
 & \quad s(T) = 1 \\
 & \quad \dot{s}(0) = \dot{s}_0 \\
 & \quad \dot{s}(T) = \dot{s}_T \\
 & \quad \dot{s}(t) \geq 0 \\
 & \quad \underline{\tau}(s(t)) \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}(s(t)) \text{ pour } t \in [0, T]
 \end{aligned} \tag{III-43}$$

Les bornes inférieure et supérieure du couple peuvent dépendre de s . Dans la majorité des cas $\dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0$. En examinant la formulation de ce problème il n'est pas clair si un minimum local et aussi un minimum global. Maintenant on introduit un changement non linéaire de variable pour transformer ce problème en un autre problème qui est convexe.

En premier lieu, par le changement de la variable d'intégration de t à s , la fonction objective devient :

$$T = \int_0^T dt = \int_{s(0)}^{s(T)} \frac{1}{\dot{s}} ds = \int_0^1 \frac{1}{\dot{s}} ds \tag{III-44}$$

Ensuite, on introduit deux variables d'optimisation :

$$\begin{aligned}
 a(s) &= \ddot{s} \\
 b(s) &= \dot{s}^2
 \end{aligned} \tag{III-45}$$

Et on les supplémente avec une contrainte additionnelle :

$$\frac{\partial b}{\partial s}(s) = 2a(s) \text{ car } \dot{b}(s) = \frac{d}{dt}(\dot{s}^2) = 2\dot{s}\ddot{s} = \frac{\partial b(s)}{\partial s} \dot{s} \tag{III-46}$$

Maintenant le problème de commande optimale précédent peut être reformulé sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser}_{s(\cdot), a(\cdot), b(\cdot), \tau(\cdot)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{b(s)}} ds \\
 & \text{soumis à : } \tau(s) = \mathbf{m}(s(t))\ddot{s}(t) + \mathbf{c}(s(t))\dot{s}^2(t) + \mathbf{g}(s(t)) \\
 & \quad \frac{\partial b}{\partial s}(s) = 2a(s) \\
 & \quad b(0) = \dot{s}_0^2 \\
 & \quad b(1) = \dot{s}_T^2 \\
 & \quad b(s) \geq 0 \\
 & \quad \underline{\tau}(s(t)) \leq \tau(s(t)) \leq \bar{\tau}(s(t)) \text{ pour } t \in [0, T]
 \end{aligned} \tag{III-47}$$

On remarque que toutes les contraintes sont linéaires et que la fonction du coût est convexe ceci implique que le problème est convexe.

Ce problème peut être vu comme un problème de commande optimale dans la forme DAE avec un pseudo temps qui est la variable s , l'entrée de commande qui est $a(s)$, l'état différentielle $b(s)$, l'état algébrique $\tau(s)$, une dynamique linéaire exprimée par $\frac{\partial b}{\partial s}(s) = 2a(s)$ (s jouant le rôle du temps) et soumis à des contraintes dépendants des états et des contraintes sur l'état initial et l'état terminal.

Ce problème de commande optimale a un seule état différentiel, d'autre part l'état algébrique peut être éliminé à travers $\tau(t) = \mathbf{m}(s(t))\dot{s}(t) + \mathbf{c}(s(t))s^2(t) + \mathbf{g}(s(t))$.

L'avantage principal de cette formulation est qu'elle est convexe. En plus on peut dériver des fonctions objectives et des contraintes d'inégalité additionnelles de telle sorte que le problème garde sa convexité.

III.5. Fonctions objectives convexes et Contraintes d'inégalité linéaires :

Les fonctions objectives convexes qu'on peut prendre en considération sont :

III.5.1. Energie thermique :

L'intégral du carré du couple de l'articulation i est :

$$\int_0^T \tau_i(s)^2 dt = \int_0^1 \frac{\tau_i(s)^2}{\dot{s}} ds = \int_0^1 \frac{\tau_i(s)^2}{\sqrt{b(s)}} ds \quad (\text{III-48})$$

Cette fonction objective est reliée à l'énergie thermique générée par l'actionneur i . Il peut être montré qu'une fonction de la forme $\frac{x^2}{\sqrt{y}}$ est convexe en x et $y \geq 0$.

III.5.2. Intégral de la valeur absolue du taux de variation couple :

L'intégral de la valeur absolue de la vitesse de variation du couple est :

$$\int_0^T |\dot{\tau}_i(s)| dt = \int_0^1 \frac{|\frac{\partial \tau_i}{\partial s} \dot{s}|}{\dot{s}} ds = \int_0^1 \left| \frac{\partial \tau_i}{\partial s} \right| ds \quad (\text{III-49})$$

Ceci vue que $\dot{s} \geq 0$ pour $t \in [0, T]$. Cette fonction objectif est convexe car $\int \frac{\partial x}{\partial s} ds = x$ et $|x|$ est convexe en x . L'incorporation de ce terme peut éliminer ou réduire les variations rapides (brusques) du couple.

III.5.3. Incorporation de contraintes d'inégalité :

On peut aussi incorporer les contraintes d'inégalité suivantes sans autant affecter la convexité.

III.5.3.1. Contraintes d'inégalité sur la vitesse articulaire :

Il est possible d'incorporer des limites de vitesse, qui peuvent être inspirées par les spécifications de la tâche. En imposant des limites inférieure $\left(-\bar{\theta}_i(s)\right)$ et supérieure $\bar{\theta}_i(s)$ symétriques sur la vitesse de l'articulation i comme suit :

$$-\bar{\theta}_i(s) \leq \dot{\theta}_i(s) \leq \bar{\theta}_i(s) \Leftrightarrow \left\{ \left(\dot{\theta}_i(s) \right)^2 = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial s} \dot{s} \right)^2 = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial s} \right)^2 b(s) \leq \bar{\theta}_i(s)^2 \right\} \quad (\text{III-50})$$

Il faut aussi noter que cette contrainte peut être facilement réécrite sous la forme $b(s) \leq \bar{b}(s)$ et par conséquent peut être interprétée comme une borne supérieure sur $b(s)$. Par conséquent, il suffit de considérer la borne supérieure la plus restrictive pour tout $s \in [0,1]$. En utilisant le Jacobéen $(v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T = J(\theta)\dot{\theta}$, on peut aussi imposer des contraintes de bornes supérieures et inférieures sur les composantes translationnelles ou rotationnelles de la vitesse de l'espace opérationnel.

III.5.3.2. Contraintes sous forme de bornes sur l'accélération :

Il est aussi possible d'inclure une borne supérieure et une borne inférieure sur l'accélération articulaire de l'articulation i comme suit :

$$\underline{\ddot{\theta}}_i(s) \leq \ddot{\theta}_i(s) \leq \bar{\ddot{\theta}}_i(s) \Leftrightarrow \left\{ \ddot{\theta}_i(s) \leq \frac{\partial \theta_i}{\partial s} \ddot{s} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial s^2} \dot{s}^2 \leq \bar{\ddot{\theta}}_i(s) \right\} \Leftrightarrow \left\{ \ddot{\theta}_i(s) \leq \frac{\partial \theta_i}{\partial s} a(s) + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial s^2} b(s) \leq \bar{\ddot{\theta}}_i(s) \right\} \quad (\text{III-51})$$

Similairement aux contraintes sur les vitesses articulaires, les contraintes sur les accélérations articulaires peuvent aussi être appliquées aux accélérations de l'espace opérationnel. Il peut être montré que les contraintes de bornes supérieure et inférieure sur les accélérations de l'espace articulaire et de l'espace opérationnel peuvent les deux être écrites sous la forme :

$$\underline{f}(s) \leq f(s)a(s) + h(s)b(s) \leq \bar{f}(s) \quad (\text{III-52})$$

III.6. Formulation généralisée du problème de commande optimale correspondant au problème de planification :

