République Algérienne Democratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master

en Mathématiques Appliqués
Option
Mathématiques Financières
Sujet

Modèles de la théorie des jeux pour un marché duopoliste : application en assurance et banque

Présenté par :

Mlle KADI Asma

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. TOUATI Sofiane	MAA	U. A/Mira Bejaia.
Promotrice :	Mme. BOUIBED Karima	MCB	U. A/Mira Bejaia.
Examinatrice :	Mme. TOUCHE Aicha	MCB	U. A/Mira Bejaia.
Examinatrice :	Mme. SAIT Razika	MAA	U. A/Mira Bejaia.

Année Universitaire 2020/2021.

Remerciement

Je remercie, avant tout, Dieu le tout puissant qui m'a donné la force et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier chaleureusement Dr. BOUIBED Karima d'avoir encadré ce travail, avec beaucoup de compétences. Merci pour votre patience avec moi, pour votre optimisme, et la confiance que vous m'avez accordé à chaque instant jusqu'a la réalisation finale de ce mémoire.

Je remercie aussi les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail et qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

Merci a mes parents pour qui je porte les plus nobles sentiments et les plus profondes estimes.

Mes remerciements vont bien entendu a mes proches, cousines, cousins, copines.

Asma.

Dédicace

Je dédie ce travail à la femme la plus chère au monde, à la femme que je considère la base de ma vie 'ma chère Maman' grâce à elle je suis ce que je suis aujourd'hui.

A l'homme le plus important de ma vie, mon très cher père qui ma encouragé à chaque instant jusqu'a la réalisation finale de ce travail.

A mes deux chers frères, qui m'on aidé tout au long de ma vie et jusqu'au dernire jour de la réalisation de ce mémoire.

A mon très cher cousin 'Mustapha' qui m'a soutenu et m'a beaucoup aidé dans la réalisation de ce mémoire.

A la plus chère cousine à mon coeur 'Zahra' que je considère comme ma grande soeur.

Asma.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale 5

1 Notions de base sur la théorie des jeux 7

1.1 Introduction 7
1.2 Description d'un jeu 7
1.3 Classification générale des jeux 8
1.3.1 Selon le comportement des joueurs 8
1.3.2 Selon le nombre de coups 9
1.3.3 Selon le type d'information 9
1.4 Jeux non coopératifs statiques 10
1.4.1 Concepts de solution des jeux non coopératifs statiques 10
1.4.2 Équilibre en stratégies dominantes 11
1.4.3 Jeux réduits 12
1.4.4 Équilibre de Nash 13
1.5 Jeux dynamiques 16
1.5.1 Jeux sous forme extensive à information parfaite 17
1.5.2 Jeux répétés 20
1.6 Les systèmes dynamiques 21
1.6.1 Stabilité 22
1.6.2 La bifurcation 23
1.7 Conclusion 23

2 Modèles de base des duopoles **24**

2.1 Introduction 24

2.2 Notions de base sur le marché et l'entreprise 24

2.3 La classification des marchés 27

2.3.1 L'offre et de la demande 28

2.3.2 La fonction d'offre 30

2.3.3 Classification des entreprises 32

2.3.4 Différenciation des produits 35

2.4 Notions de base sur les duopoles 36

2.4.1 Les avantages et inconvénients d'un duopole 37

2.4.2 Les caractéristiques du duopole 38

2.5 Les différents types de duopole 38

2.5.1 Duopole de Cournot 38

2.5.2 Duopole de Bertrand 42

2.5.3 Duopole de Stackelberg 44

2.5.4 Duopole de Hotelling 46

2.6 Analyse des duopoles 49

2.7 Conclusion 52

3 Modèles de la théorie des jeux statiques pour un marché d'assurance **53**

3.1 Introduction 53

3.2 Modèle de la théorie des jeux pour le marché duopoliste d'assurance 53

3.2.1 Modèle de duopole de Bertrand pour un marché d'assurances 54

3.3 Modèle de duopole d'Hotelling pour un marché bancaire 56

3.3.1 Le comportement des banques et la détermination du produit net bancaire 57

3.4 Conclusion 63

4 Dynamique du duopole de Cournot pour un marché bancaire **64**

4.1 Introduction 64

4.2 Modèle dynamique de duopole de Cournot 64

4.2.1 Analyse de jeu dynamique de Cournot 66

4.3 Application d'un modèle dynamique de Hotelling pour le marché duopoliste bancaire 69

4.3.1 Présentation de modèle dynamique 70

4.3.2 Analyse de stabilité des points d'équilibre 72
4.4 Conclusion 76

Bibliographie **79**

TABLE DES FIGURES

1.1 Le jeu de l'Entrée I 18
1.2 Le jeu de Pile ou face 19
1.3 Ensemble d'information du joueur 2 19
1.4 Le joueur Nature dans le jeu de Pile ou face 20

2.1 Courbe de la demande 29
2.2 Courbe d'une corrélation linéaire entre l'offre et le prix 31
2.3 Loi de l'offre et de la demande 32
2.4 L'équilibre de Nash de duopole de Cournot et Stackelberg 51

3.1 L'espace linéaire bancaire 57
3.2 Les paramètres du comportement des banques 59
3.3 L'espace bi-dimensionnel bancaire 61

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La discipline de la théorie des jeux a été lancée au début du $20^{\text{ème}}$ siècle par les mathématiciens Ernst Zermelo (1913) et John Von Neumann (1928) [5].

La théorie des jeux fournit un langage formel (ou bien un outil mathématique) pour la représentation et l'analyse des situations d'interaction stratégique entre plusieurs joueurs (preneurs de décision) rationnels, sous l'hypothèse que les choix et les bénéfices d'un joueur dépendent des décisions des autres joueurs [4], [5]. La théorie des jeux a eu une influence majeure sur le développement de plusieurs branches de l'économie (organisation industrielle, commerce international, économie du travail, macroéconomie,...,etc)[5].

Ce travail est consacré à l'étude de différents modèles de base de l'organisation industrielle et leurs applications pour un marché duopoliste.

Un marché duopoliste est le lieu de rencontre de deux entreprises qui sont en concurrence soit en prix ou bien en quantité, la théorie des jeux et plus précisément les modèles de base de l'organisation industrielle (duopole de Cournot , Bertrand , Stackelberg et Hotelling) est un outil très important et très efficace pour la modélisation et l'analyse de ces différents cas de concurrence.
Le mémoire est constitué de quatre chapitres dont une brève présentation.

Le premier chapitre est dédié aux notions de base de la théorie des jeux à savoir les éléments essentiels d'un jeu, les différents types des jeux ainsi que quelques concepts de solutions des jeux non coopératifs statiques et dynamiques.

