

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

**BENAMARA Rafik**

**MAOUCHE Razik**

Thème

---

**Etude d'un écoulement induit par la rotation  
d'un disque chauffé**

---

Soutenu le mercredi 06 octobre 2021 devant le jury composé de :

Mr. HAMDI. M

Président

Mr. MENDIL. F

Rapporteur

Mr. ADNANI. M

Examineur

**Année Universitaire 2020-2021**

Populaire et Démocratique Algérienne République

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



## Déclaration sur l'honneur

### Engagement pour respecter les règles d'authenticité scientifique dans l'élaboration d'un travail de recherche

*Arrêté ministériel n° 933 du 28 juillet 2016(\*) fixant les règles relatives à la prévention et la lutte contre le plagiat*

Nous soussigné,

Nom : **BENAMARA Rafik**

Matricule : **161633002971**

Nom : **MAOUCHE Razik**

Matricule : **161633006299**

Spécialité et/ou Option : **Energétique**

Département : **Génie mécanique**

Faculté : **Technologie**

Année universitaire : **2020 /2021**

Et chargé de préparer un mémoire de (*Licence, Master, Autres à préciser*) : **Master**

Intitulé : **Etude d'un écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé**

Déclarons sur l'honneur, nous engager à respecter les règles scientifiques, méthodologiques, et les normes de déontologie professionnelle et de l'authenticité académique requises dans l'élaboration du projet de fin de cycle cité ci-dessus.

Fait à Béjaïa le

06/10/2021

Signature de l'intéressé

(\*) *Lu et approuvé*

.....

## Remerciements

*Nos remerciements s'orientent avant tout envers Dieu le tout puissant et le miséricordieux qui nous a permis par sa grâce et sa clémence de pour suivre à terme la réalisation de ce travail. A nos Familles, qui nous en encouragé et supporter et encourager durant tout notre parcours Pédagogique.*

*On exprime notre gratitude à monsieur MENDIL. F qui nous a accordé l'assurance de suivre notre travail avec bienveillance ; en nous apportant conseils et orientations utiles à son élaboration. C'est donc avec reconnaissance qu'on lui Présente nos remerciements.*

*A Mr HAMDI. M, pour avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.*

*A Mr ADNANI. M, pour avoir Accepté de présider le jury.*

*Tous ceux qui ont participé de près ou de loin, ont soutenu nos efforts et ont contribué à ce que ce travail voit le jour.*

*Nous remercions, enfin les membres du jury qui ont accepté d'évaluer notre travail.*

**B. Rafik M. Razik**

## Dédicaces

*Je Dédie ce modeste travail à la mémoire de ma très chère mère qui me manque énormément ;*

*A Mon très cher père, qui n'a jamais cessé de m'encourager dans la poursuite de mes études et à qui je prie dieu pour lui accorder santé et longue vie ;*

*A Mon frères Illas ;*

*A Mes sœurs Nadia, Yasmina, Fatma, Wassila, Safia ;*

*Ames petits neveux adorés ;*

*A tous mes amis sans exception ;*

*A Mon binôme Rafik qui m'a supporté tout au long de notre travail ;*

*A Toute personne qui m'a aidé de près ou de loin ;*

***M. Razik***

## Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à ma très chère mère, au nom de reconnaissance  
envers tous ce qu'elle a pu offrir pour moi ;*

*A mon cher père, qui n'a jamais cessé de m'encourager dans la poursuite de mes études, et qui ne  
m'a jamais laissé tomber dans toutes les circonstances ;*

*A Mes frères Bilal, Fouad, Meriem ;*

*A tous mes amis sans exception ;*

*A mon binôme Razik qui m'a supporté tout au long de notre travail ;*

*A toute personne qui m'a aidé de près ou de loin.*

**B. Rafik**

---

# Sommaire

---

<b>Remerciements</b> .....	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b> .....	<b>ii</b>
<b>Sommaire</b> .....	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b> .....	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b> .....	<b>v</b>
<b>Nomenclature</b> .....	<b>vi</b>
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>

## Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

I.1 Introduction.....	3
I.2 Convection thermique.....	3
I.2.1 Convection naturelle.....	3
I.2.2 Convection forcée.....	3
I.2.3 Convection mixte.....	3
I.3 Généralités sur les couche limites.....	4
I.3.1 Les couches limites dynamique et thermique .....	5
I.3.2 Coefficient de frottement .....	8
I.3.3 Epaisseur de couche limite .....	9
I.4 Synthèse bibliographique sur les jets impactant sur les écoulement de disque en rotation	10
I.4.1 Etudes numériques et expérimentales .....	10
I.5 Conclusion .....	22

## Chapitre II : Description du problème et équations gouvernantes

II.1 Introduction.....	23
II.2 Discription du probleme physique.....	23
II.3 Equations générales du mouvement.....	24
II.3.1 Conservation de masse.....	24
II.3.2 Conservation quantité de mouvement.....	24

II.4 Projection des équations sur les axes $(r, \theta, z)$ .....	24
II.4.1 Équation de continuité.....	24
II.4.2 Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes).....	24
II.4.3 Equation d'énergie.....	25
II.5 Hypothèses.....	25
II.6 Simplification des équations en se basant sur les hypothèses données.....	26
II.6.1 Équation de continuité (ou de conservation de masse).....	26
II.6.2 Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes).....	26
II.6.3 Equation de d'énergie.....	26
II.7 Formulation Adimensionnelle : .....	27
II.7.1 Équation de continuité.....	27
II.7.2 Equations de quantité de mouvement.....	28
II.7.3 Equation de d'énergie.....	28
II.8 conclusion.....	29

### **Chapitre III : Méthodes de résolution**

III.1 Introduction.....	30
III.2 Méthodes à un pas.....	31
III.2.2 Méthode Runge-Kutta d'ordre 4.....	31
III.3 Algorithme de résolution.....	32
III.4 Conclusion.....	33

### **Chapitre IV : Résultats et discussions**

IV.1 Introduction.....	34
IV.2 Validation des résultats.....	34
IV.3 Absence de cas d'aspiration/injection.....	35
IV.3.1 Caractéristique dynamique.....	35

IV.3.2 Caractéristique thermique.....	38
IV.4 Caractéristique de l'injection.....	40
IV.5 Caractéristique de l'aspiration.....	43
IV.6 Conclusion.....	48

---

<b>Conclusion générale.....</b>	<b>49</b>
---------------------------------	-----------

**Références bibliographiques**

**ANNEXES**

**Résumé/Abstract**

# Liste des figures

<b>Figure I. 1 :</b> Le mouvement d'un fluide se trouve freiné au voisinage d'une paroi immobile, sur une épaisseur de l'ordre de $\delta$ (épaisseur de couche limite). .....	5
<b>Figure I. 2 :</b> développement d'une couche limite dynamique.....	6
<b>Figure I. 3 :</b> délimitation des zones de couche limite dynamique.....	6
<b>Figure I. 4 :</b> évolution de la couche limite thermique .....	7
<b>Figure I. 5 :</b> coefficient de frottement en fonction de $Re$ local .....	8
<b>Figure I. 6:</b> Epaisseur de la couche limite thermique .....	9
<b>Figure I. 7 :</b> Études de visualisation d'écoulements tridimensionnels.....	10
<b>Figure I. 8 :</b> flux constant et transfert de chaleur du fluide de loi de puissance sur un disque en rotation.....	11
<b>Figure I. 9 :</b> (A) Le montage expérimental du disque rotatif avec condition de bord de plaque. (B) Schéma séparé verticalement des principaux composants de l'appareil.....	13
<b>Figure I. 10 :</b> Configuration du flux de stagnation excentré sur un disque rotatif.....	14
<b>Figure I. 11 :</b> L'injection/aspiration est appliquée uniformément sur toute la surface du disque poreux .....	15
<b>Figure I. 12 :</b> Modèle Physique a (3D) et b(2D) du champ magnétique.....	16
<b>Figure I. 13 :</b> Diagramme schématique d'un écoulement magnétohydrodynamique incliné tridimensionnel d'un fluide se produisant entre deux disques rotatifs étirables.....	17
<b>Figure I. 14 :</b> La géométrie du flux.....	18
<b>Figure I. 15 :</b> Flux descriptif du problème d'écoulement de nano fluide de type hybride à base d'eau sur un disque rotatif .....	19
<b>Figure I. 16 :</b> Configuration de flux.....	20
<b>Figure I. 17 :</b> Impactant sur une région différente du disque en rotation (Manceau et al. 2014).....	21
<b>Figure II. 1 :</b> Schématisation du modèle physique.....	23
<b>Figure III. 1 :</b> Méthode Runge-Kutta d'ordre 4.....	32
<b>Figure IV.1 :</b> Le profil de vitesse vertical.....	35
<b>Figure IV.2 :</b> Le profil de vitesse radiale.....	36

<b>Figure IV.3 :</b> Le profil de vitesse azimutale.....	37
<b>Figure IV.4 :</b> Le profil de température.....	37
<b>Figure IV.5 :</b> Prandtl (Pr) sur le profil de température $\theta(\eta)$ pour $S=0$ .....	38
<b>Figure IV.6 :</b> effet du nombre de Prandtl (Pr) sur le gradient de température $\theta''(\eta)$ pour $S=0$ .....	39
<b>Figure IV.7 :</b> Effet de l'injection sur la vitesse verticale $F(\eta)$ .....	40
<b>Figure IV.8 :</b> Effet de l'injection sur la vitesse radiale $F'(\eta)$ .....	41
<b>Figure IV.9 :</b> Effet de l'injection sur la vitesse azimutale $G(\eta)$ .....	41
<b>Figure IV.10:</b> Effet de l'injection sur là le profil de température $\theta(\eta)$ .....	42
<b>Figure IV.11:</b> Effet de l'injection sur là le profil de température $\theta(\eta)$ .....	42
<b>Figure IV.12 :</b> Effet de l'aspiration sur la vitesse verticale $F(\eta)$ .....	43
<b>Figure IV.13 :</b> Effet de L'aspiration sur la vitesse radiale $F'(\eta)$ .....	44
<b>Figure IV.14 :</b> Effet de l'aspiration sur la vitesse azimutale $G(\eta)$ .....	45
<b>Figure IV.15:</b> Effet de l'aspiration sur là le profil de température $\theta(\eta)$ .....	46
<b>Figure IV.16:</b> Effet de l'aspiration sur là le gradient de température $\theta''(\eta)$ .....	46
<b>Figure IV. 17 :</b> Le coefficient de frottement en fonction de S pour $Pr=0.72$ .....	47
<b>Figure IV. 18 :</b> Le nombre de Nusselt (Nu) en fonction de S pour déférentes valeurs de Pr...	48

## Liste des tableaux

---

**Tableau IV. 1 :** résultats obtenu pour  $F''(0)$  pour divers valeurs de S et pour  $Pr= 0.72$ .....34

**Tableau IV. 2 :** résultats obtenu pour  $-\theta'(0)$  pour divers valeurs de Pr et S.....34

# NOMENCLATURE

Symboles	Définitions	Unités (SI)
$C_f$	Le coefficient du frottement	-
$U_\infty$	La vitesse ambiante du fluide	-
$T_\infty$	La température ambiante du fluide	K
$T_W$	La température du disque	K
$T$	La température du fluide	K
$Z$	La Hauteur adimensionnelle	-
$Nu$	Le nombre de Nusselt	-
$R$	Le rayon du disque	m
$r$	Le rayon adimensionnel du disque	-
$Re$	Le nombre de Reynolds	-
$Ri$	Le nombre de Richardson	-
$Gr$	Le nombre de Grashof	-
$S$	Paramètre d'inspiration / injection	-
$\theta$	La température adimensionnelle	-
$(r, \theta, z)$	Les coordonnées cylindriques	-
$(U_r, U_\theta, U_z)$	Les composantes de la vitesse	-
$(F', F, G)$	Les composantes adimensionnelles de la vitesse	-
$Pr$	Le nombre de Prandtl	-
$P$	La pression	Pa
$t$	Le temps	s
$c$	Constant	

## Symboles grecs

$\mu$	La viscosité dynamique du fluide	Kg/m.s
$\nu$	La viscosité cinématique du fluide	m <sup>2</sup> /s
$\eta$	La distance adimensionnelle	-
$\rho$	La masse volumique	Kg/m <sup>3</sup>
$\delta$	Epaisseur de couche limite dynamique	m
$\delta t$	Epaisseur de couche limite thermique	-
$\Omega$	La vitesse angulaire du disque	rad/s
$\tau$	Le coefficient de frottement pariétal.	-
$\alpha$	Diffusivité thermique	m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>

**Indices**

$\infty$	Condition à l'infini amont	-
$w$	Condition à la paroi	-
'	Dérivation	-

**Abréviations**

<i>EDO</i>	Equation différentielle ordinaire	-
------------	-----------------------------------	---

---

# **Introduction générale**

# Introduction générale

L'intérêt des chercheurs pour le mouvement des fluides déclenché par l'action d'un disque en rotation n'a cessé de croître depuis sa découverte par Von Karman [1]. Cet intérêt est attribué à son apparition dans certains processus technologiques, notamment l'électrochimie (qui implique des électrodes à disque rotatif), le refroidissement des dispositifs de stockage informatique et les industries de transformation des aliments.

La dynamique des écoulements rotatifs, leurs équations fondamentales et leurs applications pratiques ont été résumées dans un livre de Childs [2]. Une excellente monographie a été publiée par Shevchuk [3], qui comprend la formulation du transfert de chaleur par convection dans diverses configurations d'écoulement rotatif. Méthodes intégrales, techniques auto similaires et les approches analytiques pour traiter le disque rotatif ont également été décrites brièvement dans cette monographie.

Pour l'exemple du problème classique du disque rotatif conventionnel [1], le fluide forcé vers l'extérieur par la force centrifuge est remplacé par un courant de fluide dans la direction axiale.

De nombreux résultats nouveaux associés au système de Von Karman ont été présentés. Dans le livre de Schlichting [4], il est cité que "le flux secondaire qui accompagne la rotation près d'une paroi solide peut être clairement observé dans une tasse à thé : après que la rotation ait été générée par une agitation vigoureuse et de nouveau après que le flux ait été laissé à lui-même pendant un certain temps". Peu de temps, le champ d'écoulement radial vers l'intérieur près du fond se formera. Son existence peut être déduite du fait que les feuilles de thé se déposent en un petit tas près du centre au fond.

Comme mentionné ci-dessus, la compréhension de l'écoulement de la couche limite d'un disque rotatif est importante tant d'un point de vue scientifique qu'industriel. Cependant, la nature exacte du processus de transition laminaire-turbulent pour l'écoulement à disque rotatif n'est pas encore totalement comprise. En particulier, la mesure dans laquelle l'instabilité absolue affecte le processus de transition laminaire-turbulent reste à déterminer.

Cette étude permet de mieux comprendre et d'analyser la structure dynamique et thermique du flux de couche limite qui se présente sur la surface plane de disque.

La thèse est constituée de la manière suivante :

Dans Le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les notions fondamentales relatives et une description de la couche limite dynamique et thermique, suivi par une synthèse bibliographique des différents travaux antérieurs sur disque en rotation.

Le chapitre 2 continuera à décrire la base du travail, la problématique y compris les équations gouvernantes, les conditions initiales et les conditions aux limites.

Le chapitre 3 sur la méthode de résolution numérique des équations en utilisant logiciel MATLAB et l'explication de la méthode a un pas, de Runge-Kutta d'ordre 4.

Le chapitre 4 sur les résultats obtenus par de la résolution numérique et les discussions sur ce dernier.

Finalement la conclusion sur notre travail.

---

# **Chapitre I**

Généralités et revue bibliographique

# Généralités et revue bibliographique

## I.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la définition et au rappel des notions de base, nécessaires à la compréhension de notre problème, ainsi qu'une brève synthèse bibliographique sur les études menées par nos prédécesseurs dans le domaine.

## I.2 Convection thermique

La convection thermique est un mode de transfert de chaleur, il s'agit du mécanisme de transfert d'énergie le plus prépondérant entre un solide et un fluide par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules du fluide adjacent. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite les particules vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie.

La transmission de chaleur par convection se subdivise en trois types distincts :

### I.2.1 Convection naturelle

Le phénomène de convection naturelle thermique apparaît spontanément, sous le seul effet des différences de masse volumique résultantes des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravitationnel, ...). [5-6]

### I.2.2 Convection forcée

Le phénomène de convection forcée apparaît quand le mouvement du fluide est imposé par une cause mécanique extérieure (pompe, ventilateur, ...) au système. [5-6]

### I.2.3 Convection mixte

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convections considérées séparément, sont du même ordre de grandeur. [5-6]

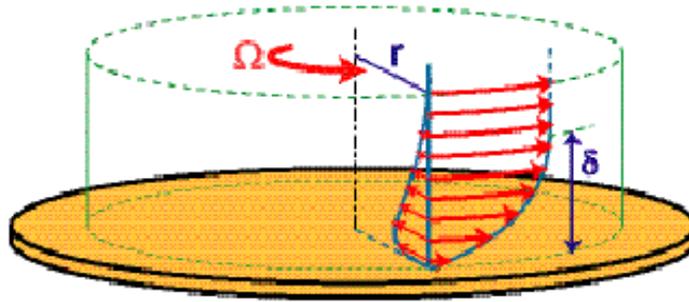
Le paramètre permettant de distinguer ces différents modes de convection selon sa valeur est un nombre adimensionnel nommé nombre de Richardson. Il représente le rapport entre l'énergie potentielle des forces de poussée et l'énergie cinétique du fluide, en d'autres termes, il illustre l'importance de la convection naturelle relativement à la convection forcée. Il est défini par :  $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$  (I. 1)

- $Ri \gg 1$ , l'énergie potentielle des forces de poussée domine l'énergie cinétique du fluide, c'est un régime de convection naturelle.
- $Ri \ll 1$ , l'énergie cinétique du fluide domine l'énergie potentielle des forces de flottabilité, c'est un régime de convection forcée.
- $Ri \approx 1$ , l'énergie potentielle des forces poussée et l'énergie cinétique du fluide sont de même ordre, c'est un régime de convection mixte. [7]

### I.3 Généralités sur les couches limites

La zone de fluide ralentie par le frottement sur la paroi porte le nom de couche limite, et joue un rôle clé en mécanique des fluides (Figure I.1). Son épaisseur, notée  $\delta$ , est la distance sur laquelle la rotation imposée  $\Omega$  est diffusée sous l'effet de la viscosité dans les couches intermédiaires du fluide. Dans le cas idéalisé d'un fluide en rotation au-dessus d'une paroi infinie, on peut montrer que  $\delta = (\nu/\Omega)^{1/2}$  (où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide), qui est une constante sur toute la surface du disque, et dans laquelle n'intervient pas en particulier la distance  $r$  à l'axe de rotation. On parle alors de solution auto similaire, c'est-à-dire que le profil de vitesse reste identique à lui-même par changement d'échelle de notre problème.

Notons ici que, selon la situation que l'on cherche à décrire,  $\Omega$  pourra désigner soit la vitesse angulaire du fluide, de la paroi, ou plus généralement la vitesse relative de l'un par rapport à l'autre. Dans le cadre de cette description auto similaire, puisque l'épaisseur de la couche limite est la seule échelle de longueur du problème, on doit s'attendre à ce que tous les phénomènes physiques interviennent sur des distances caractéristiques de l'ordre de  $\delta$ .