En combinant les types de fonctions objectives précédentes sous une forme affine et en incorporant les différents types de contraintes nous aboutissons au problème de commande optimale généralisé suivant :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\text{selon: } a(\cdot), b(\cdot), \tau(\cdot)} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{b(s)}} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{b(s)}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(s)^2}{\bar{\tau}_i^2} \right) + \gamma_2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\left| \frac{\partial \tau_i(s)}{\partial s} \right|}{|\bar{\tau}_i|} \right) \right\} ds \\ & \text{soumis à : } \tau(s) = \mathbf{m}(s(t))\dot{s}(t) + \mathbf{c}(s(t))\dot{s}^2(t) + \mathbf{g}(s(t)) \\ & \quad \frac{\partial b}{\partial s}(s) = 2a(s) \\ & \quad b(0) = \dot{s}_0^2 \\ & \quad b(1) = \dot{s}_T^2 \\ & \quad b(s) \geq 0 \\ & \quad b(s) \leq \bar{b}(s) \\ & \quad \underline{f}(s) \leq f(s)a(s) + h(s)b(s) \leq \bar{f}(s) \\ & \quad \underline{\tau}(s(t)) \leq \tau(s(t)) \leq \bar{\tau}(s(t)) \text{ pour } t \in [0, T] \end{aligned} \quad (\text{III-53})$$

Avec $\bar{\tau}_i, i = 1, 2, \dots, n$ sont des valeurs convenablement choisies (par exemple $\bar{\tau}_i = \max_{s \in [0,1]} [\tau_i(s)]$) ce qui permet de normaliser le couple en question. Il faut noter que le signe de ces nombres n'a pas d'effet sur le coût ainsi il faut les choisir comme étant des nombres positifs.

Le problème de commande optimale généralisé est convexe car la fonction objective et les contraintes d'inégalité sont convexes et les dynamiques du système et les contraintes d'égalité sont linéaires.

III.7. Solution numérique du problème de planification de trajectoire à temps optimal :

Le problème de commande optimale généralisé, obtenue dans la section précédente et correspondant à la planification de trajectoire à temps optimale peut être résolu en utilisant différentes techniques : la programmation dynamique, les méthodes indirectes basées sur le principe de maximum de Pontriaguine et les méthodes de transcription directes. La méthode que nous avons utilisée dans ce travail est une méthode de transcription directe. Cette méthode consiste en la transformation du problème de commande optimale en un problème d'optimisation à dimension finie.

En premier la coordonnée du chemin qui est la variable 's' est discrétisée sur l'intervalle [0,1] en un ensemble de $N + 1$ points $0 = s_0 < s_k < s_N = 1$. Le nombre d'échantillons est choisi de telle sorte que $\frac{\partial^2 \theta(s)}{\partial s^2}$ évaluées sur les points de la grille d'échantillonnage soient une bonne approximation de la fonction continue $\frac{\partial^2 \theta(s)}{\partial s^2}$. Ensuite les fonctions $a(s), b(s)$ et $\tau_i(s)$ sont modélisées en introduisant un nombre fini de variable a_k, b_k, τ_{ik} qui représentent des évaluations des fonctions correspondantes sur les points de discrétisation ou entre eux. Les choix du nombre de variables et le choix des points sur lesquels ils devront être évalués caractérisent les différentes méthodes de transcription directes.

Vue que la fonction $a(s)$ est considérée comme étant la variable de commande, on la choisie comme étant constante par morceaux. A ce moment et à partir de l'équation $\frac{\partial b}{\partial s}(s) = 2a(s)$ on peut constater que $b(s)$ doit être linéaire par morceaux et à partir de l'équation du couple on peut aussi constater que $\tau(s)$ doit être une fonction non linéaire par morceaux. Dans ce travail, les paramètres a_k, b_k, τ_{ik} représentent les valeurs de $a(s), b(s)$ et $\tau_i(s)$ pour la valeur s_k de la variable s . Ainsi :

$$b(s) = b_k + \frac{b_{k+1} - b_k}{s_{k+1} - s_k} (s - s_k) \quad (\text{III-54})$$

Pour $s \in [s_k, s_{k+1}]$. Les variable a_k et τ_{ik} sont évaluées en milieu entre les points s_k de la grille c'est-à-dire aux points $s_{k+\frac{1}{2}} = \frac{s_k + s_{k+1}}{2}$. Etant données les valeurs de $a_k = a\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)$ et $\tau_k = \tau\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)$ pour $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$ et étant donné le fait que $b(s)$ soit linéaires par morceaux, les deux premiers termes de l'intégrale de la fonction coût peuvent être approximés par :

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{b(s)}} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{b(s)}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(s)^2}{\bar{\tau}_i^2} \right) \right] ds = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{b(s)}} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{b(s)}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(s)^2}{\bar{\tau}_i^2} \right) \right] ds$$

$$\cong \sum_{k=0}^{N-1} \left[1 + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)^2}{\bar{\tau}_i^2} \right] \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{b(s)}} ds \quad (\text{III-55})$$

Pour évaluer l'intégral $\int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{b(s)}} ds$, nous considérons l'approximation linéaire par morceaux de $b(s)$:

$b(s) = \alpha + \beta(s - s_k) = z$. Ainsi :

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{b(s)}} ds = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dz}{\beta} = \left[\frac{2\sqrt{z}}{\beta} \right]_{z_1}^{z_2} = 2 \frac{\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}}{\beta} = 2 \frac{\sqrt{b_{k+1}} - \sqrt{b_k}}{\frac{b_{k+1} - b_k}{s_{k+1} - s_k}} = \frac{2\Delta s_k}{\sqrt{b_{k+1}} + \sqrt{b_k}} \quad (\text{III-56})$$

Avec $z_1 = b_k$, $z_2 = b_{k+1}$, $\beta = \frac{b_{k+1} - b_k}{s_{k+1} - s_k}$ et $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$.

Le deuxième terme du problème généralisé, peut être approximé pour chaque i par :

$$\int_0^1 \gamma_2 \left(\frac{|\partial \tau_i|}{|\bar{\tau}_i|} \right) ds = \gamma_2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|\Delta \tau_{ik}|}{|\bar{\tau}_i|} \quad (\text{III-57})$$

Avec $\Delta \tau_{ik} = \left(\tau_i\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) - \tau_i\left(s_{k-\frac{1}{2}}\right) \right)$ pour $k = 1, \dots, (N-1)$. Après avoir introduit la notation $b_{k+\frac{1}{2}} = \frac{b_k + b_{k+1}}{2}$ le problème de commande optimale généralisé correspondant au problème de planification de trajectoire à temps optimal, peut être réécrit sous une forme discrétisée comme un problème d'optimisation à grande échelle :

$$\min_{\text{selon } a_k, b_k, \tau_k} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2\Delta s_k \left(1 + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \left(\tau_i\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)^2 / \bar{\tau}_i^2 \right) \right)}{\sqrt{b_{k+1}} + \sqrt{b_k}} \right) + \gamma_2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left| \Delta \tau_i\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) \right| / |\bar{\tau}_i| \right) \right) \right]$$

soumis à :

$$\tau_k = m\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) a_k + c\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) b_{k+\frac{1}{2}} + g\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

$$b_0 = \hat{s}_0^2; \quad b_N = \hat{s}_T^2$$

$$b_{k+1} - b_k = 2a_k \Delta s_k$$

$$b_k \geq 0 \text{ et } b_N \geq 0 \quad (\text{III-})$$

$$b_k \leq \bar{b}(s_k) \text{ et } b_N \leq \bar{b}(s_N)$$

$$\underline{f}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) \leq f\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) a_k + h\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) b_{k+\frac{1}{2}}$$

$$f\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) a_k + h\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) b_{k+\frac{1}{2}} \leq \bar{f}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\underline{\tau}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right) \leq \tau_k \leq \bar{\tau}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

pour : $k = 0, \dots, (N-1)$

III.7.1. Application au robot SCARA :