Le deuxième chapitre est composé de deux parties, dont la première partie est consacrée pour un rappel sur les notions de base sur le marché et l'entreprise qui sont essentiels pour ce travail. La deuxième partie porte sur l'étude des différents duopole à savoir le duopole de Cournot, Bertrand, Stackelberg et Hotelling.

Le troisième chapitre contient deux applications de deux modèles différents de duopole pour deux marchés duopolistes, la première concerne une application d'un duopole de Bertrand pour un marché des assurances, quant à la deuxième application, elle s'agit d'une application de duopole de Hotelling pour un marché duopoliste bancaire.

En général, les modèles de la théorie des jeux statiques ne peuvent pas toujours modéliser les situations réelles d'un marché vu les changements et la dynamique de ces dernières, d'où la nécessité d'application des modèles dynamiques. Le dernier chapitre est donc consacré à l'étude de la dynamique de duopole Cournot ainsi que son application à un marché bancaire.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE SUR LA THÉORIE DES JEUX

1.1 Introduction

La théorie des jeux est un ensemble d'outils analytiques qui ont été développés pour nous faciliter la compréhension des situations d'interaction entre des décideurs (agents, joueurs) rationnels, le concept de jeu couvre une large gamme de situations [20].
Nous commençons ce chapitre par un bref rappel sur quelques notions de base de la théorie des jeux, par la suite nous présentons deux classes de jeux à savoir : les jeux statiques et les jeux dynamiques qui sont utilisés pour modéliser plusieurs cas de concurrence sur un marché duopoliste.

1.2 Description d'un jeu

Définition 1.1 *Un jeu est une description de l'intérêt des joueurs et de l'interaction stratégique qui spécifie les contraintes qui pèsent sur les actions (stratégies) que les joueurs peuvent choisir [20].*
Tout jeu comporte (au moins) une liste de joueurs, un ensemble de choix possibles pour chacun d'entre eux et une fonction qui donne leurs gains dans toutes les éventualités possibles (les issues qui résultent des divers choix que peuvent faire les joueurs) [13].

Pour la représentation d'un jeu, il faut détérminer les éléments suivants qui caractérisent un jeu :

- **Joueur** : c'est tout agent (entreprise, personnes, un etat) participant au jeu, ayant la capacité de décider, et cette décison peut influencer le résultat pendant le déroulement du jeu.
- **Action** : c'est un choix qu'un joueur peut effectuer parmis un ensemble de choix permis.
- **Utilité** : c'est son bénéfice (peut être un gain ou une perte pour le joueur).
- **Stratégie** : en théorie des jeux, une stratégié représente un plan d'actions qui définie les décisions que doit prendre le joueur pendant le déroulement du jeu. Il existe deux types de stratégies :

Définition 1.2 *[**Stratégie pure**][20] Une stratégie pure du joueur i est un plan d'actions qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par $s_i \in S_i$ une stratégie pure de ce joueur.*

Définition 1.3 *[**Stratégie mixte**][20] Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilité sur son ensemble de stratégies pures.*

1.3 Classification générale des jeux

Les jeux sont classifiés selon plusieurs critères à savoir : le comportement des joueurs, le nombre de coups (le nombre des étapes de jeu), type d'information que possède chaque joueur.

1.3.1 Selon le comportement des joueurs

On destingue deux types de jeux à savoir :

- **Jeux coopératifs** [1] : c'est un jeu dans lequel les joueurs peuvent communiquer entre eux et faire un échange d'information sans jamais former de coalition ou contracter d'accord contraignant.
- **Jeux non coopératifs** [1] : c'est tout jeu où les joueurs ne peuvent pas se regrouper en coalitions, mais ils peuvent communiquer entre eux et échanger des informations, à condition qu'ils ne contractent pas d'accord contraignant.

1.3.2 Selon le nombre de coups

Il existe deux types de jeux selon l'ordre dans lequel les joueurs annoncent leurs stratégies (en fonction de leur déroulement) :
Jeu simultané ou stratégique [20] : un jeu simultané ou stratégique est le modèle d'une situation où chaque joueur choisit son plan d'action complet une fois pour toute au début du jeu. Par conséquent les choix de tous les joueurs sont simultanés. Ainsi, au moment de faire son choix, le joueur n'est pas informé des choix des autres.
Jeu séquentiel [20] : un jeu séquentiel, au contraire, spécifie le déroulement exact du jeu, chaque joueur considère son plan d'action non seulement au début du jeu mais aussi chaque fois qu'il doit effectivement prendre une décision pendant le déroulement du jeu.

1.3.3 Selon le type d'information

L'information que chaque joueur possède à chaque fois qu'il doit choisir une action (sa décision) est tres importante dans le déroulement de jeu. Selon l'information, il existe quatre types de jeu.

- **Jeux à information parfaite** [1] : on dit qu'un jeu est à information parfaite si chacun des joueurs au moment de choisir sa stratégie a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs.

- **Jeux à information imparfaite** [1] : on dit qu'un jeu est à information imparfaite si au moins un des joueurs ne connaît pas à un moment du déroulement du jeu ce qu'a joué un autre joueur, soit parce qu'on lui cache cette information, soit parce que les joueurs jouent simultanément.

- **Jeux à information complète** [1] : un jeu est à information complète si chacun des joueurs connaît la structure du jeu, c'est à dire l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, la règle du jeu et le type d'information que possède chaque joueur sur les actions que les autres joueurs prennent pendant les étapes précédentes du jeu.

- **Jeux à information incomplète** [1] : un jeu est à information incomplète si au moins un des joueurs ne connaît pas entièrement la structure du jeu. C'est-à-dire les joueurs sont incertains au sujet de quelques paramètres importants de la situation du jeu, tel que les fonctions de paiement, les stratégies disponibles des joueurs, l'information que les autres joueurs ont au sujet du jeu,... etc.

1.4 Jeux non coopératifs statiques

Les jeux statiques sont les jeux les plus simples que l'on peut rencontrer en théorie des jeux. Un jeu statique (simultané, stratégique), c'est un jeu dans lequel les différents joueurs vont jouer une seule fois et simultanément (chaque joueur va donc choisir une seule action et tous les autres joueurs effectuent ce choix au même moment). Un jeu statique est représenté sous forme normale. La définition d'un jeu sous forme normale doit répondre aux trois questions suivantes [20] :

1. Qui joue ?.
2. Quelles sont les actions disponibles pour chaque joueur ?.
3. Quelle est la valeur pour chaque joueur des différents résultats possibles du jeu ?.