**Figure I. 1 :** Le mouvement d'un fluide se trouve freiné au voisinage d'une paroi immobile, sur une épaisseur de l'ordre de  $\delta$  (épaisseur de couche limite).

### I.3.1 Les couches limites dynamique et thermique :

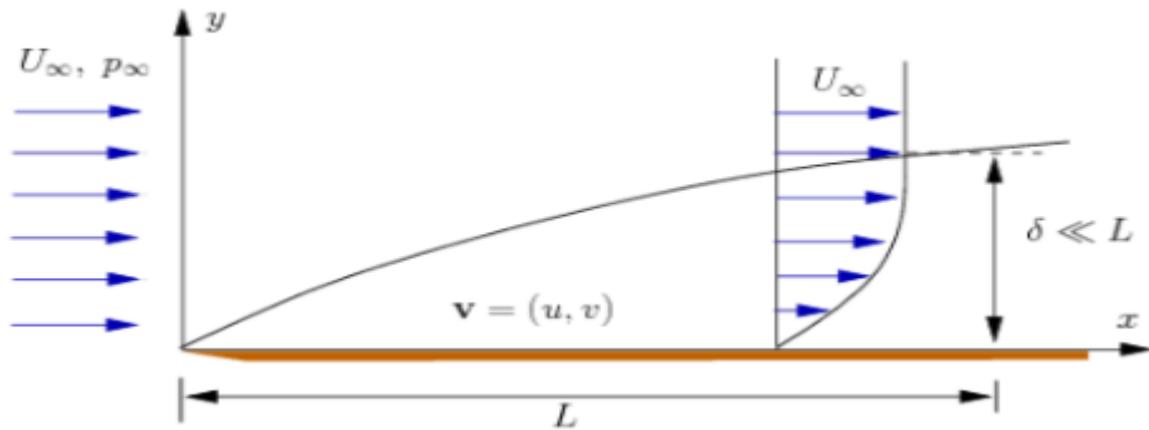
Un écoulement incident sur une paroi chauffée sera principalement caractérisé par le développement d'une couche limite dynamique (en vitesse) et d'une couche limite thermique (en température).

#### I.3.1.1 couche limite dynamique

Lorsqu'un fluide se déplace sur un obstacle, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. La couche limite est la zone de fluide contiguë à la paroi (ou bien, on peut dire qu'il s'agit d'une zone d'interface entre le corps et le fluide), dans laquelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse locale du fluide libre. De nombreuses propriétés de l'écoulement (frottement, transfert thermique et présence éventuelle de décollements) dépendent de cette couche limite. On distingue deux types de couche limite dynamique :

##### A. Couche limite laminaire

La couche limite laminaire est caractérisée par le fait que toutes les vectrices vitesses sont parallèles à un même plan, l'écoulement se présente alors sous la forme de lames de fluide glissant les unes sur les autres. Ces lames restent rectilignes sur une certaine longueur, puis s'estompent. On observe une telle couche limite vers le bord d'attaque d'un profil.

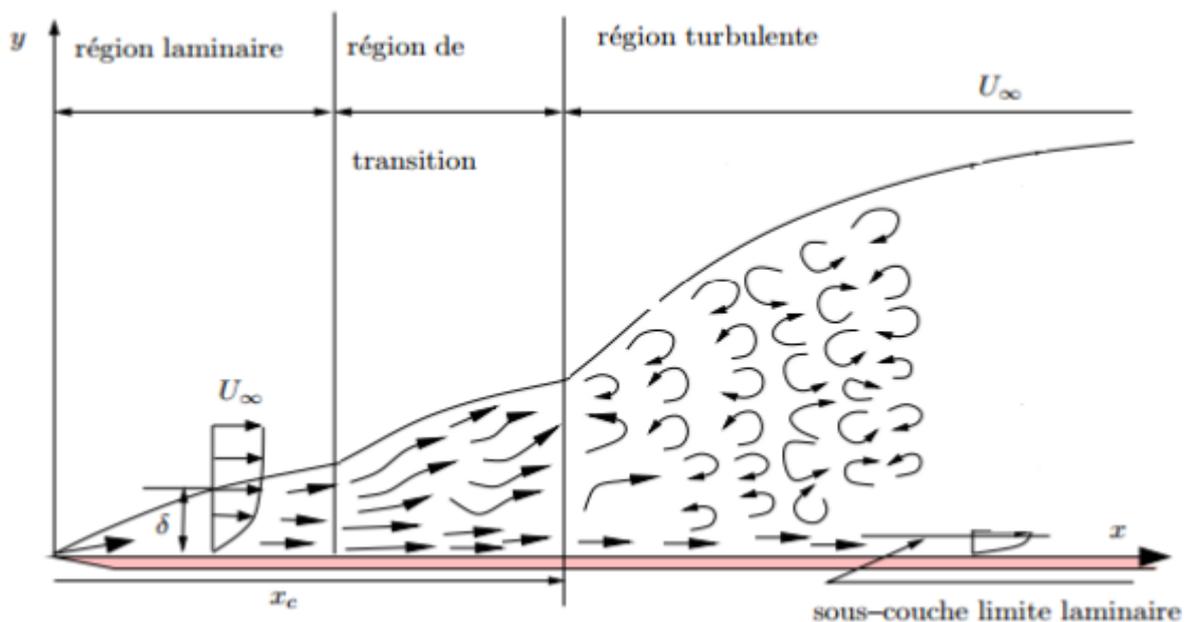


**Figure I. 2** : développement d'une couche limite dynamique [8]

En fait assez rapidement les lames disparaissent et la couche limite n'est plus dite laminaire mais turbulente

### B. Couche limite turbulente

L'écoulement présente un caractère désordonné, due en partie aux aspérités qui existent toujours sur la paroi. La couche limite devient turbulente et les vectrices vitesses ne sont plus parallèles entre eux.



**Figure I. 3** : Délimitation des zones de couche limite dynamique. [8]

On remarque qu'il existe une délimitation entre les deux zones précédemment définies que l'on nomme zone de transition.

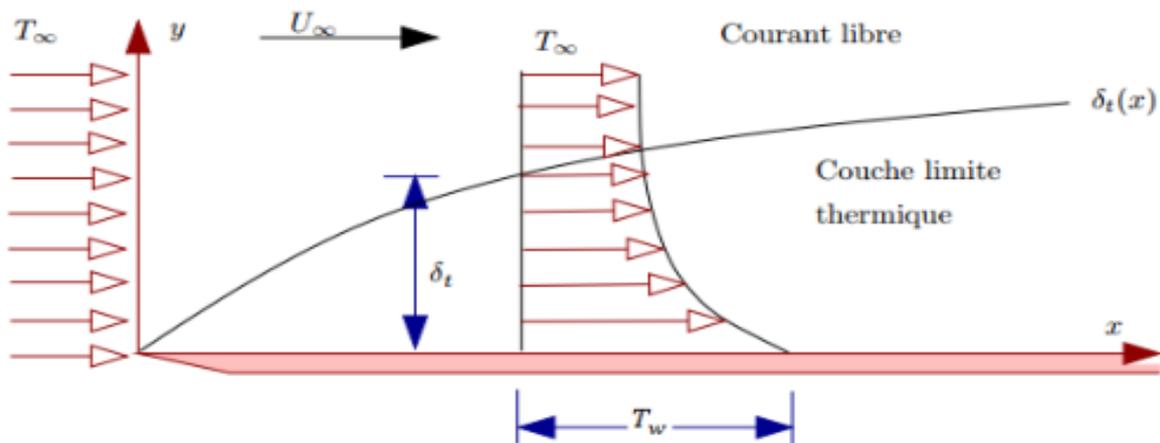
### I.3.1.2 La couche limite thermique :

La couche limite thermique ne se développe au sein d'un écoulement de fluide visqueux en contact avec un corps solide, que si ces derniers sont à des températures différentes.

Supposons par exemple que l'écoulement incident sur une plaque plane soit à une température uniforme  $T_\infty$ , et que la surface de cette dernière soit maintenue à une température  $T_w$  également uniforme mais différente de  $T_\infty$ . En explorant le champ de température  $T$  perpendiculairement à la plaque, selon l'ordonnée  $y$ , on observera une variation progressive de  $T_w$  à  $T_\infty$ , d'abord rapide puis de plus en plus lente à mesure qu'on pénètre dans l'écoulement.

L'épaisseur  $\delta_t$  de la couche limite thermique est conventionnellement définie comme

$$\text{étant la distance à la paroi pour laquelle le rapport } \frac{T_w - T(\delta_t)}{T_w - T_\infty} = 0.99 \quad (I.2)$$



**Figure I. 4** : évolution de la couche limite thermique [8]

Dans le cas où ces deux phénomènes se présentent de manière simultanée, il existe un nombre adimensionnel, le nombre de Prandtl  $Pr$  caractérisant le fluide et défini par :  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ , traduisant le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique, qui permet de lier les épaisseurs des deux couches limites :

- $Pr \ll 1$  Dans ce cas la chaleur se diffuse plus rapidement que la quantité de mouvement donc l'épaisseur de la couche limite thermique sera plus grande que celle de la couche limite dynamique  $\delta << \delta_t$
- $Pr \gg 1$  Dans ce cas l'écoulement se caractérise par une diffusion de la quantité de mouvement beaucoup plus importante que la diffusion de la chaleur  $\delta_t << \delta$

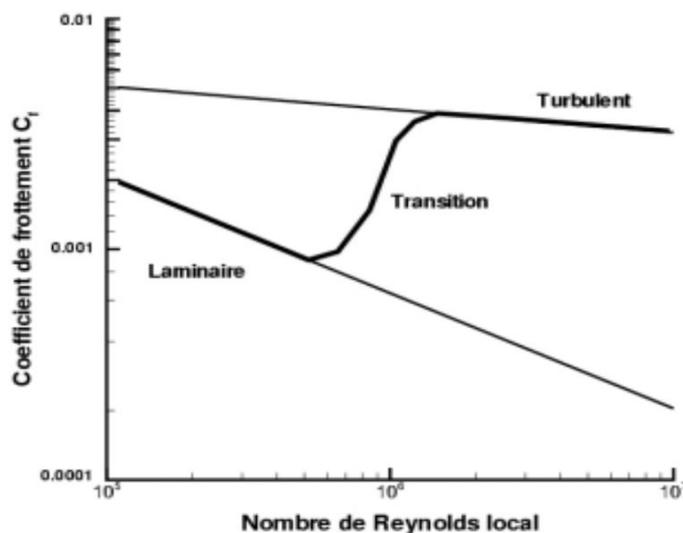
$Pr \approx 1$  Les deux épaisseurs sont du même ordre de grandeur. [9]

### I.3.2 Coefficient de frottement :

Le coefficient de frottement local est donné par : 
$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} \quad (I.3)$$

Avec  $\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$  (I.4)

La comparaison des coefficients de frottement laminaire/turbulent en fonction du nombre de Reynolds donne la figure suivante :



**Figure I. 5 :** coefficient de frottement en fonction de Re local.

### I.3.3 Epaisseur de couche limite :

La couche limite peut être définie par les types d'épaisseurs suivants :

- Epaisseur  $\delta$
- Epaisseur de déplacement  $\delta_1$
- Epaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2$
- Epaisseur thermique  $\delta_T$

On appelle épaisseur  $\delta$  de la couche limite la distance entre la paroi et les points où la vitesse des particules est égale à 99% de la vitesse uniforme. (Figure I.3)  $\frac{u}{U_\infty} = 0,99$ . (I.5)

➤ **Epaisseur de déplacement :**

Pour définir l'épaisseur de déplacement, on évalue le flux manquant par rapport à celui qu'on aurait dans l'hypothèse d'un écoulement potentiel jusqu'à la paroi. Cette définition revient à poser le principe de conservation du débit volumique.

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (\text{I.6})$$

➤ **Epaisseur de quantité de mouvement (épaisseur dynamique) :**

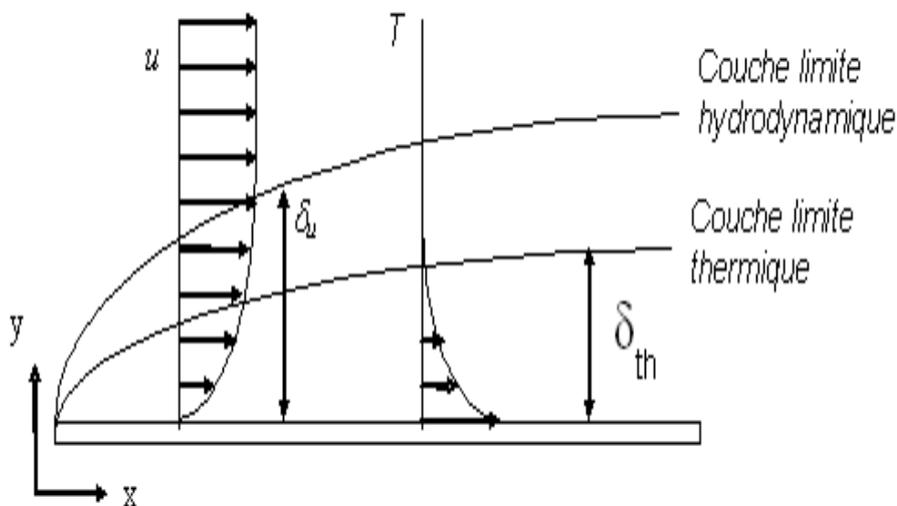
Elle est définie par la relation suivante :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (\text{I.7})$$

➤ **Epaisseur de la couche limite thermique :**

L'épaisseur thermique de la couche limite est définie conventionnellement à partir de la différence mesurée entre la température du fluide sur la frontière de la couche limite et sa valeur à la paroi, rapportée à la différence entre la température loin de la paroi et dans la même section normale à la paroi (figure I.3).

$$\frac{T_w - T_{\delta T}}{T_w - T_\infty} = 0.99 \quad (\text{I.8})$$

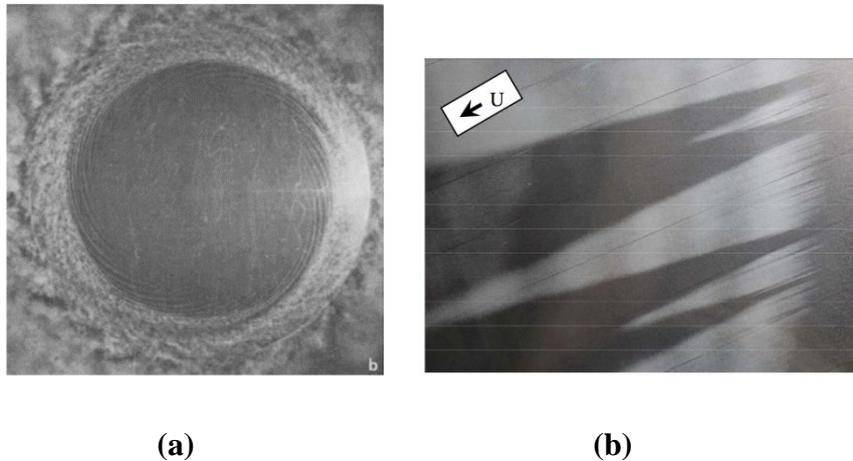


**Figure I. 6 :** Epaisseur de la couche limite thermique

## I.4 Synthèse bibliographique sur les écoulements dans des disques en rotation

### I.4.1 Etudes numériques et expérimentales :

**Von Karman 1923 [1]** a été le premier à considérer le problème d'un écoulement induit par un disque infini qui tourne dans un fluide au repos. Il a transformé les équations de Navier Stokes en un système d'équations différentielles ne dépendant que d'une seule variable en supposant la vitesse axiale indépendante de la coordonnée radiale et en faisant la même hypothèse pour les deux autres composantes.



**Figure I. 7:** Etudes de visualisation d'écoulements tridimensionnels. [1]

- (a) L'écoulement en couche limite à disque rotatif (sens inverse des aiguilles d'une montre) de la couche limite de Kohama (1984).
- (b) L'écoulement de la couche limite en forme d'aile battante de Crawford et al. (2013).

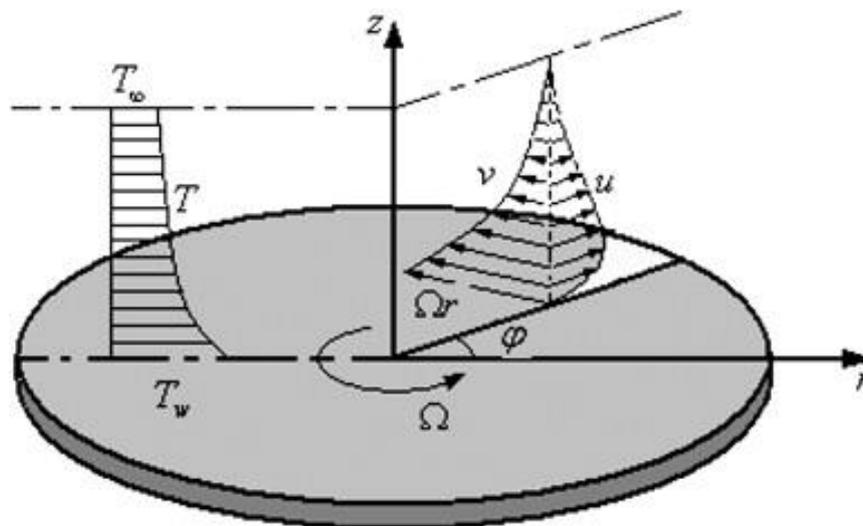
**Cochran, 1934 [10]** a obtenu des solutions asymptotiques pour le problème hydrodynamique stable formulé par Von Karman, et il a obtenu une solution numérique indiquant que le fluide est aspiré suivant l'axe de rotation du disque pour être rejeté radialement. Le disque joue alors le rôle d'un ventilateur centrifuge.

**Benton 1966 [11]** : l'extension du problème de l'hydrodynamique en régime permanent à l'état transitoire a été faite par Benton, il a amélioré les solutions de Cochran et a résolu le problème d'instabilité et a prouvé que la solution de l'état stable peut être obtenue via un processus dépendant du temps.

**Millsaps et Pohlhausen 1952 [12]** sont les premiers à avoir considéré le problème du transfert de chaleur d'un disque rotatif maintenu à une température constante en régime permanent pour une variété de nombres de Prandtl.

**Sparrow et Gregg 1960 [13]** ont étudié le transfert de chaleur en régime permanent d'un disque rotatif maintenu à une température constante vers des fluides pour toutes les valeurs du nombre de Prandtl. L'influence d'un champ magnétique uniforme externe sur l'écoulement dû à un disque rotatif a été étudiée. L'effet d'une aspiration ou d'une injection uniforme à travers un disque poreux rotatif. L'écoulement hydrodynamique ou hydromagnétique régulier induit par le disque a été étudié.

**Chunying Ming et al, 2011 [14]** ont traité de l'écoulement constant et du transfert de chaleur d'un fluide visqueux incompressible à loi de puissance sur un disque infini en rotation. En supposant que la conductivité thermique suit la même fonction que la viscosité, les équations régissant la couche limite sont transformées en un ensemble d'équations différentielles ordinaires par transformation de similarité de Karman généralisée. Le problème de la valeur limite à deux points non linéaire correspondant a été résolu par la méthode multi-tir. Les résultats numériques ont indiqué que les paramètres de l'indice de loi de puissance et du nombre de Prandtl ont des effets significatifs sur les champs de vitesse et de température. L'épaisseur de la couche limite décroît avec l'indice de loi de puissance. Le pic de la vitesse radiale change légèrement avec l'indice de loi de puissance. Les valeurs proches de la limite sont affectées de manière spectaculaire par l'épaisseur de la couche limite.