Pour l'implémentation numérique des dynamiques et des contraintes du problème d'optimisation correspondant au problème de planification de chemin à temps optimal pour le cas du robot SCARA, il faut calculer les expressions de $\frac{\partial \theta}{\partial s}$ et $de \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}$ sur le chemin désiré de l'outil qui est spécifié dans l'espace cartésien en utilisant le paramètre (pseudo time) s . A partir du modèle géométrique inverse (équation (III-16)) nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ atan2 \left(\rho_3, \pm \sqrt{1 - \rho_3^2} \right) + atan2(x, y) \right\} \quad (III-59)$$

La fonction $atan2(x, y)$ est définie comme suit :

$$atan2(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} \quad (III-60)$$

Si on considère que les fonctions x et y sont telles que $atan2(x, y)$ soit continue alors la dérivée $atan2(x, y)$ est donnée par :

$$\frac{\partial atan2(x, y)}{\partial s} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial s} x - \frac{\partial x}{\partial s} y\right)}{x^2 + y^2} \quad (III-61)$$

$$\frac{\partial^2 atan2(x, y)}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial s} x - \frac{\partial x}{\partial s} y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\left(\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} x - \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} y \right) (x^2 + y^2) - \left(\frac{\partial y}{\partial s} x - \frac{\partial x}{\partial s} y \right) 2 \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (III-62)$$

La dérivée du deuxième terme de $\theta_1(s)$ est obtenue comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial s} atan2 \left(\rho_3, \pm \sqrt{1 - \rho_3^2} \right) = \pm \frac{1}{1 + \frac{1 - \rho_3^2}{\rho_3^2}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sqrt{1 - \rho_3^2}}{\rho_3} \right) = \pm \frac{1}{1 + \frac{1 - \rho_3^2}{\rho_3^2}} \left(\frac{-1}{\rho_3^2 \sqrt{1 - \rho_3^2}} \right) \frac{\partial \rho_3}{\partial s} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_3^2}} \frac{\partial \rho_3}{\partial s} \quad (III-63)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} atan2 \left(\rho_3, \pm \sqrt{1 - \rho_3^2} \right) = \mp \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \rho_3^2}} \frac{\partial \rho_3}{\partial s} \right) = \mp \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \rho_3^2}} \frac{\partial^2 \rho_3}{\partial s^2} + \frac{\rho_3}{\sqrt{(1 - \rho_3^2)^3}} \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial s} \right)^2 \right) \quad (III-64)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{2L_1} \left(\frac{x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(L_1^2 - L_2^2) (x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s})}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) = \left(1 - \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{x^2 + y^2} \right) \frac{1}{2L_1} \frac{(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (III-65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_3}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(1 - \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{x^2 + y^2} \right) \frac{1}{2L_1} \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2L_1} \left\{ 2(L_1^2 - L_2^2) \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right) \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{x^2 + y^2} \right) \frac{\left(x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right) \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(x^2 + y^2)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_3}{\partial s^2} &= \\ \frac{1}{2L_1} &\left\{ 2(L_1^2 - L_2^2) \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{x^2 + y^2} \right) \frac{\left(x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \left(1 - \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{x^2 + y^2} \right) \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial^2 \rho_3}{\partial s^2} &= \frac{1}{2L_1} \left\{ 2(L_1^2 - L_2^2) \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{x^2 + y^2} \right) \frac{\left(x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x^2 + y^2 - \right. \\ &\left. (L_1^2 - L_2^2)) \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_3}{\partial s^2} = \frac{1}{2L_1} \left\{ (3(L_1^2 - L_2^2) - (x^2 + y^2)) \frac{\left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \frac{(L_1^2 - L_2^2)}{x^2 + y^2} \right) \frac{\left(x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \quad \text{(III-66)}$$

Les équations 59, 62-64 et 66 permettent le calcul de $\frac{\partial \theta_1}{\partial s}$ et de $\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial s^2}$. Maintenant nous faisons le même travail pour θ_2 .

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{atan2} \left(\rho_1, \frac{1}{\tan(\theta_1 - \phi)} \{ \rho_2 - \rho_1 \} \right) \quad \text{(III-67)}$$

Ici on pose $\rho_4 = \frac{-1}{\tan(\theta_1 - \phi)} \{ \rho_2 - \rho_1 \}$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{atan2}(\rho_1, \rho_4) = \frac{\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial s} \rho_1 - \frac{\partial \rho_1}{\partial s} \rho_4 \right)}{\rho_1^2 + \rho_4^2} \quad \text{(III-68)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial s} \rho_1 - \frac{\partial \rho_1}{\partial s} \rho_4 \right)}{\rho_1^2 + \rho_4^2} = \frac{\left(\frac{\partial^2 \rho_4}{\partial s^2} \rho_1 - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial s^2} \rho_4 \right) (\rho_1^2 + \rho_4^2) + \left(\frac{\partial \rho_4}{\partial s} \rho_1 - \frac{\partial \rho_1}{\partial s} \rho_4 \right) 2 \left(\rho_4 \frac{\partial \rho_4}{\partial s} + \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial s} \right)}{(\rho_1^2 + \rho_4^2)^2} \quad \text{(III-69)}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \right) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right) \quad \text{(III-70)}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial s^2} = \frac{1}{L_1 L_2} \left(x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right) \quad (\text{III-71})$$

Maintenant on pose $\rho_5 = \frac{-1}{\tan(\theta_1 - \phi)}$; $\rho_6 = \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_3} - \rho_1 \right\}$. Ceci permet d'écrire :

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\rho_5 \rho_6) = \frac{\partial \rho_5}{\partial s} \rho_6 + \rho_5 \frac{\partial \rho_6}{\partial s} \quad (\text{III-72})$$

$$\frac{\partial^2 \rho_4}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \rho_5}{\partial s} \rho_6 + \rho_5 \frac{\partial \rho_6}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial^2 \rho_5}{\partial s^2} \rho_6 + \frac{\partial \rho_5}{\partial s} \frac{\partial \rho_6}{\partial s} + \frac{\partial \rho_5}{\partial s} \frac{\partial \rho_6}{\partial s} + \rho_5 \frac{\partial^2 \rho_6}{\partial s^2} \right) \quad (\text{III-73})$$

$$\frac{\partial \rho_5}{\partial s} = \frac{1}{\tan^2(\theta_1 - \phi)} (1 + \tan^2(\theta_1 - \phi)) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \quad (\text{III-74})$$

$$\frac{\partial^2 \rho_5}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{1}{\tan^2(\theta_1 - \phi)} + 1 \right) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \right\} = \left\{ \frac{-2}{\tan^3(\theta_1 - \phi)} (1 + \tan^2(\theta_1 - \phi)) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tan^2(\theta_1 - \phi)} + 1 \right) \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right) \right\} \quad (\text{III-75})$$

Pour $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ et $\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}$ il faut rappeler que $\phi = \text{atan2}(x, y)$ et que les dérivées de cette fonction ont été déjà calculées.

$$\frac{\partial \rho_6}{\partial s} = \left\{ \frac{\frac{\partial \rho_2}{\partial s} \rho_3 - \rho_2 \frac{\partial \rho_3}{\partial s}}{\rho_3^2} - \frac{\partial \rho_1}{\partial s} \right\} \quad (\text{III-76})$$

$$\frac{\partial^2 \rho_6}{\partial s^2} = \left\{ \frac{\left(\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial s^2} \rho_3 - \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_3}{\partial s^2} \right) \rho_3^2 - 2 \rho_3 \frac{\partial \rho_3}{\partial s} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial s} \rho_3 - \rho_2 \frac{\partial \rho_3}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial s^2}}{\rho_3^4} \right\} \quad (\text{III-77})$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^2 + y^2 + L_2^2 - L_1^2}{2L_2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \left(\frac{(2x \frac{\partial x}{\partial s} + 2y \frac{\partial y}{\partial s}) \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2 + L_2^2 - L_1^2) \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)}{2L_2 (x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = \left(\frac{(x^2 + y^2 - L_2^2 + L_1^2) \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)}{2L_2 \sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) \quad (\text{III-78})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial s^2} &= \frac{1}{2L_2} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{-L_2^2 + L_1^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2L_2} \left\{ \left(\frac{-1}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} 2 \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right) - 3 \frac{-L_2^2 + L_1^2}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} 2 \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \right. \\ &\left. \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{-L_2^2 + L_1^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) \right\} = \frac{1}{2L_2} \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - 3 \frac{-L_2^2 + L_1^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) \left(x \frac{\partial x}{\partial s} + y \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \right. \\ &\left. \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{-L_2^2 + L_1^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) \right\} \quad (\text{III-79}) \end{aligned}$$

