

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA de Bejaia



Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique



*Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement
(LRHAE)*

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté par :

DABO Bamba

En vue de l'obtention du diplôme de **MASTER en Hydraulique**

Option : Aménagement et Ouvrages Hydrauliques.

Intitulé

***Modélisation numérique de l'interaction
fluide-structure dans les réservoirs de
stockage de liquides.***

Soutenu le 10 / 10 / 2021 devant le jury composé de :

Président : H. BENDADOUCHE

Examineurs(s) : T. IKNI

Promoteur(s) : A. SEGHIR

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

J'aimerais remercier mon promoteur Mr. A. Seghir pour m'avoir donné la chance de travailler et de produire un tel mémoire passionnant en ses temps durs.

Et à ma famille pour leurs soutiens et leurs confiances.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à mes parents.

DABO Bamba.

Résumé :

L'objet du présent travail est la modélisation numérique de la réponse dynamique des réservoirs de stockage de liquides. A cet effet, un modèle basé sur la méthode des éléments finis intégrant l'interaction fluide-structure et le ballottement du liquide a été mis en place. Après validation, ce modèle a permis de mener avec succès des études paramétriques sur les réponses fréquentielle et temporelle du système couplé. Les résultats obtenus ont été présentés et discutés en terme de surélévations de la surface libre du liquide stocké et des déplacements des parois du réservoir.

Mots clés : Modélisation numérique, Réservoir, Intéraction fluide-structure, Ballottement, Réponse fréquentielle, Réponse temporelle.

Abstract :

The present work deals with the numerical modeling of the dynamic response of liquid storage tanks. A model based on the finite element method integrating the fluid-structure interaction and the liquid sloshing was developed. After validation, of the model was used to successfully conduct the parametric studies on the frequency and time history responses of the coupled system. The obtained results were presented and discussed of terms of free surface fluctuations of the stored liquid and the displacements of the tank walls.

Keywords : Numerical modelisation, Tank, Fluid structure interaction, Sloshing, Frequency response, Time history response.

ملخص

يتطرق هاذ العمل إلى النمذجة العددية للاستجابة الديناميكية لخزانات السوائل. تم تطوير نموذج يعتمد على طريقة العناصر المنتهية يسمح بتدميج تفاعل هيكل-مائع تأرجحات السائل المخزن. بعد التحقق من فاعلية النموذج، تم استعماله لإجراء دراسات وسيطية بنجاح على الاستجابات الترددية والزمنية للجملة المقترنة خزان-سائل. تم عرض ومناقشة النتائج المتحصل عليها باعتبار تموجات السطح الحر للسائل وتذبذبات جدران الخزان.

كلمة مفتاحية: النمذجة العددية ، خزان، تفاعل هيكل-مائع، تأرجحات، الاستجابات الترددية، الاستجابات الزمنية.

Table des matières

Liste des figures	iv
Liste des tableaux	v
Liste des symboles utilisés	vi
Introduction générale	1
1 Généralités	2
1.1 Introduction	2
1.1.1 Réservoir	2
1.1.2 Ballottement	3
1.1.3 Intéraction fluide-structure IFS	4
1.2 Etudes et approches sur le phénomène du ballottement	5
1.2.1 Approche analytique	5
1.2.2 Approche numérique	10
1.2.3 Approche expérimentale	12
1.3 Conclusion	13
2 Modélisation numérique	14
2.1 Introduction	14
2.2 Modélisation Mathématique	14
2.2.1 Modélisation mathématique du fluide	14
2.2.2 Modélisation mathématique de la paroi	17
2.3 Modélisation en Eléments Finis	19

2.3.1	Formulation intégrale	19
2.3.2	Discrétisation en Eléments Finis	21
2.4	Réponse fréquentielle	23
2.5	Réponse temporelle	25
2.5.1	Méthode BDF	25
2.5.2	Méthode d'Alpha Généralisée	27
2.6	Conclusion	28
3	Système Algébrique - Expression des matrices élémentaires	29
3.1	Introduction	29
3.2	Calcul des matrices du fluide	29
3.2.1	Calcul de la Matrice "Masse fluide" G_e	29
3.2.2	Matrice du Laplacien L_e	31
3.2.3	Matrice d'interaction Q_e	37
3.3	Calcul des matrices de la structure	41
3.3.1	Matrice masse M_e	41
3.3.2	Matrice de rigidite K_e	42
3.3.3	Vecteur force F_e	44
4	Applications numériques	45
4.1	Introduction	45
4.2	Présentation des logiciels	45
4.3	Présentation du cas étudié	46
4.4	Cas d'un réservoir à parois rigides	46
4.4.1	Etude de la réponse fréquentielle	47
4.4.2	Etude de la réponse temporelle	49
4.5	Cas d'un réservoir à parois flexibles	54
4.5.1	Etude de la réponse fréquentielle	54
4.5.2	Etude de la réponse temporelle	58
4.5.3	Etude de la réponse fréquentielle pour les déplacements de la paroi	61
4.6	Conclusion	63

Conclusion générale	64
Bibliographie	66

Table des figures

2.1	Schéma du réservoir avec les notations utilisée pour les domaines et frontières	15
2.2	Schéma d'une paroi et de sa déformation avec les notations	17
2.3	Equilibre Statique	18
4.1	Dimension du réservoir	46
4.2	La réponse fréquentielle avec une taille d'éléments de 0.5m	48
4.3	La réponse fréquentielle avec une taille d'éléments de 0.1m	49
4.4	La réponse temporelle avec un pas de calcul de type BDF Euler et avec différentes tolérances	51
4.5	La réponse temporelle avec un pas de calcul de type Alpha Généralisé et avec différentes tolérances	51
4.6	La réponse temporelle avec un pas de calcul de type Alpha Généralisé et une tolérance de 10^{-4}	52
4.7	Visualisation de deux périodes de battements	53
4.8	La réponse fréquentielle pour des parois flexibles d'épaisseur 30cm	56
4.9	La réponse fréquentielle pour des parois flexibles d'épaisseur 15cm	56
4.10	La réponse fréquentielle pour des parois flexibles d'épaisseur 60cm	57
4.11	La réponse temporelle pour des parois flexibles d'épaisseur 30cm	59
4.12	La réponse temporelle pour des parois flexibles d'épaisseur 60cm	60
4.13	Les formes de la surfaces libre sur les parois pour une épaisseur de 60cm .	60
4.14	La réponse fréquentielle sur les déplacements des parois flexibles à différentes taux de remplissage d'eau	62
4.15	Les déplacements des parois pour une épaisseur de 60cm	62

Liste des tableaux

4.1	Paramètres utilisés pour le calcul de la réponse temporelle cas parois rigide	50
4.2	Les variables pour le calcul de la réponse temporelle cas parois rigide . . .	50
4.3	Paramètres utilisés pour le calcul de la réponse temporelle cas parois flexible	58
4.4	Les variables pour le calcul de la réponse temporelle cas parois flexible . .	58

Liste des symboles utilisés

Notations

∇	Opérateur gradient
Δ	Opérateur laplacien
O, x, y	Coordonnées cartésiennes
ν	Viscosité dynamique (m/s^2)
ρ	Masse volumique du fluide (kg/m^3)
p	Pression (P)
V	Vitesse (m/s)
g	Accélération de la pesanteur (m/s^2)
t	Temps (s)
H	Hauteur de la structure (m)
h	Hauteur du fluide (m)
ℓ	Largeur du fluide (m)
η	Élévation de la surface libre par rapport à la position d'équilibre (m)
u	Composante de la vitesse horizontale (m/s)
U	Déplacement (m)
θ	Rotation (rad/s)
ϵ	Déformation
σ	Contrainte
E	Module d'élasticité
M	Moment de flexion
I	Moment d'inertie
A	Surface (m^2)
T	Effort tranchant

Introduction Générale

Les réservoirs de stockage de fluide sont des structures qui sont souvent soumises à des excitations dynamiques extérieurs, comme un séisme, transport (accélération ou freinage brusque)... L'étude de leurs comportements lors de ses excitations sont d'une importance fondamentale dans l'ingénierie, pour mieux prévenir leurs effondrements et le déversement de leurs contenus ; Cela peut provoquer des catastrophes économiques et humaines sévères. Le phénomène qui se produit est dit " Ballotement " c'est l'oscillation (mouvement) de la surface libre du fluide à l'intérieur des réservoirs.

L'objectif principale de la présente étude, est de mettre en œuvre un modèle numérique de couplage fluide-structure simplifié pour la simulation des fluctuations de la surface libre et les déformations des parois du réservoir. En s'appuyant sur des programmes (codes) d'éléments finis existants auxquels on va apporter des modifications et une attribution pour les appliquer aux cas du réservoir.

Le 1^{er} Chapitre, est une recherche bibliographique sur les diverses études mené sur le phénomène de ballotement et les approches adoptée pour traiter le sujet.

Le 2^{ème} Chapitre, est consacré à la formulation mathématique et numérique en éléments finis du comportement dynamique du système couplé réservoir-liquide, une modélisation d'une équation simple du phénomène.

Le 3^{ème} Chapitre, on retrouve en détails les expressions, des matrices élémentaires utilisées pour la programmation d'un code numérique.

Le 4^{ème} Chapitre, est consacré aux applications numériques sur différents logiciels pour le calcul numérique du phénomène de ballotement et des déformations des parois.

Au final, on clôture le manuscrit par une conclusion générale.

Généralités

1.1 Introduction

Les réservoirs ont toujours été des structures de stockages très importants aux fils des années, l'étude de leurs réponse face à des excitations dynamiques a toujours été d'actualité. Dans ce 1^{er} Chapitre, on retrouve un recueil sur les différentes études et méthodes present pour la description du phénomène de ballottement engendré dans les réservoirs de stockage.

1.1.1 Réservoir

Les réservoirs sont des structures de stockage et de confinement de différent produit industriel dans différent domaine telle que le stockage de produit chimique, produit pétrolière, eau potable pour la distribution et l'approvisionnement, ils sont construits afin de répondre à l'offre et la demande, d'où l'importance de la disponibilité et de la fiabilité de ses dites structures, ils sont des composants vitaux des installations de ligne de vie et d'induction. Selon leurs utilisations, la protection de ces réservoirs contre les effets d'excitations dynamiques représente un défi pour l'ingénieur concepteur, car elles doivent être maintenues en opération pendant et après . Cette protection s'avère d'une importance capitale pour l'économie. Un grand intérêt est réservé à cette étude pour prémunir contre tous risque de rupture, car la défaillance d'un réservoir à des conséquences désastreuses, si l'approvisionnement en eau est coupé, des incendies se propagerai de manière incontrôlable, et le renversement des produits chimiques toxiques présente des risques d'incendie, d'explosion et de pollution. Donc la destruction des réservoirs de stockage et le déversement de leurs contenue pourraient engendrer des pertes humaines innombrable et économiques majeur. Il existe de nombreux types de réservoirs de stockage en fonction de la structure, du matériau de construction, du contenu, du volume et des conditions de stockage. Les réservoirs de stockage de liquides peuvent être construits en acier ou en béton. En raison des dommages extrêmes sur le réservoir en acier, les réservoirs de stockage en béton sont généralement utilisés de nos jours. Le béton armé a été utilisé dans les structures d'in-

génierie environnementale telles que les réservoirs d'eau et les réservoirs de traitement des eaux usées. Les réservoirs d'eau sont aujourd'hui énormément utilisés pour diverses applications (stockage d'eau potable, agriculture et élevage, suppression des incendie... etc).

1.1.2 Ballottement

Les excitations dynamiques causes des vibrations sur les réservoirs, le fluide à l'intérieur a tendance à osciller, causant des oscillations qui se propagent à la surface du fluide, ce phénomène s'appelle ballottement. Le ballottement peut être défini comme tout mouvement de la surface libre du liquide à l'intérieur d'un autre objet. Ce mouvement peut être causé par une perturbation des récipients de liquide partiellement remplis. Le comportement de balancement des liquides dans les conteneurs représente donc l'une des interactions entre le fluide et la structure les plus fondamentales. Le mouvement du liquide ayant une surface libre est important dans divers disciplines d'ingénierie telles que l'oscillation des combustibles dans les réservoirs des fusées spatiaux, des cargaisons dans les navires et les camions transportant du liquide (par exemple le pétrole et l'essence, l'oscillation de l'eau dans les réservoirs dû à un tremblement de terre. Le comportement dynamique d'une surface libre du liquide dépend du type d'excitation et de sa fréquence, de la forme du récipient, du mouvement du liquide. L'excitation dans les réservoirs peut être périodique, impulsive, sinusoïdale ou aléatoire. Il peut créer des effets latéraux, plans, non planaires, rotatifs, irréguliers, paramétriques, symétriques ou asymétriques. En excitation harmonique latérale, la surface du liquide présente une non-linéarité de deux types. Le premier est une réponse de grande amplitude et le second implique différentes formes de comportement liquide produits par le couplage ou les instabilités de divers modes de ballottement.

Le ballottement du liquide et le mouvement de la surface libre sont un problème courant affectant non seulement la dynamique de l'écoulement à l'intérieur du conteneur, mais également le conteneur lui-même. Les conteneurs transportant les liquides, les réservoirs utilisés pour stocker les liquides doivent résister à la dynamique complexe du système de transport, aux différents mouvements du sol qu'ils servent. Ce mouvement inévitable du récipient et les forces associées au liquide à l'intérieur de celui-ci se traduisent par un mouvement principalement violent et désordonné de l'interface liquide / gaz (principalement air ou vapeur) ou de la surface libre. L'application du ballottement peut être trouver dans divers industrie ainsi que dans des circonstances de la vie réelle.

Le problème du ballottement de liquide dans des conteneurs mobiles ou stationnaires est une grande préoccupation pour les ingénieurs aérospatiaux, les physiciens, les mathéma-

ticiens, dans divers domaines tel que les nucléaires et civils, les concepteurs des camions citernes et les navires citernes. Le ballottage dans les réservoirs, les grands barrages, les châteaux d'eau surélevés est une grande préoccupation lors du mouvement du sol induit par un tremblement de terre.

Le ballottage de liquide peut entraîner d'énormes pertes en vies humaines, en ressources économiques et environnementales en raison d'une défaillance imprévue du réservoir. Le déversement de mélanges toxiques stockés dans les industries de réservoirs peut être la cause de la contamination du sol et peut créer des effets néfastes sur l'environnement. Ainsi, la compréhension du comportement dynamique de la surface libre liquide est essentielle. Pour cette raison, de nombreux ingénieurs et chercheurs tentent de comprendre le comportement complexe du ballottage et de trouver les moyens de réduire son impact sur les structures et d'essayer de développer des structures pour résister à son effet.

L'observation du phénomène de ballottage par des études expérimentales a été indispensable au développement des équations mathématiques le représentant. En effet, la décomposition des phénomènes observables en systèmes analytiques a permis de poser les bases de la mécanique des fluides ainsi que l'obtention des premières données quantitatives. Grâce à l'émergence du numérique, ces équations ont été transformées en systèmes algébriques résolubles par ordinateur permettant d'obtenir une description plus précise d'un écoulement fluide. L'essor de la puissance de calcul repousse aujourd'hui les limites en terme de précision, rendant la représentation toujours plus proche de la réalité. Cependant, la complexité de l'étude du ballottage ne permet pas de s'affranchir complètement d'essais expérimentaux.

1.1.3 Intéraction fluide-structure IFS

La réponse dynamique des réservoirs contenant des liquides est intimement associée à l'interaction fluide-structure (IFS). L'IFS est le comportement d'un système couplé de deux entités, une structure mobile (rigide ou déformable) et un fluide (en écoulements ou au repos), à l'intérieur de la structure, l'évolution de chaque une des entités qui dépendent l'une de l'autre font apparaître un phénomène de couplage qui, plus précisément, est le mouvement de la structure qui influence l'écoulement du fluide par les déplacements de l'interface qui entraîne le fluide dans son mouvement. De nombreux problèmes liés à l'ingénierie concernent les structures de stockage de fluide, car le fluide influence sur la déformation de la structure, et la structure sur le mouvement du fluide, on parle ici d'un système couple, ce problème est appelé IFS, et ce problème dynamique d'IFS est d'une importance majeure dans plusieurs domaines d'applications d'ingénierie (génie civil,

industrie pétrolière et aérospatiale, installation nucléaires...etc.)

1.2 Etudes et approches sur le phénomène du ballottement

La dynamique des fluides est définie par les équations de conservation et de transport reposant sur 3 principes fondamentaux :

- Equation de continuité découlant du principe de conservation de la masse.
- Equations de Navier-Stokes issues de la seconde loi de Newton.
- Equation d'énergie provenant du premier principe de la thermodynamique.

L'étude analytique des équations de Navier-Stokes est très complexe du fait de leurs non linéarité. Une simplification du problème est nécessaire par l'application de la théorie potentielle et en considérant la surface libre comme une frontière du domaine sur laquelle des conditions de surface libre sont imposées.

L'étude du phénomène de ballottement peut être décomposée en deux parties :

- Une première approche appelée "théorie du ballottement linéaire" concerne les ballottements de faible amplitude et admet de nombreuses restrictions dont la faible déformation de la surface libre ainsi que l'absence de discontinuité.
- Une seconde approche concerne les ballottements de large amplitude, autrement dit ayant une excitation proche de la fréquence propre de ballottement. Cette approche, difficilement résoluble analytiquement avec précision, est généralement simulée par des méthodes numériques résolvant les équations de Navier-Stokes.

1.2.1 Approche analytique

Les premières études ont été faite par Poisson S. (1831) [38] suivis de Rayleigh L. (1876) [39] qui a initialement étudié les mouvements de la surface libre en examinant le mouvement d'un liquide dans les réservoirs cylindriques et rectangulaires rigides de profondeur uniforme, avec des conditions aux limites linéarisées. Les premières solutions au problème de la réponse de la pression dynamique du fluide pendant un tremblement de terre sont faites par Westergaard H.M. en (1933) [55], qui a déterminé la pression dans un réservoir rectangulaire sujet à une excitation horizontale. Jacobsen L.S. (1949) [22] résout le problème correspondant à un réservoir cylindrique contenant du fluide et pour un pilier

cylindrique entouré de fluide. Werner P.W. & Sundquist K. (1949) [54] continue sur le travail de Jacobsen et continue l'étude sur les réservoir d'eau rectangulaire. Graham E.W. & Rodriguez M. (1952) [13] donne une analyse très complète de la pression impulsive et convective dans un réservoir rectangulaire. Hoskins L.M. & Jacobsen L.S. (1934) [20] mesure la pression impulsive du fluide et Jacobsen L.S. & Ayre R.S. (1950) [3] donne les résultats d'une mesure similaire. Housner G.W. entre 1957 et 1963 [21], propose une méthode analytique simplifiée de la réponse du fluide dans un réservoir rectangulaire ou cylindrique rigide.

Avant les années 1960, les études ne se focalisaient uniquement sur le comportement dynamique du fluide, la flexibilité des réservoirs était négligée dans les évaluations de la réponse sismique. Les dégâts engendrés par les séismes en Chili (1960), Alaska & Niigata (1964), Parkfield (1966) et Imperial County (1979) ont poussé les chercheurs à s'intéresser aux réponses vibratoires des réservoirs.

Kana D.D., Chu W. H. & Abramson H.N. (1966) [1] s'intéressèrent à la recherche des ballottements pour les réservoirs flexibles, rapportant des expérimentations pour déterminer la réponse d'un réservoir cylindrique flexible, les expérimentations ont révélé une non-linéarité dans la déformation de la paroi de la coque élastique contenant un liquide avec une surface libre. Moiseev N. & Petrov A. (1968) [32] apportent la théorie des perturbations qui s'avère être très efficace pour la plupart des applications linéaires, et rappelle que les cas linéaires font appel au numérique. Les cas non linéaires n'étaient pas traités car les méthodes et les outils numériques n'étaient pas assez développés, mais depuis le progrès des calculateurs de grande puissance, il a été permis aux chercheurs de faire un grand progrès dans le traitement des problèmes de ballottement.

Avec l'avancement de la technologie et la révolution informatique, les méthodes numériques ont été grandement développées afin de mieux traiter le problème de ballottement avec précision. Des expérimentations à l'aide de l'informatique a permis au développement des premières méthodes numériques assistées par ordinateur.