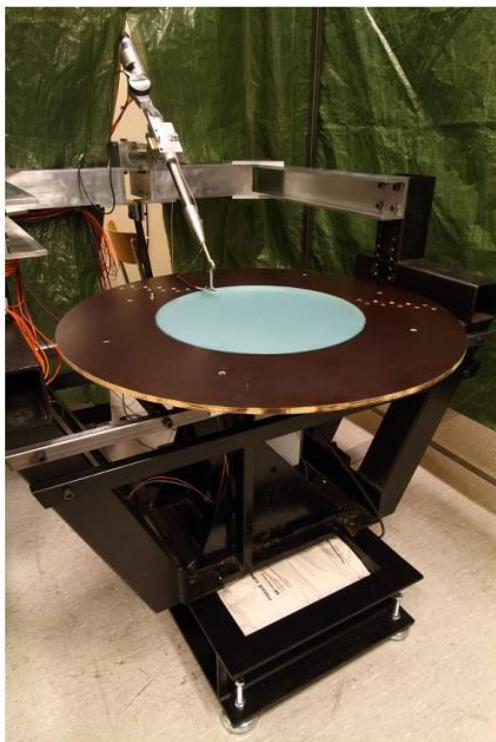
**Figure I. 8 :** flux constant et transfert de chaleur du fluide de loi de puissance sur un disque en rotation. [14]

**Eugen Magyari et al, 2021 [15]** L'écoulement induit par un disque tournant et s'étirant radialement simultanément est revisité dans cet article. La solution stationnaire est donnée par une série de puissances d'exponentielles incluant le paramètre déterminant du problème  $c = \Omega/s$ , qui est le rapport de la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$  et le taux de déformation de l'étirement  $s$ . Puisque les séries satisfont automatiquement les conditions de champ lointain, le problème de valeur limite se réduit à un problème de valeur initiale et cela garantit l'unicité des solutions. Sur la base de la solution en série exponentielle, les caractéristiques de l'écoulement dans l'étirement dominaient le régime sous-critique  $0 < c < c_{\text{crit}} = 2.384895$  et dans le régime sur critique dominé par la rotation  $c > c_{\text{crit}}$  sont discutés en détail. D'autres caractéristiques d'intérêt technique, telles que les performances de pompage de la "pompe visqueuse rotative et d'étirement", ainsi que ses caractéristiques de transfert de chaleur  $s$  ont également prises en compte dans l'article.

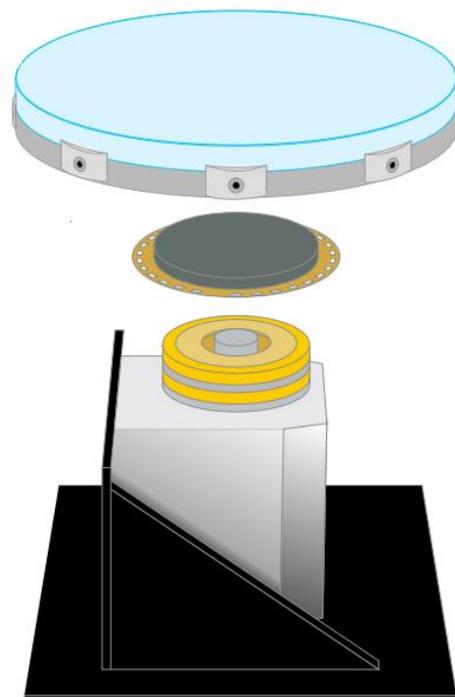
Le dispositif expérimental est présenté à la figure(I.9) a été initialement fabriqué et utilisé par **Lingwood (1996) [16]** à Cambridge, au Royaume-Uni Bien que certains des composants soient identiques à ceux utilisés par **Lingwood et Shintaro Imayama [17,18]**, la plupart d'entre eux ont été modifiés et remplacés par l'auteur pour obtenir des données de haute qualité nécessaires aux nouvelles études en 2000 données de haute qualité nécessaires, un nouveau disque en verre flotté a été préparé. Le diamètre du disque  $D = 474$  mm et l'épaisseur est de 24 mm . Le bord du disque a été rectifié avec un angle de  $45^\circ$  de sorte que le rayon réel a été réduit d'environ 1,5 mm, ce qui donne  $r^*d = 235,5$  mm. Afin d'étudier la transition laminaire-turbulente de l'écoulement à disque rotatif dans des conditions dites " propres ", la surface du disque doit être hautement polie et aussi plate que possible afin de minimiser les risques de turbulence. Et aussi plate pour minimiser l'excitation de certaines instabilités. L'objectif principal de cette étude expérimentale étant d'étudier le mécanisme d'instabilité absolue, qui est considéré comme important dans le processus de transition à partir d'un disque "propre". Certaines études, comme par exemple **Lingwood (1996)** et **Healey (2010)** suggèrent toutefois que les rugosités de surface excitent des perturbations convectives stationnaires dans le champ d'écoulement et que, si les amplitudes excitées sont suffisamment importantes, les perturbations peuvent se produire.

Convectives stationnaires dans le champ d'écoulement et, si les amplitudes excitées sont suffisamment grandes, l'écoulement peut passer à la turbulence par une voie de transition convectivement instable.

Pour ces raisons, la surface du disque de verre a été polie, ce qui a permis d'obtenir une rugosité de surface inférieure à  $1 \mu\text{m}$  et un déséquilibre azimuthal de moins de  $10 \mu\text{m}$ . Cependant, des perturbations stationnaires attribuées aux rugosités inévitables de la surface ont encore été observées.



(A)

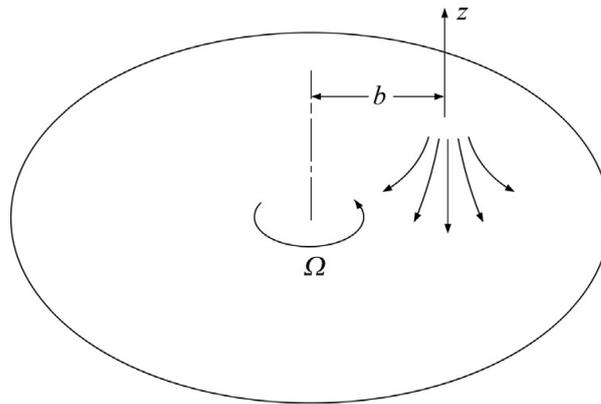


(B)

**Figure I. 9:** (A) Le montage expérimental du disque rotatif avec condition de bord de plaque. (B) Schéma séparé verticalement des principaux composants de l'appareil. [16]

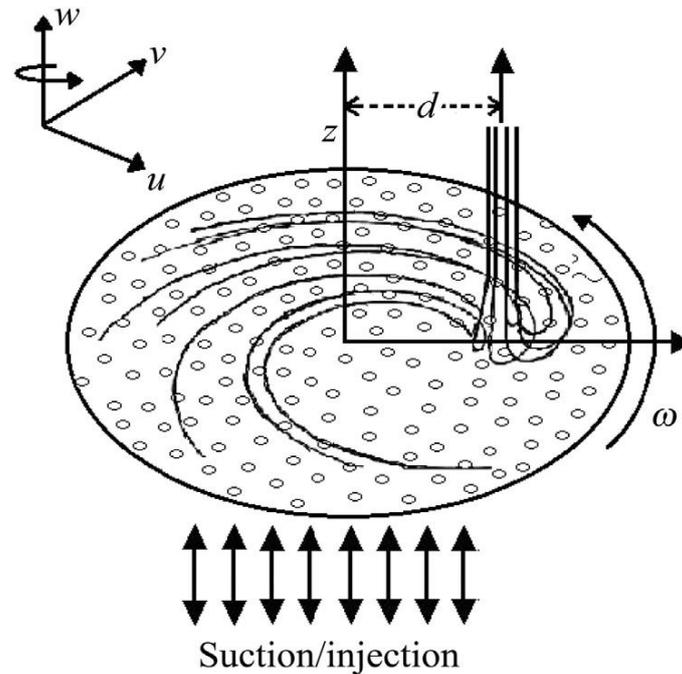
**M. Heydari et al, 2015 [19]** Dans leur enquête, une méthode semi-numérique basée sur les polynômes de Bernstein pour la résolution d'un flux de stagnation décentré vers un disque rotatif introduit. Cette méthode étend les solutions désirées en termes d'ensemble des polynômes de Bernstein sur un intervalle fermé puis utilise la méthode taume pour déterminer les coefficients de dilatation pour construire solutions approximatives. Cette méthode peut

satisfaire à l'infini les conditions aux limites. Les propriétés des polynômes de Bernstein sont représentées et utilisés pour réduire la solution de gouvernance équations non linéaires et leurs conditions aux limites associées à la solution des algébriques équations. Les résultats graphiques sont représentés pour étudier l'influence du rapport de rotation  $\alpha$  sur la vitesse radiale, la vitesse azimutale et les vitesses induites. Résultats antérieurs d'écoulement de fluide visqueux dans la littérature.



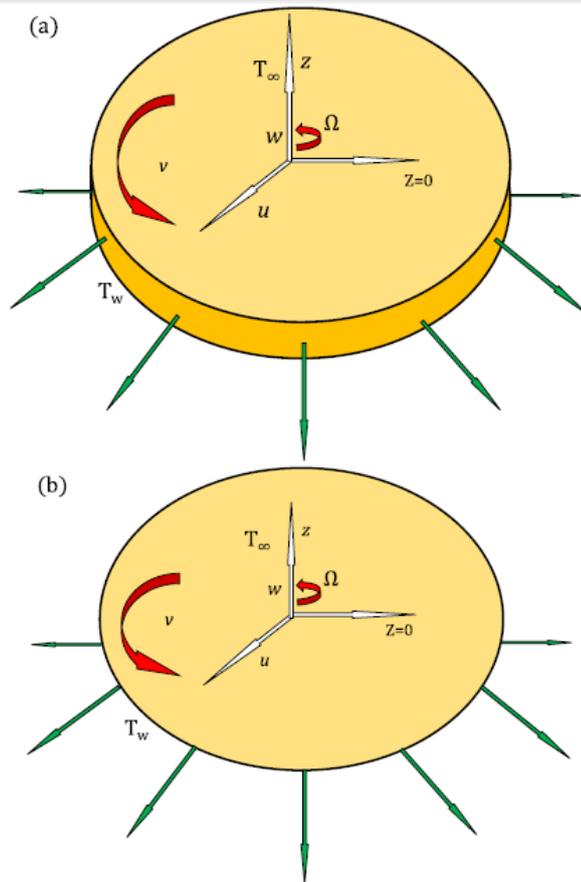
**Figure I. 10 :** Configuration du flux de stagnation excentré sur un disque rotatif. [19]

**N.A. Khan et al, [20]** ont étudié Le problème de l'écoulement constant, incompressible et tridimensionnel à points de stagnation d'un fluide micro polaire au-dessus d'un disque décentré en rotation infinie. Cet article. L'injection/aspiration est appliquée uniformément sur toute la surface du disque poreux. La résistance de Darcy pour le fluide micro polaire est également formulée. Les équations différentielles partielles sont converties en l'ensemble d'équations différentielles ordinaires en utilisant les transformations. Le système d'équations est résolu analytiquement au moyen d'une technique perturbatrice, méthode d'analyse d'homotopie (MAH). L'influence de la rotation paramètre, paramètre de matériau, paramètre de viscosité du rayon de ressort, densité de micro-inertie paramètre, paramètre de porosité et paramètre d'aspiration/injection sur les fonctions de vitesse présenté sous forme graphique et discuté en détail. La vérification des solutions est effectuée par une comparaison numérique avec l'étude précédente.



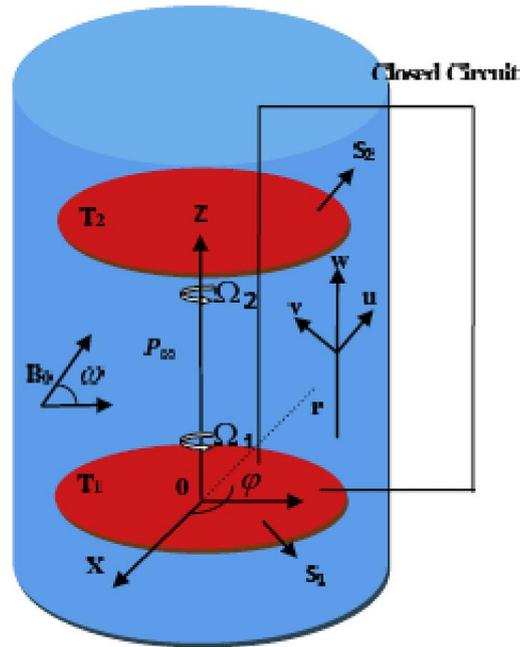
**Figure I. 11 :** L'injection/aspiration est appliquée uniformément sur toute la surface du disque. [20]

**M. Gholinia et al, 2021 [21]** Dans leur recherche, la caractéristique de l'écoulement de fluide Eyring-Powell Nano due à la rotation de la bête avec divers impacts physiques, tels que le glissement, le champ magnétique et l'homogénéité –les réactions hétérogènes sont analysées. Les expressions non linéaires d'ordre supérieur sont converties aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, puis résolues à l'aide de la méthode numérique (Runge-Kutta-Fehlberg du 4e au 5e ordre) dans le logiciel Maple-18. L'idée principale de cet article est d'étudier l'impact des paramètres et des nombres dans le problème sur la vitesse, la température et profils de concentration. Les conclusions indiquent que : le profil de température a montré un double comportement en termes de changements  $Nt$  et  $Pr$ .  $T(\eta)$  augmente avec l'augmentation du paramètre de thermophorèse ( $Nt$ ) et diminue avec l'augmentation du nombre de Prandtl ( $Pr$ ).



**Figure I. 12:** Modèle Physique a (3D) et b(2D) du champ magnétique. [21]

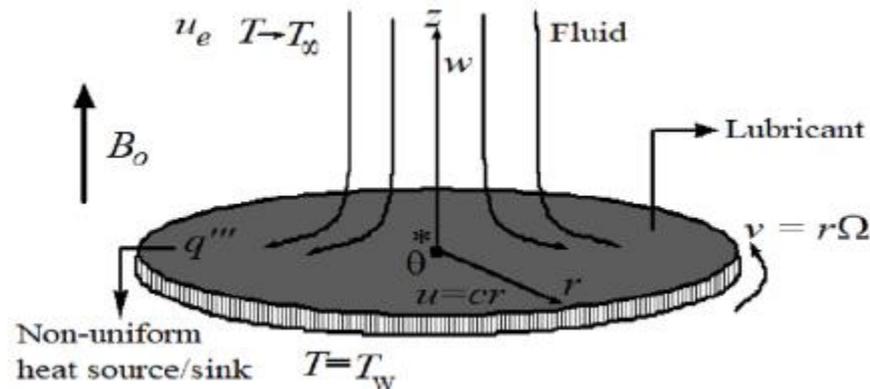
**Deog-HeeDoh et al [22]** : Cette étude étudie l'écoulement magnétohydrodynamique incliné tridimensionnel d'un fluide se produisant entre deux disques rotatifs étirables. L'analyse du transfert de chaleur est illustrée tout en utilisant l'effet du modèle de flux de chaleur Cattaneo-Christov. En utilisant la transformation de similarité, les équations aux dérivées partielles déterminantes sont transférées dans un système de différentielles ordinaires équations résolues numériquement en appliquant la technique d'itération de tir de Nachtsheim-Swigertainsi que le schéma d'intégration Runge-Kutta de sixième ordre. Les effets de divers physiques les paramètres sont représentés graphiquement. De cette analyse, on conclut que le problème de la force de Coriolis rend le paramètre de rotation pour augmenter la vitesse du fluide. On trouve aussi que la couche limite thermique diminue pour des valeurs plus élevées du paramètre de relaxation thermique  $\lambda E$  pour  $Re = 0,08$  et  $Re = 1,5$ .



**Figure I. 13 :** Diagramme schématique d'un écoulement magnétohydrodynamique incliné tridimensionnel d'un fluide se produisant entre deux disques rotatifs étirables. [22]

**Usman, Waqar Khan et al [23] :** Le phénomène de transfert de chaleur est bénéfique et applicable dans l'ingénierie, les industries et les technologies processus. La production d'énergie à l'aide de ressources bon marché joue un rôle pivot et renouvelable dans le développement industriel des pays. En raison d'une importante performance du transfert de chaleur, le flux de glissement constant et le transfert de chaleur de l'hyperbolique tangent fluide sur une surface lubrifiante du disque rotatif étirable est étudié. Les effets du MHD, rayonnement non linéaire et source/puits de chaleur non uniforme soumis à des conditions aux limites non linéaires sont inclus dans les équations de mouvement et d'énergie. En raison de la lubrification, une fine couche d'un fluide de loi de puissance est produite à la surface du disque. Comme la couche lubrifiante est mince, les conditions interfaciales sont appliquées à la surface entre le fluide et le lubrifiant. Le gouvernement des équations aux dérivées partielles non linéaires (EDP) ont été converties en différentielles ordinaires équations (ODE), qui sont résolues numériquement à l'aide de la méthode de la boîte de Keller. Les retombées des paramètres pertinents sur les distributions sans dimension de la vitesse et de la température sont délibérées. Les forces de traînée de surface et les taux de transfert de chaleur sont calculés, et les effets des paramètres qui les régissent sont examinés. Avec l'amélioration dans le slip à l'interface et le nombre de Weissenberg, les vitesses radiale et azimutale augmentent près du disque, alors qu'ils observent

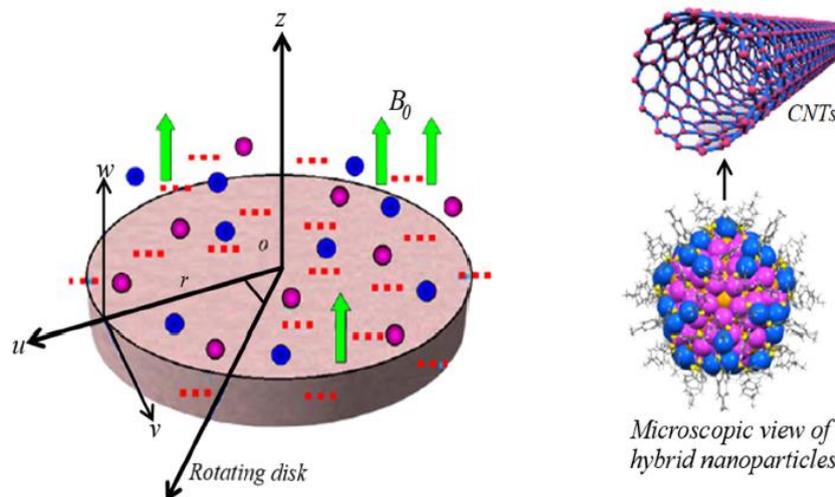
deux tendances différentes pour l'indice de loi de puissance. De plus, la température augmente pour le rayonnement paramètre, et cette escalade est importante pour le rayonnement non linéaire.