Pour la dérivée de la troisième coordonnée articulaire, nous avons :

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \{ \text{atan2}(H_{11}, H_{21}) - \theta_1 - \theta_2 \} = \frac{\left(\frac{\partial H_{21}}{\partial s} H_{11} - \frac{\partial H_{11}}{\partial s} H_{21} \right)}{H_{11}^2 + H_{21}^2} - \frac{\partial \theta_1}{\partial s} - \frac{\partial \theta_2}{\partial s} \quad (\text{III-80})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \text{atan2}(H_{11}, H_{21}) - \theta_1 - \theta_2 \} = \\ &= \frac{\left(\left(\frac{\partial^2 H_{21}}{\partial s^2} H_{11} - \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial s^2} H_{21} \right) (H_{11}^2 + H_{21}^2) - \left(\frac{\partial H_{21}}{\partial s} H_{11} - \frac{\partial H_{11}}{\partial s} H_{21} \right) 2 \left(H_{11} \frac{\partial H_{11}}{\partial s} + H_{21} \frac{\partial H_{21}}{\partial s} \right) \right)}{(H_{11}^2 + H_{21}^2)^2} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (\text{III-81})$$

Ici, il faut rappeler que H_{11} et H_{21} dépendent de $(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0$.

$$\frac{\partial \theta_4}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \{ H_{34} - l_0 \} = \frac{\partial H_{34}}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} \quad (\text{III-82})$$

$$\frac{\partial^2 \theta_4}{\partial s^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ H_{34} - l_0 \} = \frac{\partial^2 H_{34}}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \quad (\text{III-83})$$

Pour calculer la solution, sous MATLAB, du problème d'optimisation obtenu après la transcription du problème de TOPP, nous faisons appel à la fonction 'fmincon' qui est dédiée à la résolution de problèmes d'optimisation avec contraintes énoncés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\text{minimiser}_{\text{selon } x} f(x) \\ &\text{soumis à : } C(x) \leq 0 \\ &\quad C_{eq}(x) = 0 \\ &\quad Ax \leq b \\ &\quad A_{eq}x = b_{eq} \\ &\quad l_b \leq x \leq u_b \end{aligned} \quad (\text{III-84})$$

$f(x)$ est la fonction objective, le vecteur x est le vecteurs des paramètres selon lesquels s'effectue l'optimisation. Les fonctions $C(x)$, $C_{eq}(x)$ spécifient les contraintes non-linéaires d'inégalité et d'égalité respectivement. Les matrices A, b, A_{eq}, b_{eq} permettent de spécifier les contraintes linéaires d'inégalité et d'égalité respectivement. Les vecteurs l_b et u_b spécifient des bornes inférieures et supérieures sur la paramètres d'optimisation.

Pour notre cas le vecteur de paramètres d'optimisation est :

$$x = [a_0 \quad \dots \quad a_N \quad b_0 \quad \dots \quad b_N \quad \tau_0^T \quad \dots \quad \tau_N^T]^T \quad (\text{III-85})$$

La fonction $f(x)$ peut retourner en plus de la valeur du coût la valeur du gradient. Pour obtenir le gradient de la fonction coût nous avons établies les expressions suivantes :

La fonction du coût du problème généralisé de l'équation (III-58) est en premier lieu partagée en deux parties :

$$J = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2\Delta s_k \left(1 + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \left(\tau_i \left(s_{k+\frac{1}{2}} \right)^2 / \bar{\tau}_i^2 \right) \right)}{\sqrt{b_{k+1}} + \sqrt{b_k}} \right)}_{J_1} + \underbrace{\gamma_2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left| \Delta \tau_i \left(s_{k+\frac{1}{2}} \right) \right| / |\bar{\tau}_i| \right) \right)}_{J_2} \quad (\text{III-86})$$

Avec $\Delta \tau_i \left(s_{k+\frac{1}{2}} \right) = \tau_i \left(s_{k+\frac{1}{2}} \right) - \tau_i \left(s_{k-\frac{1}{2}} \right)$. Les gradients des fonctions J_1 et J_2 sont établis dans les équations qui suivent dans lesquels nous avons utilisé la notation $\tau_i(k) = \tau_i \left(s_{k+\frac{1}{2}} \right)$ et $\Delta s_k = (s_{k+1} - s_k)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial b_0} &= - \frac{(s_1 - s_0) \left(1 + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tau_i^2(0)}{\bar{\tau}_i^2} \right) \right)}{\sqrt{b_0} (\sqrt{b_1} + \sqrt{b_0})^2} \\ \frac{\partial J_1}{\partial b_k} &= - \frac{\Delta s_{k-1} \left(1 + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tau_i^2(k-1)}{\bar{\tau}_i^2} \right) \right)}{\sqrt{b_k} (\sqrt{b_k} + \sqrt{b_{k-1}})^2} - \frac{\Delta s_k \left(1 + \gamma_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tau_i^2(k)}{\bar{\tau}_i^2} \right) \right)}{\sqrt{b_k} (\sqrt{b_{k+1}} + \sqrt{b_k})^2}; \quad ; \quad k = 1, \dots, (N-1) \\ \frac{\partial J_1}{\partial b_N} &= - \frac{(s_N - s_{N-1}) \left(1 + \gamma_1 \left[\frac{\tau_{N-1,1}^2}{\bar{\tau}_1^2} + \frac{\tau_{N-1,2}^2}{\bar{\tau}_2^2} \right] \right)}{\sqrt{b_N} (\sqrt{b_N} + \sqrt{b_{N-1}})^2} \end{aligned} \quad (\text{III-87})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \tau_i(k)} &= \frac{4\Delta s_k \gamma_1 \frac{\tau_i(k)}{\bar{\tau}_i^2}}{(\sqrt{b_{k+1}} + \sqrt{b_k})^2}; \quad ; \quad k = 0, \dots, (N-1); \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial J_1}{\partial \tau_i(N)} &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{III-88})$$

Pour la deuxième partie de la fonction coût, nous avons obtenus les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial a_k} &= \frac{\partial J_2}{\partial b_k} = 0; \quad k = 0, \dots, N \\ \frac{\partial J_2}{\partial \tau_i(0)} &= - \frac{\gamma_2 \text{signe}(\tau_i(1) - \tau_i(0))}{|\bar{\tau}_i|}; \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial J_2}{\partial \tau_i(k)} &= \frac{\gamma_2 \text{signe}(\tau_i(k) - \tau_i(k-1))}{|\bar{\tau}_i|} - \frac{\gamma_2 \text{signe}(\tau_i(k+1) - \tau_i(k))}{|\bar{\tau}_i|}; \quad k = 1, \dots, N-1; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &\vdots \\ \frac{\partial J_2}{\partial \tau_i(N-1)} &= \frac{\gamma_2 \text{signe}(\tau_i(N-1) - \tau_i(N-2))}{|\bar{\tau}_i|}; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial J_2}{\partial \tau_i(N)} &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{III-89})$$

Toutes les contraintes d'égalités et d'inégalités que nous avons entre les mains sont linéaires, ainsi il suffit de former les matrices A_{eq} , b_{eq} , A et b .