La première utilisation d'un ordinateur numérique pour analyser ce problème a été achevée en 1969 par Edwards N.W. [36]. La méthode des éléments finis a été utilisée avec une théorie de coque raffinée pour prédire les contraintes et les déplacements sismiques dans un récipient cylindrique circulaire rempli de liquide dont le rapport hauteur / diamètre était inférieur à 1. Cette enquête a traité de l'interaction couplée entre la paroi élastique du réservoir et le liquide contenu. Le réservoir était considéré comme ancré à sa fondation et retenu contre les distorsions de la section transversale. Shaaban S. & Nash W. (1975) [44] ont entrepris des recherches sur la réponse sismique de réservoirs cylindriques élas-

tiques circulaires vides en utilisant la méthode des éléments finis.

Une approche différente de la solution du problème des conteneurs flexibles a été proposée par Veletsos A.S. (1974) [48]. Il a présenté une procédure simple pour évaluer les forces hydrodynamiques induites dans les réservoirs flexibles remplis de liquide. Il a conclu que les effets sismiques dans les réservoirs flexibles peuvent être considérablement plus importants que ceux induits dans les réservoirs rigides à excitation similaire. Plus tard, Veletsos A.S. & Yang J.Y. (1976) [51] ont présenté des formules simplifiées pour obtenir les fréquences naturelles fondamentales des structures remplies de liquide par la méthode énergétique de Rayleigh Ritz. Epstein H.I. (1976) [10] a utilisé le modèle de Housner pour produire des abaques pour calculer le moment de renversement dû aux pressions hydrodynamiques dans les réservoirs de stockage rectangulaires et cylindriques. Haroun M.A. et Housner G.W. (1981) [18] ont présenté une méthode pour analyser la réponse sismique des réservoirs de stockage de liquide cylindriques déformables. La méthode est basée sur la superposition des modes de vibration latéraux libres obtenus par une approche par éléments finis et une technique de solution aux limites. L'étude a également montré que la déformabilité de la paroi du réservoir peut entraîner des pressions hydrodynamiques plusieurs fois supérieures à celles rencontrées dans les réservoirs rigides.

Haroun M.A. (1984) [14] a présenté une méthode analytique détaillée pour les réservoirs rectangulaires. Dans son travail, les pressions hydrodynamiques ont été calculées en utilisant une approche classique des écoulements à potentiel de vitesse en supposant que les parois se comportent comme des plaques élastiques. Les expressions analytiques pour le calcul des moments internes sont présentées et les valeurs numériques des coefficients de moment sont tabulées pour être utilisées dans l'analyse et le calcul sismique des parois des réservoirs.

Veletsos A.S. et Tang Y. (1986) [49] ont analysé des réservoirs soumis à un mouvement vertical du sol posé sur des supports rigides et souples. Il a été conclu que l'interaction sol-structure pourrait réduire les effets hydrodynamiques. D'autre part, la conséquence d'une telle interaction peut être approchée par un changement de la fréquence naturelle fondamentale du système réservoir-liquide et par une augmentation de l'amortissement. À partir des années 80, un travail important sur la triple interaction fluide-structure-sol a été réalisé, on peut notamment citer les travaux de : Haroun M.A. et Ellaithy H.M. (1985) [17], Haroun M.A. et Abdel-Hafiz W. (1986) [15], Veletsos A.S., Tang Y. & Tang H. T. (1992) [50], Haroun M.A. & Abou-Izzeddine W. (1992) [16]. La recherche dans ce domaine est encore active de nos jours, Livaoglu R. (2008) [28], Kianoush M.R. & Ghaemmaghami A.R. (2011) [25]. Il a été démontré selon certaines de ces sources que la prise en compte de l'interaction avec le sol pouvait réduire de manière significative la composante impul-

sive de la pression, en revanche, il semblerait qu'il n'y ait pas d'effet sur la composante convective.

Park J.H., Koh H.M. & Kim J. (1992) [37] ont entrepris des travaux de recherche sur la réponse dynamique des réservoirs rectangulaires. Ils ont utilisé la méthode des éléments frontières pour calculer les pressions hydrodynamiques et la méthode des éléments finis pour analyser la paroi solide. Les effets impulsifs et convectifs ont été considérés. Les résultats numériques indiquent que la flexibilité des structures peut amplifier la pression hydrodynamique de manière significative et exciter les modes de ballotement élevés. Chen W., Haroun M.A. & Liu F. (1996) [7] se sont intéressés au problème non linéaire du ballotement dans les réservoirs rectangulaires sollicités par des forces sismiques. Le problème a été résolu à l'aide de la méthode des différences finies. Kim J.K., Koh H.M. & Kwahk I.J. (1996) [26] ont développé des solutions analytiques pouvant être utilisées pour la détermination de la réponse des réservoirs sous l'action d'accélérogrammes horizontaux et verticaux. Ils ont étudié le comportement dynamique d'un réservoir rectangulaire flexible en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz, en ignorant les effets de ballotement et en considérant uniquement les parois perpendiculaires à la direction du mouvement du sol. Des réponses dynamiques bi et tri dimensionnelles ont été calculées à l'aide des méthodes préposées dans le domaine temporel. L'influence de la flexibilité des parois sur le ballotement a été aussi étudiée.

Des études sur l'effet de l'isolation sismique de la base des réservoirs posés sur le sol ont été initiées par Malhotra P.K (1997a, 1997b) [29] qui a proposé un modèle simplifié pour modéliser l'isolation sismique d'un réservoir cylindrique, les résultats obtenus ont montré que l'isolation peut réduire de façon significative les efforts tranchants à la base, les moments de renversements et les contraintes axiales de compression dans la paroi du réservoir sans augmenter de manière significative les déplacements verticaux de la surface libre du liquide en raison de ballotement. Des études similaires ultérieures sur l'isolation sismique des réservoirs sont toujours en cours telles celles de Wang Y.P., Teng M.C. & Chung K.W. (2001) [53]. Shrimali M.K. & Jangid R.S. (2002) [45]. Seleemah A.A. & El-Sharkawy M. (2011) [43]. Mermer A. S., Mustafa K. & Arslan A. (2012) [31].

Koh H.M., Ki, J.K. & Park J.H. (1998) [27] ont mis au point une méthode éléments frontières-éléments finis qui permet d'analyser la réponse dynamique, y compris le mouvement de ballotement de la surface libre, de réservoirs rectangulaires 3D soumis à une excitation sismique horizontale. La structure du réservoir est modélisée par la méthode des éléments finis et la région fluide par la méthode des éléments frontières. Les résultats de l'analyse ont été comparés avec les données d'essais sur table vibrante. Ils ont constaté que le mouvement de ballotement peut être très amplifié en raison de la flexibilité de la

paroi dans des réservoirs rectangulaires et la pression hydrodynamique est beaucoup plus amplifiée au milieu de la paroi du réservoir.

Malhotra P.K., Wenk T. & Wieland M. (2000) [30] ont proposé le principe théorique d'une procédure de conception sismique simplifiée pour les réservoirs cylindriques posés sur le sol. En tenant compte des actions impulsives et convectives du liquide dans des réservoirs en acier ou en béton armé flexibles fixées à la base.

Chen J.Z. & Kianoush M.R. (2003, 2005) [6] ont proposé une procédure pour calculer les pressions hydrodynamiques dans le réservoir rectangulaire, appelée la méthode séquentielle, et qui considère l'effet de la flexibilité de la paroi du réservoir. Uniquement, la réponse impulsive du réservoir a été considérée. Les résultats des analyses ont été comparés à ceux donnés par les codes et les normes actuels de conception. La comparaison a montré que, dans la plupart des cas, l'approche de masse concentrée surestime les déplacements de la paroi et les forces de cisaillement à la base.

Virella J.C., Prato C.A. & Godoy L.A. (2008) [52] ont fait une comparaison entre la théorie linéaire et non linéaire du ballotement dans les réservoirs rectangulaires en utilisant la méthode des éléments finis. Ils ont notamment montré que la distribution des pressions dans les réservoirs rectangulaires est similaire dans les deux théories et que la non-linéarité n'a pas un effet significatif sur la période naturelle de ballotement.

Ghaemmaghami A.R. & Kianoush M.R. (2010) [12] ont mené des recherches sur la réponse dynamique d'un réservoir rectangulaire 2D en utilisant une analyse temporelle. L'effet de l'accélération verticale sur la réponse dynamique du réservoir de liquide a été jugé moins important lorsque les deux composantes horizontale et verticale ont été considérées ensemble.

Hashemi S., Saadatpour M. & Kianoush R. (2013) [19] ont proposé une méthode analytique pour déterminer la réponse dynamique de réservoirs rectangulaires 3D ayant quatre parois flexibles soumis à un mouvement sismique horizontal. Ils ont déterminé une formule simple permettant d'évaluer la pression convective et les déplacements de la surface libre dans des réservoirs rigides similaires. Ils ont aussi développé un modèle mécanique, qui tient compte de la déformabilité de la paroi du réservoir. Jung J.H., Yoon H.S. & Lee C.Y. (2015) [24] ont étudié l'effet de la fréquence des modes naturels sur le ballotement du liquide dans des réservoirs rectangulaires 2D et 3D en utilisant une méthode basée sur la méthode des volumes finis. Ruiz R.O., Lopez-Garcia D. & Taflanidis A.A. (2015) [40] ont développé un modèle numérique de calcul efficace basé sur la fonction de potentiel de vitesse pour évaluer le comportement dynamique des réservoirs. Le modèle proposé permet d'effectuer des études paramétriques étendues avec un petit effort numérique.

Nayak S.K. & Biswal K.C. (2016) [34] ont étudié la réponse sismique des réservoirs rec-

tangulaires rigides bidimensionnels partiellement remplis avec un bloc submergé dans le fond, en se basant sur une méthode mixte Eulérienne-Lagrangienne, le modèle est simulé numériquement en utilisant trois séismes ayant des caractéristiques différentes pour étudier l'effet du contenu fréquentiel sur la réponse dynamique non linéaire. Ils ont observé que la réponse convective du système est très sensible au contenu fréquentiel du séisme. Yazdanian M., Mashal M. & Razavi S. (2017) [57] ont considéré cinq réservoirs de pétrole en acier de forme cylindrique et de dimensions différentes pour étudier la vulnérabilité en considérant trois paramètres significatifs : Le glissement, le flambement élasto-plastique, et les dommages au toit du réservoir, les résultats trouvés ont montré que les réservoirs sont en sécurité par rapport au paramètre de vulnérabilité de flambement élasto-plastique. Cependant, ce n'est pas toujours le cas pour la vulnérabilité du toit de réservoir et le glissement. Ils ont également remarqué que les réservoirs ayant un diamètre plus élevé ont une hauteur de vague plus élevée et leurs toits peuvent être en danger.

Cheng X., Yu D., Zhang A. & Bao C. (2017) [8] ont étudié la réponse sismique d'un réservoir rectangulaire ayant une base d'isolation, en utilisant un modèle de béton élastique linéaire tridimensionnel. Ils ont étudié la réponse sismique sous différentes intensités sismiques et différents niveaux de liquide. Leurs résultats ont montré que les réponses sismiques étaient fortement influencées par l'intensité sismique, le domaine fréquentiel et le domaine temporel. En outre, ils ont remarqué que le niveau du liquide avait un certain effet sur les réponses sismiques de la structure, et lorsque le niveau du liquide est plus faible, les valeurs maximales de la hauteur de ballonnement du liquide, les déplacements de la paroi et la contrainte équivalente sont plus importants.

1.2.2 Approche numérique

Avec l'expansion de la capacité de stockage et de la puissance des ordinateurs, le calcul numérique est aujourd'hui devenu indispensable voir incontournable dans le domaine industriel. Il permet, dans le cadre de la résolution numérique des équations de la dynamique des fluides, de prédire les mouvements de celui-ci. Il existe actuellement beaucoup de codes tridimensionnels industriels (Fluent, CFX, Flow3D, Phoenix, Star-CCM, Femlab...) qui aident les ingénieurs à développer leurs produits, à optimiser leur conception et à réduire leurs risques. Avec l'essor des outils numériques, il est aujourd'hui possible de lever certaines hypothèses restrictives de l'approche analytique ne permettant pas de traiter un problème industriel.

Les difficultés rencontrées par les méthodes numériques résident dans le suivi de la surface libre. Afin de représenter correctement le fluide, les méthodes numériques discrétisent les équations de Navier-Stokes et permettent d'obtenir un système avec un nombre fini d'inconnues. Le domaine fluide est généralement discrétisé par un maillage, permettant de décomposer le domaine fluide en petits éléments de volume. Une autre méthode de discrétisation peut être employée ne faisant pas intervenir de maillage et où le domaine fluide est considéré comme un ensemble de particules.

Les premiers codes de calculs numériques se basaient sur la théorie potentielle très sommairement présentée précédemment. La surface libre était alors considérée comme une frontière du domaine sur laquelle des conditions limites étaient imposées. Ces codes, bien que compétitifs et en perpétuelle évolution, ne permettent cependant toujours pas de traiter des problématiques industrielles. En modifiant leur stratégie, les codes de calculs résolvent aujourd'hui les équations de Navier-Stokes en considérant un fluide réel.

La plus ancienne méthode de discrétisation avec maillage est la Méthode des Eléments Finis (MEF). Elle est souvent utilisée dans l'analyse structurale des solides, la thermique, mais est également applicable aux fluides. Le domaine fluide est divisé en éléments 2D ou 3D et une description Lagrangienne du mouvement est généralement utilisée. A l'aide des principes hérités de la formulation variationnelle, un algorithme mathématique discret permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est mis en place sur un domaine avec des conditions aux limites. On parle couramment de conditions de type Dirichlet, Neumann ou de Cauchy. Le résultat de la résolution approchée d'un problème est obtenu en minimisant les résidus. Pour des problèmes de larges distorsions les cellules du domaine fluide se déforment de manière très importantes et un remaillage du domaine est nécessaire.

Il existe une méthode améliorée issue de la méthode générale des Eléments Finis appelé Boundary Element Method (BEM). Celle-ci permet de discrétiser uniquement la surface libre et est utilisée dans l'étude Ning D., Song W., Liu Y. & Teng B. (2012). [35]

Lors de grandes déformations de la surface libre, le maillage Lagrangien subit de fortes distorsions et n'est plus exploitable sans un remaillage coûteux. C'est pourquoi, en présence de ballonnement violent, le suivi d'interface n'est pas envisageable et il est nécessaire de se tourner vers la technique d'interface mise en œuvre à l'aide d'un maillage Eulerien. La Méthode des Différences Finies (MDF) est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles. C'est une approximation des dérivées intervenant dans les équations à l'aide de développement en série de Taylor afin d'obtenir un système d'équations algébriques. Cette méthode est basée sur une approche Eulerienne et est généralement utilisée lorsque le maillage du domaine est structuré.

Dans la Méthode des Volumes Finies MVF, l'approche Eulérienne est utilisée car elle est adaptée à un maillage non structuré.

Des méthodes sans maillage ont plus récemment vu le jour. La plus utilisée pour décrire le ballottement est la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) Souto-Iglesias A., Delorme L., Pérez-Rojas L. & Abril-Pérez S. (2006) [47]. En SPH, la formulation est Lagrangienne et le fluide est divisé en un ensemble de particules s'affranchissant d'une connectivité géométrique, contrairement aux formulations classiques. L'avantage de cette technique apparaît lorsque l'on traite un problème de surface libre. Aucune condition sur la surface libre n'est nécessaire car les particules définissent implicitement la position de cette interface et la formation d'un jet ne pose ainsi plus de problème de modélisation. D'après eux cette méthode produit de bons résultats au niveau des forces et des moments globaux et est très bien adaptée pour modéliser des surfaces libres avec de grandes déformations. En contrepartie, il faut souvent un grand nombre de particules pour construire un modèle valable. De ce fait, les coûts Central Processing Unit (CPU) pour des simulations en 3D deviennent très importants.

Parmi d'autres méthodes numériques, on cite la méthode de la quadrature différentielle [9]. Ecoulement potentiel avec solution asymptotique [41].

1.2.3 Approche expérimentale

Malgré les recherches analytiques et les avancées numériques, l'approche expérimentale est de nos jours la plus fiable pour décrire le mouvement du fluide dans un réservoir et la plus efficace pour déterminer les charges engendrées par le ballottement sur celui-ci. Bien que cette méthode soit efficace, sa mise en place est très coûteuse et comprend tout de même des incertitudes qui proviennent de la limitation des mesures physiques et de la procédure de post-traitement. Elle requiert de réaliser un nombre important d'essai afin d'assurer la répétabilité du phénomène observé. En 2013 Song et son équipe [46] mènent une étude expérimentale sur l'impact de la pression sur le ballottements liquide. Heng et al., 2014 [23] mettent en place une expérimentation sur un réservoir doté d'une plaque horizontale perforé à l'intérieur du réservoir, cette plaque perforé résulte à une diminution significative du ballottement du fluide, et concluent sur le fait que la taille et le nombre des perforations jouent un rôle sur la diminution du ballottement. Plus récemment en 2020 Yu et al., [58] mènent des expérimentations de ballottement sur des réservoirs rectangulaires muni de paroi verticaux à l'intérieur pour la suppression des ballottements et conclue sur le fait que la distance entre les parois joue un rôle sur cette suppression.

1.3 Conclusion

On remarque que plusieurs études ont été entreprises aux fils des siècles, et aussi lointaines que l'étude remonte elle reste d'actualité, le comportement du phénomène de ballottement diffère d'une structure à une autre, chaque paramètre entreprise doit être minutieusement et approfondiment évaluer.

Modélisation numérique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, le liquide est modélisée par l'équation de Laplace, et les parois sont modélisées par les éléments poutres. On applique la méthode des éléments finis pour discrétiser les équations. Une approche sur l'étude d'une réponse fréquentielle et temporelle sera entreprise aussi.