Définition 1.4 ***[Jeu sous forme normale]*** *[1] : un jeu sous forme normale (ou stratégique) est définit comme suit :*

$$\prec I, \{S_i\}_{i\in I}, \{\pi_i\}_{i\in I} \succ, \tag{1.1}$$

avec :

• $I = \{1, ..., n\}$, $n \geq 2$ *est l'ensemble des joueurs.*

• S_i *est l'ensemble des stratégies du joueur* $i \in I$ *et* $s_i \in S_i$ *stratégie du joueur* i. *On notera par le reste des joueurs par* $I - \{i\}$ *(ou -i) et* $s_{-i} \in S_{-i}$ *les stratégies des autres joueurs que le joueur* i.

• $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$, *est l'ensemble des issues (ou profil d'actions) du jeu* (1.1). *On note* $s = (s_i, s_{-i}) \in S$ *une issue du jeu ou profil d'actions.*

• $\pi_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction d'utilité du joueur* i.

1.4.1 Concepts de solution des jeux non coopératifs statiques

Dans la suite de cette section, nous décrivons quelques concepts de solutions des jeux sous forme normale les plus étudies et utilisés à savoir : l'équilibre en stratégies dominantes et l'équilibre de Nash.

1.4.2 Équilibre en stratégies dominantes

Définition 1.5 ***[Stratégie strictement dominée]*** *[1] Une stratégie $s_i^0 \in S_i$ est strictement dominée du joueur i si :*

$$\exists s_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} : \pi_i(s_i^0, s_{-i}) < \pi_i(s_i, s_{-i}).$$

Définition 1.6 ***[Stratégie dominée]*** *[1] Une stratégie $s_i^0 \in S_i$ est une stratégie dominée du joueur i si :*

$$\exists s_i \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} : \pi_i(s_i^0, s_{-i}) \leq \pi_i(s_i, s_{-i}).$$

Définition 1.7 ***[Stratégie strictement dominante]*** *[1] Une stratégie $s_i^0 \in S_i$ est dite strictement dominante si :*

$$\forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad i \in I : \pi_i(s_i^0, s_{-i}) > \pi_i(s_i, s_{-i}).$$

Une stratégie du joueur i est strictement dominante si elle domine strictement toutes les autres stratégies de ce joueur.

Définition 1.8 ***[Stratégie dominante]*** *[1] Une stratégie $s_i^0 \in S_i$ est dite dominante si :*

$$\forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad i \in I : \pi_i(s_i^0, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}).$$

Remarques 1.1

1. *Une stratégie strictement dominante est donc jouée à tous les coups quelques soient les choix des adversaires. S'il n'existe pas de stratégie dominante, il faut anticiper les choix des adversaires.*
2. *Un joueur rationnel qui cherche à maximiser son gain, ne va jamais jouer une stratégie strictement (dominée).*
3. *Si une stratégie dominante existe pour un joueur, alors elle est unique.*
4. *Si un joueur possède une stratégie strictement dominante, elle est unique et toutes les autres stratégies sont strictement dominées.*

La solution (équilibre) du jeu est une combinaison d'une meilleure stratégie de chaque joueur. Un profil de stratégies $s^0 \in S$ est un équilibre en stratégies strictement dominantes si $s_i^0 \in S_i$ est la stratégie strictement dominante de chaque joueur $i \in I$, c'est-à-dire un équilibre en stratégies strictement dominantes est une combinaison de stratégies comprenant la stratégie strictement dominante de chaque joueur.

Lorsque tous les joueurs sont rationnels et savent que leurs adversaires le sont, chacun peut supprimer ses propres stratégies strictement dominées et de nouvelles stratégies strictement dominées apparaîtront dans le nouveau jeu. On peut alors considérer la procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Définition 1.9 *[16] Un jeu est dit résolvable par élimination itérative des stratégies dominées, si on obtient un unique profil en éliminant successivement stratégies strictement dominées, c'est-à-dire qu'un équilibre de dominance itérée est une combinaison de stratégies trouvées en éliminant par itérations successives les stratégies strictement dominées des joueurs jusqu'a ce qu'il ne reste plus qu'une stratégie pour chaque joueur.*

Exemple 1.1 *Considérons le jeu sous forme normale suivant :*

	Joueur 2	
Joueur 1	*A*	*B*
C	$(10, 1)$	$(27, 2)$
D	$(3, 0)$	$(9, 1)$

Quand le joueur 2 *joue sa stratégie A, le joueur* 1 *a intérêt à jouer sa stratégie C et si le joueur* 2 *joue sa stratégie B le joueur* 1 *aussi va jouer sa stratégie C, donc la stratégie D est strictement dominée par C, alors on va éliminer la stratégie D. Pour le joueur* 2 *il va joueur sa stratégie B face à la seule stratégie qui reste pour le joueur* 1*, donc on va éliminer la stratégie A. Alors le couple* (C, B) *est l'équilibre du jeu par élimination itérative des stratégies (strictement) dominées.*

1.4.3 Jeux réduits

Les jeux réduits sont très utiles pour la résolution des jeux sous forme normale, précisément pour éliminer les stratégies équivalentes (qui donnent le même gain) si elles existent pour certains joueurs dont l'objectif de faciliter la résolution et de minimiser le temps nécessaire pour trouver l'équilibre de jeu.
Deux stratégies s_i et $s_i^{'}$ sont dites équivalentes si et seulement si :

$$\pi_i(s_i, s_{-i}) = \pi_i(s_i^{'}, s_{-i}), \quad s_i, s_i^{'} \in S_i, \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Dans un jeu sous forme normale, lorsqu'un joueur ou certains joueurs ont des stratégies équivalentes, on peut éliminer les stratégies équivalentes pour chaque joueur et on obtient un jeu sous forme normale plus simple et plus rapide à résoudre.

Exemple 1.2 *Soit le jeu sous forme normale suivant :*

Joueur 2

Joueur 1		s_1	s_2	s_3	s_4
	s_5	(4, 2)	(3, 2)	(2, 5)	(8, 1)
	s_6	(4, 2)	(3, 2)	(2, 1)	(8, 3)
	s_7	(9, 2)	(0, 2)	(0, 5)	(1, 0)
	s_8	(0, 2)	(5, 2)	(6, 5)	(3, 0)

Pour le joueur 1, les deux stratégies s_5 et s_6 sont équivalentes, alors on élimine la stratégie s_5. Pour le joueur 2, aprés avoir éliminer s_5, les deux stratégies s_1 et s_2 de joueur 2 sont équivalentes, alors on élimine la stratégie s_1. Ainsi on obtient le jeu réduit sous forme normale suivant :

Joueur 2

Joueur 1		s_2	s_3	s_4
	s_6	(3, 2)	(2, 1)	(8, 3)
	s_7	(0, 2)	(0, 5)	(1, 0)
	s_8	(5, 2)	(6, 5)	(3, 0)

1.4.4 Équilibre de Nash

L'équilibre de Nash introduit par le mathématicien John Nash en 1950, est le concept clé de la théorie des jeux. Cet équilibre se base sur le principe de la rationalité individuelle des joueurs. Un équilibre de Nash correspond à une situation ou aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la situation d'équilibre [7].