**Figure I. 14:** La géométrie du flux. [23]

**Hassan Waqas et al [24]** ont examiné les impacts des rayonnements thermiques non linéaires sur les nanoparticules SWCNT -  $TiO_2$  & MWCNT -  $CoFe_2O_4$  suspendues dans un écoulement de nano fluide de type hybride à base d'eau sur un disque rotatif. Les effets du rayonnement thermique non linéaire sont pris en compte. L'écoulement est induit par un disque en rotation. Le marché de la nanotechnologie est énorme et le développement de ces matériaux devrait être très léger. Les effets des facteurs de forme sont également pris en compte. Les nanomatériaux sont caractérisés en différents types en raison de leurs formes, de leurs caractéristiques et de la taille des matériaux. Les catégories générales de nanomatériaux comprennent les nanotubes de carbone. D'autres NTC sont divisés en deux formes différentes, notamment les nanotubes de carbone à paroi unique (SWCNT) et les nanotubes de carbone à parois multiples (MWCNT). Les nanotubes de carbone ont des applications significatives dans les stockages d'énergie, l'amortissement et la rigidité à la rupture. Les nanotubes de carbone sont le plus couramment utilisés dans les domaines de la conservation de l'énergie, de la stabilité thermique, des transistors à nanotubes et des champs électromagnétiques et de nombreux domaines. Méthodologie : Le système de gouvernance des équations aux dérivées partielles est réduit à des équations ordinaires sans dimension en utilisant des transformations de similarité, puis résolu avec la fonction intégrée Matlab de bvp4c. l'analyse comportementale des composantes

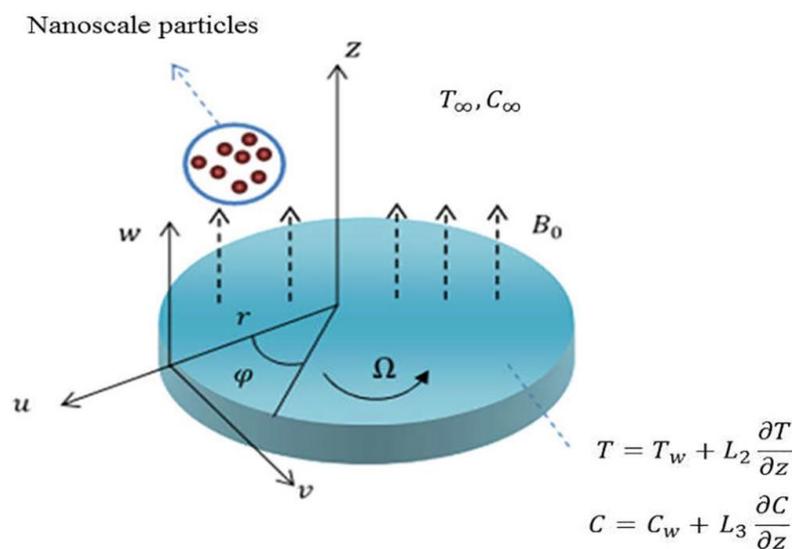
de vitesse et le transfert de chaleur de différentes valeurs de paramètres sont évalués à l'aide de graphiques. Résultats : Les résultats montrent que les composants de vitesse sont réduits via une estimation plus large du paramètre magnétique. Les frottements des particules solides améliorent le champ de vitesse. Le paramètre de rapport de température aide à améliorer le transfert de chaleur. De plus, la température est réduite via le numéro de Prandtl.



**Figure I. 15** : Flux descriptif du problème d'écoulement de nano fluide de type hybride à base d'eau sur un disque rotatif. [24]

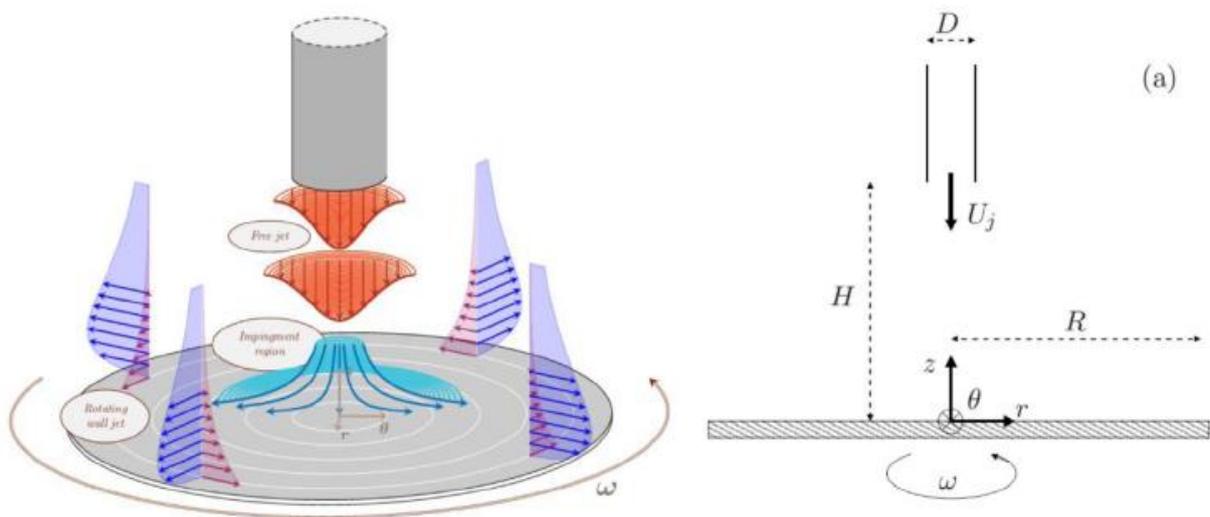
**Arsalan Aziz et al [25]** : Ici, le flux tridimensionnel MHD de nano liquide visqueux par un disque rotatif avec génération/absorption de chaleur et effets de glissement est abordé. Des caractéristiques de thermophorèse et de mouvement aléatoire sont également incorporées. Des conditions de vitesse, de température et de glissement de concentration sont imposées aux limites. Le champ magnétique appliqué est utilisé. Des approximations du faible nombre de Reynolds magnétique et de la couche limite ont été utilisées dans la formulation du problème. Des transformations appropriées conduisent à un système différentiel ordinaire non linéaire fort. Le système non linéaire obtenu est résolu numériquement par la technique NDSolve. Des graphiques ont été tracés afin d'analyser comment les champs de vitesse, de température et de concentration sont affectés par diverses variables pertinentes. De plus, les valeurs numériques des taux de transfert de chaleur et de masse ont été tabulées et discutées.

**M. Mustafa, 2017 [26]**, Dans son article, le problème de Von Karman du disque rotatif infini est étendu au cas où l'espace au-dessus du disque rugueux est équipé d'un nano fluide électriquement conducteur. Le modèle de Buongiorno est utilisé pour incorporer le mouvement brownien et les effets de thermophorèse dus aux nanoparticules. Le processus de transfert de masse s'accompagne d'une condition de flux normal nul. De plus, le mécanisme de transfert de chaleur est inspecté dans des conditions de saut de température plus générales. Des solutions de similitude précises sont développées pour une gamme complète de coefficients de glissement au moyen d'une procédure de prise de vue standard. En outre, une routine MATLAB basée sur la collocation est utilisée pour trouver les solutions. L'impact des paramètres sur les champs d'écoulement est représenté en traçant des graphiques. Il est prédit que les distributions de vitesse sont inversement proportionnelles au paramètre de champ magnétique. L'effet de glissement de vitesse présente également une opposition au transport de quantité de mouvement et réduit l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique. On constate également que le mouvement brownien a une influence négligeable sur le flux de chaleur au niveau du disque en rotation. En outre, les épaisseurs de couche limite thermique et de concentration sont augmentées en raison de l'existence de la force thermophorétique. La vitesse axiale est négative en raison du mouvement descendant du fluide causé par la rotation du disque. L'analyse de la limite sans glissement peut également être récupérée en tant que cas particulier du présent modèle.



**Figure I. 16 :** Configuration de flux. [25] [26]

**Huda Mohammed Alotaibi et al, [27]** : Un examen des résultats les plus importants pour l'impact des jets sur la cible en rotation est présenté, l'accent est mis sur le transfert de chaleur et la dynamique d'écoulement dans ces jets. Ces configurations de jets sont rencontrées dans de nombreuses applications industrielles. Un nombre important d'études de recherche portant sur des études computationnelles et expérimentales sont passées en revue. Différents paramètres influencent le flux et améliorent le transfert de masse et d'énergie dans plusieurs configurations de chaleur telles que ; Nombre de Reynolds ( $Re$ ), géométrie de la buse, espacement entre la sortie du jet et la plaque d'impact, l'angle d'impact du jet et le régime d'écoulement à la sortie du jet. Il existe quelques études qui traitent du transfert de chaleur d'un écoulement heurtant un disque en rotation en raison de la complexité de la structure de l'écoulement et des défis liés à la conduite d'une enquête expérimentale approfondie. La plupart des études présentent des profils de coefficients de transfert de chaleur, de vitesse moyenne et de taux de turbulence de l'écoulement incident. De nombreux chercheurs ont signalé que le LES peut prédire les données de transfert de chaleur et de champ d'écoulement pour différents angles d'impact afin d'étudier le mécanisme de rétroaction entre la buse et la plaque.



**Figure I. 17** : Impactant sur une région différente du disque en rotation. [27]

## **I.5 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté des généralités sur la couche limite et plusieurs expériences sur les écoulements sur un disque rotatif qui encadrent notre étude. Ce qui nous permet de faire le choix physique et mathématique étudié. Ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites qui lui sont associées et que nous allons aborder dans le prochain chapitre.

---

# **Chapitre II**

Description du problème et équations  
gouvernantes

# Description du problème et équations gouvernantes

## II.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est de présenter les étapes de calcul nécessaires pour aboutir aux équations modélisant la couche limite, dynamique et thermique. On présentera le cas général d'un écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé.

## II.2 Description du problème physique

On considère un fluide laminaire de température  $T_\infty$  disposé uniformément sur un disque en rotation avec une vitesse angulaire ( $\Omega$ ) qui est perméable (poreux) chauffé avec une température uniforme  $T_w$  qui est différent de celle du fluide.

La variation des vecteurs vitesses se font selon ( $U_r, U_\theta, U_z$ ) et les coordonnées selon ( $r, \theta, z$ ) tel que le montre la Figure (II. 1).

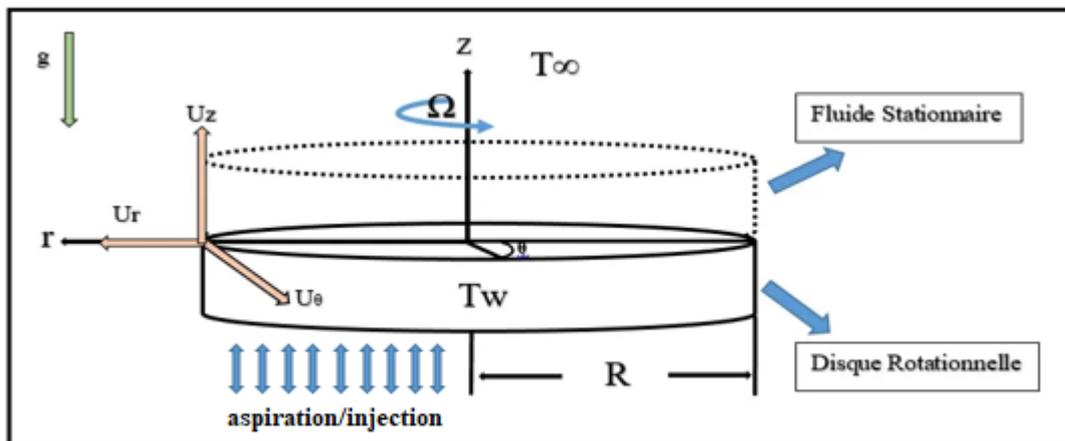


Figure II. 1 : Schématisation du module physique (disque libre).

### II.3 Equations générales du mouvement :

Le traitement du comportement dynamique du fluide envisagé fait appel aux équations du mouvement déduites des principes de conservation de la masse, et de la quantité de mouvement.

#### II.3.1 Conservation de masse :

Le fluide est conservatif, sa masse reste constante dans le cas d'absence de sources ou de puits de matière. L'équation de conservation de la masse est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{II. 1})$$

#### II.3.2 Conservation quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = \vec{F} - \nabla \cdot p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (\text{II. 2})$$

Où :

**P** : la pression,

**F**: Représente le vecteur des forces extérieures appliquées au fluide (forces volumiques).

#### Mise en équations du problème

On exprimera les équations dans un système de coordonnées cylindriques :

- Coordonnées (r,  $\theta$ , z) ;
- Vitesse ( $U_r$ ,  $U_\theta$ ,  $U_z$ ) ;

### II.4 Projection des équations sur les axes (r, $\theta$ , z) :

#### II.4.1 Équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_r)}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 3})$$

#### II.4.2 Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) :

**Suivant r** : Equation de quantité de mouvement radiale

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] \\ = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] + \rho g r \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

**Suivant  $\theta$**  : Equation de quantité de mouvement axiale

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r U_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

**Suivant  $z$**  : Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl)

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \cdot \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] \\ = -\frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] - \rho g_z \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Où ( $U_r$ ,  $U_\theta$ ,  $U_z$ ) sont respectivement les composantes dimensionnelles de vitesse radiale, axiale et azimutale,  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

### II.4.3 Equation d'énergie :

**Suivant  $T$**  : Equation d'énergie

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + U_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + U_\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

Où  $k = \lambda / \rho C_p$  : la diffusivité thermique du liquide,  $\lambda$  est sa conductivité thermique et  $C_p$  sa chaleur spécifique à pression constante.

## II.5 Hypothèses

Pour simplifier notre problème d'étude, On envisage développement d'une couche limite laminaire sur disque en rotation et on admet les hypothèses suivantes :

- L'écoulement du fluide est laminaire newtonien, axialement symétrique incompressible avec transfert de chaleur et tridimensionnel.
- Le fluide est considéré newtonien à viscosité constante.
- On considère le disque est poreux.
- Les effets de la pesanteur sont négligeables (fluide non pesant).

- On néglige les échanges de chaleur par rayonnement.
- Les propriétés physiques ( $\mu$ ,  $C_p$ ,  $\kappa$ ) sont constantes et uniformes.
- L'écoulement est sur un disque en rotation supposé infini.
- La surface du disque rotatif est maintenue à une température uniforme  $T_w$ .
- Loin de la surface, le flux libre est maintenu à une température constante  $T_\infty$ . et à pression constante  $P$ .

## II.6 Simplification des équations en se basant sur les hypothèses données :

### II.6.1 Équation de continuité (ou de conservation de masse) :

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.8})$$

### II.6.2 Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) :

**Suivant r :** Equation de quantité de mouvement radiale

$$\rho \left[ U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.9})$$

**Suivant  $\theta$  :** Equation de quantité de mouvement axiale

$$\rho \left[ U_r \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] = \mu \left[ \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.10})$$

**Suivant z :** Equation de quantité de mouvement azimuthale (Equation de swirl)

$$\rho \left[ U_r \cdot \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.11})$$

### II.6.3 Equation de d'énergie :

**Suivant T :** Equation de d'énergie

$$\rho C_p \left[ U_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.12})$$

## Conditions aux limites :

Les conditions initiales sont prises pour chaque lancement de calculs comme étant la solution obtenue par le calcul antécédent (les répartitions de  $(U_r, U_\theta, U_z)$  dans le fluide). Pour la première exécution, on a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle.

Pour la région  $Z > 0$  et  $r < R$  les conditions de non-dérapiage a la surface de rotation

sont :

$$\begin{aligned} U_r = 0, \quad U_\theta = r\Omega, \quad U_z = c, & \quad \text{pour } z = 0 \\ U_r = 0, \quad U_\theta = 0, \quad T = T_\infty, & \quad \text{pour } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

## II.7 Formulation Adimensionnelle :

Les expérimentales des écoulements sont souvent effectuées sur des modèles et les résultats sont montrés dans une forme sans dimensions, permettant ainsi des mesures échelonnées vers les conditions réelles des écoulements. La même approche peut être aussi entreprise dans des études numériques. Les équations gouvernantes peuvent être transformées à la forme sans dimensions en employant la normalisation appropriée. En introduisant les variables adimensionnelles.

L'expression  $\eta = \left(\frac{2\Omega}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} z$  est introduit ainsi que les représentations suivantes des vitesses radiale, tangentielle et axiale, et de température :

$$\left. \begin{aligned} U_r = \Omega r F'(\eta) \quad U_\theta = \Omega r G(\eta), \quad U_z = -(2\nu\Omega)^{\frac{1}{2}} F(\eta), \\ \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{(T_w - T_\infty)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.13})$$

Pour simplifier nos calculs on dérive nos équations adimensionnelles :

### II.7.1 Équation de continuité (ou de conservation de masse) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\Omega r F')}{\partial r} + \frac{\Omega r F'}{r} + \frac{\partial\left(- (2\nu\Omega)^{\frac{1}{2}} F'\right)}{\partial z} &= 0 \\ 2\Omega F' - 2\Omega F' &= 0 \end{aligned}$$

$$2F' - 2F' = 0 \implies \text{(Equation de continuité établie)} \quad (\text{II.14})$$

**II.7.2 Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes) :****Suivant r :** Equation de quantité de mouvement radiale

$$\rho \left[ U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \rho \left[ (\Omega r F') \cdot \frac{\partial (\Omega r F')}{\partial r} - \frac{(\Omega r G)^2}{r} + \left( (-2\nu\Omega)^{\frac{1}{2}} F \right) \frac{\partial (\Omega r F')}{\partial z} \right] \\ = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 (\Omega r F')}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\Omega r F')}{\partial r} + \frac{\partial^2 (\Omega r F')}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$F''' + 2FF'' - F'^2 + G^2 = 0 \quad (\text{II. 15})$$

**Suivant  $\theta$  :** Equation de quantité de mouvement axiale

$$\rho \left[ U_r \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] = \mu \left[ \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \rho \left[ (\Omega r F') \cdot \frac{\partial (\Omega r G)}{\partial r} + \frac{(\Omega r F')(\Omega r G)}{r} + \left( -(2\nu\Omega)^{\frac{1}{2}} F \right) \frac{\partial (\Omega r G)}{\partial z} \right] \\ = \mu \left[ \frac{\partial^2 (\Omega r G)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\Omega r G)}{\partial r} + \frac{\partial^2 (\Omega r G)}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$G'' + 2FG' - 2F'G = 0 \quad (\text{II. 16})$$

**Suivant z :** Equation de quantité de mouvement azimuthale (Equation de swirl)

$$\rho \left[ U_r \cdot \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (\text{II. 17})$$

**II.7.3 Equation de d'énergie****Suivant T :** Equation de d'énergie

$$\rho C_p \left[ U_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

$$\theta' + 2PrF\theta' = 0 \quad (\text{II. 18})$$

Tel que :  $Pr = \left(\frac{\rho C_p}{k}\right)$

En introduisant des équations (II.13) dans les équations gouvernantes (II.8 - II.9- II.10 - II.11 - II.12), nous obtenons un système des équations différentielles ordinaires.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & F''' + 2FF'' - F'^2 + G^2 = 0 \\
 2) \quad & G'' + 2FG' - 2F'G = 0 \\
 3) \quad & \theta'' + 2PrF\theta' = 0
 \end{aligned}
 \tag{II.19}$$

### Les conditions aux limites

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement en rotation avec transfert de chaleur

$$\begin{array}{llll}
 F(\eta) = S, & F'(\eta) = 0, & G(\eta) = 1, & \theta(\eta) = 1 & \text{Pour } \eta = 0 \\
 F(\eta) = 0, & F'(\eta) = 0, & G(\eta) = 0, & \theta(\eta) = 0 & \text{Pour } \eta \rightarrow \infty
 \end{array}$$

S : paramètre d'injection/aspiration

### II.8 CONCLUSION

Après la mise au point du système d'équations régissant l'écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé avec les conditions simplificatrices nécessaires, nous procéderons à la résolution numérique du problème. Le détail de la procédure numérique fait l'objectif du chapitre suivant

---

# **Chapitre III**

## Résolution numérique

# Résolution numérique

## III.1 Introduction :

La simulation numérique en mécanique des fluides est reconnue aujourd'hui comme des outils incontournables de conception, c'est un ensemble de méthodes numériques permettant d'obtenir une solution approximative d'un problème de dynamique des fluides ou de transfert thermique. Grâce au développement des méthodes numériques et à des calculateurs de plus en plus puissants avec une grande capacité de mémoire, la simulation numérique permet d'avoir des solutions très satisfaisantes.