III.8. Résultats de simulation :

Nous avons implémenté la procédure décrite dans les sections précédentes sous MATLAB pour le robot SCARA et le chemin sous forme d'une ellipse dans lequel l'orientation de l'outil doit rester constante est

égale à $\frac{\pi}{2}$. Nous avons considéré les contraintes d'égalité et les contraintes sous forme de borne supérieure et borne inférieure. Nous avons fait la discrétisation avec un pas $\Delta s = 0.01$ ce qui donne 101 points. Pour les variables $\bar{\tau}_i$ nous les avons pris comme $\bar{\tau}_i = 1$. Pour les valeurs maximales des b_k et des a_k nous avons pris des valeurs élevées. En premier lieu nous avons considéré seulement la première partie du coût J_1 . La valeur du temps optimal que nous avons obtenue est $t_f = 17.1259sec$ le coût optimal est $J_{opt} = 2.536041e + 02$. Les calculs ont été achevés de façon presque instantanée est une trajectoire optimale a été retournée. La fonction fmincon de MATLAB s'est terminée avec les indications suivantes :

Iter	F-count	f(x)	Feasibility	First-order optimality	Norm of step
297	313	2.536041e+02	8.882e-16	8.252e-03	3.847e-04

Nous avons refait la simulation avec un pas d'échantillonnage $\Delta s = 0.002$ ce qui donne 501 points et nous avons considéré comme coût la somme $J_1 + J_2$. Nous avons obtenu des courbes similaires aux précédentes mais avec un cout un peu plus grand et des conditions d'optimalité de premier ordre meilleures, le temps optimal est $t_f = 9.3153sec$. Cependant le temps de calcul est très élevé (plus de 2 heures) :

Iter	F-count	f(x)	Feasibility	First-order optimality	Norm of step
654	1862	3.063634e+02	8.882e-16	4.336e-03	1.163e-02

Nous portons dans les figures qui suivent les courbes de variations des variables articulaires et de leurs dérivées le long de la trajectoire optimale ainsi que les couples articulaires et ceci pour le cas où $\Delta s = 0.01$.

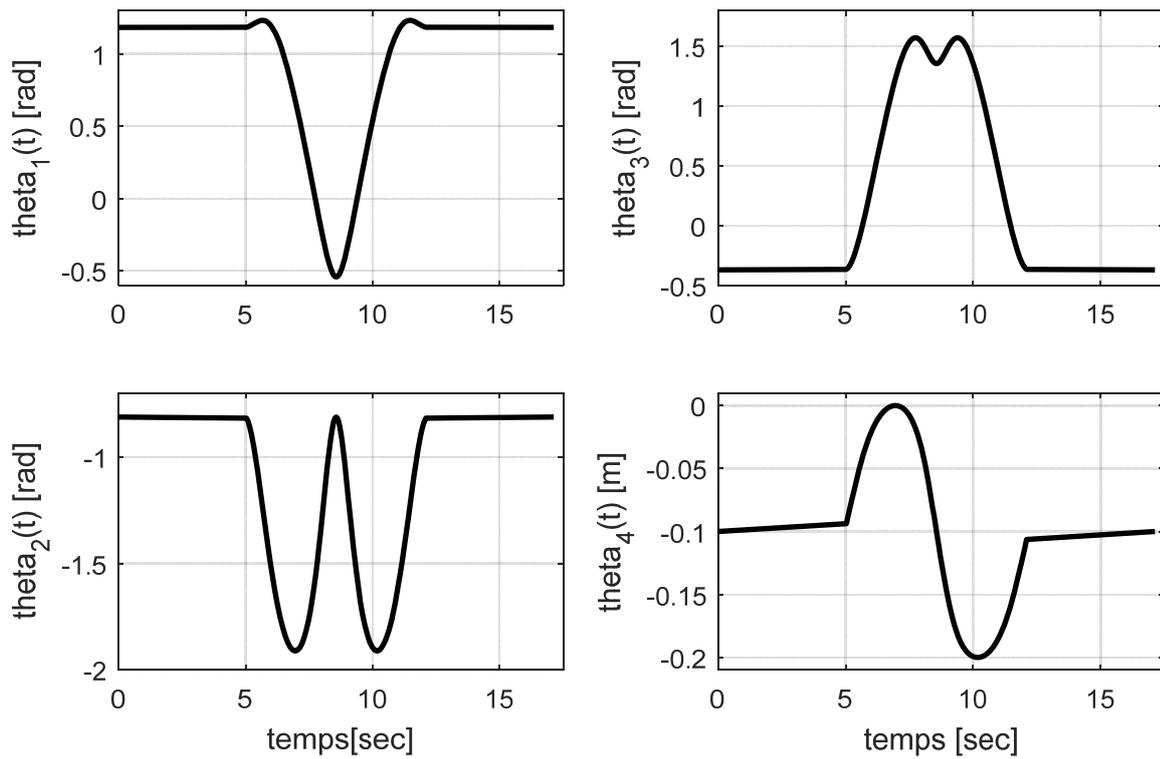


Figure (III-4) Evolution des variables articulaires en fonction du temps le long de la trajectoire optimale correspondant au chemin sous forme d'une ellipse selon le critère J_1 .

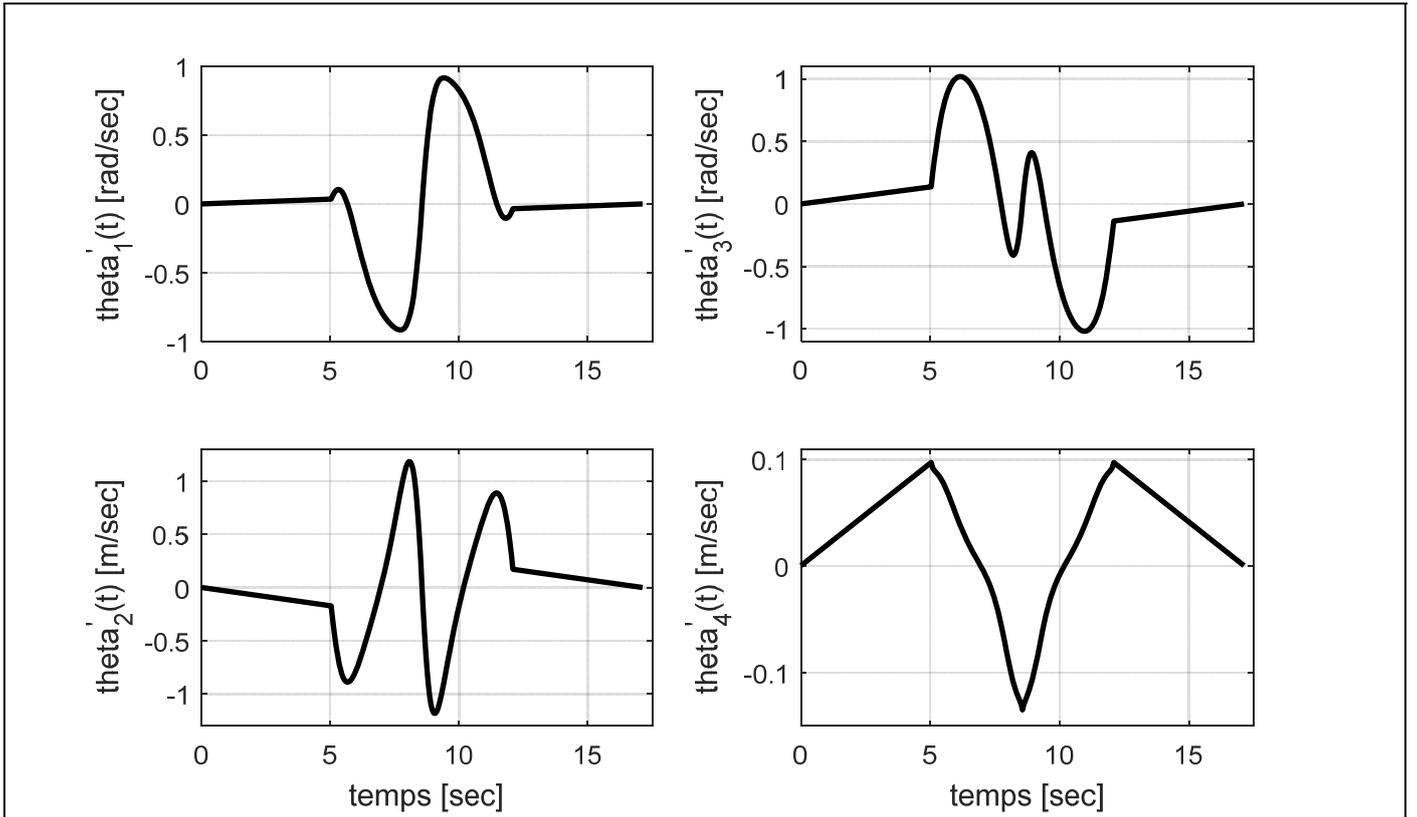


Figure (III-5) Evolution des vitesses articulaires le long de la trajectoire optimale pour un chemin en ellipse selon le critère J_1 .