2.2 Modélisation Mathématique

2.2.1 Modélisation mathématique du fluide

La modélisation du fluide par l'équation de Laplace se déduit des équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité de la masse [33], qui sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f V) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \frac{1}{\rho} \nabla P_T + \nu \Delta V + g \quad (2.2)$$

où :

- V : La vitesse du fluide.
- ν : La viscosité.
- P_t : La pression totale du fluide qui est la somme de la pression hydrostatique (P_s) et la pression hydrodynamique (P_d)
- g : L'accélération de la pesanteur.
- ρ_f : La masse volumique.
- On considère le comportement de la structure linéaire, la pression hydrostatique est éliminé. ($P_s=0$)
- Le fluide est considéré non visqueux. ($\nu=0$)

- On suppose un fluide incompressible. ($\rho=0$)
- Les équations de Navier-Stokes (2.2) se réduisent à l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla P \quad (2.3)$$

L'équation de Laplace dérive en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (2.3) :

$$\Delta P = 0 \quad (2.4)$$

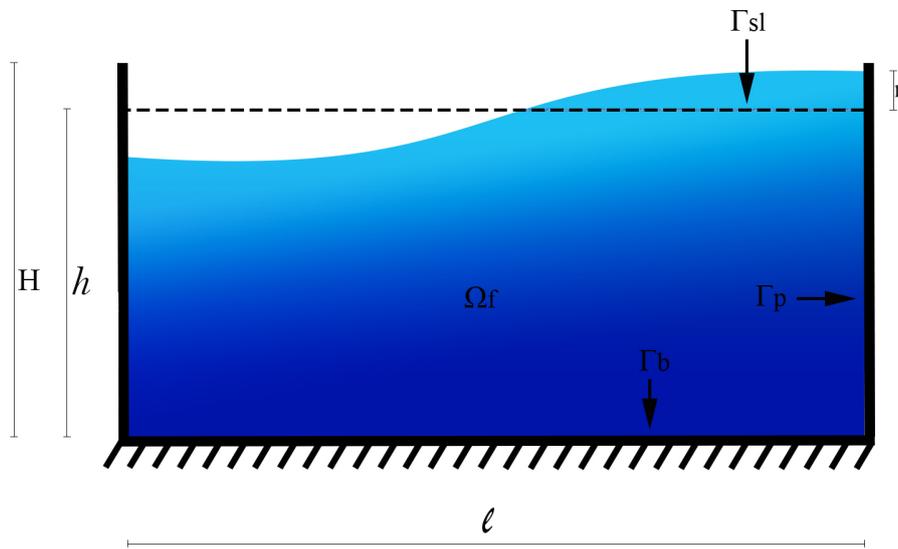


Figure 2.1: Schéma du réservoir avec les notations utilisées pour les domaines et frontières

Où :

- Ω_f : Domaine du fluide.
- Γ_{sl} : Surface libre du fluide.
- Γ_p : Parois de la structure.
- Γ_b : Base de la structure.
- H : Hauteur de la structure.
- h : Hauteur du fluide.
- l : Largeur de la structure/fluide.
- η : La surélévation du liquide par rapport à la position de l'équilibre qui est lié à la composante de la vitesse verticale par :

$$V = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.5)$$

La projection de l'équation de quantité de mouvement (2.3) sur la normal O_y , s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.6)$$

La surélévation du liquide s'écrit :

$$\eta = \frac{P}{g\rho_f} \quad (2.7)$$

Sa deuxième dérivée par rapport aux temps donne :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{g\rho_f} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

De (2.6) et (2.8) donne la condition d'onde de surface linéarisée :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \text{ sur } \Gamma_{sl} \quad (2.9)$$

Sur le fond :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Gamma_b \quad (2.10)$$

La projection de l'équation de quantité de mouvement (2.3) sur la normal O_x , s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.11)$$

" u " étant la composante de la vitesse horizontale qui s'écrit :

$$u = \frac{\partial U_s}{\partial t} \quad (2.12)$$

De (2.11) et (2.12) donne la condition sur les parois :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_f \frac{\partial^2 U_s}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_f \ddot{U}_s \text{ sur } \Gamma_p \quad (2.13)$$

2.2.2 Modélisation mathématique de la paroi

Le mouvement de la paroi est décrite par le déplacement $U(y)$. La rotation de la section droite déformée est égale à la tangente de la ligne moyenne courbée : $\theta = \frac{dU}{dy}$

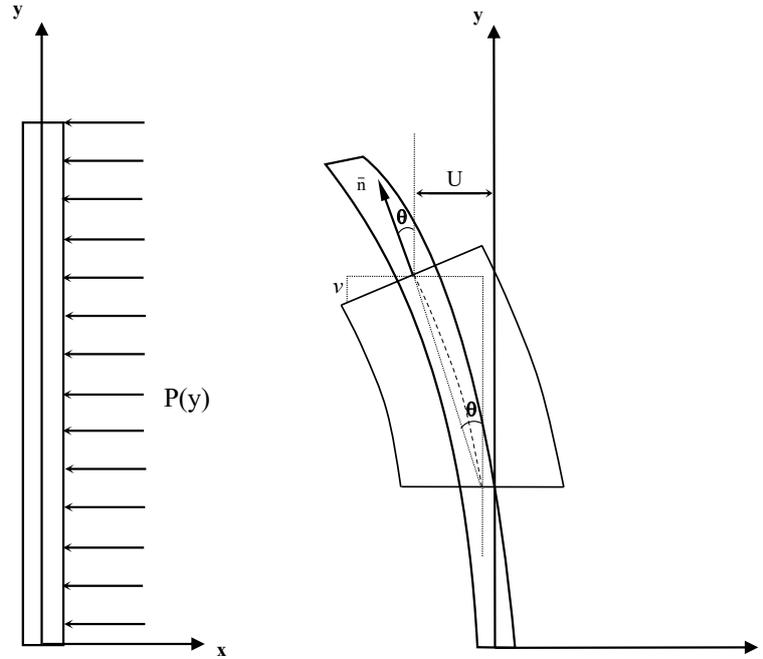


Figure 2.2: Schéma d'une paroi et de sa déformation avec les notations

- Rotation : $\theta = \frac{dU}{dy}$
- Déplacement vertical d'un point de la section après rotation : $v = -x\theta = -x\frac{dU}{dy}$
- Déformation axial en ce point : $\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = -x\frac{d^2U}{dy^2}$
- Contrainte : $\sigma_y = E\varepsilon_y = -Ex\frac{dU}{dy}$, avec E le module d'élasticité du matériau de la poutre.
- Le moment de flexion : $M = -\int_A x\sigma_y dA = EI\frac{d^2U}{dy^2}$, avec $I = \int_A x^2 dA$, moment d'inertie.

On considère maintenant l'équilibre statique d'un élément dy (2.3)

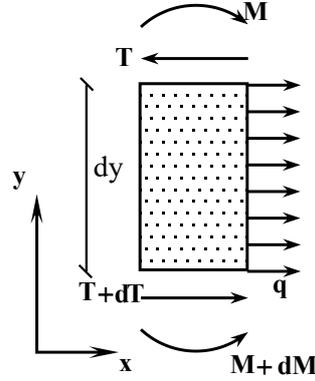


Figure 2.3: Equilibre Statique

La somme des moments par rapport à son centre de gravité donne :

$$-M + T \frac{dy}{2} + (T + dT) \frac{dy}{2} + M + dM = 0 \quad (2.14)$$

En négligeant les termes du second ordre, on obtient la relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant :

$$T = -\frac{dM}{dy} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{d^2U}{dy^2} \right) \quad (2.15)$$

En équilibre des forces verticales pour un chargement positif dans le sens de l'axe y :

$$T + dT + qdy - T = 0 \quad (2.16)$$

$$q = \frac{dT}{dy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{d^2U}{dy^2} \right) \quad (2.17)$$

Cette équation (2.17) résume l'équilibre de la poutre. Pour un mouvement dynamique on ajoute à l'équation (2.16) un terme qui traduit les forces d'inertie :

$$F_i = m\gamma = \rho_s A dy \frac{d^2U}{dt^2}$$

$$T + dT + qdy - T = F_i$$

$$q = \frac{dT}{dy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{d^2U}{dy^2} \right) + \rho_s A dy \frac{d^2U}{dt^2} \quad (2.18)$$

2.3 Modélisation en Eléments Finis

La méthode des éléments finis (MEF), est une méthode numérique permettant de résoudre certains problèmes de physique. C'est une méthode qui permet de déterminer la solution approchée sur le domaine spatial, qui peut calculer le domaine (scalaire, vecteur, tenseur) correspondant à certaines équations et conditions imposées.

La méthode comprend la division du domaine spatial en petits éléments, appelés mailles, la recherche d'une formule simplifiée du problème sur chaque élément est la conversion de tout système d'équations en un système d'équations linéaire. Chaque système d'équations linéaires peut être représenté par une matrice. Ensuite, rassemblez tous les éléments du système d'équations pour former une grande matrice ; la résolution de ce système global donne une solution approximative au problème.

Pour plus de détails, un cours sur les éléments finis peut être consulté sur le lien suivant : <http://univ-bejaia.dz/a.seghir/?p=mef/mef> [42]. Le livre de référence est celui de Zienkiewicz [59].

2.3.1 Formulation intégrale

Fluide

Récapitulatif du système des équations pour la modélisation du fluide :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta P = 0 & \text{sur } \Omega_f \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} & \text{sur } \Gamma_{sl} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_b \\ \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_f \ddot{U}_s & \text{sur } \Gamma_p \end{array} \right. \quad (2.19)$$

La formulation intégrale forte associée au système d'équations précédent 2.19 s'écrit comme suit :

$$\int_{\Omega_f} \delta P \Delta P d\Omega_f = 0 \quad (2.20)$$

La forme faible s'obtient en appliquant le théorème de divergence de Gauss [2] après réécriture du terme sous intégrale comme suit.

On a :

$$\nabla \cdot (\delta P \nabla P) = \nabla \delta P \cdot \nabla P + \delta P \Delta P$$

d'où :

$$\delta P \Delta P = \nabla \cdot (\delta P \nabla P) - \nabla \delta P \cdot \nabla P$$

L'intégration :

$$\int_{\Omega_f} \delta P \Delta P d\Omega = \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\delta P \nabla P) d\Omega - \int_{\Omega_f} \nabla \delta P \cdot \nabla P d\Omega$$

Le premier terme de droite se transforme en intégrale de frontière (Γ_T) via la théorème de divergence de Gauss :

$$\int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\delta P \nabla P) d\Omega = \int_{\Gamma_T} \delta P \nabla P \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_T} \delta P \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma$$

D'où la forme faible :

$$- \int_{\Omega_f} \delta P \nabla P d\Omega_f + \int_{\Gamma_T} \delta P \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma_T = 0 \quad (2.21)$$

- Γ_T : Désigne la frontière totale (surface libre et parois de la structure).

- δP et $\nabla \delta P$: Sont des perturbations de la pression.

- En décomposant la frontière totale selon les conditions aux limites on obtient la forme intégrale faible :

$$- \int_{\Omega_f} \nabla \delta P \nabla P d\Omega_f - \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Gamma_{sl} - \rho_f \int_{\Gamma_p} \delta P \ddot{U}_s d\Gamma_p = 0 \quad (2.22)$$

$$\int_{\Omega_f} \nabla \delta P \nabla P d\Omega_f + \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Gamma_{sl} = -\rho_f \int_{\Gamma_p} \delta P \ddot{U}_s d\Gamma_p \quad (2.23)$$

- Dans l'équation précédente, on a considéré que les parois sont verticales, et l'accélération \ddot{U}_s est horizontale.

Paroi

L'équation Euler-Bernoulli pour la flexion des parois d'une hauteur H_s , et où δU est une fonction de pondération prise égale à une perturbation de la fonction inconnue U , la

formulation variationnelle forte s'écrit :

$$\int_{H_s} \delta U \rho_s A \frac{d^2 U}{dt^2} dy + \int_{H_s} \delta U \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dy = \int_{H_s} \delta U q(y) dy \quad (2.24)$$

Dans le cas du 2^{ème} terme de l'équation une double intégration par partie, grâce à la méthode de Taylor [11], est nécessaire pour une formulation variationnelle faible.

$$\int_{H_s} \delta U \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{d^2 U}{dy^2} \right) dy = - \int_{H_s} \frac{\partial \delta U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{d^2 U}{dy^2} \right) dy + \left[\delta U \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \right]^{H_s} \quad (2.25)$$

$$\int_{H_s} \frac{\partial \delta U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(EI \frac{d^2 U}{dy^2} \right) dy = - \int_{H_s} \frac{\partial^2 \delta U}{\partial y^2} EI \frac{d^2 U}{dy^2} dy + \left[\frac{\partial \delta U}{\partial y} EI \frac{d^2 U}{dy^2} \right]^{H_s} \quad (2.26)$$

La paroi étant verticale, encasté à $y = 0$ et n'est pas chargé dans son extrémité, donc il n'y a ni moment de flexion ni d'effort tranchant, d'où les seconds termes des équations (2.25) et (2.26) sont égale à 0, et la charge $q(y) = P$. La formulation variationnelle faible de l'équation Euler-Bernoulli pour la flexion des parois s'écrit :

$$\int_{H_s} \delta U \rho_s A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dy + \int_{H_s} \frac{\partial^2 \delta U}{\partial y^2} EI \frac{d^2 U}{dy^2} dy = \int_{H_s} \delta U P dy \quad (2.27)$$

2.3.2 Discrétisation en Eléments Finis

Fluide

- On a pour chaque domaine une interpolation nodale :

$$\nabla \delta P = \nabla N^T \delta P^T; \quad \nabla P = \nabla N P; \quad \ddot{U}_s = N \ddot{U}_s; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = N \ddot{P}$$

puisque seules les fonctions N dépendent de x et les perturbations ne touchent que les valeurs de P. Pour commodité on écrit :

$$\delta P = N^T \delta P^T$$

- On remplace dans l'équation (2.23) sa donne :

$$\int_{\Omega_f} \nabla N^{(p)T} \delta P^T \nabla N^{(p)} P d\Omega_f + \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} N^{(s)T} \delta P^T N^{(s)} \ddot{P} \Gamma_{sl} = -\rho_f \int_{\Gamma_p} N^{(i)T} \delta P^T N^{(b)} \ddot{U}_s d\Gamma_p \quad (2.28)$$

$$\delta P^T \int_{\Omega_f} \nabla N^{(p)T} \nabla N^{(p)} d\Omega_f P + \delta P^T \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} N^{(s)T} N^{(s)} d\Gamma_{sl} \ddot{P} = -\delta P^T \rho_f \int_{\Gamma_p} N^{(i)T} N^{(b)} d\Gamma_p \ddot{U}_s \quad (2.29)$$

L'élimination de ∂P^T de l'équation intégrale discrète donne les matrices suivantes :

- La matrice de masse G_e :

$$\mathbf{G}_e = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} N^{(s)T} N^{(s)} d\Gamma_{sl} \quad (2.30)$$

-La matrice de rigidité L_e :

$$\mathbf{L}_e = \int_{\Omega_f} \nabla N^{(p)T} \nabla N^{(p)} d\Omega_f \quad (2.31)$$

- La matrice d'interaction Q_e :

$$\mathbf{Q}_e = \int_{\Gamma_p} N^{(i)T} N^{(b)} d\Gamma_p \quad (2.32)$$

- L'équation matricielle s'écrit :

$$\mathbf{G}_e \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{L}_e \mathbf{P} = -\rho_f \mathbf{Q}_e \ddot{\mathbf{U}}_s \quad (2.33)$$

Paroi

- On a pour chaque domaine une interpolation nodale :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = N \ddot{U}; \quad \frac{\partial^2 \delta U}{\partial y^2} = \frac{d^2 N^T}{dy^2} \delta U^T; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{d^2 N}{dy^2} U$$

puisque seules les fonctions N dépendent de x et les perturbations ne touchent que les valeurs de U. Pour commodité on écrit :

$$\delta U = N^T \delta U^T$$

- On remplace dans (2.27) sa donne :

$$\int_{H_s} N^{(b)T} \delta U^T \rho_s A N^{(b)} \ddot{U} dy + \int_{H_s} \frac{d^2 N^{(b)T}}{dy^2} \delta U^T EI \frac{d^2 N^{(b)}}{dy^2} U dy = \int_{H_s} N^{(b)T} \delta U^T N^{(i)} P dy \quad (2.34)$$

$$\delta U^T \rho_s A \int_{H_s} N^{(b)T} N^{(b)} dy \ddot{U} + \delta U^T \int_{H_s} \frac{d^2 N^{(b)T}}{dy^2} EI \frac{d^2 N^{(b)}}{dy^2} dy U = \delta U^T \int_{H_s} N^{(b)T} N^{(i)} dy P \quad (2.35)$$

L'élimination de ∂U^T de l'équation intégrale discrète donne les matrices suivantes :

- La matrice masse M_e :

$$\mathbf{M}_e = \rho_s A \int_{H_s} N^{(b)T} N^{(b)} dy \quad (2.36)$$

- La matrice de rigidité K_e :

$$\mathbf{K}_e = \int_{H_s} \frac{d^2 N^{(b)T}}{dy^2} EI \frac{d^2 N^{(b)}}{dy^2} \quad (2.37)$$

- La matrice force F_e :

$$\mathbf{F}_e = \left(\int_{H_e} N^{(b)T} N^{(i)} dy \right) \mathbf{P} = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{P} \quad (2.38)$$

- L'équation matricielle s'écrit :

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{U}}_s + \mathbf{K}_e \mathbf{U} = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{P} \quad (2.39)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_s = \ddot{\mathbf{U}} + \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (2.40)$$

L'équations matricielles finale pour (2.33) et (2.39) s'écrivent :

$$\mathbf{G}_e \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{L}_e \mathbf{P} + \rho_F \mathbf{Q}_e \ddot{\mathbf{U}} = -\rho_F \mathbf{Q}_e \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (2.41)$$

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_e \mathbf{U} - \mathbf{Q}_e^T \mathbf{P} = -\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (2.42)$$

Le système couplé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{Q}_e & \mathbf{G}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{Q}_e^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_e \\ -\rho_F \mathbf{Q}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_g \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

2.4 Réponse fréquentielle

Pour un mouvement à la base du modèle d'accélération $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_g e^{i\omega t}$, le vecteur $\ddot{\mathbf{U}}_g = I\ddot{u}_g = I\ddot{u}_g e^{i\omega t}$ se déduit par transmission des accélérations aux noeuds du modèle à

l'aide du vecteur d'influence dynamique \mathbf{I} , avec

$$\mathbf{I} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'excitation fréquentielle s'écrit :

$$\omega = 2\pi f$$

L'équation de pression et de mouvement s'écrivent respectivement :

$$P = \bar{P}e^{i\omega t} \quad (2.44)$$

$$U = \bar{U}e^{i\omega t} \quad (2.45)$$

Leurs 2^{èmes} dérivées par rapport au temps donnent :

$$\ddot{P} = i^2\omega^2\bar{P}e^{i\omega t} \quad (2.46)$$

$$\ddot{U} = i^2\omega^2\bar{U}e^{i\omega t} \quad (2.47)$$

Etant donné que $i^2 = -1$, on remplace dans (2.44) et (2.45) leurs équations finales s'écrivent :

$$\ddot{P} = -\omega^2\bar{P}e^{i\omega t} \quad (2.48)$$

$$\ddot{U} = -\omega^2\bar{U}e^{i\omega t} \quad (2.49)$$

On remplace (2.44), (2.45), (2.48) et (2.49) dans (2.43) :

$$\begin{bmatrix} M_e & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{Q}_e & \mathbf{G}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega^2 \bar{U} e^{i\omega t} \\ -\omega^2 \bar{P} e^{i\omega t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{Q}_e^T \\ \mathbf{0} & L_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U} e^{i\omega t} \\ \bar{P} e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_e \\ -\rho_F \mathbf{Q}_e \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{I} \bar{u}_g e^{i\omega t} \right\} \quad (2.50)$$

Après élimination de " $e^{i\omega t}$ " et factorisation le système couplé s'écrit :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{Q}_e^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{Q}_e & \mathbf{G}_e \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_e \\ -\rho_F \mathbf{Q}_e \end{bmatrix} \{ \mathbf{I} \bar{\mathbf{u}}_g \} \quad (2.51)$$

2.5 Réponse temporelle

Le comportement de nombreux systèmes dynamiques subissent des changements dépendant du temps (transitoires), qui peuvent être décrits par des équations différentielles. De nombreuses méthodes d'intégration numérique peuvent être utilisées pour approximer la solution des équations du mouvement. Toutes les méthodes d'intégration numérique ont deux caractéristiques fondamentales. Premièrement, ils ne satisferont pas toujours l'équation différentielle à tout moment t , mais seulement dans l'intervalle de temps Δt . Deuxièmement, dans chaque intervalle de temps Δt , on suppose que le déplacement U , la vitesse \dot{U} et l'accélération \ddot{U} subissent un type de changement spécifique. Par conséquent, selon le type de changement supposé pour U , \dot{U} et \ddot{U} dans un intervalle de temps Δt , différents schémas d'intégration numérique peuvent être utilisés.

Parmi les méthodes qu'on peut citer pour les équations à un seul degré de liberté : "Méthode des différences finies", "Méthode des différences centrées" et "Méthode Runge-Kutta", pour les équations à deux ou plusieurs degrés de liberté on retrouvera aussi "Méthode des différences centrées" et d'autres comme "Méthode Wilson Thêta", "Méthode des trapèzes" et bien d'autres.

Dans notre cas, l'étude de la réponse temporelle a été faite par un logiciel multiphysique, qui utilise deux méthodes de calcul "Backward Differentiation Formula (BDF)" et "Alpha Généralisé" :

2.5.1 Méthode BDF

BDF est utilisé pour résoudre le problème des équations différentielles, avec $y(t_0) = y_0$:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (2.52)$$

La formulation générale pour la méthode BDF peut s'écrire comme suit :

$$\sum_{k=0}^s a_k y_{i+k} = h\beta f(t_{i+s}, y_{i+s}) \quad (2.53)$$

où h est la taille du pas et $t_i = t_0 + ih$. Puisque f est évaluée pour l'inconnu y_{i+s} . La méthode BDF est implicite et requiert une solution nonlinéaire de l'équation à chaque étape. Le coefficient a_k et β sont choisis de sorte que la méthode atteigne l'ordre s , qui est le maximum possible.