Une équation qui comporte une ou plusieurs dérivées de la fonction inconnue est appelée équation différentielle. L'ordre de cette équation est déterminé par l'ordre du degré le plus élevé de la dérivation.

Dans ce chapitre, nous s'intéressera à la résolution des systèmes d'équations différentielles, ces équations ne possèdent pas des solutions analytiques, dans le cas général, les descriptions mathématiques sont des moyens pour trouver des solutions approximatives aux solutions exactes. Ces équations sont classées en deux catégories :

- Les équations différentielles avec des conditions initiales
- Les équations différentielles avec des conditions aux limites.

Dans un premier temps nous remplaçons ces équations différentielles par une ou plusieurs équations algébriques, plus facile à résoudre.

Dans la seconde étape on applique la transformation des conditions aux limites en conditions initiales, beaucoup plus simples à résoudre ce qui fait appel à l'utilisation de la méthode Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4).

### III.2 Méthodes à un pas :

Ces méthodes sont basées sur un développement en série de Taylor suivant un ordre plus au moins élevé. Elles sont qualifiées à un pas, car le calcul de  $y_{k+1}$  ne réclame que la valeur de  $y_k$  à l'instant précédent. Une méthode à deux pas utilisera à la fois  $y_k$  et  $y_{k-1}$ . Le schéma numérique de méthode Runge-Kutta classique d'ordre 4 est donné dans ce qui suit :

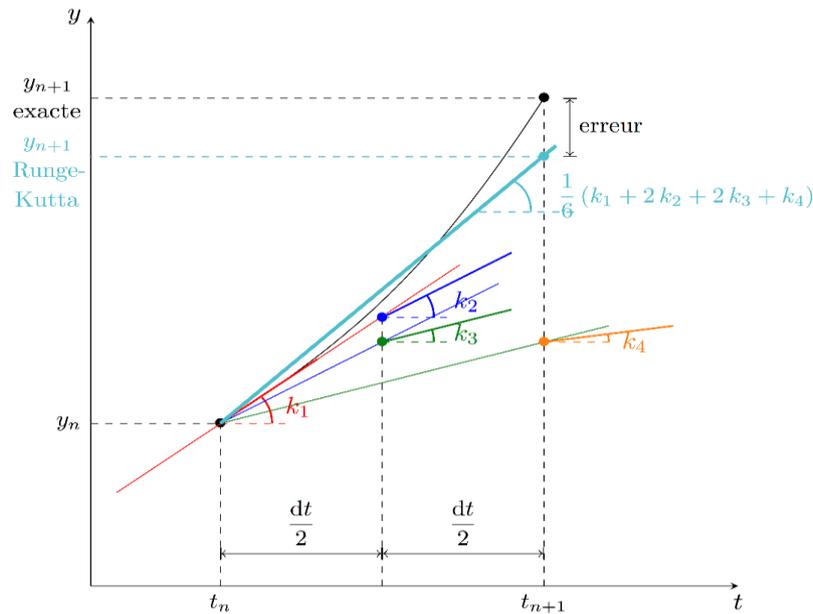
#### III.2.2 Méthode Runge-Kutta d'ordre 4 :

Cette méthode plus complexe fait intervenir quatre fois plus de calculs que la méthode d'Euler (pour une équation différentielle du premier ordre), mais est beaucoup plus fiable.

Voici les étapes de calculs :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t=0) = y_0 \\ k_{10} = f(t_0, y_0) \times dt \\ k_{20} = f\left(t_0 + \frac{dt}{2}, y_0 + \frac{k_{10}}{2}\right) \times dt \\ k_{30} = f\left(t_0 + \frac{dt}{2}, y_0 + \frac{k_{20}}{2}\right) \times dt \\ k_{40} = f(t_0 + dt, y_0 + k_{30}) \times dt \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}) \\ \dots \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Il y a donc quatre coefficients à calculer (méthode d'ordre 4, il existe également la méthode RK2) qui correspondent à l'évaluation de 4 pentes à des instants différents entre  $t$  et  $t + dt$  (une évaluation en  $t$ , deux évaluations en  $t + \frac{dt}{2}$ , une évaluation en  $t + dt$ ). Voici un graphique qui montre le lien entre les différents coefficients  $k$  :



**Figure III. 3 :** Méthode Runge-Kutta d'ordre 4

On calcule le coefficient  $k_1$  (qui correspond à l'unique coefficient de la méthode d'Euler), celui nous permet de trouver l'ordonnée du point où l'on évalue  $k_2$  (tracé), son abscisse étant égale à  $t_n + \frac{dt}{2}$ . Le coefficient  $k_2$  permet de trouver l'ordonnée du point où l'on évalue  $k_3$  (tracé), l'abscisse restant inchangée. On évalue une dernière fois la pente, coefficient  $k_4$ , en un point d'abscisse  $t_{n+1}$  et dont l'ordonnée est donnée par le coefficient  $k_3$  (tracé).

La pente retenue pour l'évaluation de  $y_{n+1}$  est une pondération des pentes évaluées précédemment (tracé).

### III.3 Algorithme de résolution

#### III.3.1 EDO d'ordre supérieurs

La résolution d'équations différentielles ordinaires de degré  $n > 1$  est basée sur le même principe. Une telle équation peut s'écrire :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y'', y', x) \quad (\text{III.2})$$

Pour la résoudre, on construit un vecteur qui contient toutes les dérivées de  $y$  d'ordre supérieurs :

$0 \leq m \leq n - 1$ . Le vecteur dérivé contient alors toutes les dérivées de  $f$  d'ordre  $1 \leq m \leq n$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \vec{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

L'équation d'ordre  $n$  peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{Y}' = \vec{F}(\vec{Y}) \quad \text{avec} \quad \vec{F}(\vec{Y}) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ f(y^{(n-1)}, \dots, y'', y', x) \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

L'équation différentielle d'ordre  $n$  est ainsi écrite comme un système de  $n$  équations différentielles d'ordre 1 portant sur les  $n$  variables indépendantes  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ . Formellement, ce système se comporte comme une unique équation différentielle d'ordre 1 pour laquelle on peut appliquer les méthodes vues dans la section précédente.

### III.4 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les méthodes à suivre, pour la résolution des équations lié à notre problématique (sujet d'étude) nous avons décrit les méthodes à un pas, de Runge-Kutta d'ordre 4, nous entamerons les résultats dans le chapitre suivant.

# **Chapitre IV**

## **Résultats et Discussion**

# Résultats et Discussion

## IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les principaux résultats obtenus à partir de l'étude numérique d'un écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé. Les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont obtenus en utilisant logiciel MATLAB et la méthode numérique (méthode de Runge- Kutta d'ordre 4) Nous rappelons que notre étude concerne un écoulement laminaire de couche limite tridimensionnelle qui se développe sur un disque horizontale chauffé en rotation, dont la température est supérieure à celle du fluide. En raison de l'existence d'un transfert thermique, il existe un couplage entre l'aspect dynamique et thermique du problème. L'étude est sur l'influence de la variation du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) et le paramètre d'aspiration/injection ( $S$ ) sur l'aspect dynamique et thermique de l'écoulement le long de la paroi. Les champs de vitesses et de températures sont des grandeurs physiques seront présentés en détail sous forme de courbes.

## IV.2 Validation des résultats par le code de calcul :

Pour donner une crédibilité à nos résultats numériques, nous avons fait une comparaison des résultats obtenus par nos simulations numériques avec ceux sont disponible dans la littérature. Ceux de Ackroyd [28] et Kelson and Desseaux [29].

	<b>Pr</b>	<b>S= - 0.3</b>	<b>S= - 0.2</b>	<b>S =- 0.1</b>	<b>S = 0</b>	<b>S = 0.1</b>	<b>S= 0.2</b>	<b>S= 0.3</b>
<b>F'(0)</b>	0.72	0,5115	0,5164	0,5162	0,5102	0,4978	0,4788	0,4535

**Tableau IV.1 :** résultats obtenus pour  $F''(0)$  pour diverses valeurs de  $S$  et pour  $Pr= 0.72$

	<b>Pr</b>	<b>S= - 0.3</b>	<b>S = -0.2</b>	<b>S = - 0.1</b>	<b>S = 0</b>	<b>S = 0.1</b>	<b>S= 0.2</b>	<b>S= 0.3</b>
<b><math>-\theta'(0)</math></b>	0.72	0,1572	0,2055	0,2628	0,3294	0,4055	0,4911	0,5862
	2	0,1225	0,2225	0,3692	0,5652	0,8076	1,0898	1,4039
	7	0,0135	0,0883	0,3638	0,9818	1,9315	3,0957	4,3728

**Tableau IV. 2 :** résultats obtenus pour  $-\theta'(0)$  pour diverses valeurs de  $Pr$  et  $S$ .

A partir des résultats de tableau (IV.1 et IV.2), On note qu'il existe une grande homogénéité avec nos résultats avec les références mentionnée ci-dessus, ce qui nous permet de prouver l'exactitude de nos travaux.

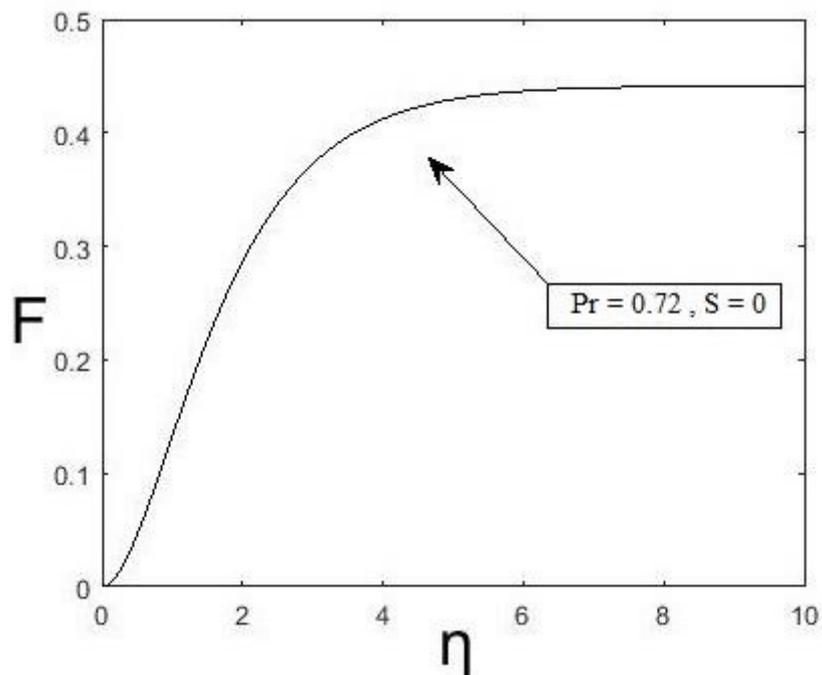
### IV.3 Absence de cas d'aspiration/injection $S=0$

#### IV.3.1 Caractéristique dynamique :

Cette Partie concerne les résultats issus de la résolution des équations du mouvement. En analysant ces équations on constate qu'elle dépend de nombre de Prandtl, source de chaleur ainsi que le paramètre d'aspiration/injection. Pour mieux suivre le développement des champs dynamiques

Nous présentons les profils des vitesses suivants avec leur condition initiale :

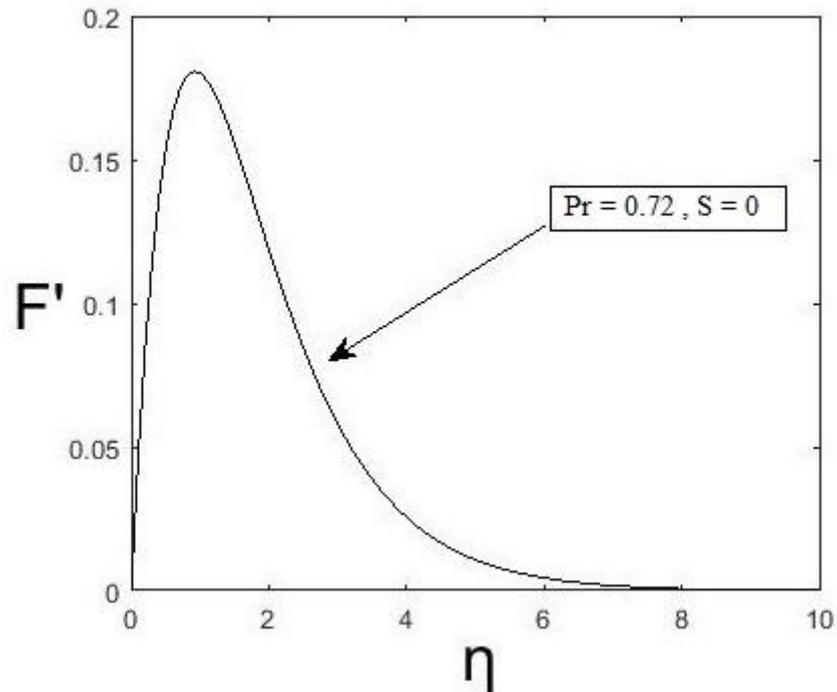
- L'évolution de profil de vitesse  $F$  pour  $S=0$  :



**Figure IV.1 :** Le profil de vitesse vertical

La variation de profil de vitesse  $F$  en fonction de ( $\eta$ ) pour comme paramètre ; valeur de Prandtl ( $Pr$ ) = 0.72 et paramètre d'aspiration/injection  $S=0$ , la figure (IV.1) montre que les forces de poussé par de 0 pour une augmentation progressive jusqu'à atteindre une valeur constante en fonction des coordonnées de la couche limite dynamique. Ce qui montre que les forces de poussée sont nuls à la paroi et augmente progressivement à force que le disque tourne.

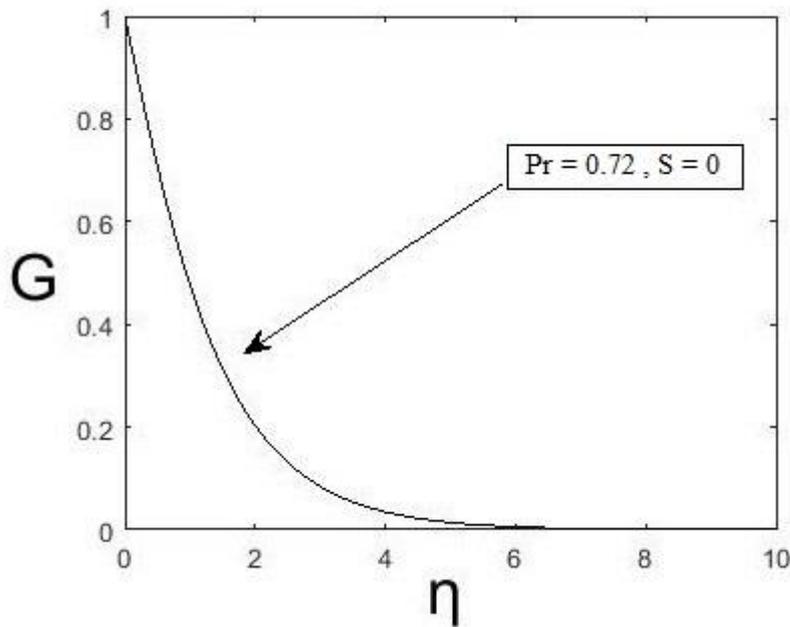
- L'évolution du profil de vitesse  $F'$  pour  $S=0$  :



**Figure IV.2** : Le profil de vitesse radiale

La variation de profil de vitesse  $F'$  en fonction de ( $\eta$ ) pour comme paramètre ; valeur de Prandtl ( $Pr$ ) = 0.72 et paramètre d'aspiration/injection  $S=0$ , la figure (IV.2) Montre Le profil de vitesse radiale induit par les forces centrifuges part de zéro, atteint un maximum puis diminue jusqu'à zéro sans glissement, la vitesse diminue près du disque, et il augmente la vitesse loin du disque. Et que physiquement moins de débit soit aspiré et repoussé dans la direction radiale à mesure que les glissements deviennent plus forts.

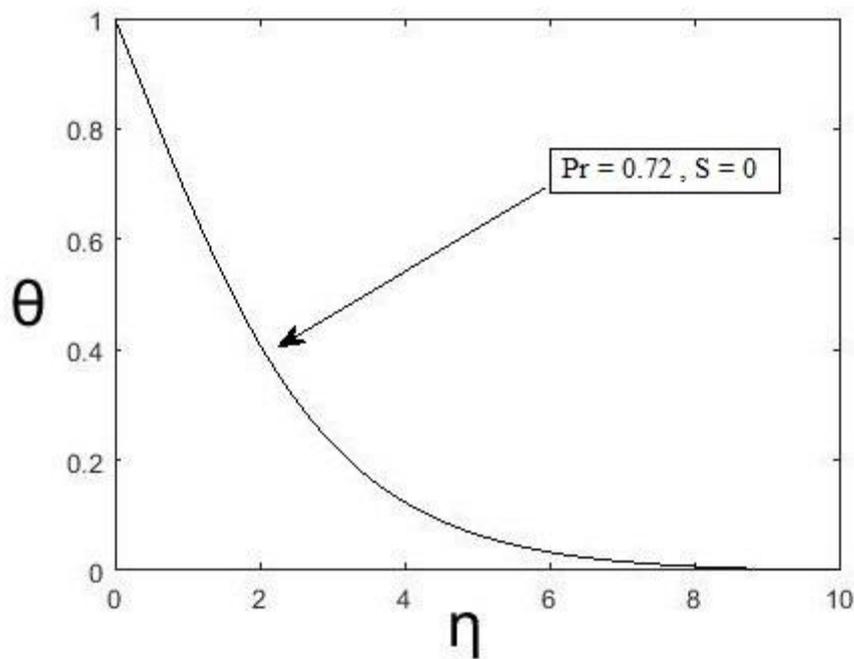
- L'évolution du profil de vitesse  $G$  pour  $S=0$  :



**Figure IV.3 :** Le profil de vitesse azimutale

La variation de profile de vitesse  $G$  en fonction de ( $\eta$ ) pour comme paramètre ; valeur de Prandtl ( $Pr$ ) = 0.72 et paramètre d'aspiration/injection  $S=0$ , la figure (IV.3) montre que la vitesse azimutale diminue avec l'augmentation du glissement et vice versa.