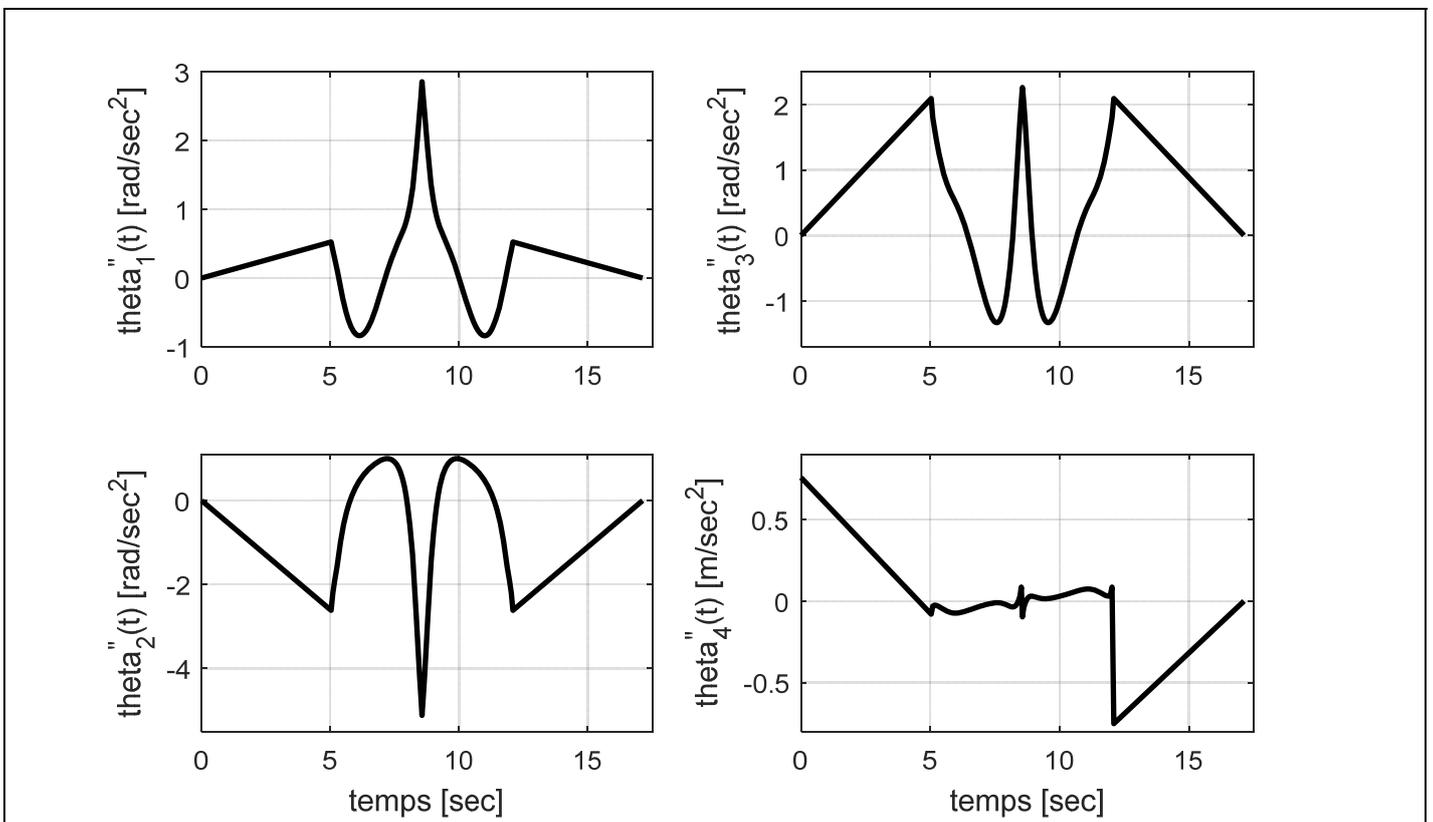


Figure (III-6) Evolution des accélérations articulaires le long de la trajectoire optimale pour un chemin en

ellipse selon le critère J_1 .