Définition 1.10 ***(Équilibre de Nash en stratégies pures)*** *[1]*
Un profil de stratégies $s^0 = (s_1^0, ..., s_n^0) \in S$ est un équilibre de Nash du jeu (1.1) si pour

chaque joueur $i \in I$, on a :

$$\pi_i(s_i^0, s_{-i}^0) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^0), \qquad \forall s_i \in S_i.$$

Définition 1.11 *[1] Une stratégies $s_i^0 \in S_i$ est une meilleure réponse du joueur i contre un profil de stratégies des ses adversaires s_j si :*

$$\forall s_i \in S_i : \pi_i(s_i, s_{-i}) \leq \pi_i(s_i^0, s_{-i}).$$

Définition 1.12 *[1] On appelle correspondance de meilleures réponses du joueur i, le sous ensemble de stratégies $MR_i(.) \subseteq S_i$ maximisant son gain lorsque le reste des joueurs maintiennent la stratégie s_{-i}.*

$$MR_i : S_i \longrightarrow S_i$$

$$s_i \longmapsto MR_i(s_{-i}).$$

Avec $MR_i(s_{-i}) = \{s_i^0 \in S_i : \sup_{s_i \in S_i} \pi_i(s_i, s_{-i}) = \pi_i(s_i^0, s_{-i})\}$.

Pour déterminer l'équilibre de Nash en stratégies pures dans un jeu, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Repérer les meilleures réponses de chaque joueur $i \in I$ aux différentes stratégies possibles des autres joueurs.
2. Ensuite rechercher un ensemble de stratégies $(s_1^0, s_2^0, ..., s_n^0)$ dans lequel la stratégie de chacun est la meilleure réponse aux stratégies des autres.

Remarque 1.1 *Dans un jeu fini à deux joueurs, une méthode pratique de visualiser les meilleures réponses en stratégies pures de chaque joueur consiste à les représenter dans le tableau du jeu. Représentons dans le tableau initial, la fonction de meilleure réponse du joueur 1 par $\square$ et celle du joueur 2 par $\times$. L'équilibre de Nash est l'intersection des deux courbes de réaction $\boxtimes$.*

Proposition 1.1 *[1] Si $s^0 = (s_i^0, s_{-i}^0)$ est un équilibre de Nash du jeu (1.1), alors $s_i^0 = MR_i(s_{-i}^0)$, $\forall i \in I$.*

Propriétés 1.1 *[16]*

1. *Un profil (unique) obtenu par élimination itérative des stratégies (strictement) dominées (EISD) est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).*

2. *Un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash en stratégies pures, mais il peut aussi n'en avoir aucun.*
3. *Deux équilibres de Nash s^* et s^0 sont équivalents s'ils donnent le même gain à tous les joueurs c'est-à-dire :* $\forall i \in I \quad \pi_i(s^*) = \pi_i(s^0)$.

Définition 1.13 *[1] Deux équilibres de Nash $s^0 = (s_i^0, s_{-i}^0)$, $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ sont interchangeables si (s_i^0, s_{-i}^*) et (s_i^*, s_{-i}^0), $\forall i \in I$ sont aussi des équilibres de Nash.*

Définition 1.14 ***(Stratégie mixte)****[1] Supposons que le joueur i dispose d'un ensemble $S_i = \{s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_m\}$ de stratégies pures. Ce joueur décide de tirer au sort la stratégie qu'il va jouer. Une stratégie mixte est alors un vecteur $\alpha^i = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_m)$ de probabilités que choisit de respecter le joueur lorsqu'il effectue son tirage aléatoire. Puisque α est une distribution de probabilité on a $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\forall i = \overline{1, m}$.*

Remarques 1.2
1. *On note l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i par Δ_i et par $\alpha^i \in \Delta_i$ la stratégie mixte du joueur i.*
2. *Le joueur i qui utilise une stratégie mixte conserve toujours la possibilité de choisir directement une stratégie pure particulière, il lui suffit, pour cela, d'affecter la probabilité 1 à la stratégie s_i et d'affecter une probabilité nulle aux autres stratégies.*

Définition 1.15 ***[Équilibre de Nash en stratégies mixtes]*** *[16] Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes $\alpha^0 = (\alpha^{i^0}, \alpha^{j^0}) \in \Delta_n$ tel que :*

$$\forall i \in I, \quad \forall \alpha^i \in \Delta_i : F_i(\alpha^i, \alpha^{j^0}) \leq F_i(\alpha^{i^0}, \alpha^{j^0}),$$

avec F_i est le gain espéré du joueur i.
Autrement dit, un profil de stratégies mixtes $\alpha^0 = (\alpha^{1^0}, \alpha^{2^0}, ..., \alpha^{i^0}, ..., \alpha^{n^0}) = (\alpha^{i^0}, \alpha^{j^0})$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si, pour chaque joueur $i \in I$, la stratégie mixte α^{i^0} est une meilleure réponse aux stratégies mixtes des autres joueurs $(\alpha^{1^0}, \alpha^{2^0}, ..., \alpha^{(i-1)^0}, \alpha^{(i+1)^0}, ..., \alpha^{n^0})$.

Théorème 1.1 *[16] Tout jeu sous forme stratégique fini admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Exemple 1.3 ***[Dilemme du prisonnier]*** *Le jeu du dilemme des prisonniers est le plus célèbre exemple pour les jeux statiques. Deux personnes arrêtées par la police ensemble en possession d'armes à feu sont soupçonnés d'un délit fait en commun.*
Il y a trois possibilités [1] :

1. *Si un des deux avoue et que l'autre nie, le premier est libéré, et le second emprisonné* ($30 ans$).
2. *Si les deux avouent, les deux iront en prison* ($5 ans$).
3. *Si les deux nient, les deux iront en prison* ($15 ans$)

Joueur 2

Joueur 1		Avouer	Nier
	Avouer	(5, 5)	(0, 30)
	Nier	(30, 0)	(15, 15)

Cette analyse nous montre que face au choix de la stratégie avouer par un joueur, l'autre ne peut rien faire de mieux que choisir avouer. Le couple de stratégies pures ($Avouer$, $Avouer$) *qui correspond à l'intersection des deux courbes de réaction est l'équilibre de Nash.*

Joueur 2

Joueur 1		Avouer	Nier
	Avouer	⊠	□
	Nier		×

1.5 Jeux dynamiques

Les jeux dynamiques occupent une place très importante dans la description des phénomènes économiques (comme par exemple les différents cas de concurrence). Ce sont des jeux dans lesquels les joueurs jouent séquentiellement ou d'une manière répétée. Ces jeux sont représentés sous forme extensive.