Commençons de la formule $\dot{y}(t_{i+s}) = f(t_{i+s}, y(t_{i+s}))$ une approximation est établie :

$$y(t_{i+s}) = y_{i+s} \quad (2.54)$$

et

$$\dot{y}(t_{i+s}) = \dot{p}_{i,s}(t_{i+s}) \quad (2.55)$$

où $\dot{p}_{i,s}(t)$ est l'interpolation polynomiale de Lagrange pour les points $(t_i, y_i), \dots, (t_{i+s}, y_{i+s})$, on supposant que $t_i = t_0 + ih$ et en multipliant par h on arrive à la méthode BDF d'ordre s . Le nombre d'ordre utilisé par le logiciel multyphysique est d'ordre 5 discrétisé comme suit :

BDF 1

$$y_{i+1} - y_i = hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \quad (2.56)$$

BDF 2

$$y_{i+2} - \frac{4}{3}y_{i+1} + \frac{1}{3}y_i = \frac{2}{3}hf(t_{i+2}, y_{i+2}) \quad (2.57)$$

BDF 3

$$y_{i+3} - \frac{18}{11}y_{i+2} + \frac{9}{11}y_{i+1} - \frac{2}{11}y_i = \frac{6}{11}hf(t_{i+3}, y_{i+3}) \quad (2.58)$$

BDF 4

$$y_{i+4} - \frac{48}{25}y_{i+3} + \frac{36}{25}y_{i+2} - \frac{16}{25}y_{i+1} + \frac{3}{25}y_i = \frac{12}{25}hf(t_{i+4}, y_{i+4}) \quad (2.59)$$

BDF 5

$$y_{i+5} - \frac{300}{137}y_{i+4} + \frac{300}{137}y_{i+3} - \frac{200}{137}y_{i+2} + \frac{75}{137}y_{i+1} - \frac{12}{137}y_i = \frac{60}{137}hf(t_{i+5}, y_{i+5}) \quad (2.60)$$

2.5.2 Méthode d'Alpha Généralisée

L'équation gouvernante

La méthode d'Alpha généralisée suppose que le déplacement U et la vitesse V sont intégrés en tant que tels :

$$U_{i+1} = U_i + \Delta t V_i + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \alpha_i + \beta \alpha_{i+1} \right) \quad (2.61)$$

$$V_{i+1} = V_i + \Delta t(1 - \gamma)\alpha_i + \Delta\gamma\alpha_{i+1} \quad (2.62)$$

L'équation du mouvement est exprimée quelque part entre t_i et t_{i+1} par :

$$M\alpha_{i+1-\alpha_m} + CV_{n+1-\alpha_f} + KU_{i+1-\alpha_f} = F \quad (2.63)$$

qui peut être explicitement écrite comme :

$$M((1 - \alpha_m)\alpha_{i+1} + \alpha_m\alpha_n) + C((1 - \alpha_f)V_{i+1} + \alpha_f V_i) + K((1 - \alpha_f)U_{n+1} + \alpha_f U_i) = F \quad (2.64)$$

où α_m et α_f sont deux paramètres additionnels, pour obtenir une équation stable, on doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}$$

$$\beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m)$$

Un seul paramètre est requis, le paramètre numérique de contrôle de dissipation p_∞ qui varie de 0 à 1. Les expressions suivantes sont utilisées pour déterminer les valeurs de toutes

les constantes utilisées :

$$\alpha_f = \frac{p_\infty}{p_\infty + 1} \quad (2.65)$$

$$\alpha_m = \frac{2p_\infty - 1}{p_\infty + 1} \quad (2.66)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{p_\infty - 1}{p_\infty + 1} \quad (2.67)$$

$$\beta = \frac{1}{(p_\infty + 1)^2} \quad (2.68)$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre on s'est intéressé aux équations décrivant le fluide en interaction avec la structure. Des équations de continuité, de Navier-Stokes et de Laplace avec les conditions aux limites associées, un système matriciel peut être développé qui peut servir à calculer l'élévation de la surface libre du fluide et les déformations des parois du réservoir.

Système Algébrique - Expression des matrices élémentaires

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux calculs des matrices élémentaires pour le fluide et les parois. Les expressions des composantes des matrices seront données avec détails. Les calculs ont été réalisés manuellement et à l'aide de toolbox "syms" de MATLAB.

3.2 Calcul des matrices du fluide

3.2.1 Calcul de la Matrice "Masse fluide" G_e

En récapitulatif de l'expression de cette matrice, on a :

$$G_e = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} N^{(s)T} N^{(s)} d\Gamma_{sl} \quad (3.1)$$

Les fonctions de formes :

$$N^{(s)} = \left\langle \begin{array}{cc} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} & \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{array} \right\rangle \quad (3.2)$$

Les conditions aux limites pour x :

$$x_1 = 0, x_2 = \ell \quad (3.3)$$

On remplace dans (3.2) :

$$N^{(s)} = \left\langle 1 - \frac{x}{\ell} \quad \frac{x}{\ell} \right\rangle \quad (3.4)$$

On remplace la fonction de forme (3.4) dans l'équation (3.1) :

$$G_e = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{\ell} \\ \frac{x}{\ell} \end{Bmatrix} \left\langle 1 - \frac{x}{\ell} \quad \frac{x}{\ell} \right\rangle d\Gamma_{sl} \quad (3.5)$$

Après distribution et multiplication :

$$G_e = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{\ell})(1 - \frac{x}{\ell}) & (1 - \frac{x}{\ell})(\frac{x}{\ell}) \\ (\frac{x}{\ell})(1 - \frac{x}{\ell}) & (\frac{x}{\ell})(\frac{x}{\ell}) \end{bmatrix} d\Gamma_{sl} \quad (3.6)$$

$$G_e = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{sl}} \begin{bmatrix} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{2x}{\ell} + 1 & \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \\ \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} & \frac{x^2}{\ell^2} \end{bmatrix} d\Gamma_{sl} \quad (3.7)$$

Intégration par rapport à x :

$$G_e = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} \frac{x^3}{3\ell^2} - \frac{x^2}{\ell} + x & \frac{x^2}{2\ell} - \frac{x^3}{3\ell^2} \\ \frac{x^2}{2\ell} - \frac{x^3}{3\ell^2} & \frac{x^3}{3\ell^2} \end{bmatrix}_0^\ell \quad (3.8)$$

Après intégration de x entre 0 et ℓ :

$$G_e = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} \frac{\ell^3}{3\ell^2} - \frac{\ell^2}{\ell} + \ell & \frac{\ell^2}{2\ell} - \frac{\ell^3}{3\ell^2} \\ \frac{\ell^2}{2\ell} - \frac{\ell^3}{3\ell^2} & \frac{\ell^3}{3\ell^2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Après addition des fractions et en sortant les facteurs en commun l'équation matricielle finale de G_e est :

$$G_e = \frac{1}{g} \frac{\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Pour vérifier les calculs, une programmation sur MatLab a été faite comme suit :

```

1   clear
2   clc
3   syms x l real
4   Ns(1)=1-x/l;
```

```

5      Ns(2)=x/l;
6      Ge=int(Ns'*Ns,x,0,l)

```

Les commandes `clear` et `clc` sont pour effacé toutes les variables créés dans l'espace de travail et effacé le contenu de la fenêtre de commande respectivement.

La 3^{ème} ligne, on insère les variables qui dans notre cas sont `x` et `ell`.

La ligne 4 et 5, on insères les fonctions de forme (3.4). La 6^{ème} ligne, le calcul de la matrice \mathbf{G}_e , la commande `int` calcule l'intégrale de la multiplication `Ns'*Ns`, `Ns'` représente la transposé de `Ns`, sur `y` entre 0 et `h`.

3.2.2 Matrice du Laplacien L_e

En récapitulatif de l'expression de cette matrice, on a :

$$L_e = \int_{\Omega_f} \nabla N^{(p)T} \nabla N^{(p)} d\Omega_f \quad (3.11)$$

Les fonctions de formes :

$$N^{(p)} = \left\langle \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right\rangle \quad (3.12)$$

Les conditions aux limites :

$$x_1 = 0, x_2 = \ell \quad (3.13)$$

$$y_1 = 0, y_2 = h \quad (3.14)$$

On remplace dans la fonction de forme (3.12) :

$$N^{(p)} = \left\langle \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad \left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad \left(\frac{x}{\ell}\right)\left(\frac{y}{h}\right) \quad \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\left(\frac{y}{h}\right) \right\rangle \quad (3.15)$$

Calcul du gradient de la fonction de forme :

$$\nabla N^{(p)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{dN^{(p)}}{dx} \\ \frac{dN^{(p)}}{dy} \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Après dérivation de (3.15) par rapport à x et y on a :

$$\nabla N^{(p)} = \frac{1}{\ell h} \begin{bmatrix} y-h & h-y & y & -y \\ x-\ell & -x & x & \ell-x \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

On remplace le gradient de la fonction de forme (3.17) dans l'equations (3.11) :

$$L_e = \int_{\Omega_f} \frac{1}{(\ell h)^2} \begin{bmatrix} y-h & x-\ell \\ h-y & -x \\ y & x \\ -y & \ell-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y-h & h-y & y & -y \\ x-\ell & -x & x & \ell-x \end{bmatrix} d\Omega_f \quad (3.18)$$

Après distribution et multiplication :

$$L_e = \frac{1}{(\ell h)^2} \int_{\Omega_f} \begin{bmatrix} (y-h)^2 + (x-\ell)^2 & -(y-h)^2 - x(x-\ell) & y(y-h) + x(x-\ell) & -y(y-h) - (x-\ell)^2 \\ -(y-h)^2 - x(x-\ell) & (h-y)^2 + (-x)^2 & y(h-y) + x(-x) & -y(h-y) - x(\ell-x) \\ y(y-h) + x(x-\ell) & y(h-y) + x(-x) & y^2 + x^2 & y(-y) + x(\ell-x) \\ -y(y-h) - (x-\ell)^2 & -y(h-y) - x(\ell-x) & y(-y) + x(\ell-x) & (-y)^2 + (\ell-x)^2 \end{bmatrix} d\Omega_f \quad (3.19)$$

On remarque que la matrice (3.19) peut être divisé en deux matrices moins complexe pour facilité les calculs :

$$L_{(1)} = \int_{\Omega_f} \begin{bmatrix} (x-\ell)^2 & (x-\ell)(-x) & x(x-\ell) & -(x-\ell)^2 \\ -x(x-\ell) & (-x)^2 & x(-x) & -x(\ell-x) \\ x(x-\ell) & x(-x) & x^2 & x(\ell-x) \\ -(x-\ell)^2 & -x(\ell-x) & x(\ell-x) & (\ell-x)^2 \end{bmatrix} d\Omega_f \quad (3.20)$$

$$L_{(2)} = \int_{\Omega_f} \begin{bmatrix} (y-h)^2 & -(y-h)^2 & y(y-h) & -y(y-h) \\ -(y-h)^2 & (h-y)^2 & y(h-y) & -y(h-y) \\ y(y-h) & y(h-y) & y^2 & y(-y) \\ -y(y-h) & -y(h-y) & y(-y) & (-y)^2 \end{bmatrix} d\Omega_f \quad (3.21)$$

La matrice intégrale s'écrit :

$$L_e = \frac{1}{(\ell h)^2} (L_{e(1)} + L_{e(2)}) \quad (3.22)$$

Le domaine d'intégration :

$$d\Omega_f = dydx \quad (3.23)$$

Calcul de la matrice (3.20) :

$$L_{(1)} = \int_y \int_x \begin{bmatrix} (x-\ell)^2 & (x-\ell)(-x) & x(x-\ell) & -(x-\ell)^2 \\ -x(x-\ell) & (-x)^2 & x(-x) & -x(\ell-x) \\ x(x-\ell) & x(-x) & x^2 & x(\ell-x) \\ -(x-\ell)^2 & -x(\ell-x) & x(\ell-x) & (\ell-x)^2 \end{bmatrix} dx dy \quad (3.24)$$

Après distribution et multiplication :

$$L_{(1)} = \int_y \int_x \begin{bmatrix} (x-\ell)^2 & -x^2 + x\ell & x^2 - x\ell & -(x-\ell)^2 \\ -x^2 + x\ell & x^2 & -x^2 & x^2 - x\ell \\ x^2 - x\ell & -x^2 & x^2 & -x^2 + x\ell \\ -(x-\ell)^2 & x^2 - x\ell & -x^2 + x\ell & (\ell-x)^2 \end{bmatrix} dx dy \quad (3.25)$$

Intégration par rapport à x donne :

$$L_{(1)} = \int_y \begin{bmatrix} \frac{(x-\ell)^3}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} & \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} & -\frac{(x-\ell)^3}{3} \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} & -\frac{x^3}{3} & \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} \\ -\frac{(x-\ell)^3}{3} & \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} & -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} \end{bmatrix} dy \quad (3.26)$$

La matrice (3.26) n'est pas en fonction de y donc on peut sortir l'intégration comme facteur en commun et l'intégration entre 0 et h donne :

$$L_{(1)} = h \begin{bmatrix} \frac{(x-\ell)^3}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} & \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} & -\frac{(x-\ell)^3}{3} \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} & -\frac{x^3}{3} & \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} \\ -\frac{(x-\ell)^3}{3} & \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\ell}{2} & -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2\ell}{2} \end{bmatrix}_{x_1=0}^{x_2=\ell} \quad (3.27)$$

Après intégration de x entre 0 et ℓ :

$$L_{(1)} = h \begin{bmatrix} \frac{\ell^3}{3} & -\frac{\ell^3}{3} + \frac{\ell^3}{2} & \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{2} & -\frac{\ell^3}{3} \\ -\frac{\ell^3}{3} + \frac{\ell^3}{2} & \frac{\ell^3}{3} & -\frac{\ell^3}{3} & \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{2} \\ \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{2} & -\frac{\ell^3}{3} & \frac{\ell^3}{3} & -\frac{\ell^3}{3} + \frac{\ell^3}{2} \\ -\frac{\ell^3}{3} & \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{2} & -\frac{\ell^3}{3} + \frac{\ell^3}{2} & \frac{\ell^3}{3} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Après addition des fractions et en sortant les facteurs en commun l'équation s'écrit :

$$L_{(1)} = \frac{h\ell^3}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Pour satisfaire l'écriture matricielle intégrale (3.22) :

$$L_{(1)} = \frac{h\ell}{6} L_{e(1)} \quad (3.30)$$

L'équation matricielle pour (3.29) s'écrit :

$$L_{e(1)} = \ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Calcul de la matrice (3.21) :

$$L_{(2)} = \int_x \int_y \begin{bmatrix} (y-h)^2 & -(y-h)^2 & y(y-h) & -y(y-h) \\ -(y-h)^2 & (h-y)^2 & y(h-y) & -y(h-y) \\ y(y-h) & y(h-y) & y^2 & y(-y) \\ -y(y-h) & -y(h-y) & y(-y) & (-y)^2 \end{bmatrix} dy dx \quad (3.32)$$

Après distribution et multiplication :

$$L_{(2)} = \int_x \int_y \begin{bmatrix} (y-h)^2 & -(y-h)^2 & y^2 - yh & -y^2 + yh \\ -(y-h)^2 & (h-y)^2 & -y^2 + yh & y^2 - yh \\ y^2 - yh & -y^2 + yh & y^2 & -y^2 \\ -y^2 + yh & y^2 - yh & -y^2 & y^2 \end{bmatrix} dy dx \quad (3.33)$$

Intégration par rapport à y donne :

$$L_{(2)} = \int_x \begin{bmatrix} \frac{(y-h)^3}{3} & -\frac{(y-h)^3}{3} & \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} & -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} \\ -\frac{(y-h)^3}{3} & \frac{(y-h)^3}{3} & -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} & \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} \\ \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} & -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} & \frac{y^3}{3} & -\frac{y^3}{3} \\ -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} & \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} & -\frac{y^3}{3} & \frac{y^3}{3} \end{bmatrix} dx \quad (3.34)$$

La matrice (3.34) n'est pas en fonction de x donc on peut sortir l'intégration comme facteur en commun et l'intégration entre 0 et ℓ donne :

$$L_{(2)} = \ell \begin{bmatrix} \frac{(y-h)^3}{3} & -\frac{(y-h)^3}{3} & \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} & -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} \\ -\frac{(y-h)^3}{3} & \frac{(y-h)^3}{3} & -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} & \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} \\ \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} & -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} & \frac{y^3}{3} & -\frac{y^3}{3} \\ -\frac{y^3}{3} + \frac{y^2h}{2} & \frac{y^3}{3} - \frac{y^2h}{2} & -\frac{y^3}{3} & \frac{y^3}{3} \end{bmatrix}_{y_1=0}^{y_2=h} \quad (3.35)$$

Après intégration de y entre 0 et h :

$$L_{(2)} = \ell \begin{bmatrix} \frac{h^3}{3} & -\frac{h^3}{3} & \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} & -\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2} \\ -\frac{h^3}{3} & \frac{h^3}{3} & -\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2} & \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \\ \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} & -\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2} & \frac{h^3}{3} & -\frac{h^3}{3} \\ -\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2} & \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} & -\frac{h^3}{3} & \frac{h^3}{3} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Après addition des fractions et en sortant les facteurs en commun la matrice s'écrit :

$$L_{(2)} = \frac{\ell h^3}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Pour satisfaire l'écriture matricielle intégrale (3.22) :

$$L_{(2)} = \frac{\ell h}{6} L_{e(2)} \quad (3.38)$$

L'équation matricielle pour (3.37) s'écrit :

$$\mathbf{L}_e = h^2 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

La nouvelle écriture de \mathbf{L}_e est :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_e &= \frac{1}{(\ell h)^2} (L_{(1)} + L_{(2)}) \\ \mathbf{L}_e &= \frac{1}{(\ell h)^2} \left[\left(\frac{\ell h}{6} \right) (L_{e(1)} + L_{e(2)}) \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\mathbf{L}_e = \frac{1}{6\ell h} (L_{e(1)} + L_{e(2)}) \quad (3.40)$$

Un script MatLab a été réalisé pour vérifier les calculs de la matrice \mathbf{L}_e :

```

1  clear
2  clc
3  syms x b y h real
4  Np(1)=(1-x/b)*(1-y/h);
5  Np(2)=(x/b)*(1-y/h);
6  Np(3)=(x/b)*(y/h);
7  Np(4)=(1-x/b)*(y/h);
8  DNb = [diff(Np,x);diff(Np,y)]
9  Le=int(int(DNp'*DNp,x,0,b),y,0,h)

```

Les commandes `clear` et `clc` sont pour effacé toutes les variables créés dans l'espace de travail et effacé le contenu de la fenêtre de commande respectivement.