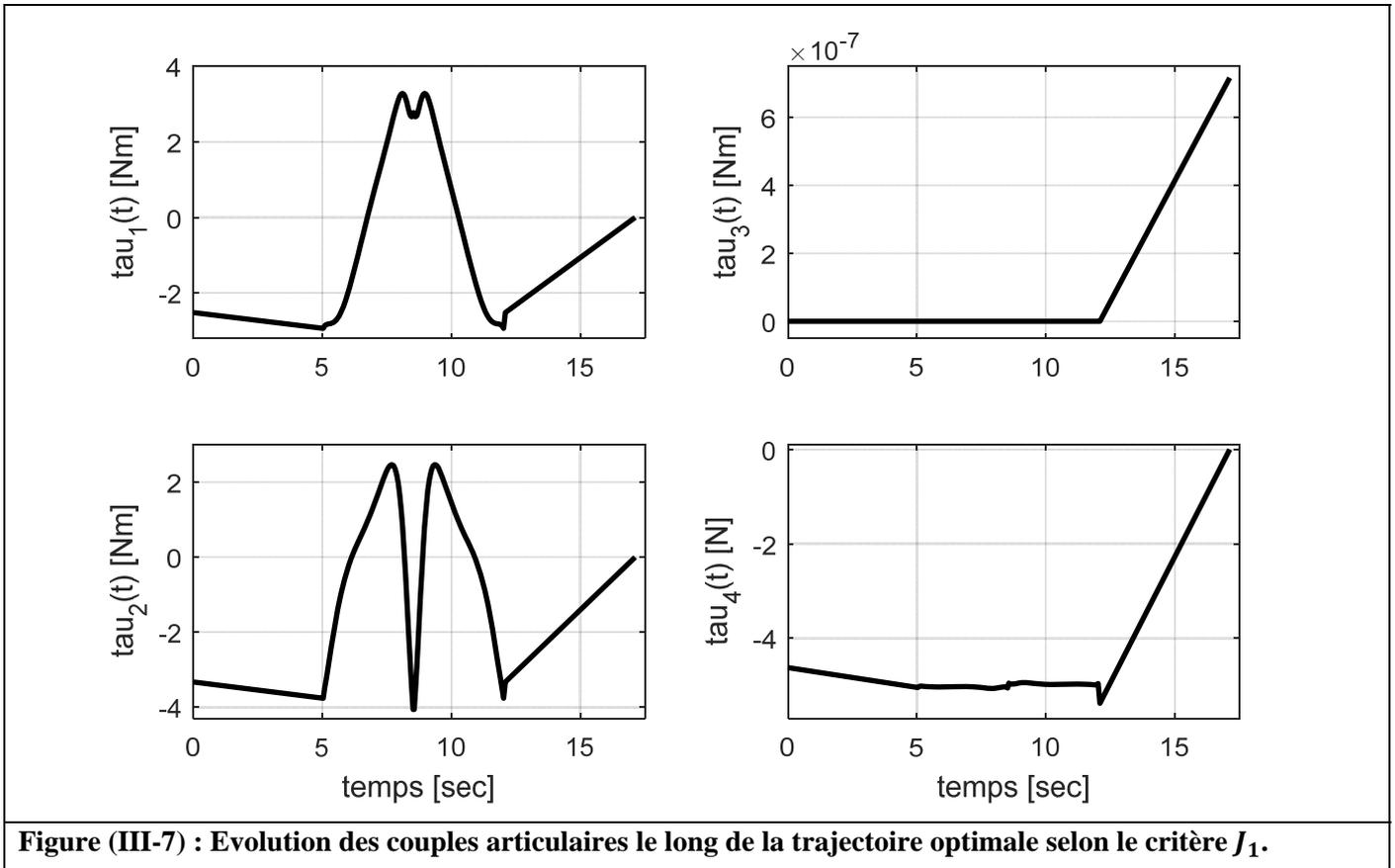
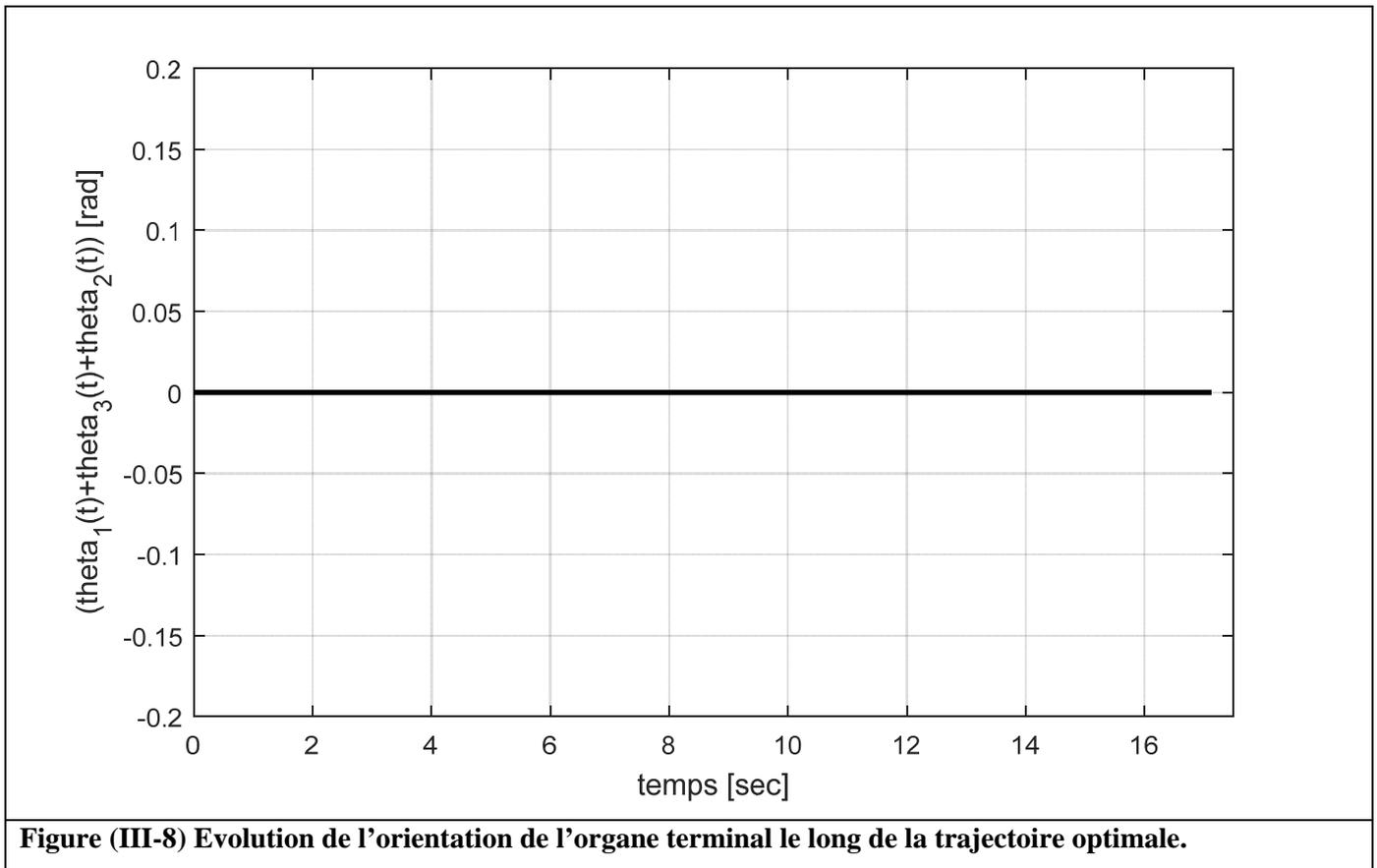


Figure (III-7) : Evolution des couples articulaires le long de la trajectoire optimale selon le critère J_1 .

On remarque que le couple de l'articulation 3 est tout le temps nul ceci est dû au fait que cette articulation sert seulement à orienter l'organe terminal. Pour la force généralisée de la quatrième articulation, elle correspond effectivement à une force puisque la dernière articulation est prismatique sa valeur est juste celle qui peut juste réagir au poids du dernier segment qui égale à 5N car nous avons pris $m_3 = 0.5Kg$.

Maintenant, nous donnons dans la figure qui suit la variation de l'orientation de l'outil le long de trajectoire qui est égale à la somme des trois angles articulaires ($\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$). Nous constatons que effectivement cette orientation reste constante le long de la trajectoire est égale à $0rad$.



Nous avons aussi calculé la solution optimale pour le cas où le critère à minimiser est J_2 . Les résultats retournés par fmincon sont :

Iter	F-count	f(x)	Feasibility	First-order optimality	Norm of step
54	126	8.960860e+00	8.882e-16	3.770e-03	7.193e-03

Il faut noter que le temps nécessaire est $t_f = 34.0131sec$ qui est nettement supérieur au précédent à cause des contraintes sur la vitesse de variation des couples. Les courbes sont similaires aux précédentes. Nous donnons dans la figure suivante les courbes des couples articulaires.