- L'évolution de profil de température  $\theta$  pour  $S=0$  :



**Figure IV.4 :** Le profil de température

La variation de profile de vitesse  $\theta$  en fonction de ( $\eta$ ) pour comme paramètre ; valeur de Prandtl ( $Pr$ ) = 0.72 et paramètre d'aspiration/injection  $S=0$ , la figure (IV.4), On remarque Contrairement à la distribution de la vitesse verticale  $F$ , la température augmente à mesure que le glissement augmente, ce qui conduit physiquement à une production de chaleur toujours croissante à proximité du disque et diminue loin du disque.

### IV.3.2 Caractéristique thermique :

Cette partie concerne seulement les résultats obtenus lors de la résolution de l'équation d'énergie mentionnée précédemment. En analysant cette équation en constate qu'elle dépend de nombre de Prandtl, source de chaleur, Pour mieux suivre le développement des champs thermiques nous présentons les profils des températures suivants :

- L'effet de nombre de Prandtl  $Pr$  sur le profil de température  $\theta$  pour  $S=0$

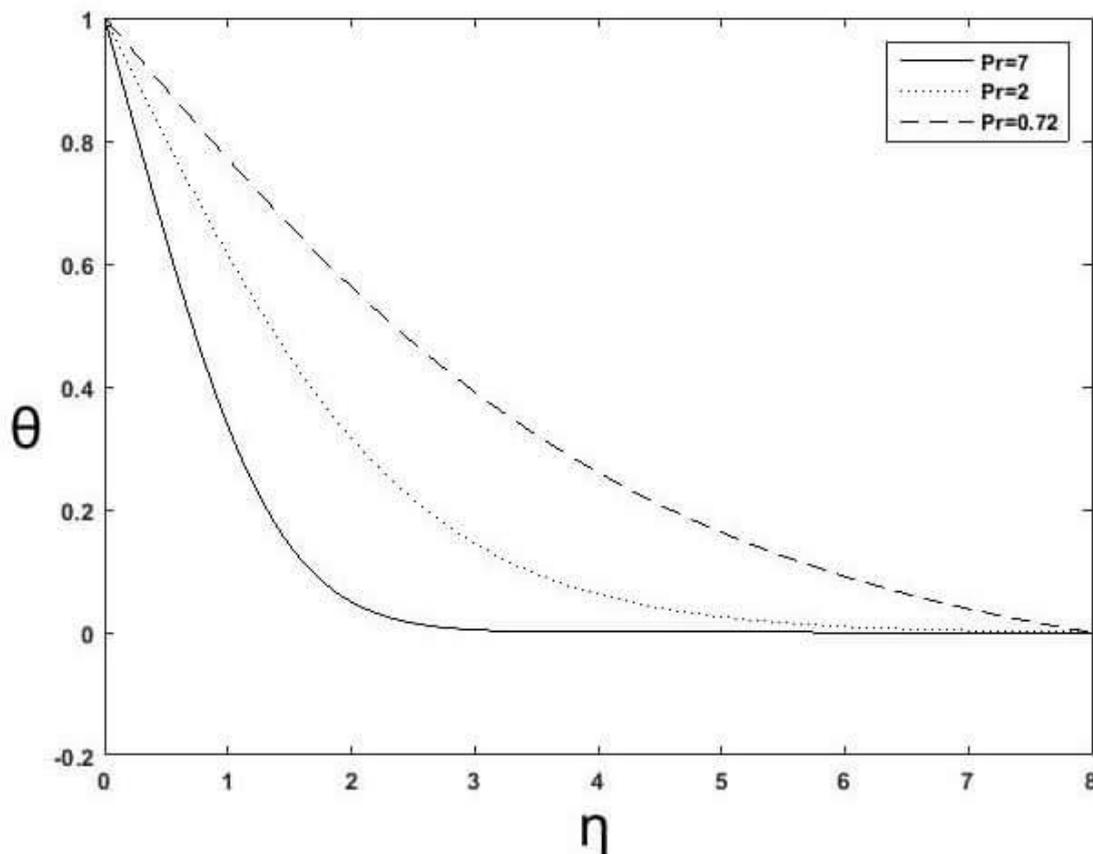
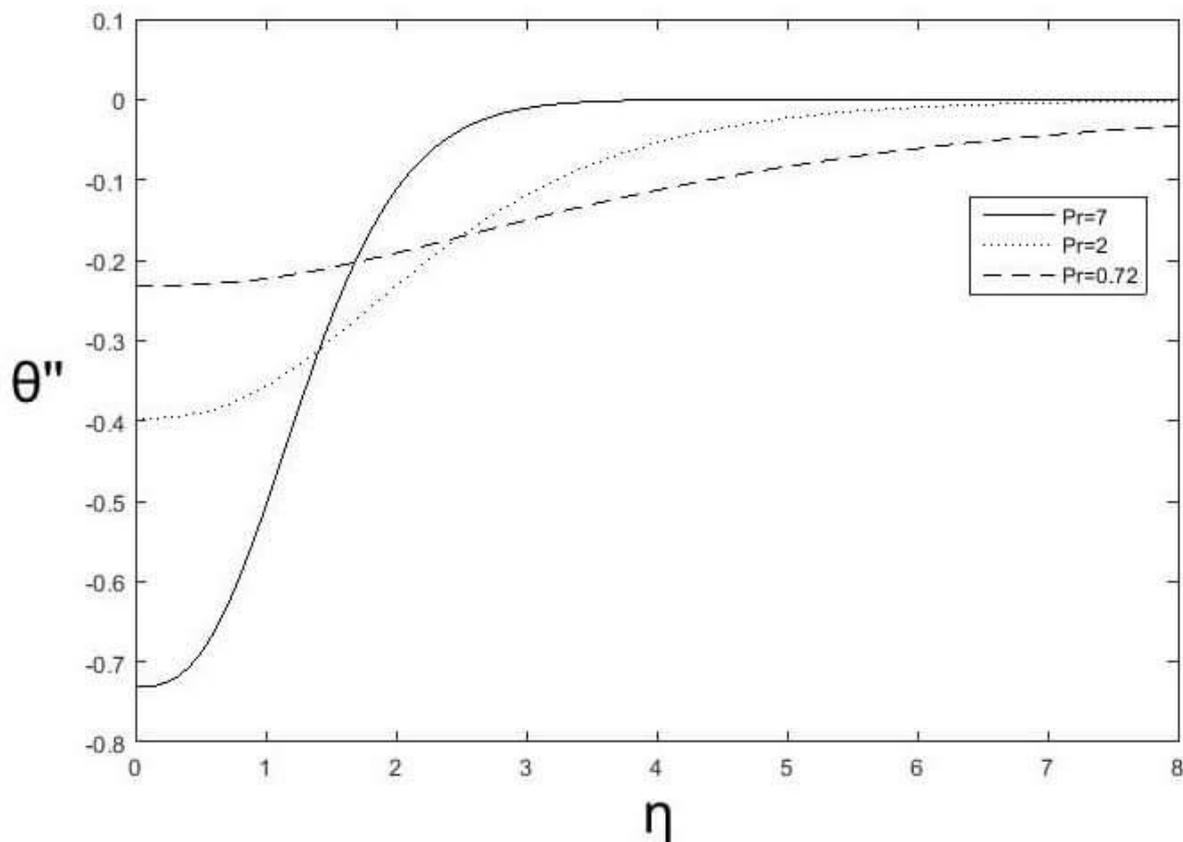


Figure IV.5 : : Effet du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) sur le profil de température  $\theta$  ( $\eta$ )

La figure (IV.5) présente la variation du profil de température  $\theta$  en fonction de  $(\eta)$ , pour divers valeurs nombre de Prandtl  $Pr$  (0.72, 2, 7), on remarque que la température adimensionnelle ( $\theta$ ) diminue avec l'augmentation de  $(\eta)$ , et que l'épaisseur de couche limite thermique se rétrécit avec l'augmentation de nombre de Prandtl, donc le nombre de Prandtl améliore encore le transfert de chaleur

- L'effet de nombre de Prandtl  $Pr$  sur le gradient de température  $\theta''$  pour  $S=0$



**Figure IV.6 :** Effet du nombre de Prandtl ( $Pr$ ) sur le gradient de température  $\theta''(\eta)$

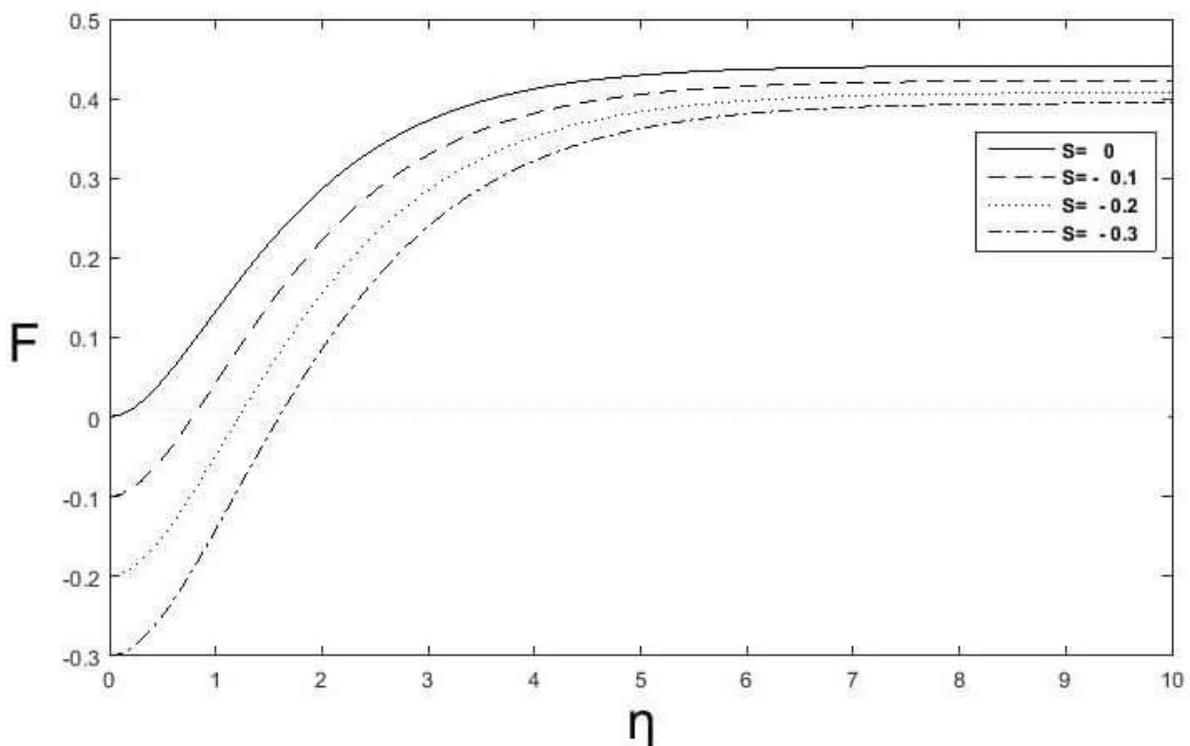
La figure (IV.6) présente l'évolution de gradient de température  $\theta''$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre de Prandtl  $Pr$  (0.72, 2, 7), est présentée sur la figure (IV.6), on observe que le gradient de température  $\theta''$  augmente avec l'augmentation de  $(\eta)$  et on observe aussi que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

#### IV. 4 Caractéristique de l'injection(soufflage) :

Dans cette partie on présente les résultats obtenus lors de la résolution des équations de mouvement et de température dans le cas d'une injection ou on varie la valeur du paramètre d'injection/aspiration ( $S$ ) :

##### Pour les valeurs $S < 0$

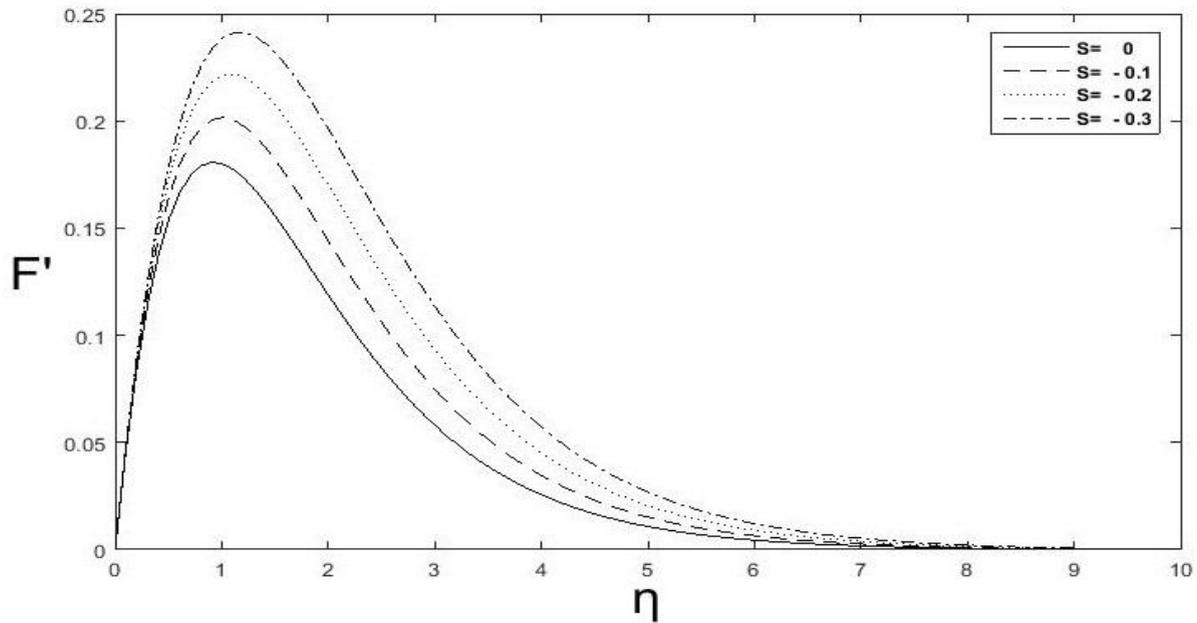
- L'évolution de profil de vitesse  $F$  par effet de l'injection. Pour les valeurs  $S < 0$



**Figure IV.7 :** Effet de l'injection sur la vitesse verticale  $F(\eta)$

La figure (IV.7) présente l'effet de l'injection sur la vitesse verticale  $F$  en fonction de ( $\eta$ ), pour diverses valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  (0 ; - 0.1 ; - 0.2 ; - 0.3) pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ . On observe que le profil de vitesse  $F$  augmente avec l'augmentation de ( $\eta$ ) pour toutes les valeurs de  $S$  et on observe aussi qu'il y a une diminution du profil  $F$  pour une augmentation de l'injection.

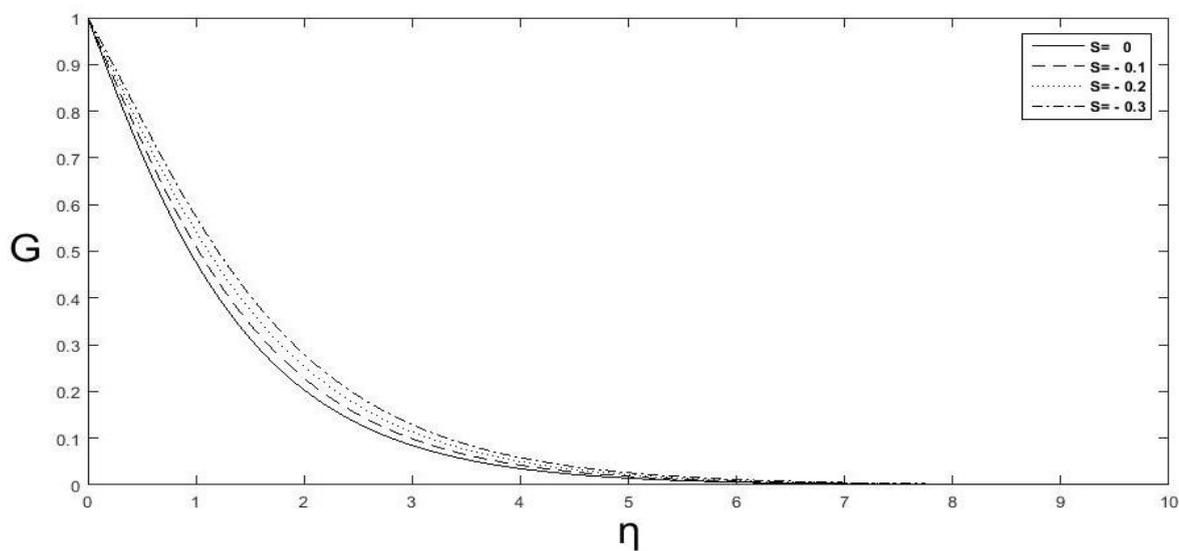
➤ L'évolution de profil de vitesse  $F'$  par effet de l'injection. Pour les valeurs  $S < 0$



**Figure IV.8 :** Effet de l'injection sur la vitesse radiale  $F'(\eta)$

La figure (IV.8) présente Effet de l'injection sur la vitesse verticale  $F'$  en fonction de ( $\eta$ ), pour diverses valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  ( $0$  ;  $-0.1$  ;  $-0.2$  ;  $-0.3$ ) pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ , On observe le profile et la couche limite du profil de vitesse radiale induit par les forces centrifuges augmente avec l'augmentation de l'injection

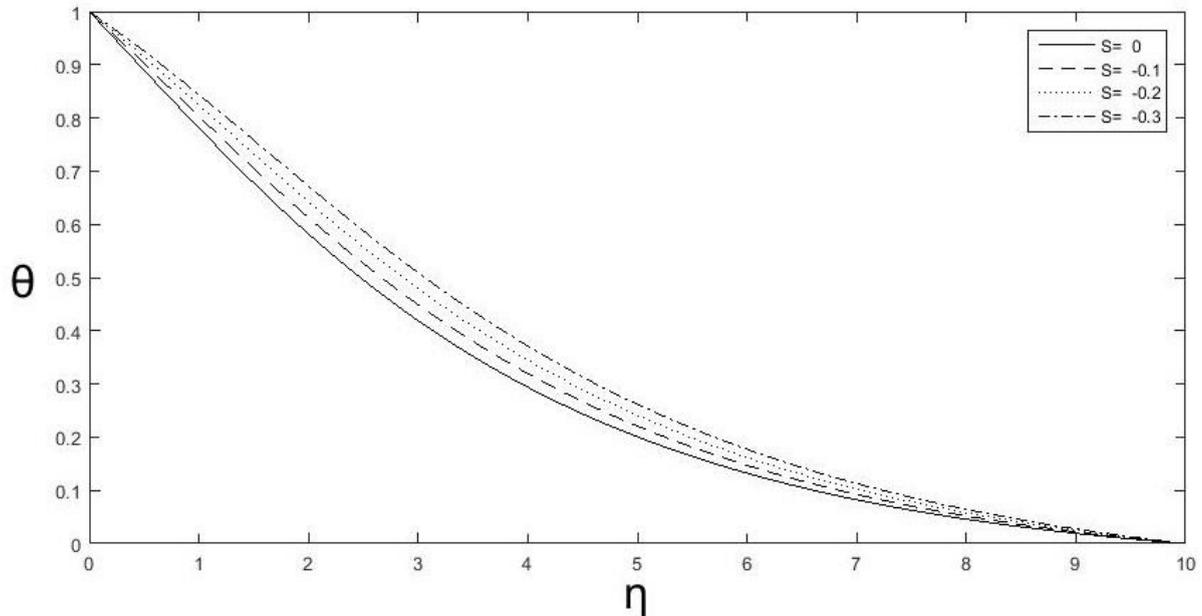
➤ L'évolution de profil de vitesse  $G$  par effet de l'injection. Pour les valeurs  $S < 0$