La 3^{ème} ligne, on insère les variables \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{b} et \mathbf{h} ; \mathbf{b} et \mathbf{h} désignent la largeur et la hauteur de l'élément, respectivement. De la ligne 4 à 7, on insères les fonctions de forme (3.15). La 8^{ème} ligne calcul le laplacien des fonctions de formes (3.15). La 9^{ème} ligne calcul la matrice \mathbf{L}_e , la 2^{ème} commande `int` à l'intérieur des parenthèses, calcule l'intégrale de la multiplication $\mathbf{DNp}' * \mathbf{DNp}$, \mathbf{DNp}' représente la transposé de \mathbf{DNp} , sur \mathbf{x} entre 0 et \mathbf{b} . La commande `int` calcule l'intégration résultante de la 1^{ère} intégration sur \mathbf{y} entre 0 et \mathbf{h}

3.2.3 Matrice d'interaction Q_e

En récapitulatif de l'expression de cette matrice, on a :

$$\mathbf{Q}_e = \int_{\Gamma_{fs}} N^{(i)T} N^{(b)} d\Gamma_{fs} \quad (3.41)$$

Les fonctions de formes :

$$N^{(i)} = \left\langle \begin{array}{cc} \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} & \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{array} \right\rangle \quad (3.42)$$

Les conditions aux limites :

$$y_1 = 0, y_2 = h \quad (3.43)$$

On remplace dans la fonction de forme (3.42) :

$$N^{(i)} = \left\langle 1 - \frac{y}{h} \quad \frac{y}{h} \right\rangle \quad (3.44)$$

Pour le calcul du polynôme de la poutre $N^{(b)}$ on a :

$$u(y) = N^{(b)} d \quad (3.45)$$

On a 4 DDL par élément, donc la fonction de forme s'écrit :

$$N^{(b)} = \left\langle N_1^{(b)} \quad N_2^{(b)} \quad N_3^{(b)} \quad N_4^{(b)} \right\rangle \quad (3.46)$$

Le vecteur de déplacement :

$$d = \left\langle u_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \theta_2 \right\rangle \quad (3.47)$$

L'équation de déplacement (3.45) se réécrit :

$$u(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 = \left\langle 1 \quad y \quad y^2 \quad y^3 \right\rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

L'équation de la rotation le long de la paroi s'écrit :

$$\theta(y) = \frac{du}{dy} = a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2 \quad (3.49)$$

Les conditions aux limites sont :

$$y = 0 \rightarrow a_0 = u_1, a_1 = \theta_1 \quad (3.50)$$

$$y = h \rightarrow u(y) = u_2, \theta(y) = \theta_2 \quad (3.51)$$

Après évaluation de (3.48) et (3.49) aux conditions aux limites :

$$u_2 = u_1 + \theta_1h + a_2h^2 + a_3h^3 \quad (3.52)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 2a_2h + 3a_3h^2 \quad (3.53)$$

On remplace (3.52) et (3.53) dans (3.47) :

$$d = \left\langle u_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \theta_2 \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

De (3.45) et (3.48) :

$$N^{(b)}d = \left\langle 1 \quad y \quad y^2 \quad y^3 \right\rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

On remplace (3.46) et (3.47) dans (3.55) :

$$\left\langle N_1^{(b)} N_2^{(b)} N_3^{(b)} N_4^{(b)} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \left\langle 1 \quad y \quad y^2 \quad y^3 \right\rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

On garde les fonctions de formes d'un côté et on prend le reste de l'autre côté :

$$\left\langle N_1^{(b)} N_2^{(b)} N_3^{(b)} N_4^{(b)} \right\rangle = \left\langle 1 \quad y \quad y^2 \quad y^3 \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.57)$$

Le calcul de l'inverse de la matrice donne :

$$\left\langle N_1^{(b)} N_2^{(b)} N_3^{(b)} N_4^{(b)} \right\rangle = \left\langle 1 \quad y \quad y^2 \quad y^3 \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{h^2} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{h^2} & -\frac{1}{h} \\ \frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Après distribution et multiplication les résultats pour les fonctions de formes sont :

$$\left\langle N_1^{(b)} N_2^{(b)} N_3^{(b)} N_4^{(b)} \right\rangle = \left\langle 1 - \frac{3y^2}{h^2} + \frac{2y^3}{h^3} \quad y - \frac{2y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2} \quad \frac{3y^2}{h^2} - \frac{2y^3}{h^3} \quad \frac{y^3}{h^2} - \frac{y^2}{h} \right\rangle \quad (3.59)$$

On remplace (3.44) et (3.59) dans (3.41) :

$$\mathbf{Q}_e = \int_{\Gamma_{fs}} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{y}{h} \\ \frac{y}{h} \end{Bmatrix} \left\langle 1 - \frac{3y^2}{h^2} + \frac{2y^3}{h^3} \quad y - \frac{2y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2} \quad \frac{3y^2}{h^2} - \frac{2y^3}{h^3} \quad \frac{y^3}{h^2} - \frac{y^2}{h} \right\rangle d\Gamma_{fs} \quad (3.60)$$

La distribution et la multiplication donne :

$$\mathbf{Q}_e = \int_{\Gamma_{fs}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{h} - \frac{3y^2}{h^2} + \frac{5y^3}{h^3} - \frac{2y^4}{h^4} & y - \frac{3y^2}{h} + \frac{3y^3}{h^2} - \frac{y^4}{h^3} & \frac{3y^2}{h^2} - \frac{5y^3}{h^3} + \frac{2y^4}{h^4} & -\frac{y^2}{h} + \frac{2y^3}{h^2} - \frac{y^4}{h^3} \\ \frac{y}{h} - \frac{3y^3}{h^3} + \frac{2y^4}{h^4} & \frac{y^2}{h} - \frac{2y^3}{h^2} + \frac{y^4}{h^3} & \frac{3y^3}{h^3} - \frac{2y^4}{h^4} & -\frac{y^3}{h^2} + \frac{y^4}{h^3} \end{bmatrix} d\Gamma_{fs} \quad (3.61)$$

Intégration par rapport y :

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} y - \frac{y^2}{2h} - \frac{y^3}{h^2} + \frac{5y^4}{4h^3} - \frac{2y^5}{5h^4} & \frac{y^2}{2} - \frac{3y^3}{3h} + \frac{3y^4}{4h^2} - \frac{y^5}{5h^3} & \frac{3y^3}{3h^2} - \frac{5y^4}{4h^3} + \frac{2y^5}{5h^4} & -\frac{y^3}{3h} + \frac{2y^4}{4h^2} - \frac{y^5}{5h^3} \\ \frac{y^2}{2h} - \frac{3y^4}{4h^3} + \frac{2y^5}{5h^4} & \frac{y^3}{3h} - \frac{2y^4}{4h^2} + \frac{y^5}{5h^3} & \frac{3y^4}{4h^3} - \frac{2y^5}{5h^4} & -\frac{y^4}{4h^2} + \frac{y^5}{5h^3} \end{bmatrix}^h_0 \quad (3.62)$$

Après intégration de y entre 0 et h :

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} h - \frac{h^2}{2h} - \frac{h^3}{h^2} + \frac{5h^4}{4h^3} - \frac{2h^5}{5h^4} & \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{h} + \frac{3h^4}{4h^2} - \frac{h^5}{5h^3} & \frac{h^3}{h^2} - \frac{5h^4}{4h^3} + \frac{2h^5}{5h^4} & -\frac{h^3}{3h} + \frac{2h^4}{4h^2} - \frac{h^5}{5h^3} \\ \frac{h^2}{2h} - \frac{3h^4}{4h^3} + \frac{2h^5}{5h^4} & \frac{h^3}{3h} - \frac{2h^4}{4h^2} + \frac{h^5}{5h^3} & \frac{3h^4}{4h^3} - \frac{2h^5}{5h^4} & -\frac{h^4}{4h^2} + \frac{h^5}{5h^3} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Après addition des fractions et en sortant les facteurs en commun la matrice s'écrit :

$$\mathbf{Q}_e = \frac{h}{20} \begin{bmatrix} 7 & h & 3 & -\frac{2}{3}h \\ 3 & \frac{2}{3}h & 7 & -h \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

```

1 clear
2 clc
3 syms y h real
4 Ni(1)=1-y/h;
5 Ni(2)=y/h;
6 Nb(1)=1-3*y^2/h^2+2*y^3/h^3;
7 Nb(2)=y-2*y^2/h+y^3/h^2;
8 Nb(3)=3*y^2/h^2-2*y^3/h^3;
9 Nb(4)=y^3/h^2-y^2/h;
10 Qe=int(Ni'*Nb,y,0,h)

```

Les commandes `clear` et `clc` sont pour effacé toutes les variables créés dans l'espace de travail et effacé le contenu de la fenêtre de commande respectivement.

La 3^{ème} ligne, on insère les variables y et h . De la ligne 4 et 5, on insères les fonctions de forme Ni (3.44). De la ligne 6 à 9, on insères les fonctions de forme Nb (3.59) La 10^{ème} \mathbf{Q}_e , la commande `int` calcule l'intégrale de la multiplication $Ni' * Nb$, Ni' représente la transposé de Ni , sur y entre 0 et h .

3.3 Calcul des matrices de la structure

3.3.1 Matrice masse M_e

En récapitulatif de l'expression de cette matrice, on a :

$$\mathbf{M}_e = \rho A \int_{H_s} N^{(b)T} N^{(b)} dy \quad (3.65)$$

Les fonctions de formes $N^{(b)}$ sont discrétisé en (3.59) :

$$N^{(b)} = \left\langle 1 - \frac{3y^2}{h^2} + \frac{2y^3}{h^3} \quad y - \frac{2y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2} \quad \frac{3y^2}{h^2} - \frac{2y^3}{h^3} \quad \frac{y^3}{h^2} - \frac{y^2}{h} \right\rangle \quad (3.66)$$

On remplace dans (3.65) :

$$\mathbf{M}_e = \rho A \int_{H_s} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3y^2}{h^2} + \frac{2y^3}{h^3} \\ y - \frac{2y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2} \\ \frac{3y^2}{h^2} - \frac{2y^3}{h^3} \\ \frac{y^3}{h^2} - \frac{y^2}{h} \end{pmatrix} \left\langle 1 - \frac{3y^2}{h^2} + \frac{2y^3}{h^3} \quad y - \frac{2y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2} \quad \frac{3y^2}{h^2} - \frac{2y^3}{h^3} \quad \frac{y^3}{h^2} - \frac{y^2}{h} \right\rangle dy \quad (3.67)$$

De là, le code MatLab suivant a été programmé pour calculé la suite de la matrice :

```

1      clear
2      clc
3      syms y h real
4      Nb(1)=1-3*y^2/h^2+2*y^3/h^3;
5      Nb(2)=y-2*y^2/h+y^3/h^2;
6      Nb(3)=3*y^2/h^2-2*y^3/h^3;
7      Nb(4)=y^3/h^2-y^2/h;
8      Me=int(Nb'*Nb,y,0,h)

```

Les commandes `clear` et `clc` sont pour respectivement, effacé toutes les variables créés dans l'espace de travail et effacé le contenu de la fenêtre de commande.

La 3^{ème} ligne, on insère les variables qui dans notre cas sont `y` et `h`. De la ligne 4 à la ligne 7, on insères les fonctions de forme (3.59). La 8^{ème} ligne, le calcul de la matrice \mathbf{M}_e , la commande `int` calcule l'intégrale de la multiplication `Nb'*Nb`, `Nb'` représente la transposé

de Nb, sur y entre 0 et h.

Le résultat de cette programmation nous donne la matrice suivante :

$$\mathbf{M}_e = \rho A \begin{bmatrix} \frac{13h}{35} & \frac{11h^2}{210} & \frac{9h}{70} & -\frac{13h^2}{420} \\ \frac{11h^2}{210} & \frac{105}{13h^2} & \frac{420}{13h} & -\frac{140}{11h} \\ \frac{70}{13h^2} & \frac{420}{h^3} & \frac{35}{11h^2} & -\frac{210}{h^3} \\ -\frac{420}{420} & -\frac{140}{140} & -\frac{210}{210} & \frac{105}{105} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

En sortant les facteurs en commun la matrice \mathbf{M}_e s'écrit :

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho Ah}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

3.3.2 Matrice de rigidite K_e

En considérant EI constant, on a :

$$\mathbf{K}_e = EI \int_{H_s} \frac{d^2 N^{(b)T}}{dy^2} \frac{d^2 N^{(b)}}{dy^2} dy \quad (3.70)$$

Les fonctions de formes $N^{(b)}$ sont discrétisé en (3.59) :

$$N^{(b)} = \left\langle 1 - \frac{3y^2}{h^2} + \frac{2y^3}{h^3} \quad y - \frac{2y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2} \quad \frac{3y^2}{h^2} - \frac{2y^3}{h^3} \quad \frac{y^3}{h^2} - \frac{y^2}{h} \right\rangle \quad (3.71)$$

La double dérivé de (3.71) par rapport à y donne :

$$\frac{d^2 N^{(b)}}{dy^2} = \left\langle -\frac{6}{h^2} + \frac{12y}{h^3} \quad -\frac{4}{h} + \frac{6y}{h^2} \quad \frac{6}{h^2} - \frac{12y}{h^3} \quad \frac{6y}{h^2} - \frac{2}{h} \right\rangle \quad (3.72)$$

On remplace dans (3.70) :

$$\mathbf{K}_e = EI \int_{H_e} \begin{pmatrix} -\frac{6}{h^2} + \frac{12y}{h^3} \\ \frac{4}{h} + \frac{6y}{h^2} \\ \frac{6}{h^2} - \frac{6}{h^3} \\ \frac{6y}{h^2} - \frac{2}{h} \end{pmatrix} \left\langle -\frac{6}{h^2} + \frac{12y}{h^3} \quad -\frac{4}{h} + \frac{6y}{h^2} \quad \frac{6}{h^2} - \frac{12y}{h^3} \quad \frac{6y}{h^2} - \frac{2}{h} \right\rangle dy \quad (3.73)$$

De là un code MatLab a été programmé pour calculé la suite de la matrice, le programme utilisé est :

```

1      clear
2      clc
3      syms y h real
4      Nb(1)=1-3*y^2/h^2+2*y^3/h^3;
5      Nb(2)=y-2*y^2/h+y^3/h^2;
6      Nb(3)=3*y^2/h^2-2*y^3/h^3;
7      Nb(4)=y^3/h^2-y^2/h;
8      d2Nb = diff(diff(Nb,y));
9      Ke=int(d2Nb'*d2Nb,y,0,h)

```

Le même enchainement pour le calcul de la matrice \mathbf{M}_e est prise. Les commandes `clear` et `clc` efface respectivement toutes les variables créés dans l'espace de travail et le contenu de la fenêtre de commande.

La 3^{ème} ligne, les variables sont insérée, dans notre cas `y` et `h`. De la ligne 4 à la ligne 7, on insères les fonctions de forme (3.71). La 8^{ème} ligne, le calcul de la 2^{ème} dérivé de `Nb` par rapport à `y` grâce à la commande `diff`. La 9^{ème} ligne calcul la matrice \mathbf{K}_e , la commande `int` calcul l'intégrale de la multiplication `d2Nb'*d2Nb`, `d2Nb'` représente la transposé de `d2Nb`, sur `y` entre 0 et `h`.

$$\mathbf{K}_e = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} \\ \frac{6}{h^2} & \frac{4}{h} & -\frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} \\ -\frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} & \frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} \\ \frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & -\frac{6}{h^2} & \frac{4}{h} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

En sortant les facteurs en commun la matrice M_e s'écrit :

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

3.3.3 Vecteur force F_e

En récapitulatif de l'expression de cette matrice, on a :

$$\mathbf{F}_e = \left(\int_{H_e} N^{(b)T} N^{(i)} dy \right) \mathbf{P} = \mathbf{Q}_e^T \mathbf{P} \quad (3.76)$$

La matrice Q_e est discrétisée en (3.64), sa transposée est :

$$\mathbf{Q}_e^T = \frac{h}{20} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ h & \frac{2}{3}h \\ 3 & 7 \\ -\frac{2}{3}h & -h \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Applications numériques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, une application numérique est étudiée pour illustrer les élévations engendrées dans les réservoirs. Un modèle 2D a été pris pour étudier le phénomène du ballotement, 2 études ont été entreprises, la 1^{ère} étude est le cas d'un réservoir à parois rigides, la 2^{ème} étude est le cas d'un réservoir à parois flexibles.

Pour les 2 cas, une étude fréquentielle et temporelle seront faites, différents logiciels peuvent être pris en considération (MatLab, COMSOL Multiphysics, ANSYS Fluent, Abaqus, OpenFOAM, SU2, Elmer FEM solver,... etc). Pour nos études on utilisera MATLAB pour le calcul de la solution fréquentielle, et un logiciel multiphysique pour la résolution temporelle. Et quelques exemples sur l'influence de la précision des calculs dans les résultats trouver.

4.2 Présentation des logiciels

MATLAB de son nom complet "Matrix Laboratory" est un langage de script simulé par l'environnement de développement, utilisé à des fins de calcul numérique permettant de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, d'implémenter des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs et d'interagir avec d'autres langages tels que C, C++, Java et Fortran. Quels que soient les phénomènes physiques et les applications de recherche, des composants supplémentaires fournissent des fonctions spécialisées pour l'électromagnétisme, la mécanique structurelle, l'acoustique, l'écoulement des fluides, le transfert de chaleur et le génie chimique.

Le logiciel multiphysique utilisé, est un logiciel de simulation numérique basé sur la méthode des éléments finis. Le logiciel peut simuler de nombreuses applications de physique et d'ingénierie, en particulier des phénomènes de couplage ou des simulations multiphysiques.

4.3 Présentation du cas étudié

Pour notre étude on reprendra les dimensions déjà étudié pour un cas d'un réservoir rectangulaire à béton armé publié dans un article en 2011 par A. Seghir, G. Bonnet et A. Tahakourt [5]. La géométrie du réservoir est affiché dans la figure 4.1 . La hauteur des parois $H=10\text{m}$, la longueur du réservoir $\ell=20\text{m}$, la hauteur du fluide $h=9\text{m}$, le module de Young $E=3200\text{MPa}$, la masse spécifique du béton $\rho_s=2500\text{kN/m}^3$ et du fluide $\rho_f=1000\text{kg/m}^3$, l'épaisseur des parois varie de $e=30\text{cm}$, 40cm et 50cm afin d'examiner l'effet de la flexibilité du réservoir.

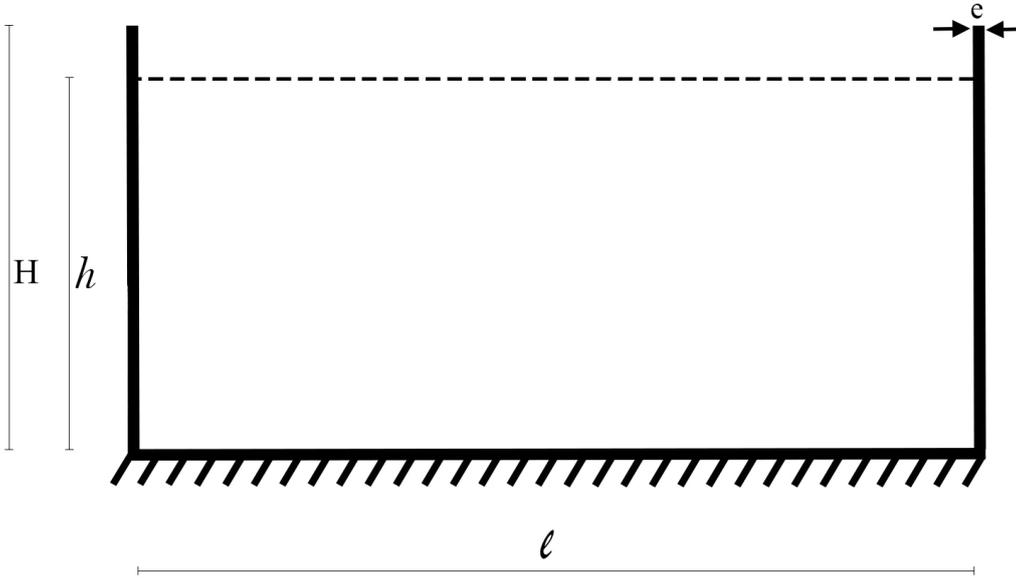


Figure 4.1: Dimension du réservoir

4.4 Cas d'un réservoir à parois rigides

Cas de paroi rigide l'IFS n'est pas prise en considération vu qu'il n'y a aucun mouvement de la part des parois, dans l'équation (2.40), $\ddot{U} = 0$, et l'équation (2.42) s'écrit :

$$\mathbf{G}_e \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{L}_e \mathbf{P} = -\rho_F \mathbf{Q}_e \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (4.1)$$

4.4.1 Etude de la réponse fréquentielle

Dans le but de calculer la réponse fréquentielle du fluide sans tenir compte des parois et de l'interaction fluide-structure, l'équation (4.1) est réécrite pour une excitation de support, harmonique d'amplitude unitaire $\bar{u}_g = 1m/s^2$, comme suit :

$$(\mathbf{L}_e - \omega^2 \mathbf{G}_e) \bar{\mathbf{P}} = -\rho_f \mathbf{Q}_e \mathbf{I} \quad (4.2)$$

Le vecteur $\bar{\mathbf{P}}$ représente l'ensemble des valeurs des pressions maximales dans le fluide. La résolution de cette équation pour ω variant de 0.5 rad/s à 5.5 rad/s, donne des élévations $\eta(\omega)$ de surface libre à la paroi droite comme montré sur les figures 4.2 et 4.3. Les élévations s'obtiennent selon l'équation (2.7) où P est extrait du vecteur $\bar{\mathbf{P}}$ au nœud du coin haut à droite. Les expressions des matrices \mathbf{L}_e , \mathbf{G}_e et \mathbf{Q} représentent respectivement la matrice de masse (3.10), la masse rigidité (3.40) et la matrice force (3.64).

Ci dessous le script MATLAB utilisé pour extraire le vecteur $\bar{\mathbf{P}}$:

```

1      %% System KF - w^2 MF = FORCE EXT (Eq. 4.2)
2      %i = findnodes(ms,[a,H]);
3      W = [0.5:0.0025:10];
4      Ps=[];
5      for w = W
6          D = K - w^2*M;
7          P = D\F;
8          Ps = [Ps P(end)];
9      end

```

La 3^{ème} on insère la variation de ω . La 4^{ème}, on initialise une matrice vide qui servira à enregistrer les solutions du vecteur $\bar{\mathbf{P}}$. A partir de la 5^{ème} une boucle commence pour calculer la solution de P pour chaque excitation de fréquence, et les solutions seront sauvegardés dans la matrice Ps.