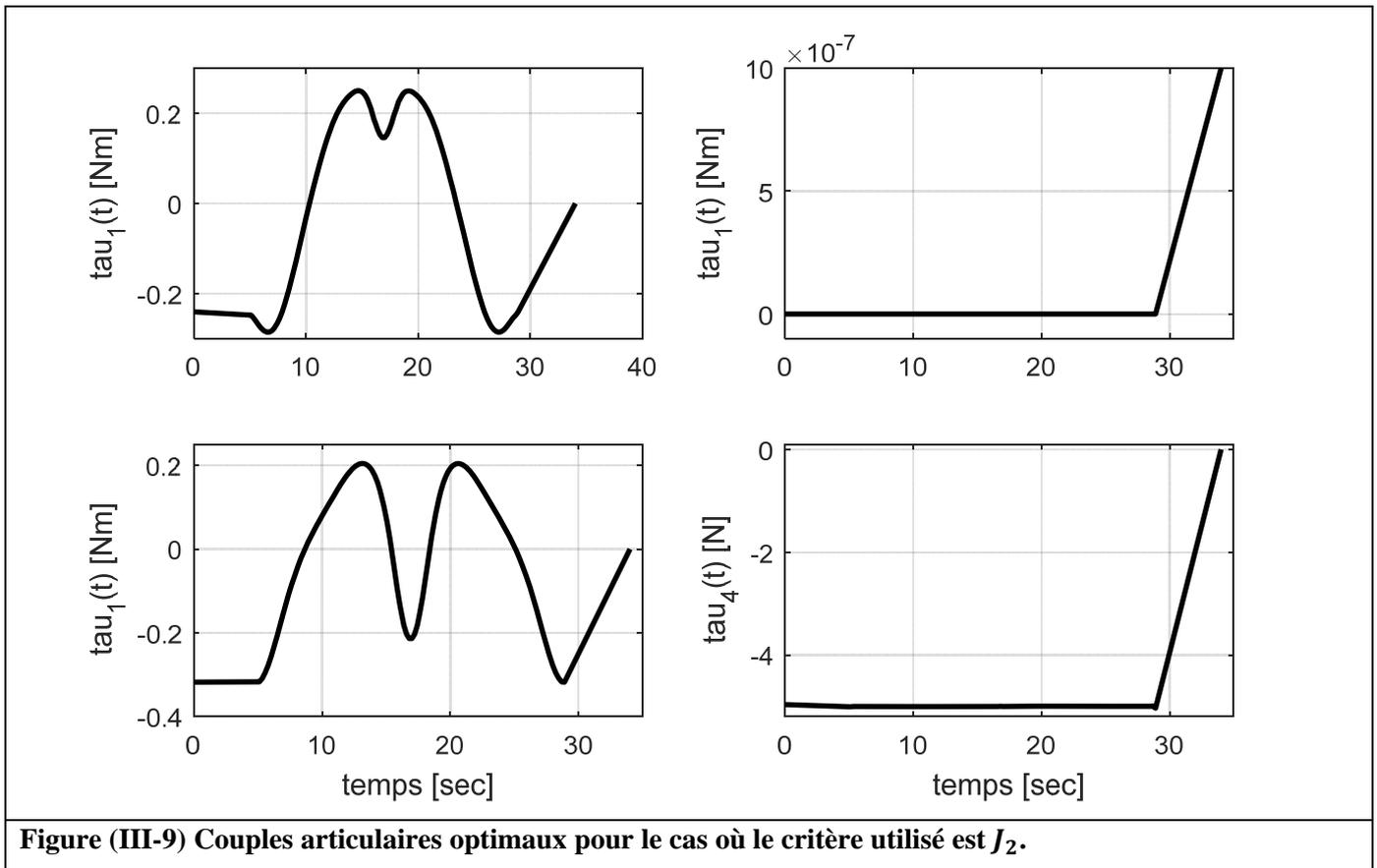


Figure (III-9) Couples articulaires optimaux pour le cas où le critère utilisé est J_2 .

III.9. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons donné la formulation du problème de planification de trajectoire à temps optimal pour robot manipulateur étant donné un chemin hors collision de l'organe terminal et de son orientation. Ensuite, nous avons procédé à la paramétrisation du problème selon un seul paramètre réel s . Nous avons, alors établi la nouvelle formulation du problème en faisant abstraction du temps. Le problème est ensuite discrétisé selon la variable s . Nous avons ici discrétisé l'état avec ses deux composantes algébrique et différentielle ainsi que la commande et nous avons abouti à un problème d'optimisation avec contraintes dans lequel le coût est convexe et les contraintes sont linéaires. Une étude détaillée du robot SCARA a été donnée en vue de l'utiliser dans la simulation. Les résultats de simulation montrent l'efficacité de la méthode.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons traité le problème de planification de trajectoires pour les robots manipulateurs. Parmi les méthodes existantes nous avons choisis celle qui démarre d'un chemin géométrique paramétré par un seul paramètre s dans l'espace de travail du robot, et recherche une paramétrisation à temps optimal de ce chemin. Parmi les techniques qui peuvent être utilisées pour résoudre ce genre de problèmes, nous avons choisis celle basée sur l'optimisation convexe. L'avantage de cette technique est qu'elle permet de prendre en considération les contraintes dynamiques dues aux limites sur les couples des actionneurs et leurs vitesses [15].

L'algorithme que nous avons implémenté sous MATLAB, nécessite une discrétisation sur l'axe s . De suite on a intégré toutes les équations de la géométrie du robot ainsi que la dynamique, par suite on a intégré une fonction objective à minimiser et enfin on a fait appel à la fonction `fmincon` pour minimiser le coût en fonction des contraintes imposées.

On peut dire que ce travail nous a permis d'étudier profondément les aspects de la commande optimale et les méthodes utilisées pour résoudre cette dernière en parallèle. Il nous a permis de faire une petite introduction aux notions fondamentales de la robotique et découvrir la complexité de ce domaine et son importance et son implication vis-à-vis des industries.

Pour finir il nous a permis d'acquérir des notions concernant la programmation sur MATLAB et approfondir nos connaissances par rapport à la programmation.

Références bibliographiques

- [1] Makhloufi. F « Modélisation et commande des bras manipulateurs par les outils de l'intelligence artificielle », Thèse doctorat, Université UBM Annaba, 2015.
- [2] Djougane. F « Etude et conception d'un robot manipulateur pour l'ENMTP, Mémoire de magister, Université Hadj-Lakhdar Batna, 2012.
- [3] Chikh.Y, Hattoum.M.L « Commande non linéaire d'un bras manipulateur », Mémoire de master, Université Bejaia, 2016.
- [4] Bazem. B « Planification de trajectoire à temps optimal d'un robot manipulateur à trois degrés de libertés », Mémoire de master, Université Bejaia, 2013.
- [5] Abdoune. A « Commande à structure variable par observateur d'un robot manipulateur rigide de type SCARA », Mémoire de magister, université d'Oran ES-Senia, 2014.
- [6] Ait Saleh. B, Medjahed. O « Commande intelligente d'un bras de robot manipulateur », Mémoire de master, Université Bejaia, 2010.
- [7] Mendil. B « Commande des robots manipulateurs », Cour master, Université de Bejaia, 2017.
- [8] Khalil. W, Dombre. E « Modélisation, identification et commande des robots », 2^{ème} édition, Hermes Science Publication, Paris, 2009.
- [9] Laroche. E « Commande optimale », Cour, Master en automatique et robotique, 2010.
- [10] Kenzi. A « Planification de trajectoire de robot mobile via des méthodes ensemblistes », Mémoire DEA, Université Angers, 2005.
- [11] Chauvin. A « Contribution à l'optimisation globale pour le dimensionnement et la gestion d'énergie de véhicules hybrides électriques basée sur une approche combinatoire », thèse doctorat, Université Lyon, 2015.
- [12] Lehiche. R, Mottelet. S, Touboul. E « Optimisation locale et globale », Cour, Ecole des Mines de Saint-Etienne, Université de Technologie de Compiègne, CNRS, 2010.
- [13] Frederik. D, Wannes. V, Goele. P. L, Quoc. T. D, Moritz. D, Joris. D. S, Jan. S « Time-Optimal Path Following for Robots with Convex-Concave Constraints Using Sequential Convex Programming », IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS, VOL. 29, 2013.
- [14] Diederik. V, Bram. D, Jan S, Joris. D. S, Moritz. D « Practical Time-Optimal Trajectory Planning for Robots: a Convex Optimization Approach », IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. XX, 2008.
- [15] Craig. J « Mechanics and control introduction to robotics », third edition, Pearson Education international, 2005.

Résumé

Notre travail est destiné à étudier la planification de trajectoire d'un bras manipulateur à temps optimale en utilisant l'approche d'optimisation convexe. Pour cela on a du passé par les étapes suivantes : premièrement, étudier le modèle géométrique en fonction des coordonnées cartésiennes par rapport au chemin spécifié. Ensuite, on a calculé les variables articulaires de chaque articulation en utilisant le modèle géométrique inverse. Par suite, on a étudié le modèle dynamique du bras manipulateur choisi, la deuxième étape consiste à définir le problème de commande optimale liée au robot. En fin, transformer ce dernier en un problème d'optimisation convexe qui est en principe l'une des méthodes directes de résolution des problèmes de commande optimale.

Abstract

Our work is intended to study the trajectory planning of a manipulator arm at optimal time with the convex optimization approach. For that, we have the past by the following steps: firstly, study the geometric model according to the Cartesian coordinates with respect to specified path, and we calculated the joint variables of each joint using the inverse geometrical model. Therefore, we studied the dynamic model of the manipulator robot selected; the second step is to define the optimal control problem related to the robot. Finally, transform this last into a convex optimization problem, which is principle, one of the direct methods of solving the problems of optimal control.