Définition 1.16 ***(La stratégie)*** *[14] Dans un jeu dynamique, une stratégie pour un joueur est un plan d'actions complet qui spécifie une action pour le joueur pour toutes les contingences possibles (pour toutes les histoires possibles des étapes passées) et à chaque étape où il doit jouer.*

1.5.1 Jeux sous forme extensive à information parfaite

La modélisation sous forme extensive d'un jeu est l'une des méthodes les plus simples pour représenter un jeu. Il s'agit d'un modèle où les joueurs choisissent séquentiellement leurs actions, jusqu'au moment où le jeu est déclaré fini [2].

Définition 1.17 *[16] Tout jeu sous forme extensive peut être représenté par un arbre définit par les éléments suivants :*

- $I = \{1, ..., n\}$*, l'ensembles des joueurs.*
- *Un arbre fini composé de :*
    1. *Un noeud initial noté* υ_0 *qui indique le début du jeu.*
    2. *Un ensemble de noeuds de décisions* $\{\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_N\}$.
    3. *Un ensemble* $Z \subset T$ *de noeuds terminaux* $\{z_1, z_2, ..., z_M\}$*, ces noeuds terminaux indiquent la fin du jeu, avec* T *est l'ensemble total des noeuds (les noeuds de décisions et les noeuds terminaux).*
    4. *Des branches (arcs) qui permettent de relier chaque noeud à ceux qui le suit (c'est-à-dire à ses successeurs).*
    5. *Chaque noeud* $\upsilon_k \in T$ *différent de noeud terminal* $(\upsilon_k \notin Z)$,
- *Une fonction de nommage qui indique à chaque noeud quel est le joueur qui doit jouer.*
- *Une partition des noeuds en un ensemble d'ensembles d'informations représentant les croyances (imparfaites) des joueurs.*

Définition 1.18 ***(Ensemble d'information)*** *[14] Un ensemble d'information pour un joueur est une collection de noeuds de décision ayant les caractéristiques suivantes :*

- *Le joueur joue à l'un des noeuds de décision inclus dans l'ensemble d'information.*
- *Lorsque le jeu atteint un noeud de décision à l'intérieur d'un ensemble d'information, le joueur qui doit jouer ne sait pas quel est le noeud de décision qui est atteint.*

- *Les noeuds de décision inclus dans un ensemble d'information doivent avoir les mêmes actions possibles, sinon le joueur peut inférer sur le noeud de décision atteint à partir des actions qu'il peut choisir.*

Lorsqu'un joueur décide d'une action dans un noeud, il ne connaît pas forcément le noeud où il se trouve. Il connaît cependant l'ensemble d'information auquel ce noeud appartient. Pour décrire la manière de jouer d'un joueur, il faut donc décrire quelle action il choisit en fonction de l'ensemble d'information où il se trouve.

Définition 1.19 *[23] Soit $i \in I$, une stratégie pure s_i du joueur i associé à chacun de ses ensembles d'information une action. On note S_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i. Le joueur i doit choisir la même action dans tous les noeuds appartenant au même ensemble d'information, c'est-à-dire qu'il ne fait pas la différence entre ces noeuds.*

Exemple 1.4 ***(Le problème d'entrée d'une firme sur le marché d'un monopole)***
1. *L'entrant* (E) *doit choisir entre Entrer ou Ne pas entrer.*
2. *S'il entre, l'entreprise installée* (I) *a deux choix : Combattre en cassant les prix ou Coopérer avec lui, de manière à créer un monopole joint.*
Nous pouvons représenter ce jeu sous la forme d'un arbre (FIGURE 1.1 *[20])*

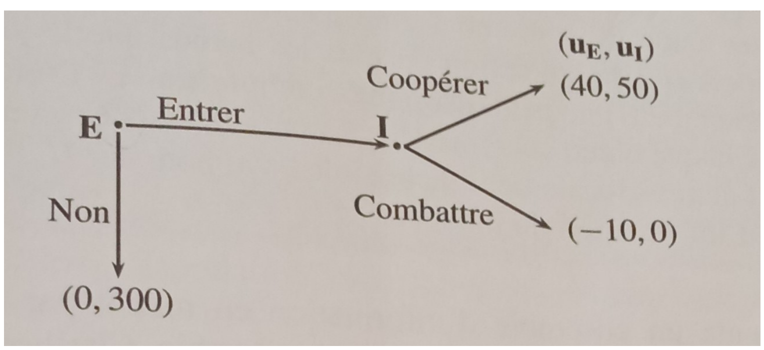


FIGURE 1.1 – Le jeu de l'Entrée I

Définition 1.20 ***[Équilibre de Nash]*** *[23] Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de sa forme normale associée.*

Exemple 1.5 ***(Pile ou face)*** *[23]*
Le joueur 1 *choisit Pile (P) ou Face (F) et le joueur* 2 *observe d'abord le choix du joueur* 1 *puis choisit à son tour Pile ou Face. Le joueur* 2 *gagne si les choix sont différents et perd si les choix sont égaux. Ce jeu est représenté sous forme extensive :*

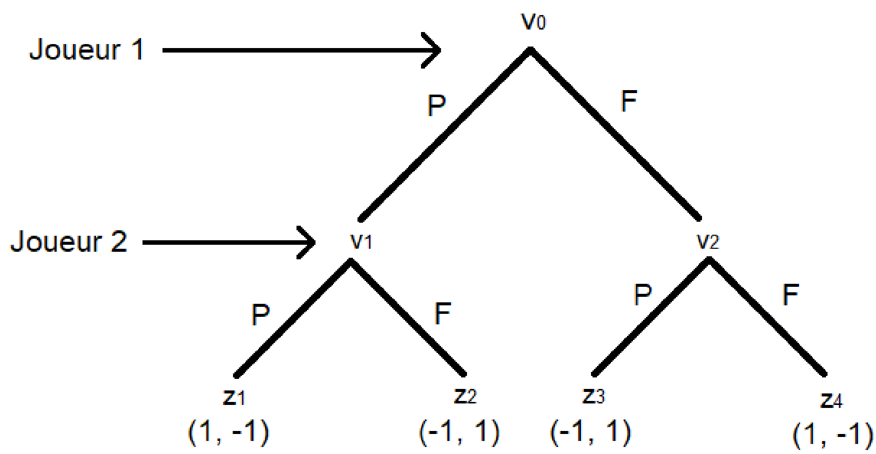


FIGURE 1.2 – Le jeu de Pile ou face

On suppose maintenant que le joueur 2 *ne connaît pas le choix du joueur* 1 *lorsqu'il effectue son choix. Cette situation peut être représentée par un ensemble d'information (pointillés en rouge) comme nous le montre la figure suivante :*