Les pics des figures correspondent aux fréquences propres de ballonnement du fluide. Les valeurs de ces fréquences peuvent être déterminées en appliquant l'expression analytique de [56] qui est donnée comme suit :

$$\omega_n^2 = g \frac{n\pi}{\ell} \tanh\left(\frac{n\pi}{\ell} h\right) \quad (4.3)$$

Les courbes sur les figure qui suivent sont obtenue en fixant différent tailles d'éléments

pour une meilleure visualisation des solutions et de leurs précisions pour les calculs qui suivront.

Les deux figures 4.2 et 4.3 représentent graphiquement les élévations du fluide aux niveaux de la paroi droite calculé numériquement sur MatLab. Les points en jaunes représentent les solutions exactes des l'expressions (4.3).

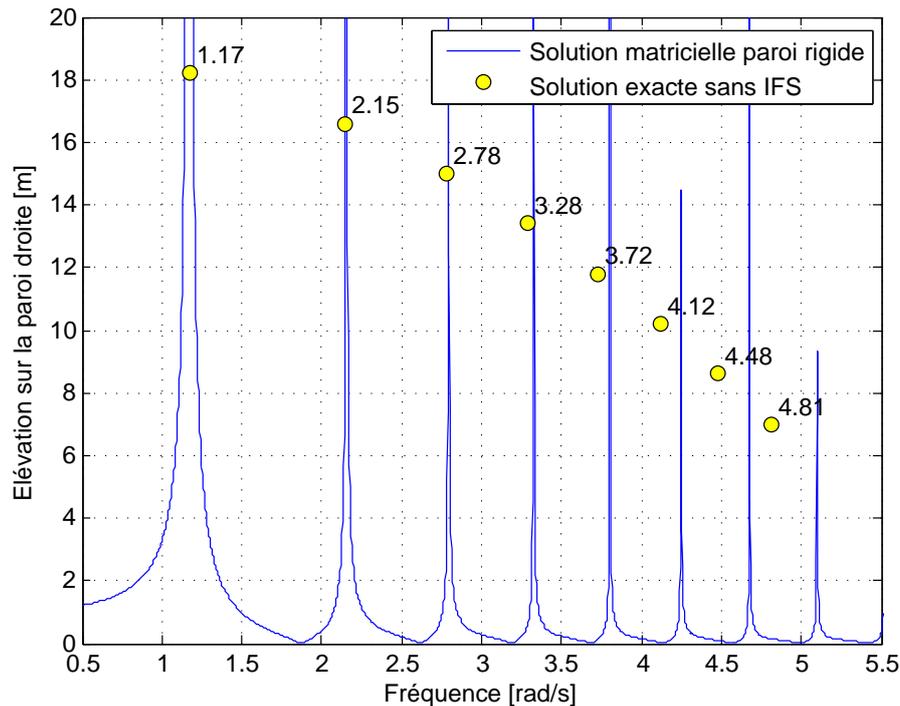


Figure 4.2: La réponse fréquentielle avec une taille d'éléments de 0.5m

Pour l'étude, on a pris des fréquences variant de 0.5 rad/s à 5.5 rad/s avec un pas de 0.0025 rad/s pour le calcul des élévations sur les parois, la figure 4.2 on a pris un maillage avec une taille de 0.5m pour chaque éléments, comparé aux solutions exactes on remarque que les trois 1^{er} pics valide les calculs, mais après les solutions s'éloignent de la solutions exact, dans une 2^{ème} étude, la figure 4.3 un maillage avec une taille de 0.1m pour chaque éléments a été pris, la comparaison entre les solutions numériques et la solutions exact sont plus proches, voir même exact. Ses figures démontrent clairement l'apparition de résonances pour un fluide dans un réservoir sous une hypothèse rigide. Les pics de résonance coïncident exactement avec les fréquences des modes de ballottements de la solutions exact.

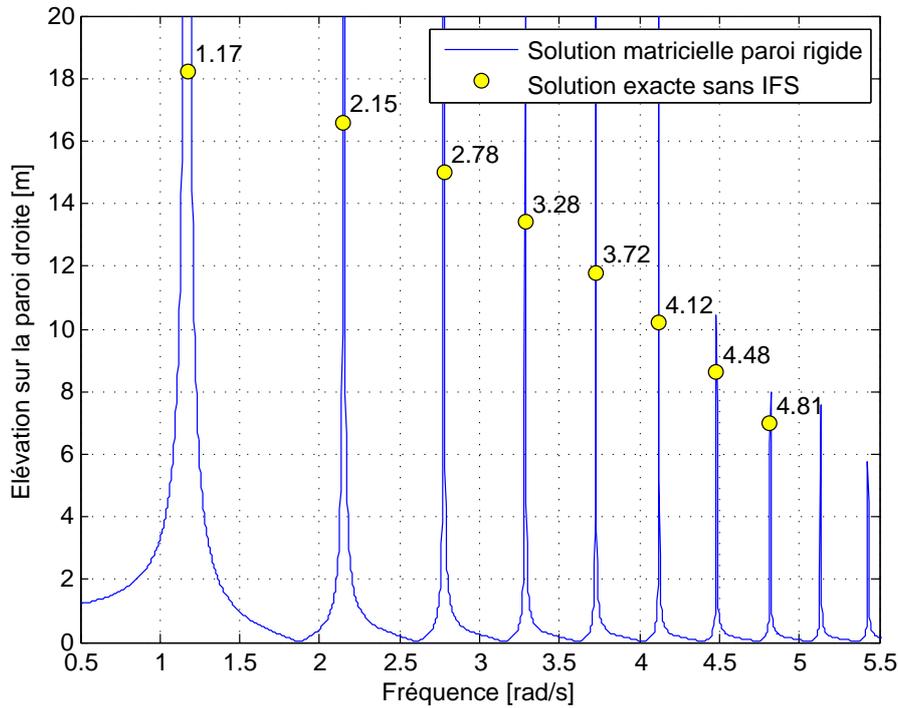


Figure 4.3: La réponse fréquentielle avec une taille d'éléments de 0.1m

4.4.2 Etude de la réponse temporelle

En 1^{er} lieu, une configuration des différents paramètres (dimension, caractéristique géométrie et physique...) ont été entrepris dans les tableaux 4.1 et 4.2.

Dans le tableau 4.1, on retrouve différents paramètres pour la modélisation de notre cas d'étude, ses paramètres sont constantes. μ et ρ sont les caractéristiques du fluide qui représentent respectivement la viscosité dynamique et la masse volumique. L et H sont les dimensions du fluides. i_mod , S , f_s et f_r sont des paramètres pour le calcul de la pulsation w_imod . w et la pulsation de l'excitation. b et A sont des amplitudes des déplacements et des accélérations. τ et T_b la période et le temps de battements respectivement.

Le tableau 4.2 représente les variables, pour les variables on retrouve une seule variable qui est l'accélération horizontale en fonction de A et w déjà configurer dans le tableau 4.1 et de τ qui représente le temps en secondes (s).

Tableau 4.1: Paramètres utilisés pour le calcul de la réponse temporelle cas parois rigide

▼ Paramètres			
Nom	Expression	Valeur	Description
μ	0.001[Pa*s]	0.001 Pa·s	Viscosité dynamique
ρ	1000 [kg/m ³]	1000 kg/m ³	masse volumique
L	20[m]	20 m	Largeur du réservoir
H	9[m]	9 m	Hauteur du fluide
i_mod	1	1	Le numéro du mode
S	i_mod/(L)	0.05 1/m	paramètre pour le calcul...
fs	$g_const * S * \tanh(\pi * H * S) / (4 * \pi)$	0.03466 1/s ²	paramètre pour le calcul...
fr	sqrt(fs)	0.18617 1/s	paramètre pour le calcul...
w_imod	2*pi*fr	1.1698 1/s	Pulsation du mode 1
w	0.9*w_imod	1.0528 1/s	Pulsation de l'excitation
b	0.04[m]	0.04 m	Amplitude des déplacem...
A	b*w ²	0.044334 m/s ²	Amplitude des accélérations
T	1/fr	5.3714 s	Période temporelle
Tb	2*pi/(w_imod-w)	53.714 s	Temps de battement

Tableau 4.2: Les variables pour le calcul de la réponse temporelle cas parois rigide

▼ Variables			
Nom	Expression	Unité	Description
ax	-A*sin(w*t)	m/s ²	Gravity vector x compon...

Dans cette partie d'étude deux pas de calculs différents ont été pris pour calculer la réponse temporelle pour l'élévation de la surface libre sur la paroi droite du réservoir. De la figure 4.2 et 4.3, on remarque que le 1^{er} mode de fréquence d'après la solution exacte est $\omega_1 = 1.17$ rad/s. Pour l'étude temporelle on fixe une fréquence d'excitation à $\omega_e = 0.9\omega_1 = 1.053$ rad/s et on calcule les élévations par rapport aux temps de la surface libre sur les parois.

La figure 4.4 représente 3 graphes décrivant les élévations de la surface libre sur la paroi droite avec trois degrés de tolérances différentes (10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-6}). Avec un pas de calcul de type BDF Euler "The Backward Differentiation Formula", ce pas de calcul utilise des formules de différenciation descendante implicite avec un ordre de précision variant de 1 à 5. La méthode est utilisée depuis longtemps et elle est connue pour sa stabilité. Cependant, il peut y avoir de graves effets d'amortissement, comme on peut le visualiser avec une tolérance de 10^{-2} .

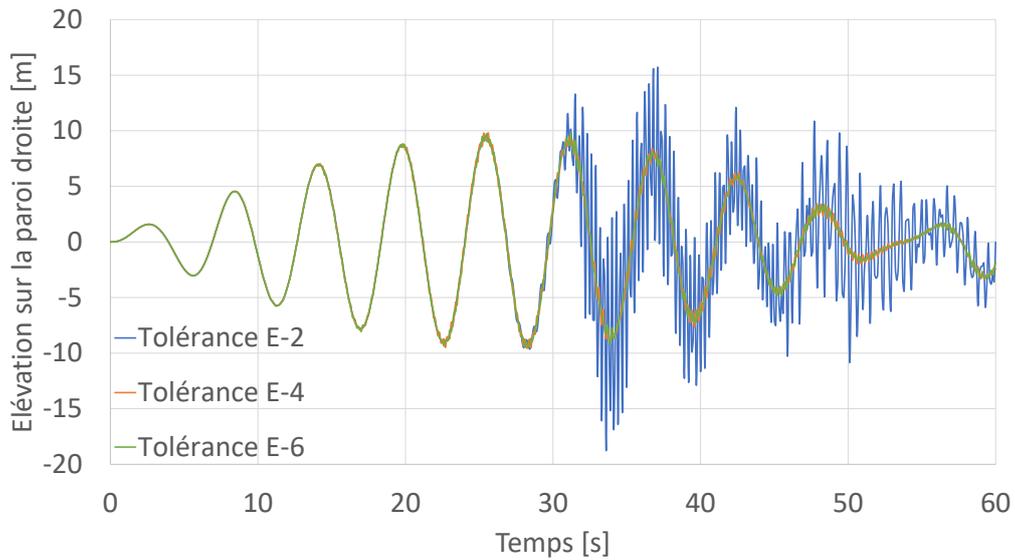


Figure 4.4: La réponse temporelle avec un pas de calcul de type BDF Euler et avec différentes tolérances

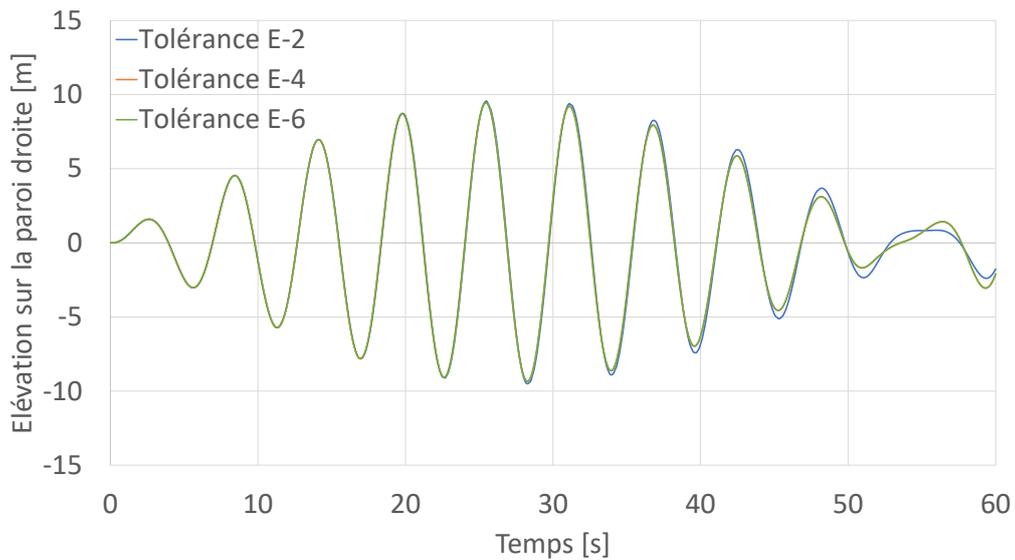


Figure 4.5: La réponse temporelle avec un pas de calcul de type Alpha Généralisé et avec différentes tolérances

La figure 4.5 représente 3 graphes décrivant les élévations de la surface libre sur la paroi droite avec trois degrés de tolérances différentes (10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-6}). Avec un pas de calcul de type Alpha généralisé, cette méthode a des propriétés similaires à celles du BDF de second ordre, mais la technologie sous-jacente est différente. Il contient un paramètre, appelé alpha dans la littérature, pour contrôler le degré d'amortissement des

hautes fréquences. Comparé au BDF (avec un ordre maximum de **2**), l'alpha généralisé a beaucoup moins d'amortissement et est donc plus précis, comme le montre bien les graphiques. On remarque qu'à partir d'une tolérance de 10^{-4} les résultats coïncident avec celle d'une tolérance de 10^{-6} .

Pour une meilleure visualisation de l'élévation maximale de la surface libre sur la paroi droite, on représente sur la figure suivante une seule graphe.

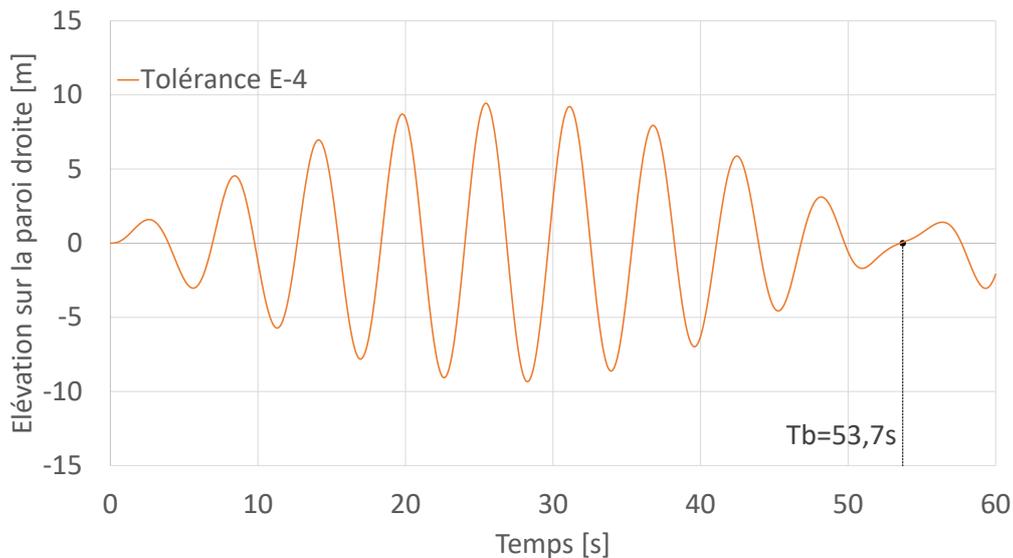


Figure 4.6: La réponse temporelle avec un pas de calcul de type Alpha Généralisé et une tolérance de 10^{-4}

La figure 4.6 représente les élévations de la surface libre sur la paroi droite avec une tolérance relative de 10^{-4} . La tolérance relative est liée aux critères de convergence. De manière générale, les critères de convergence se réfèrent à :

$$”\left| \frac{(solution\ actuelle - solution\ précédente)}{solution\ actuelle} \right| < tolérance\ relative”$$

Si la condition est satisfaite, on obtiendra une convergence. Donc, si on diminue la tolérance relative, on obtiendra une solution plus précise si notre problème peut converger. Cependant, sa nous coûtera plus de temps en raison du fait que plus d'itérations seront implémentées. Et comme remarqué après une tolérance de 10^{-4} les résultats sont les plus précises pour cette étude et les solutions se coïncident avec de plus grandes tolérances relatives.

La période de battements se distingue mieux, la période de battement est la solution qui s'amplifie à un max et puis s'annule et recommence en cycle indéfiniment avec le même

pas de temps à chaque fois, c'est la réflexion d'onde entre les parois, aussi appelé période de modulation qui est donnée par :

$$T_b = \frac{2\pi}{|\omega_e - \omega_1|} \quad (4.4)$$

où :

ω_e : est la fréquence d'excitation.

ω_1 : est la fréquence du 1^{er} mode de ballottement de la masse fluide. D'après la solution exacte 4.3 $\omega_1 = 1.168 \text{ rad/s}$

Pour le 1^{er} mode de ballottement, le temps de battement est :

$$T_1 = \frac{2\pi}{|\omega_e - \omega_1|} = \frac{2\pi}{|1.053 - 1.17|} = 53.7 \text{ secondes} \quad (4.5)$$

Cette valeur est bien représentée dans la figure 4.6. On la retrouve à chaque cycle de battement comme le montre la figure 4.7 qui visualise la réponse sur un temps de deux cycles.

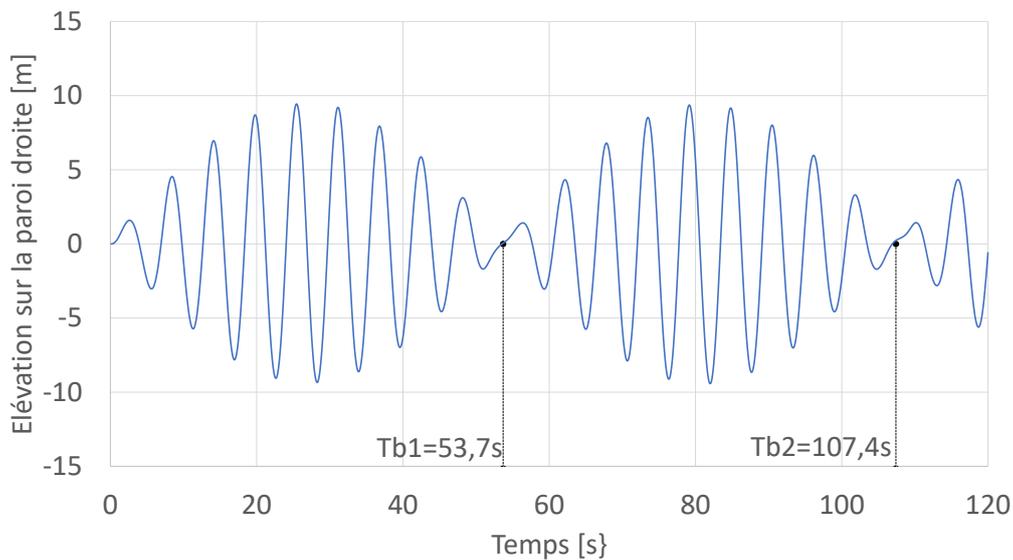


Figure 4.7: Visualisation de deux périodes de battements

La figure 4.7 montre clairement les deux période de battements, le 1^{er} temps de battements calculé est $T_{b1} = 53.7 \text{ s}$, sa valeur est en très bonne concordance avec celle représentée dans le graphe. Le 2^{ème} temps de battements est $T_{b2} = 107.4 \text{ s} = 2 * T_{b1}$, aussi coïncide exactement avec la seconde valeur représentée sur la figure.

Ces résultats corroborent ceux de l'étude fréquentielle, tracés sur la figure 4.3 et validés

par les valeurs des fréquences exactes.