**Figure IV.9 :** Effet de l'injection sur la vitesse azimutale  $G(\eta)$

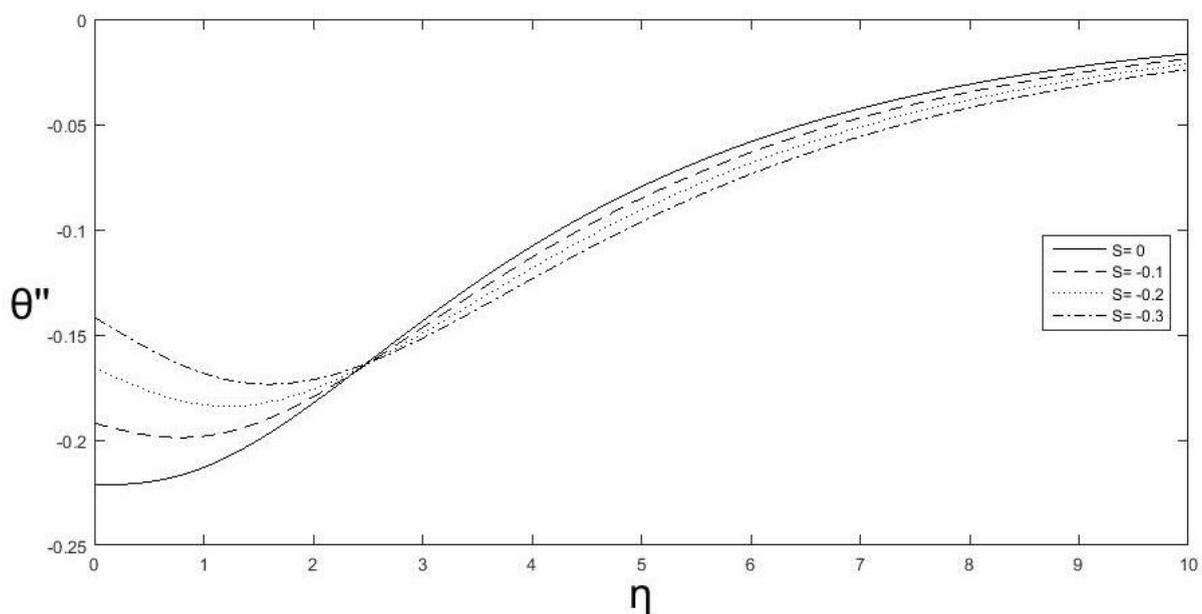
La figure (IV.9) présente l'effet de l'injection sur la vitesse azimutale  $G$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  (0 ; - 0.1 ; - 0.2 ; - 0.3) pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ . On observe le profil et la couche limite du profil de vitesse azimutale induit par les forces centrifuges augmente avec l'augmentation de l'injection donc une augmentation du reflux de débit vers l'extérieur.

➤ L'évolution de profil de température  $\theta$  par effet de l'injection. Pour les valeurs  $S < 0$



**Figure IV.10:** Effet de l'injection sur le profil de température  $\theta(\eta)$

➤ L'évolution de gradient de température  $\theta''$  par effet de l'injection. Pour les valeurs  $S < 0$



**Figure IV.11:** Effet de l'injection sur le gradient de température  $\theta''(\eta)$

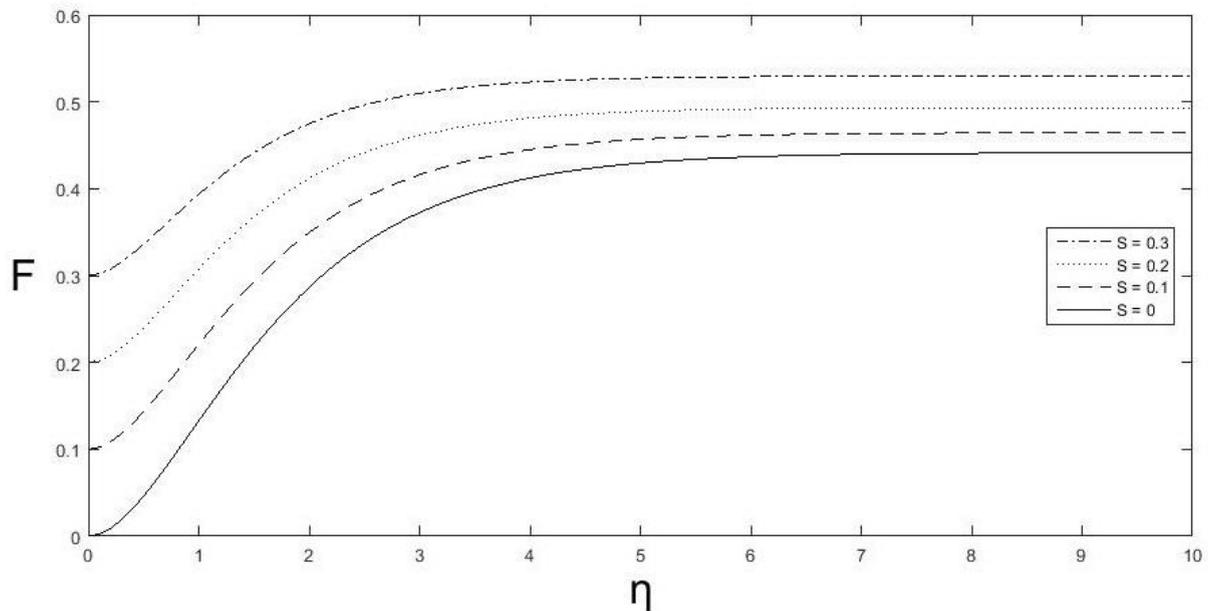
Les figures (IV.10 et IV.11) présente respectivement l'effet de l'injection sur le profil de température  $\theta$  et le gradient de température  $\theta''$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  (0 ; - 0.1 ; - 0.2 ; - 0.3) pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ , On observe le profil de température augmente avec l'augmentation de l'injection et un effet contraire pour le gradient de température, ce qui prouve que l'injection à travers la surface de la paroi du disque avec le glissement donne lieu à une croissance de l'épaisseur de la couche thermique ce qui réduit le transfert de chaleur.

#### IV. 5 Caractéristique de l'aspiration :

Dans cette partie on présente les résultats obtenus lors de la résolution des équations de mouvement et de température dans le cas d'une aspiration ou on varie la valeur du paramètre d'injection/aspiration ( $S$ ) :

##### Pour les valeurs $S > 0$

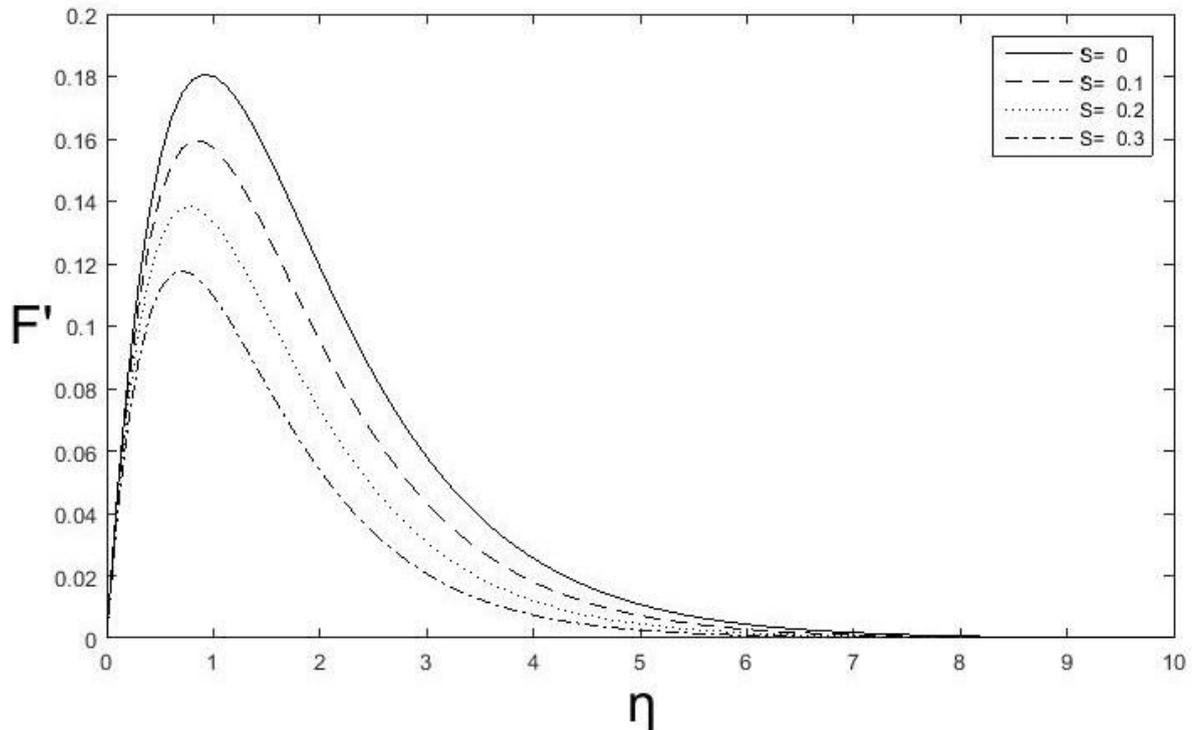
- L'évolution de profil de vitesse  $F$  par effet de l'aspiration. Pour les valeurs  $S > 0$



**Figure IV.12 :** Effet de l'aspiration sur la vitesse verticale  $F(\eta)$

La figure (IV.12) présente l'effet de l'aspiration sur la vitesse verticale  $F$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  (0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3) pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ , on observe que le profil de vitesse  $F$  augmente avec l'augmentation de  $(\eta)$  et varie en fonction de  $S$ .

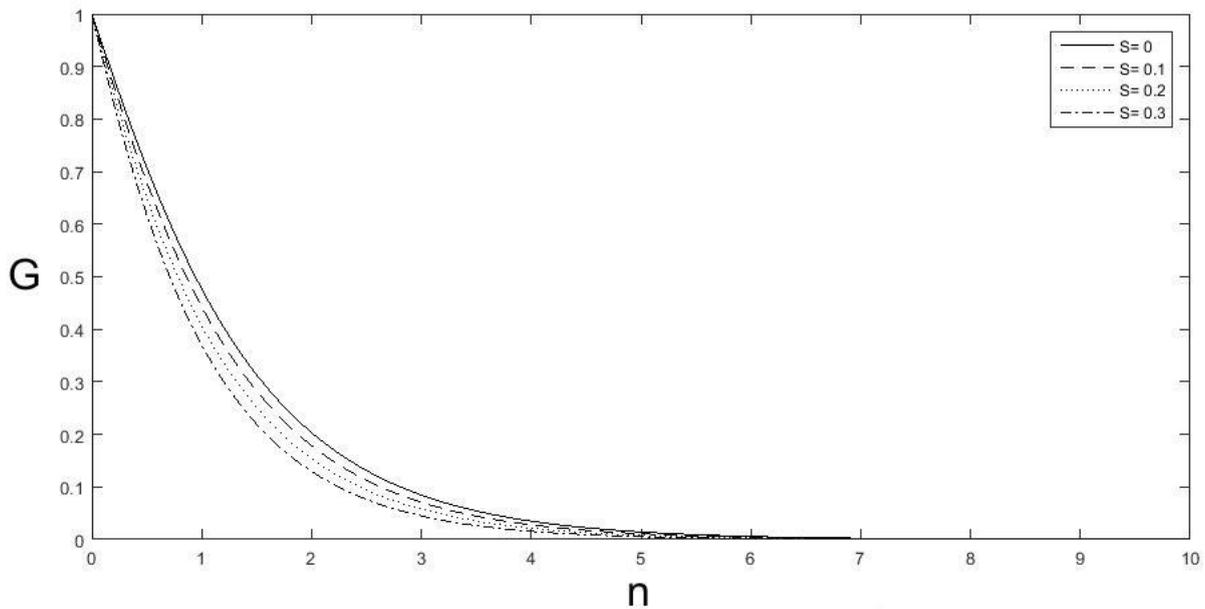
- L'évolution de profil de vitesse  $F'$  par effet de l'aspiration. Pour les valeurs  $S > 0$



**Figure IV.13 :** Effet de L'aspiration sur la vitesse radiale  $F'(\eta)$

La figure (IV.13) présente l'effet de l'injection sur la vitesse verticale  $F'$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  (0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3) pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ . On observe le profil et la couche limite du profil de vitesse radiale induit par les forces centrifuges diminue avec l'augmentation de l'aspiration, donc moins de débit refoulé radialement vers l'extérieur du disque.

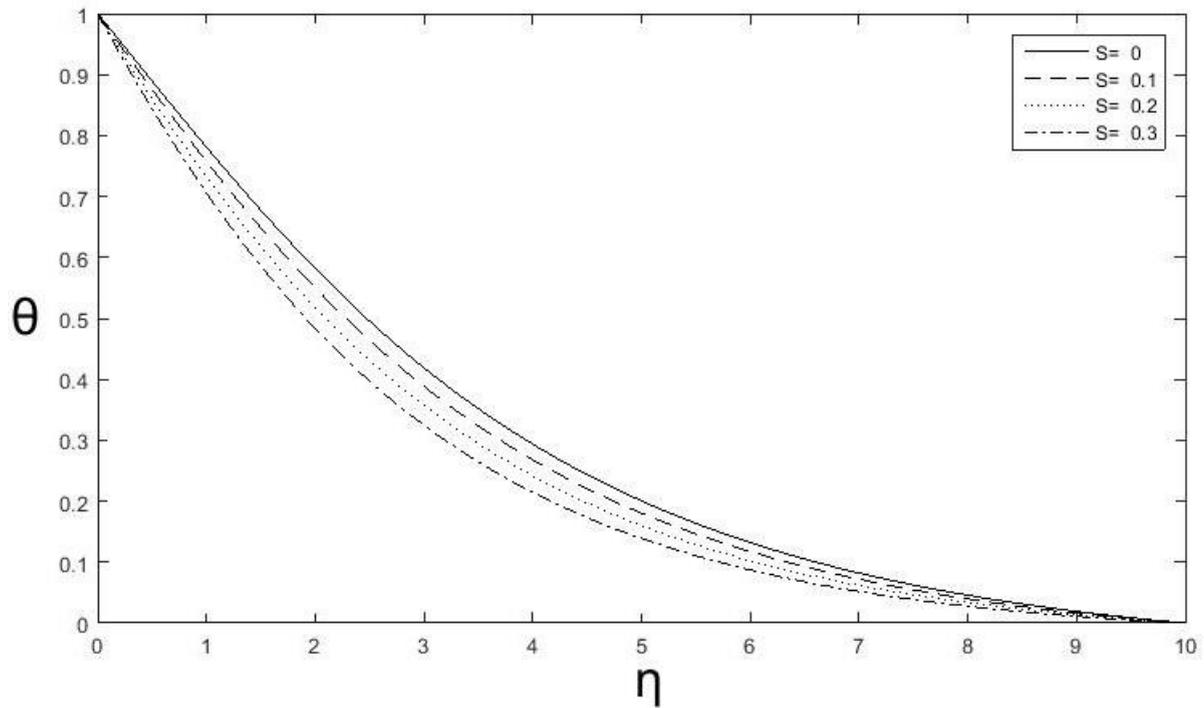
- L'évolution de profil de vitesse  $G$  par effet de l'aspiration. Pour les valeurs  $S > 0$



**Figure IV.14 :** Effet de l'aspiration sur la vitesse azimutale  $G(\eta)$

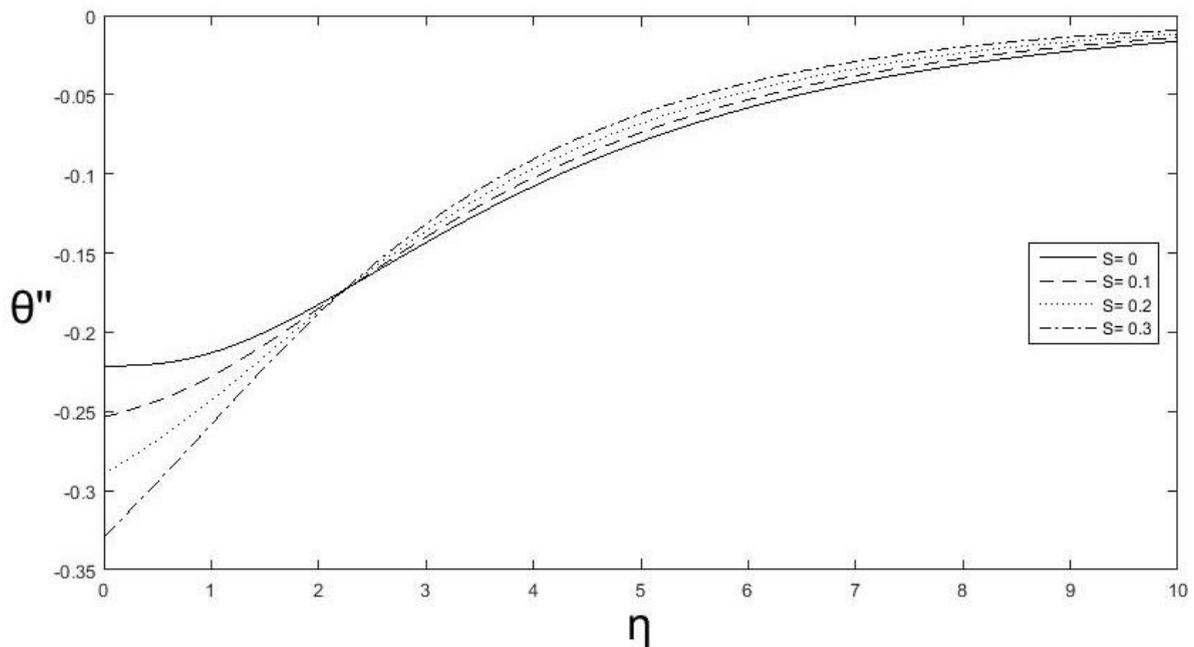
La figure (IV.14) présente l'effet de l'aspiration sur la vitesse azimutale  $G$  en fonction de  $(\eta)$ , pour diverses valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  (0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3) pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ . On observe le profil et la couche limite du profil de vitesse azimutale induit par les forces centrifuges diminue avec l'augmentation de l'aspiration ce qui prouve que le fluide s'échappe de la surface de mouvement du fluide vers l'extérieur à travers la surface du disque.