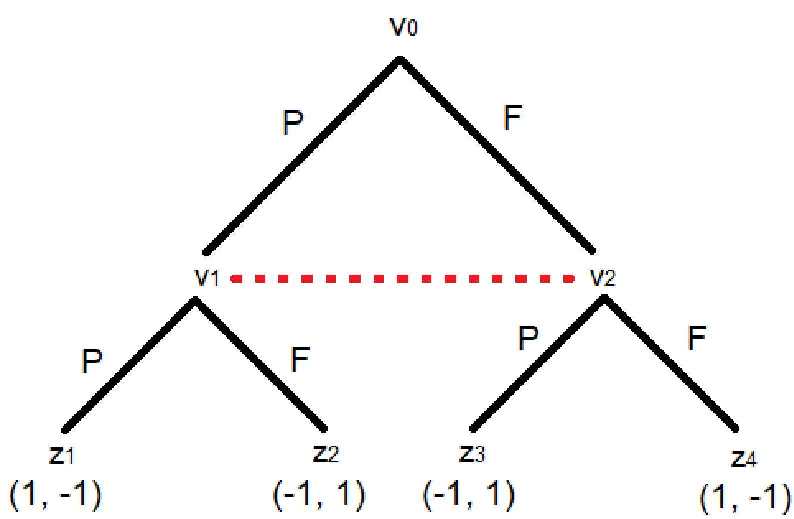


FIGURE 1.3 – Ensemble d'information du joueur 2

L'ensemble d'information du joueur 2 $\{\upsilon_1, \upsilon_2\}$ *comprend ses deux noeuds de décision, ce qui indique que le joueur* 2 *ne fait pas de différence entre* υ_1 *et* υ_2 *et son choix effectué doit être indépendant de celui effectué précédemment par le joueur* 1*, c'est équivalent à un choix simultané, étant donné que le joueur* 2 *ne connait pas le choix effectué par le joueur* 1*.*
Un autre cas très important à étudier pour ce jeu, dans le cas où il n'y a pas de joueur 1*, le joueur* 2 *joue contre la Nature qui tire aléatoirement une pièce de monnaie, Pile ou Face avec probabilité de* p *de tomber sur Pile et probabilité* $q = 1 - p$ *de tomber sur Face. La Nature est définie comme étant un joueur qui n'a pas d'intérêt stratégique ni de paiement et qui sert à représenter le caractère aléatoire des résultats du jeu. Cette situation du jeu est représentée dans la figure suivante :*

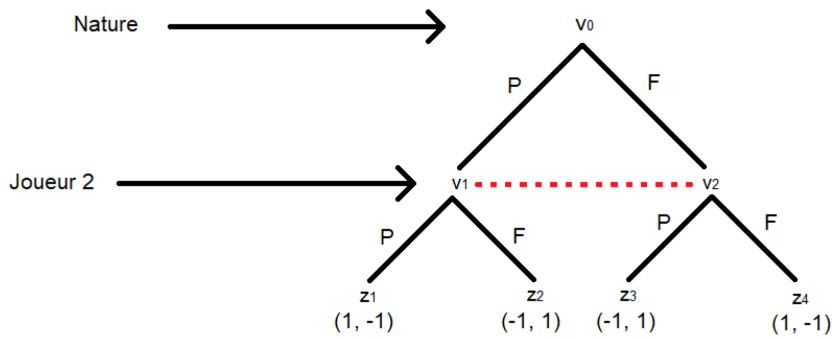


FIGURE 1.4 – Le joueur Nature dans le jeu de Pile ou face

Les deux flèches indiquent que c'est la Nature qui va joueur en premier et puis le joueur 2.

1.5.2 Jeux répétés

Dans un jeu séquentiel, les joueurs jouent à tour de rôle, par contre dans un jeu répété, les joueurs jouent simultanément de façon répétée. Un des principaux thèmes de la répétition d'un jeu est qu'une menace/promesse future crédible peut avoir une influence sur le comportement présent des joueurs. La répétition du jeu peut donc changer l'équilibre du jeu [14].

Définition 1.21 *[16] Soit le jeu sous forme normale* (1.1)*, on note* J_T *le jeu répété obtenu en jouant* T *fois le jeu* (1.1) *dit jeu de base. Lorsque* $T = +\infty$*, le jeu répété* J_T *est un jeu infini car c'est un jeu obtenu en répétant infiniment le jeu de base* (1.1)*, dans le cas contraire, le jeu répété* J_T *est un jeu fini.*

Pour qu'un profil de stratégies soit un equilibre de Nash Parfait, il faut non seulement qu'il soit un équilibre de Nash, mais également il faut qu'il satisfait une contrainte supplémentaire, à savoir celle du principe de rationalité séquentielle. Selon ce principe, un équilibre doit spécifier un comportement optimal à partir de n'importe quel point du jeu [14].
Comme pour les jeux répétés à un nombre fini de fois, dans la classe des jeux infiniment répétés, une importance capitale est accordée au sujet de la crédibilité des menaces/promesses et leur influence sur le comportement présent. Un résultat important est obtenu dans le cas d'un jeu infiniment répété J_∞.

Définition 1.22 ***(La crédibilité)*** *[14] La crédibilité est une restriction naturelle à imposer à l'équilibre de Nash. Elle consiste à écarter les équilibres de Nash (qui sont déterminés à partir de la forme normale).*

Les stratégies : soit $s_i(t)$ la stratégie pure du joueur $i \in I$ à l'instant $t = \overline{0, T}$, le profil de stratégies pures choisi par les joueurs à l'instant t est :

$$s(t) = (s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t)) \in S = \prod_{i=1}^{n} S_i.$$

Définition 1.23 ***(Facteur d'actualisation)*** *[16] Lorsqu'un jeu est répété, il se peut que les gains obtenus à l'itération courante du chaque joueur $i \in I$, $\pi_i(s(t))$, aient plus ou moins d'importance que les gains à l'itération suivante $\pi_i(s(t+1))$. Pour modéliser cela on peut utiliser un facteur d'actualisation $\delta \in]0, 1]$ tel que :*

$$\pi_i(s(t)) = \delta\pi_i(s(t+1)), t = \overline{0, T}.$$

Proposition 1.2 *[14]*
Si le jeu (1.1) admet un équilibre de Nash unique, alors pour tout T fini, le jeu J_T admet un seul équilibre de Nash parfait : l'équilibre de Nash du jeu (1.1) est joué à chaque séquence.