4.5 Cas d'un réservoir à parois flexibles

Pour ce cas, l'interaction fluide-structure est prise en considération, l'écriture matricielle (2.43) est reprise ici pour rappel :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{Q}_e & \mathbf{G}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{Q}_e^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_e \\ -\rho_F \mathbf{Q}_e \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{U}}_g\} \quad (4.6)$$

Dans cette 2^{ème} partie du chapitre, des études ont été menées pour deux cas d'épaisseurs de parois différentes (30 cm et 60 cm) sont exposées. Pour les deux cas, on présente les résultats de l'étude de la réponse fréquentielle et ceux de la réponse temporelle.

4.5.1 Etude de la réponse fréquentielle

En fréquentielle l'équation 4.6 s'écrit pour une excitation de support, harmonique d'amplitude unitaire $\ddot{u}_g = 1 \text{ m/s}^2$, comme suit :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{Q}_e^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \rho_F \mathbf{Q}_e & \mathbf{G}_e \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_e \\ -\rho_F \mathbf{Q}_e \end{bmatrix} \{\mathbf{I}\} \quad (4.7)$$

En se basant sur l'étude de convergence des réponses temporelle et fréquentielle exposées précédemment pour le cas de parois rigides, la tolérance relative est fixée ici à 1E-4 et la taille des éléments est prise de l'ordre de 10 cm.

La solution des équations matricielles (4.7) pour une fréquence ω variant de 0.5 rad/s à 5.5 rad/s sera tracée pour un point de surface libre en contact avec la paroi droite. Les fréquences exactes de ballonnement considérant des parois rigides (expression 4.3) seront aussi rapportées sur les mêmes graphiques pour comparaison.

Ci dessous le script MatLab pour la résolution des calculs :

```

1 %% FRF
2 W = [0.5:0.0025:5.5];
3 ip = 2*nns+nodes(msf,[Lf,Hf]);
4 iu = 2*nns-1;
5 [Ps U] = frfc(KC,MC,FC,W,ip,iu)

```

Le script pour la fonction `frfc` est :

```

1  function [Ps Uw]=frfc(K,M,F,W,ip,iu)
2  Ps = 0*W;
3  Uw = Ps;
4  N = length(W);
5  parfor (i=1:N)
6      w = W(i);
7      D = K - (w^2)*M;
8      U = D\F;
9      Ps(i) = abs(U(ip));
10     Uw(i) = abs(U(iu));
11 end

```

Le script pour la fonction `frfc` fonctionne de la même manière que celle pour des réponses fréquentielles à paroi rigide, sauf que le vecteur U de l'interaction y est ajouté et sauvegardé en même temps mais séparément.

Cas des parois à 30 cm d'épaisseur

La figure 4.8 représente les élévations maximales de la surface libre sur la paroi droite en fonction de la variation de fréquence d'excitation ω . Comme pour les solutions de l'étude fréquentielle pour des parois rigides, la figure démontrent clairement l'apparition de pics de résonance de ballonnement du fluide dans un réservoir à paroi flexible. Ces pics de résonance sont légèrement décalés vers les faibles valeurs des fréquences. Les fréquences correspondantes à ces pics sont donc légèrement inférieures à celles du cas de réservoir à parois rigides. Ce décalage est d'autant plus notable pour des parois avec des épaisseurs plus minces comme le montre la figure 4.9 où est tracé la réponse de l'étude d'un cas des parois d'épaisseur de 15 cm. Des pics de résonance se produisent bien avant celle des fréquences des modes de ballonnements calculé depuis la solution exacte (4.3), plus l'épaisseur des parois sont faibles plus la structures résonne à de plus faible fréquence.

A partir de la réponse en fréquence 4.8, on a la fréquence naturelle du fluide, qui correspond au premier pic, de valeur : $\omega_{1s} = 1.143$ rad/s. La fréquence d'excitation est $\omega_e = 0.9\omega_1 = 1.053$ rad/s ($\omega_1 = 1.17$ rad/s étant la fréquence naturelle du fluide seul). La période de battement de la réponse temporelle du système couplé devrait être proche de :

$$T_{bs} = \frac{2\pi}{|\omega_e - \omega_{1s}|} = \frac{2\pi}{|1.053 - 1.143|} = 69.81 \text{ secondes} \quad (4.8)$$

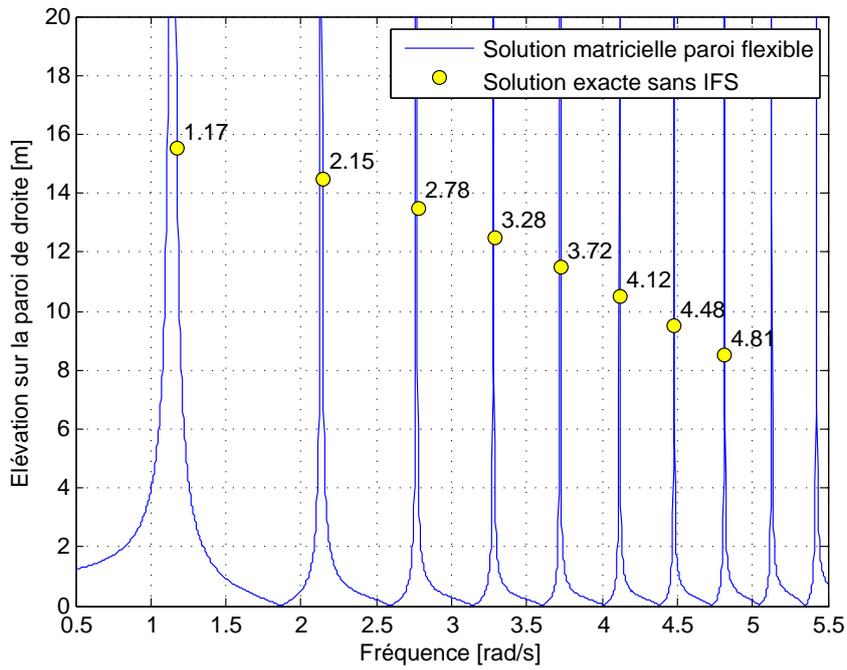


Figure 4.8: La réponse fréquentielle pour des parois flexibles d'épaisseur 30cm

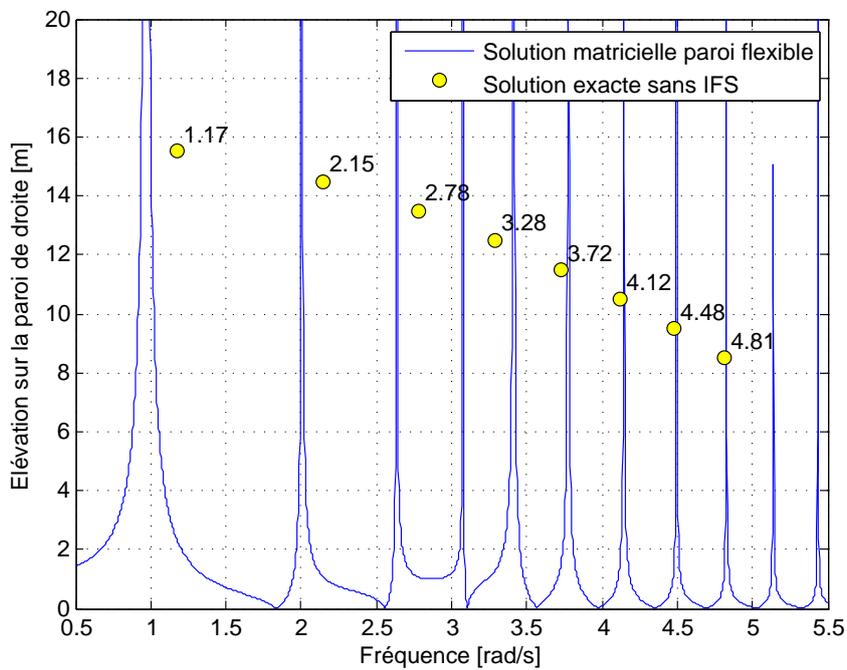


Figure 4.9: La réponse fréquentielle pour des parois flexibles d'épaisseur 15cm

Cas des parois à 60cm d'épaisseur

La figure qui suis représente les élévations de la surface libre sur la paroi droite par rapport à la variation des fréquences.

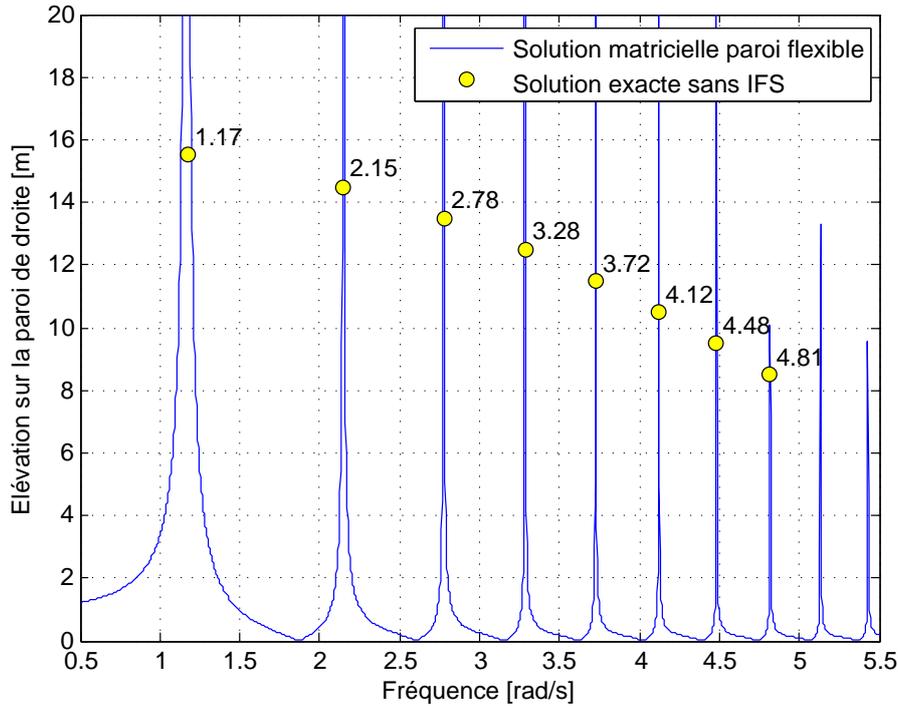


Figure 4.10: La réponse fréquentielle pour des parois flexibles d'épaisseur 60cm

La figure 4.10 représente les élévations de la surfaces libre sur la paroi droite du réservoir pour chaque résonance, comme pour les solutions précédentes, la figure démontrent clairement l'apparition de résonances pour un fluide dans un réservoir à paroi flexible. Les pics de résonance sont légèrement décalées avec les fréquences des modes de ballottage de la solutions exacte (4.3). Dans le cas de paroi à 60cm d'épaisseur, les résultats se rapprochent de ceux des parois rigides. A partir de la réponse en fréquence 4.10, on a la fréquence naturelle du fluide, qui correspond au premier pic, de valeur : $\omega_{1s} = 1.168$ rad/s. La fréquence d'excitation est $\omega_e = 0.9\omega_1 = 1.053$ rad/s ($\omega_1 = 1.17$ rad/s étant la fréquence naturelle du fluide seul). La période de battement de la réponse temporelle du système couplé devrait être proche de :

$$T_{bs} = \frac{2\pi}{|\omega_e - \omega_{1s}|} = \frac{2\pi}{|1.053 - 1.168|} = 54.64 \text{ secondes} \quad (4.9)$$

4.5.2 Etude de la réponse temporelle

Pareil que lors de l'étude prise pour les parois rigide, les tableaux suivants affiche les différents paramètre établis :

Tableau 4.3: Paramètres utilisés pour le calcul de la réponse temporelle cas parois flexible

▼ Paramètres			
» Nom	Expression	Valeur	Description
rhoF	1000[kg/m ³]	1000 kg/m ³	
rhoS	2500[kg/m ³]	2500 kg/m ³	
LF	20[m]	20 m	
HF	9[m]	9 m	
HR	10[m]	10 m	
ES	32000[MPa]	3.2E10 Pa	
nuS	0.2	0.2	
tw	60[cm]	0.6 m	
n	1	1	
wn	$\sqrt{g_const * n * \pi / LF * \tanh(n * \pi * HF / LF)}$	1.1698 1/s	
Tn	$2 * \pi / wn$	5.3714 s	
we	$0.9 * wn$	1.0528 1/s	
acc	$5[m] * we^2$	5.5417 m/s ²	

Le tableau 4.3 représente les différents paramètres pour la modélisation de se second cas d'étude. Les paramètres pour le fluide sont : rhoF la masse volumique, LF la longueur, HF la hauteur.

Les paramètres des parois : masse volumique, HR la hauteur, ES le module de Young, nuS coefficient de Poisson, tw l'épaisseur.

Les paramètres pour la fréquence et l'excitation : n la n^{ième} période de fréquence, wn la pulsation, Tn la période, we la fréquence d'excitation et acc l'amplitude de l'accélération.

Tableau 4.4: Les variables pour le calcul de la réponse temporelle cas parois flexible

▼ Variables			
» Nom	Expression	Unité	Description
Accx	$acc * \sin(we * t)$	m/s ²	

Le tableau 4.4 représente les variables, le même qu'on retrouve pour les cas d'étude des paroid rigides, qui est l'accélération horizontale.

Cas des parois à 30cm d'épaisseur

La figure suivante montre les élévations de la surface libre sur la paroi droite :

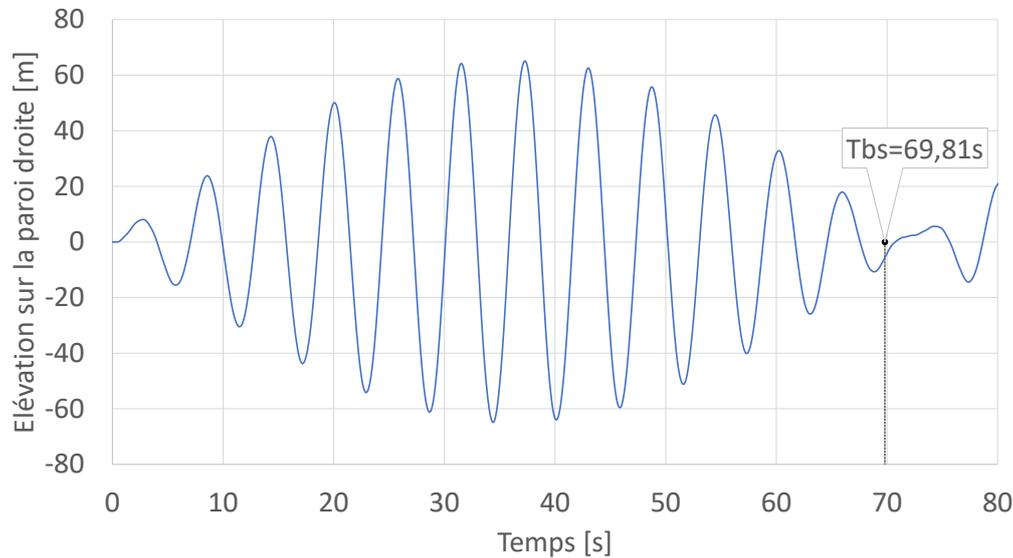


Figure 4.11: La réponse temporelle pour des parois flexibles d'épaisseur 30cm

La figure 4.11 représente les élévations de la surface libre calculé sur la paroi droite. On y a représenté le temps de battement calculé à l'équation (4.8) d'après la fréquence du 1^{er} mode trouver dans la figure 4.8, on vois que le temps de battements de la figure et celle calculé sont très proche.

Cas des parois à 60cm d'épaisseur

La figure 4.12 représente les élévations de la surface libre calculé sur la paroi droite. On y a représenté le temps de battement calculé 4.9 d'après la fréquence du 1^{er} mode trouver dans la figure 4.10, on vois que le temps de battements de la figure et celle calculé sont assez proche à presque une seconde d'écart. On remarque aussi qu'elle se rapproche de la période de battement pour le cas des parois rigides . Donc plus l'épaisseur des parois augmentent, plus les calculs pour un cas de paroi flexible renvoient à des calculs pour un cas de parois rigides.

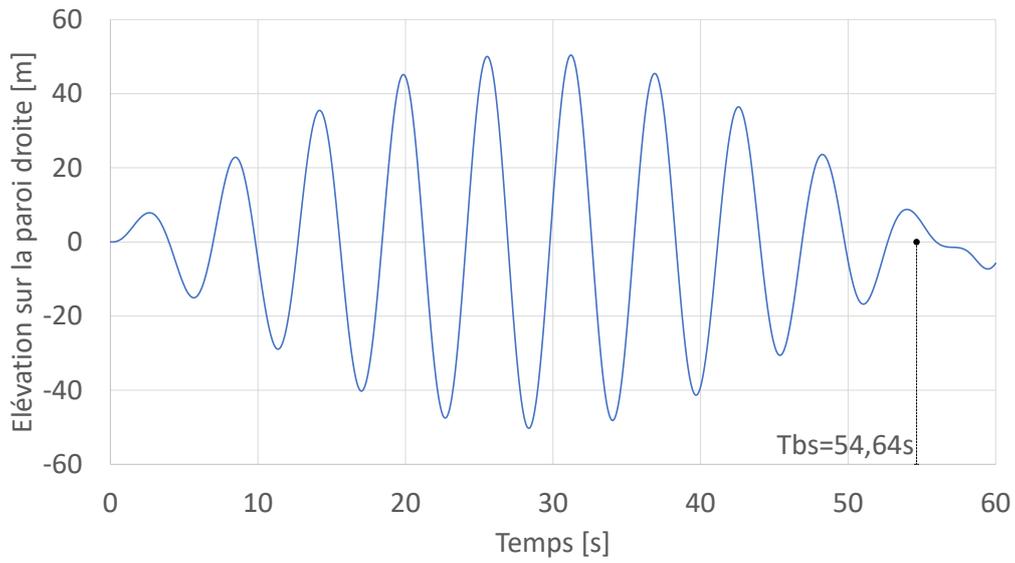


Figure 4.12: La réponse temporelle pour des parois flexibles d'épaisseur 60cm

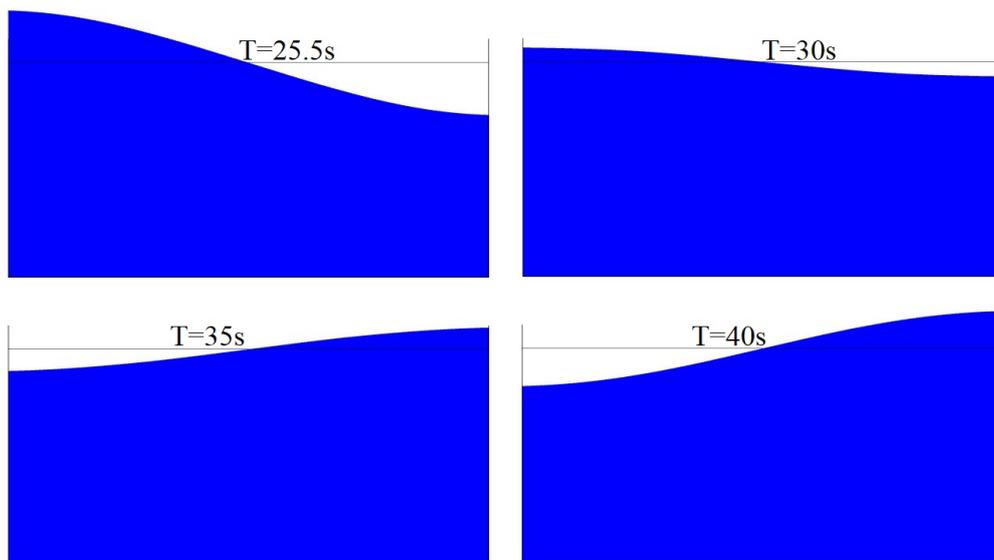


Figure 4.13: Les formes de la surfaces libre sur les parois pour une épaisseur de 60cm

La figure 4.13 représente une visualisation des élévations maximales de la surface libre sur les parois pour un réservoir avec une épaisseur des parois à 60cm à différents pas de temps.