➤ L'évolution de profil de température  $\theta$  par effet de l'aspiration. Pour les valeurs  $S > 0$



**Figure IV.15:** Effet de l'aspiration sur le profil de température  $\theta(\eta)$

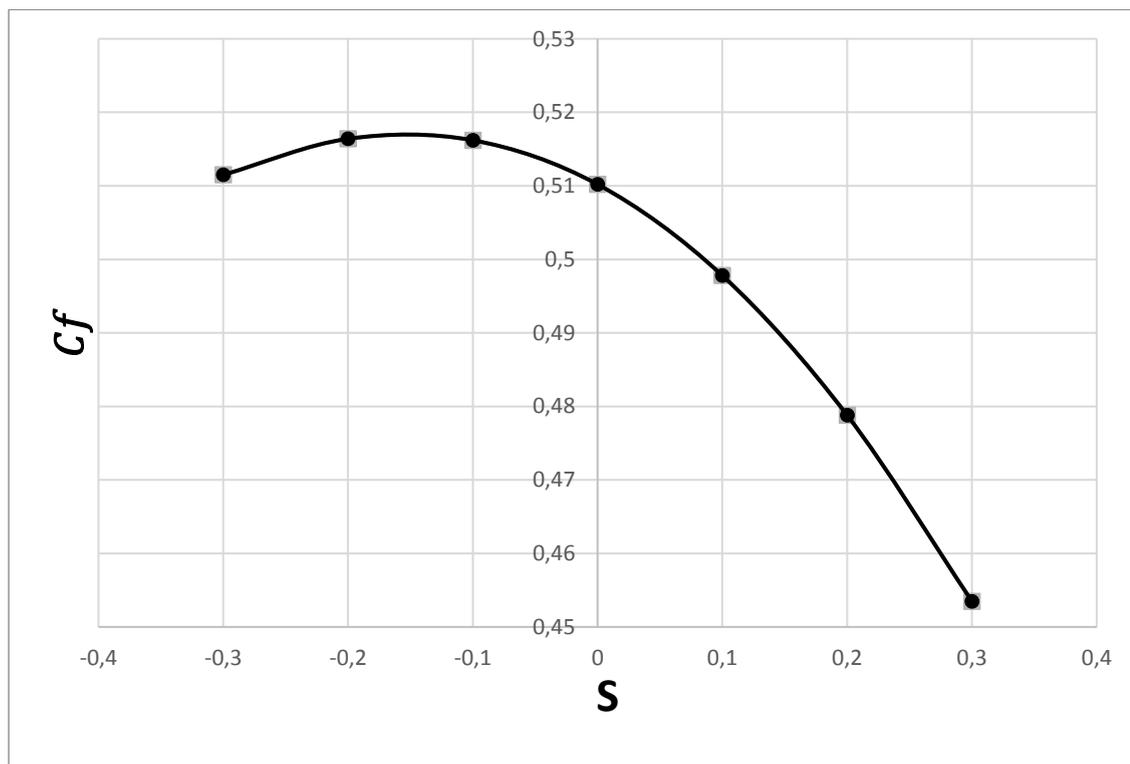
➤ L'évolution de gradient de température  $\theta''$  par effet de l'aspiration. Pour les valeurs  $S > 0$



**Figure IV.16:** Effet de l'aspiration sur le gradient de température  $\theta''(\eta)$

Les figures (IV.15 et IV.16) présente respectivement l'effet de l'aspiration sur le profil de température  $\theta$  et le gradient de température  $\theta''$  en fonction de  $(\eta)$ , pour divers valeurs de nombre du paramètre d'injection/aspiration  $S$  (0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3) pour un nombre de Prandtl  $Pr=0.72$ , On observe le profil de température diminue avec l'augmentation de l'aspiration et un effet contraire pour le gradient de température, ce qui prouve que l'aspiration à travers la surface de la paroi du disque avec le glissement donne lieu à une diminution de l'épaisseur de la couche thermique ce qui augmente le transfert de chaleur.

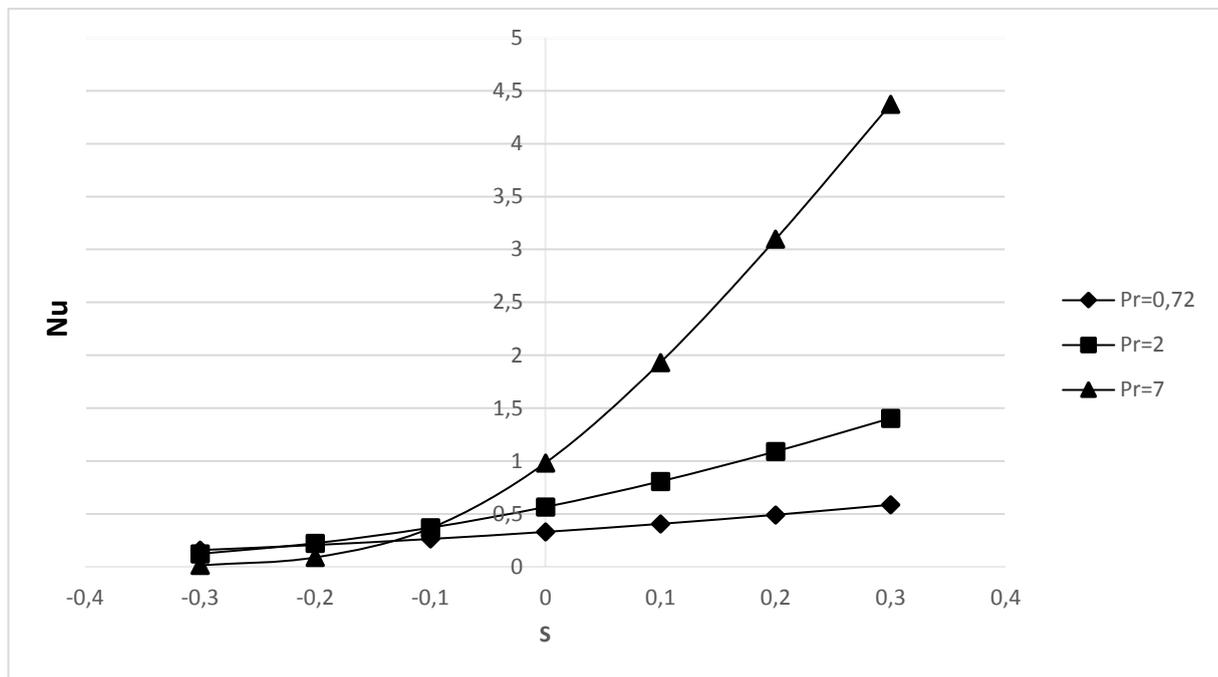
➤ L'effet de paramètre d'aspiration/injection  $S$  sur le coefficient de frottement  $C_f = F''(0)$



**Figure IV. 17 :** Le coefficient de frottement en fonction de  $S$  pour  $Pr=0.72$

La figure IV. 17 présente la variation du coefficient de frottement ( $C_f$ ) en fonction de ( $S$ ), pour nombre de Prandtl  $Pr=0.72$ , on remarque que le coefficient de frottement diminue avec l'effet de l'aspiration et augmente avec l'effet d'injection.

- L'effet de paramètre d'aspiration/injection  $S$  sur le nombre de Nusselt ( $Nu = -\theta'(0)$ ) pour différentes valeurs de  $Pr$



**Figure IV. 18 :** Le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction de  $S$  pour différentes valeurs de  $Pr$

La figure IV. 18 présente la variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction de ( $S$ ), pour diverses valeurs de nombre de Prandtl, on remarque que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de paramètre d'aspiration/injection ( $S$ ) et de  $Pr$ .

## IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les comportements d'une couche limite dynamique et thermique pour un écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé.

Les profils des vitesses et des températures sont tracés en fonction de ( $\eta$ ) pour étudier les effets de nombre de Prandtl ( $Pr$ ) sur le profil de température et du gradient de température et le paramètre d'aspiration/injection ( $S$ ) pour différents nombres, Les résultats obtenus à propos de cette étude sont analysés et discutés.

Il est vérifié que l'épaisseur d'une couche limite varie avec la variation des paramètres ( $Pr$ ), et ( $S$ ) et aussi que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de du nombre de ( $Pr$ ). Et varie en fonction du paramètre d'injection/aspiration ( $S$ )

---

# **Conclusion générale**

---

# Conclusion générale

Ce manuscrit résume un travail sur l'étude d'un écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé qui a pour objectif l'étude d'un écoulement tridimensionnel. La simulation numérique par le code de calcul MATLAB a été adoptée pour résoudre les équations d'écoulement d'un fluide. L'objectif principal de ce travail est d'analyser la structure dynamique et thermique du flux de couche limite qui se présente sur la surface plane de disque.

Ce travail nous a permis de tirer de riches renseignements sur le comportement d'un écoulement tridimensionnel et newtonien, on cite notre travail par étape :

Premièrement Cette étude a été réalisée suite à une recherche bibliographique actuelle existant sur les travaux similaires d'écoulement tourbillonnant traditionnel de Von Karman où la surface du disque en rotation admet un glissement partiel en présence d'une aspiration ou d'une injection uniforme.

Nous avons mis en avant les équations de quantité de mouvement et d'énergie liées à notre étude. Pour résoudre ce système d'équations partielles en le convertissant en système d'équations différentielles ordinaires présenté sous la forme d'un problème aux valeurs limites, puis le résoudre numériquement par la méthode de Runge – Kutta d'ordre quatre.

La simulation et la validation du code de calcul a été faite avec des travaux numériques trouvés dans la littérature. Un bon accord a été obtenu entre nos simulations avec les simulations numériques des autres ouvrages. Pour notre étude nous avons varié quelque paramètre qui le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), paramètre d'aspiration/injection ( $S$ ) dans un milieu opaque en premier lieu  $S=0$  pour étudier leurs effets sur les champs dynamiques (la vitesse  $F$  et  $F'$ ,  $F''$  et  $G$ ) et champs thermiques (la température ( $\theta$ )).

En premier abord on a tracé les différents graphes  $F$ ,  $F'$ ,  $G$ , et  $\theta$  avec comme paramètre  $S=0$  et

Deuxième lieu, nous avons examiné l'influence de la variation du nombre de Prandtl sur les caractéristiques dynamiques et thermiques, pour une gamme de valeurs ( $Pr = 0.7; 2; 7$ ), nous avons constaté que :

L'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl ( $Pr$ ).

La vitesse de l'écoulement diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl ( $Pr$ ). Dans la seconde étude.

---

Enfin, nous avons examiné l'influence de paramètre de d'aspiration/injection ( $S$ ) dans un milieu poreux sur les caractéristiques dynamiques et thermiques, pour une gamme de valeurs pour l'injection ( $S=-0.1,-0.2,-0.3$ ) et d'aspiration ( $S=0.1,0.2,0.3$ ), on constate que :

Lorsque l'injection est appliquée ( $S<0$ ), la vitesse radiale doit emporter non seulement le flux axial entrant, mais aussi le fluide injecté. Par conséquent, le niveau général des forces de poussé centrifuge de la vitesse radiale diminue avec une injection accrue.

Lorsque l'aspiration est appliquée ( $S>0$ ), la vitesse radiale doit emporter non seulement le flux axial entrant, mais aussi le fluide injecté. Par conséquent, le niveau général de la vitesse radiale est augmenté avec une injection accrue.

L'aspiration ou l'injection jouent un rôle important sur le contrôle de la couche limite.

L'aspiration ou l'injection d'un fluide à travers la surface englobante peut modifier considérablement le champ d'écoulement et, par conséquent, affecter le taux de transfert de chaleur de la plaque

La température diminue en raison de l'aspiration mais augmente en raison de l'injection. En cas d'aspiration

L'aspiration ou l'injection d'un fluide à travers la surface englobante peut modifier considérablement le champ d'écoulement et, par conséquent, affecter le taux de transfert de chaleur de la plaque

On voit que la vitesse du fluide ralentit en raison de l'aspiration alors qu'il accélère en raison d'injection (soufflage)

L'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation de l'aspiration

L'épaisseur de la couche limite dynamique augmente avec l'augmentation de l'injection.

L'évolution de nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et le coefficient de frottement ( $C_f$ ) avec divers paramètres ( $Pr$ ) en fonction du paramètre d'aspiration/injection ( $S$ ), il montre que :

Le coefficient de frottement diminue avec l'effet de l'aspiration et augmente avec l'effet d'injection.

Le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de paramètre d'aspiration/injection ( $S$ ) et de  $Pr$ .

---

# Références bibliographiques

---

---

# Références bibliographiques

[1] Von Kármán, T. Überlaminare und turbulente Reibung. Zeitschrift für Angew. Math. Mech ZAMM 1, 233–252(1921)

[2] Childs, P. R. N. 2011, Rotating Flow (Elsevier, Amsterdam).

[3] I. V. Shevchuk, (2009), Convective heat and mass transfer in rotating disk systems, Springer.

[4] H. Schlichting, 1979, Boundary-layer theory, McGraw-Hill Book Company.

[5] A. Bejan, A. Kraus, (2003), "Heat Transfer Handbook", TJ250. B35.

[6] T. Ismail, (2002), "Modelling in Transport Phenomena", Elsevier Science B.V.

[7] D. Vanpouille, (2013), "développement de modèles de turbulence adaptés à la simulation des écoulements de convection naturelle à haut nombre de Rayleigh.", Thèse de doctorat, ISAE, Toulouse.

[8] F. Incropera, D. Dewitt, T. Bergman, A. Lavine. (2007), "Fundamentals of Heat and Mass Transfer". New York : Wiley, 6<sup>e</sup> édition.

[9] Cours génie des procédés Master 2, Ph. Marty 2012-13 Université Joseph Fourier, Grenoble.

[10] Cochran, W.G. (1934), The Flow Due to a Rotating Disk. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 30, 365-375.

[11] E. R. Benton, 1966, on the flow due to a rotating disk, J. Fluid Mech., 24(4), pp. 781–800.

[12] K. Millsaps, K. Pohlhausen, 1952, Heat transfer by laminar flow from a rotating disk, *J. Aeronaut. Sci.*, 19, pp. 120–126.

---

[13] E. M. Sparrow, J. L. Gregg, Nov 1960, Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk, ASME J. Heat Transfer, pp. 294-302.

[14] Chunying Ming, Liancun Zheng, Xinxin Zhang, Mars 2011, Flux constant et transfert de chaleur du fluide de loi de puissance sur un disque en rotation, communications internationales en transfert de chaleur et de masse, Volume 38, Numéro 3, Pages 280-284.

[15] Eugen Magyari Patrick Weidman, 2021, sur l'écoulement induit par un disque tournant et s'étirant radialement, European Journal of Mechanics - B/Fluids, pages 216-222.

[16] Lingwood, R. J. (1996) An experimental study of absolute instability of the rotating-disk boundary-layer flow. J. Fluid Mech. 314, 373-405.

[17] Imayama, S., Alfredsson, P. H. & Lingwood, R. J. 2012 A new way to describe the transition characteristics of a rotating-disk boundary-layer flow. Phys. Fluids 24, 031701.

[18] Shintaro Imayama 2014, Studies of the rotating-disk boundary-layer flow Linn's flow Centre, KTH Mechanics, Royal Institute of Technology SE-100 44 Stockholm, Sweden.

[19] M. Heydaria, n, G. B. Loghmania, M. M. Rashidib, S. M. Hosseini, 2015, A numerical study for off-centered stagnation flow towards a rotating disc, Propulsion and Power Research; 4(3):169-178.

[20] N. A. Khan, n, S. Khan, A. Ara, 2017, Flow of micro polar fluid over an off centered rotating disk with modified Darcy's law, Propulsion and Power Research; 6(4):285-295.

[21] M. Gholinia, Kh. Hosseinzadeh, H. Mehrzadi, D. D. Ganji, A. A. Ranjbar, (2019), Investigation of MHD Eyring-Powell fluid flow over a rotating disk under effect of homogeneous-heterogeneous reactions, Case Studies in Thermal Engineering 13, 100356.

[22] Deog-Hee Doh, Gyeong-Rae Cho, E. Ramya, M. Muthtamilselvan, Cattaneo-Christov (2019), heat flux model for inclined MHD micro polar fluid flow past a non-linearly stretchable rotating disk. Case Studies in Thermal Engineering 14, 100496.

---

[23] Usman, Waqar Khan, Irfan Anjum Badruddin, Abuzar Ghaffari, Hafiz Muhammad Ali, (2021), Heat transfer in steady slip flow of tangent hyperbolic fluid over the lubricated surface of a stretchable rotatory disk. *Case Studies in Thermal Engineering* 24, 100825.

[24] Hassan Waqas, Umar Farooq, Rabia Naseem , Sajjad Hussain, Metib Alghamdi, (2021), Impact of MHD radiative flow of hybrid nanofluid over a rotating disk, *Case Studies in Thermal Engineering* 26, 101015.

[25] Arsalan Aziz, Ahmed Alsaedi, Taseer Muhammad, Tasawar Hayat, (2018), Numerical study for heat generation/absorption in flow of nanofluid by a rotating disk, *Results in Physics* 8, 785–792.

[26] M. Mustafa, 2017, Écoulement de nano fluide MHD sur un disque en rotation avec effets de glissement partiel : modèle de Buongiorno, *journal international du transfert de chaleur et de masse*, Pages 1910-1916.

[27] Huda Mohammed Alotaibi, Mouhammad El Hassan, Hassan Hasan Assoum, Kamel Abed Meraim, Anas Sakout, September 2020, A review paper on heat transfer and flow dynamics in subsonic circular jets impinging on rotating disk, 2020 7th International Conference on Power and Energy Systems Engineering (CPESE 2020), 26–29, Fukuoka, Japan, *Energy Reports* 6 (2020) 834–842.

[28] J.A.D. Ackroyd, (1978), On the steady flow produced by a rotating disc with either surface suction or injection, *J. Eng. Math.* 12, 207e220.

[29] N. Kelson, A. Desseaux, (2000), Note on porous rotating disk flow, *Anziam J.* 42 (E) C837eC855.

---

## Résumé

### Etude d'un écoulement induit par la rotation d'un disque chauffé

Ce mémoire est une extension du problème d'écoulement tourbillonnant traditionnel de Von Karman où la surface du disque en rotation admet un glissement partiel en présence d'une aspiration ou d'une injection uniforme. En utilisant Les transformations de similarité de Karman, les équations aux dérivées partielles régissant le mouvement de la chaleur et de l'écoulement sont transformées en un système d'équations différentielles ordinaires qui sont ensuite traitées numériquement via simulation numérique par la méthode Runge-Kutta. L'existence de résultats numériques sont vérifiés par une analyse théorique et discutée.

**Mots clés : Flux de Von Karman, Disque tournant, Aspiration/injection, Glissement partiel, Transfert de chaleur.**

---

## Abstract

### Study of a flow induced by the rotation of a heated disc

The present paper is an extension of the traditional Von Karman swirling flow problem where the rotating disk surface admits partial slip in the presence of a uniform suction or injection. Using the Karman similarity transformations, the partial differential equations governing the heat and flow motion are transformed into a system of ordinary differential equations, which are then treated numerically with a numerical resolution. The existence of numerical results are verified through a theoretical analysis and discussed.

**Keywords: Von Karman flow, Rotating disk, Suction/injection, Partial slip, Heat transfer.**

---