1.6 Les systèmes dynamiques

Un système dynamique est un ensemble mathématique, mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution de tel système nécessite la détermination les deux éléments suivants à savoir :

1. L'état initial de système dynamique (son état à l'instant t_0).

2. La loi d'évolution de système dynamique.

On distingue deux cas de systèmes dynamiques : continue et discret. Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions essentielles concernant un système dynamique discret.

Définition 1.24 *[22]*
Un système dynamique discret est un triplet (Y, T, g), formé par un espace temporel (espace de temps) T généralement $T = \mathbb{N}$, un espace métrique non vide $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ appelé espace des phases, et une fonction continue :

$$g : Y \to Y.$$

Définition 1.25 ***(Point périodique)*** *[22] Soit $(Y, \mathbb{N}, g)$ un système dynamique discret, un point $y \in Y$ est dit point périodique de période $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si :*

$$g^k(y) = y,$$

et puuour tout $m < k$:

$$g^m(y) \neq y.$$

Le cycle engendré par y est alors $\xi = \{y_0, y_1, ..., y_{k-1}\}$, $y_i = g^i(y)$, $i = \overline{0, (k-1)}$.

Définition 1.26 ***(Point fixe)*** *[22] Les points périodiques de période $k = 1$ sont les points fixes de g et sont appelés points d'équilibre.*

1.6.1 Stabilité

Définition 1.27 *[22] Soit $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, et $(Y, \mathbb{N}, g)$ un système dynamique discret : Soit*

1. *Un point d'équilibre y est stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \forall x \in Y, \forall n \in \mathbb{N} \text{ on } a : d(y, x) < \eta \Rightarrow d(g^n(x), y) < \epsilon.$$

2. *Un point d'équilibre y est dit attractif si :*

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in Y \text{ tel que : } d(y, x) < \eta \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} g^n(x) = y.$$

3. *Lorsque la récurrence g est $n-$ dimensionnelle ($dimY = n$), un cycle d'ordre k à n multiplicateurs λ_i, $i = \overline{1, n}$. On pose :*

$$\rho_i = |\lambda_i|.$$

4. *Le cycle est dit asymptotiquement stable ou attractif si : $\rho_i < 1, \quad \forall i = \overline{1, n}$.*

5. *Le cycle est dit instable ou répulsif si au moins un de ses multiplicateurs* λ_i *est tel que* $\rho_i > 1$.
6. *Un point fixe ou un cycle est dit noeud attractif si :* $\rho_i < 1, \quad i = 1, 2$.
7. *Un point fixe ou un cycle est dit noeud répulsif si :* $\rho_i > 1, \quad i = 1, 2$.
8. *Un point fixe ou un cycle est dit foyer attractif si :* $\rho_1 = \rho_2 < 1$.
9. *Un point fixe ou un cycle est dit foyer répulsif si :* $\rho_1 = \rho_2 > 1$.

1.6.2 La bifurcation

Définition 1.28 ***(La bifurcation)*** *[11] Dans les systèmes dynamiques, une bifurcation se produit lorsqu'un petit changement en douceur apporté aux valeurs des paramètres (les paramètres de bifurcation) d'un système provoque un soudain changement qualitatif ou topologique de son comportement.*
Dans la théorie des systèmes dynamiques, une bifurcation de doublement de période (bifurcation Flip) se produit lorsqu'un léger changement dans les paramètres d'un système fait émerger une nouvelle trajectoire périodique à partir d'une trajectoire périodique existante, la nouvelle ayant le double de la période de l'original. Avec la période doublée, il faut deux fois plus de temps (ou, dans un système dynamique discret, deux fois plus d'itérations) pour que les valeurs numériques visitées par le système se répètent.
La bifurcation de Neimark-Sacker est la naissance d'une courbe invariante fermée à partir d'un point fixe dans les systèmes dynamiques à temps discret (cartes itérées), lorsque le point fixe change de stabilité via une paire de valeurs propres complexes de module unitaire.

1.7 Conclusion

La théorie des jeux est un outil mathématique essentiel et efficace pour traiter et modéliser plusieurs problèmes. Dans ce chapitre, nous avons rappelé les éléments essentiel de la théorie des jeux, où nous nous sommes intéressés à deux classes de jeux, les jeux statiques et les jeux dynamiques. Pour chaque classe de jeux, nous avons donné la structure et les notions appropriés et nous avons clos ce chapitre par quelques définitions concernant les systèmes dynamiques dont on aura besoin dans la suite de ce document.

CHAPITRE 2

MODÈLES DE BASE DES DUOPOLES

2.1 Introduction

Ce chapitre est composé de deux parties principales, dont la première est consacrée aux notions de base sur les marchés et les entreprises. La deuxième partie porte sur l'étude des différents duopoles classiques : Cournot, Bertrand, Stackelberg et Hotelling.

2.2 Notions de base sur le marché et l'entreprise

Cette section contient quelques notions de base sur le marché et l'entreprise. Nous commençons par la définition générale d'un marché en précisant certains éléments essentiels tels que par exemple, l'équilibre du marché, segmentation du marché, la demande...etc. On passe par la suite à la définition de l'entreprise plus des explications de tout ce qui s'y rapporte (classification des entreprises, la production,...etc) [12], [6], [21].

Définition 2.1 ***(Le Marché)*** *Le marché est le lieu physique ou virtuel où se rencontrent l'offre et la demande et où s'opère la détermination du prix d'un bien ou d'un service.*

Définition 2.2 ***(L'équilibre du marché)*** *Un équilibre de marché est un vecteur de prix tel que, pour ce vecteur, l'offre de chaque bien est égale à la demande pour chaque bien (un marché est dit en équilibre lorsque les intentions des offreurs correspondent à celles des demandeurs).*
Si les biens considérés représentent l'ensemble des biens disponibles dans l'économie étudiée, on parle d'équilibre général. Sinon, il s'agit d'un équilibre partiel. L'équilibre de marché est

un état stable : personne n'est rationné (tout le monde peut réaliser son plan), il y a absence de tendance endogène au mouvement (c'est-à-dire il s'agit d'un état de repos).