4.5.3 Etude de la réponse fréquentielle pour les déplacements de la paroi

Pour cette partie d'étude, un calcul des déplacements maximaux de la paroi droite pour une fréquence ω variant de 0 rad/s à 160 rad/s est tracée et comparée à une solution exacte de Blevins [4] qui donne le $i^{\text{ième}}$ fréquence d'une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre comme suit :

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.10)$$

avec L est la longueur de la poutre, ρA est sa masse linéique (par unité de longueur), EI est sa rigidité. Les cinq premières valeurs des coefficients λ_i sont :

$$\lambda_{[1\dots 5]} = [1.875104073, 4.694091134, 7.854757445, 10.995540736, 14.13716839]$$

Les autres valeurs pour $i \geq 6$ sont données par :

$$\lambda_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2}, \quad i \geq 6$$

Le script MATLAB suivant permet de calculer les n fréquences avec la formule de Blevins :

```

1  function f = BlevinsFreqs(rhoA,EI,L,n)
2  lambda = [ 1.87510407
3            4.69409113
4            7.85475744
5            10.99554073
6            14.13716839];
7  for i=6:n
8      lambda =[lambda ; (2*i-1)*pi/2];
9  end
10 lambda=lambda(1:n);
11 f = (lambda.^2)/(2*pi*L^2)*sqrt(EI/rhoA);

```

La figure 4.14 représente les déplacements de la paroi droite pour une fréquence ω variant de 0 rad/s à 160 rad/s avec un pas de raffinement de 0.05, pour différents taux de remplissages du fluides (0.1 m, 4.5 m et 9 m). Les points jaunes représentent les solutions exactes [4]. A un taux de remplissage de 0.1 m les résonances coïncident avec celle de la solution exacte mais s'écarte à des fréquences plus faibles pour des taux de remplissage plus importante (4.5 m et 9 m). A un taux de remplissage de 9 m, on remarque

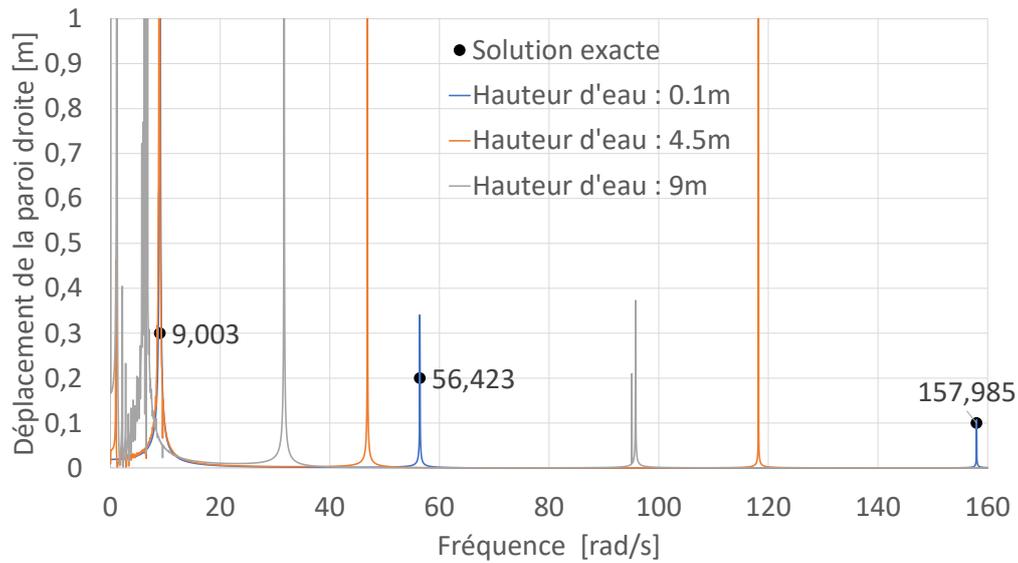


Figure 4.14: La réponse fréquentielle sur les déplacements des parois flexibles à différents taux de remplissage d'eau

plusieurs résonance au début du graphe, ceci revient à l'effet de la flexibilité des parois dû à l'interaction du fluide avec la structure. Ici, on peut voir que le taux de remplissage du fluide a plus d'effets sur les résonances de déplacement par rapport aux fréquences de ballotement. La réponse est plus amplifiée lorsque le taux de remplissage est réduite. Ces résonances concernent toutes les fréquences d'excitation proches de la résonance comme on peut le voir affiché dans la figure 4.14.

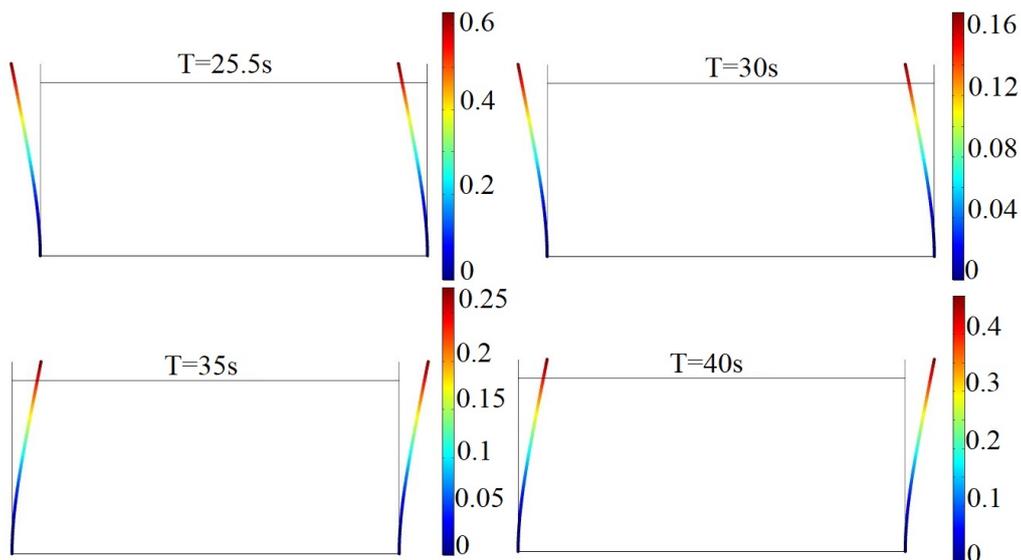


Figure 4.15: Les déplacements des parois pour une épaisseur de 60cm

La figure 4.15 est une représentation visuelle des déformations (déplacements) des parois pour un réservoir avec une épaisseur des parois à 60 cm sur différents pas de temps.

4.6 Conclusion

A l'aide de différents logiciels se basant sur les MEF, on a pu étudier la réponse dynamique d'un réservoir sous excitation fréquentielle horizontale harmonique. Les résultats trouvés sous divers tolérances relatives et différents type de pas de calculs et maillages ont été comparé à une solution analytique, et une certaine concordance entre une la réponse fréquentielle et la réponse temporelle a été établis.

Conclusion Générale

Ce travail m'a permis de m'intéresser à la réponse dynamique du fluide et au comportement d'un réservoir de stockage de liquide à l'aide de différents script MatLab et modélisation sur un logiciel multiphysique pour une simulation numérique. Le phénomène de ballonnement aussi que l'IFS du liquide dans un réservoir rectangulaire 2D, soumis à des excitations harmoniques horizontales ont été pris en compte. Deux études numériques ont été réalisées, l'une sur la réponse fréquentielle, l'autre sur la réponse. Les résultats obtenus ont été comparés à des solutions analytiques.

Un modèle numérique a été mis en place en œuvre pour l'analyse dynamique d'un réservoir rectangulaire prenant en compte l'interaction fluide-structure et le ballonnement de la masse fluide contenu. Un système dynamique algébrique décrivant le comportement des fluides non visqueux et incompressibles a été mis en place, aussi un autre système décrivant les déformations des parois.

Les différentes études effectuées (étude fréquentielle et temporelle) ont montré que le modèle proposé conduit à des résultats satisfaisants. Une première étude avec hypothèse des parois rigides sans prendre en considération l'IFS a été menée. Une deuxième étude avec parois flexibles a été également effectuée en utilisant une résolution directe du système couplé fluide-structure.

- Il a été montré que les élévations maximales de la surface libre sont plus amplifiées par la flexibilité du réservoir ainsi que pour la déformation.
- La prise en considération de l'IFS modifie les pics de résonance dans les réponses fréquentielle.
- La taille du maillage, la tolérance relative et le type de pas de calcul influencent la précision des résultats.
- Plus l'épaisseur des parois d'un réservoir est petite plus le réservoir est flexible, ce qui augmente les réponses engendrées par des excitations fréquentielles plus faible.
- Plus l'épaisseur des parois d'un réservoirs est grande moins le réservoir est flexible,

qui renvoie à une étude d'un cas de réservoir rigide, ce qui facilite énormément les calculs et avec un gain de temps immenses.

Ce travail a été très instructive pour moi et il m'a permis d'aborder les aspects de modélisation et de simulation numérique du fluide et des vibrations des parois. Il sera très passionnant de l'élargir à des situations tridimensionnelles et/ou prendre en compte la compressibilité et la viscosité du fluide. Mener des recherches sur d'autres formes géométriques et moyens de réduire les effets des ballottements. Sur plusieurs points de vue la modélisation numérique peut être développée et étendue pour prendre en compte l'ISS (l'interaction sol-structure), les réservoirs à toit...

Bibliographie

- [1] Abramson, H. N., Chu, W. H., and Kana, D. D. (1966). “Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers.” *Journal of Applied Mechanics*, 33(4), 777–784.
- [2] Arfken, G. (1985). “Gauss’s Theorem.” §1.11 in *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, Orlando, FL : Academic Press, <<https://doi.org/10.1016/c2013-0-10310-8>>.
- [3] Ayre, R. S. and Jacobsen, L. S. (1950). “Natural frequencies of continuous beams of uniform span length.” *Journal of Applied Mechanics*, 17(4), 391–395.
- [4] Blevins, R. D. and Plunkett, R. (1980). “Formulas for natural frequency and mode shape.” *Journal of Applied Mechanics*, 47(2), 461–462.
- [5] Bonnet, G., Seghir, A., and Tahakourt, A. (2011). “Liquid filled rectangular reservoir analysis using a coupled FEM/BEM model.” *8th International Conference on Structural Dynamics (Eurodyn 2011)*, leuven, Belgium, 1, <<https://hal-upec-upem.archives-ouvertes.fr/hal-00734909>> (July).
- [6] Chen, J. Z. and Kianoush, M. R. (2005). “Seismic response of concrete rectangular tanks for liquid containing structures.” *Canadian Journal of Civil Engineering*, 32(4), 739–752.
- [7] Chen, W., Haroun, M. A., and Liu, F. (1996). “Large Amplitude Liquid Sloshing In Seismically Excited Tanks.” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 25(7), 653–669.
- [8] Cheng, X., Yu, D., Zhang, A., and Bao, C. (2017). “Seismic responses of an isolated concrete rectangular liquid-storage structure.” *Australian Journal of Structural Engineering*, 18(2), 95–102.
- [9] Eftekhari, S. A. (2018). “Numerical simulation of sloshing motion in a rectangular tank using differential quadrature method.” *KSCCE Journal of Civil Engineering*, 22(11), 4657–4667.
- [10] Epstein, H. I. (1976). “Seismic design of life liquid storage tanks.” *Journal of the Structural Division*, Vol. 102, 1659–1673.
- [11] Feigenbaum, L. (1985). “Brook taylor and the method of increments.” *Archive for History of Exact Sciences*, 34(1-2), 1–140.
- [12] Ghaemmaghami, A. R. and Kianoush, M. R. (2010). “Effect of wall flexibility on dynamic response of concrete rectangular liquid storage tanks under horizontal and vertical ground motions.” *Journal of Structural Engineering*, 136(4), 441–451.

-
- [13] Graham, E. W. and Rodriguez, A. M. (1952). “The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics.” *Journal of Applied Mechanics*, 19(3), 381–388.
- [14] Haroun, M. A. (1984). “Stress analysis of rectangular walls under seismically induced hydrodynamic loads.” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 74(3), 1031–1041.
- [15] Haroun, M. A. and Abdel-Hafiz, E. A. (1986). “A simplified seismic analysis of rigid base liquid storage tanks under vertical excitation with soil-structure interaction.” *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 5(4), 217–225.
- [16] Haroun, M. A. and Abou-Izzeddine, W. (1992). “Parametric study of seismic soil-tank interaction. i : Horizontal excitation.” *Journal of Structural Engineering*, 118(3), 783–797.
- [17] Haroun, M. A. and Ellaithy, H. M. (1985). “Model for flexible tanks undergoing rocking.” *Journal of Engineering Mechanics*, 111(2), 143–157.
- [18] Haroun, M. A. and Housner, G. (1981). “Seismic design of liquid storage tanks.” *Journal of Technical Councils of ASCE*, Vol. 107, 191–207.
- [19] Hashemi, S., Saadatpour, M., and Kianoush, M. (2013). “Dynamic behavior of flexible rectangular fluid containers.” *Thin-Walled Structures*, 66, 23–38.
- [20] Hoskins, L. M. and Jacobsen, L. S. (1934). “Water pressure in a tank caused by a simulated earthquake.” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 24(1), 1–32.
- [21] Housner, G. W. (1957-1963). “Dynamic pressures on accelerated fluid containers.” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 47(1), 15–35.
- [22] Jacobsen, L. S. (1949). “Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier.” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 39(3), 189–204.
- [23] Jin, H., Liu, Y., and Li, H.-J. (2014). “Experimental study on sloshing in a tank with an inner horizontal perforated plate.” *Ocean Engineering*, 82, 75–84.
- [24] Jung, J. H., Yoon, H. S., and Lee, C. Y. (2015). “Effect of natural frequency modes on sloshing phenomenon in a rectangular tank.” *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 7(3), 580–594.
- [25] Kianoush, M. and Ghaemmaghami, A. (2011). “The effect of earthquake frequency content on the seismic behavior of concrete rectangular liquid tanks using the finite element method incorporating soil–structure interaction.” *Engineering Structures*, 33(7), 2186–2200.
- [26] Kim, J. K., Koh, H. M., and Kwahk, I. J. (1996). “Dynamic response of rectangular flexible fluid containers.” *Journal of Engineering Mechanics*, 122(9), 807–817.
- [27] Koh, HM, K.-J. P. J. (1998). “Fluid structure interaction analysis of 3-d rectangular tanks by a variationally coupled bem-fem and comparison with test results.” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 27, 109–124.

-
- [28] Livaoglu, R. (2008). “Investigation of seismic behavior of fluid rectangular tank soil/foundation systems in frequency domain.” *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28(2), 132–146.
- [29] Malhotra, P. K. (1997). “New method for seismic isolation of liquid-storage tanks.” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 26(8), 839–847.
- [30] Malhotra, P. K., Wenk, T., and Wieland, M. (2000). “Simple procedure for seismic analysis of liquid-storage tanks.” *Structural Engineering International*, 10(3), 197–201.
- [31] Mermer, A., Mustafa, K., and Arslan, A. (2012). “Using seismic isolation elements to protect cylindrical steel liquid storage tanks from destructive forces of earthquakes.” *Gazi University Journal of Science*, 25, 165 – 173.
- [32] Moiseev, N. and Petrov, A. (1966). “The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container.” *Advances in Applied Mechanics*, Elsevier, 91–154.
- [33] Navier, C. L. M. H. (1823).” *Mémoire de l’Académie Royale des Sciences, Paris*, Vol VI, p 389–416.
- [34] Nayak, S. K. and Biswal, K. C. (2016). “Nonlinear seismic response of a partially-filled rectangular liquid tank with a submerged block.” *Journal of Sound and Vibration*, 368, 148–173.
- [35] Ning, D.-Z., Song, W.-H., Liu, Y.-L., and Teng, B. (2012). “A boundary element investigation of liquid sloshing in coupled horizontal and vertical excitation.” *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 1–20.
- [36] N.W., E. (1969). “A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquid storage tanks subjected to lateral ground motions.” *Ph.D. Dissertation, University of Michigan, Michigan, U.S.A.*
- [37] Park, J.-H., Koh, H. M., and Kim, J. (1992). “Fluid-structure interaction analysis by a coupled boundary element-finite element method in time domain.” *Boundary Element Technology VII*, Springer Netherlands, 227–243.
- [38] Poisson, S. (1831). “Mémoire sur les equations générales de l’équilibre et mouvement des corps solides elastiques est des fluides.” *L’école polytechnique*, 13, 1–174.
- [39] Rayleigh, L. (1876). “On waves.” *Phil. magazine*, 1, 257–276.
- [40] Ruiz, R., Lopez-Garcia, D., and Taflanidis, A. (2015). “An efficient computational procedure for the dynamic analysis of liquid storage tanks.” *Engineering Structures*, 85, 206–218.
- [41] Saravanan, G., Sannasiraj, S., and Sundar, V. (2014). “Asymptotic analysis of sloshing in a rectangular tank.” *International Journal of Ocean and Climate Systems*, 5, 89–103.
- [42] Seghir, A. (2005- 2021). “Cours sur la méthodes des éléments finis, <<http://univ-bejaia.dz/a.seghir/?p=mef/mef>>.
- [43] Seleemah, A. A. and El-Sharkawy, M. (2011). “Seismic response of base isolated liquid storage ground tanks.” *Ain Shams Engineering Journal*, 2(1), 33–42.

-
- [44] Shaaban, S. H. and Nash, W. A. (1975). “Response of an empty cylindrical ground supported liquid storage tank to base excitation.
- [45] Shrimali, M. and Jangid, R. (2002). “Seismic response of liquid storage tanks isolated by sliding bearings.” *Engineering Structures*, 24(7), 909–921.
- [46] Song, Y. K., Chang, K.-A., Ryu, Y., and Kwon, S. H. (2013). “Experimental study on flow kinematics and impact pressure in liquid sloshing.” *Experiments in Fluids*, 54(9).
- [47] Souto-Iglesias, A., Delorme, L., Pérez-Rojas, L., and Abril-Pérez, S. (2006). “Liquid moment amplitude assessment in sloshing type problems with smooth particle hydrodynamics.” *Ocean Engineering*, 33(11-12), 1462–1484.
- [48] Veletsos, A. S. (1974). “Seismic effects in flexible liquid storage tanks.” *Proceedings of the International Association for Earthquake Engineering Fifth World Conference*, 630–639.
- [49] Veletsos, A. S. and Tang, Y. (1986). “Dynamics of vertically excited liquid storage tanks.” *Journal of Structural Engineering*, 112(6), 1228–1246.
- [50] Veletsos, A. S., Tang, Y., and Tang, H. T. (1992). “Dynamic response of flexibly supported liquid-storage tanks.” *Journal of Structural Engineering*, 118(1), 264–283.
- [51] Veletsos, A. S. and Yang, J. Y. (1976). “Dynamics of fixed base liquid storage tanks.” *Proceedings of US-Japan Seminar on Earthquake Engineering Research with Emphasis on Lifeline Systems, Japan Society for Promotion of Earthquake Engineering*, 317–341.
- [52] Virella, J. C., Prato, C. A., and Godoy, L. A. (2008). “Linear and nonlinear 2d finite element analysis of sloshing modes and pressures in rectangular tanks subject to horizontal harmonic motions.” *Journal of Sound and Vibration*, 312(3), 442–460.
- [53] Wang, Y.-P., Teng, M.-C., and Chung, K.-W. (2001). “Seismic isolation of rigid cylindrical tanks using friction pendulum bearings.” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(7), 1083–1099.
- [54] Werner, P. W. and Sundquist, K. J. (1949). “On hydrodynamic earthquake effects.” *Transactions, American Geophysical Union*, 30(5), 636.
- [55] Westergaard, H. M. (1933). “Water pressures on dams during earthquakes.” *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 98(2), 418–433.
- [56] Wu, G., Ma, Q., and Taylor, R. E. (1998). “Numerical simulation of sloshing waves in a 3d tank based on a finite element method.” *Applied Ocean Research*, 20(6), 337–355.
- [57] Yazdanian, M., Mashal, M., and Razavi, S. (2017). “Seismic vulnerability of cylindrical steel liquid storage tanks for an oil industry plant.” *Anadolu University Journal Of Science And Technology A - Applied Sciences and Engineering*, 18(2), 1–1.
- [58] Yu, L., Xue, M.-A., and Jiang, Z. (2020). “Experimental investigation of parametric sloshing in a tank with vertical baffles.” *Ocean Engineering*, 213, 107783.
- [59] Zienkiewicz, O. C. (2013). *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, <<https://doi.org/10.1016/c2009-0-24909-9>>.