Remarque 2.1 *Pour se positionner sur un marché, l'entreprise va analyser d'abord l'offre, c'est-à-dire les concurrents déjà présents sur le marché et les produits qu'ils proposent, ensuite la demande, c'est-à-dire les clients et ceux qui sont susceptibles de les influencer, les besoins des consommateurs et les comportements d'achat.*

Définition 2.3 ***(Prix d'équilibre)*** *Le prix d'équilibre c'est le seul prix où les désirs des acheteurs et ceux des vendeurs coïncident, il égalise l'offre et la demande sur le marché.*

Définition 2.4 ***(Plan de marchéage)*** *Le plan de marchéage représente une collection homogène de décisions et actions relatives aux quatre variables mercatiques : produit, prix, distribution et communication prises par une entreprise et qui vont garantir le succè d'un service, d'une marque ou d'un produit de cet entreprise.*

Définition 2.5 ***(La segmentation du marché)*** *La segmentation du marché consiste à découper sa clientèle en groupes d'individus au comportement homogène. Pour segmenter, il faut identifier les bons critères qui vont permettre de différencier les consommateurs : socio-démographiques, style de vie, personnalité, comportement d'achat.*

Il existe quatre critères de segmentation du marché, à savoir :
• Des critères socio-économiques : niveau de revenu, catégorie socioprofessionnelle, niveau d'instruction du consommateur visé.
• Des critères socio-psychologiques : personnalité, valeurs, croyances...etc.
• Des critères géographiques : pays, climat, caractéristiques régionales, caractère urbain ou rural du consommateur visé...etc.
• Des critères liés à l'acte d'achat : moment de l'achat, attitude vis à vis du produit...etc.

La segmentation est le processus de division du marché d'une entreprise en groupes de clients potentiels aux besoins et aux comportements similaires, et grâce à ce processus l'entreprise peut vendre à chaque groupe de clients en utilisant des différents stratégies selon leurs besoins.
L'entreprise peut utiliser un ou plusiers de ces critères et cela en fonction de ses besoins pour segmenter le marché (elle choisit les critères qui vont être utiliser en fonctio de ses besoins), mais ces critères sont pas suffisants, car l'entreprise à besoin aussi des stratégies qu'elle

doit suivre pour faire une meilleure segmentation de marché. Il existe quatre strategies de segmentation :

1. **Stratégie indifférenciée** : l'entreprise elle ne fait pas de différence entre les différents segments du marché, cette stratégie ignore essentiellement les différences entre les segments de marché et traite l'ensemble du marché comme un unique objectif ce qui signifie que tout le monde peut être des clients possibles.
2. **Stratégie concentrée** : l'une des quatre stratégies de segmentation possibles dans laquelle l'entreprise à intéret de viser un produit sur un segment du marché, c'est-à-dire elle dirige tout son argent et ressources vers la production et la commercialisation de ce produit.

   Le plus grand avantage de cette stratégie c'est qu'elle permet à l'entreprise de se spécialiser dans la production et la commercialisation d'un produit visé, et de trouver des moyens moins coûteux et efficaces de produire et commercialiser le produit, et donc réduire les coûts et de générer des bénéfices. D'autre part, il y'aura un manque de diversification, et tout problème dans la demande de produit à cause de changement de technologie, de goût des consommateurs et d'autres facteurs peut amener à une baisse complète des ventes et des bénéfices.
3. **Stratégie adaptée** : consiste à apporter des modifications au produit sans modifier les caractéristiques de base du produit, c'est une stratégie importante pour les entreprises qui souhaitent introduire de nouveaux produits mais n'ont pas les fonds ou les ressources nécessaires pour développer des articles complètement nouveaux.
4. **Stratégie différenciée** : c'est le contraire de la stratégie indifférenciée, pour chaque segment du marché, l'entreprise va proposer un produit différent. Le principal avantage de cette stratégie c'est que l'entreprise aura une bonne capacité de lutte contre les concurrents en particulier ceux qui ont une stratégie indifférenciée, mais aussi cette stratégie va causer une grande augmentation dans les coûts de production puisqu'il y a un grand nombre de produits.

La segmentation du marché est très importante pour l'entreprise et a plusieurs avantages, parmi ces avantages nous citons :
Segmenter le marché permet à l'entreprise de mieux connaitre ses clients et son marché car elle va analyser de manière détaillée son marché, et quelles sont les caractéristiques à observer chez les clients. L'entreprise segmente son marché car ça lui permettera d'avoir une meilleure optimisation des prix, puisqu'elle peut repérer les groupes de clients prêts à payer

un peu plus pour une amélioration précise, et aussi pendant la segmentation du marché, l'entreprise peut détecter les premiers signes d'une évolution fondamentale du marché cible cela lui permettra de s'adapter avec lui à temps. La segmentation du marché donne à l'entreprise la possibilité du choix des médias publicitaires les plus accordé à ses besoins et de répartir son budget total plus correctement entre ces médias.

Tout comme la segmentation affecte positivement l'entreprise, elle l'affecte également négativement, et cet impact négatif est représenté dans les inconvénients de la segmentation et parmi ces inconvénients, nous mentionnons : quand l'entreprise essaye de servir plusieurs secteurs du marché (les segments du marché), cela augmentera les coûts de production à cause des cycles de production plus courts et des variations de produits. Augmentation dans le budget de commercialisation et de la distribution car l'entreprise utilise différents programmes distincts pour les différents segments du marché, et s'il y a un changement dans les caractéristiques du segment du marché, alors les investissements réalisés peuvent devenir inefficaces.

2.3 La classification des marchés

Il existe plusieurs marchés, qui peuvent être classés selon des critères tels que :

• Les marchés selon la nature des produits : on distingue deux types à savoir, le marché des biens qui concerne les produits matériels, par exemple les marchés des ordinateurs, des vêtements...etc. Le marché des services qui prend en compte les produits immatériels, on peut citer par exemple les assurances, les voyages.

• Les marchés selon leur taille : marché de masse ou marché des produits de grande consommation qui se caractérise par des chiffres d'affaires très importants, par exemple le marché des produits alimentaires ayant un chiffre d'affaires dépassant les 110 milliards d'euros. Par contre un marché de niche est un marché très limité qui se caractérise par sa petite taille, une clientèle spécifique, de capacités très limités en matière de production.

• Les marchés selon leur dimension géographique : le marché peut être découpé en fonction de l'attraction géographique qu'il exerce, on peut distinguer : un marché local pour lequel les acteurs sont géographiquement proches, on peut prendre comme exemple les marchés dans les villes qui mettent en contact les producteurs du terroir et les habitants de la ville. Un marché régional qui regroupe les acteurs d'une même région, par exemple, le marché d'un quotidien régional. Un marché national dont les acteurs se situent dans le même pays tout entier comme par exemple, le marché de certaines radios telles que RTL, France Info. Un marché international dont les acteurs se situent dans des pays différents, par exemple, les constructeurs automobiles français qui vendent leurs produits dans toute l'europe.

• Les marchés selon leur structure : selon ce critère il existe trois types qui sont les suivants : le marché générique qui regroupe l'ensemble des produits satisfaisant les mêmes besoins, par exemple le marché de l'alimentation. Le marché support qui regroupe des produits différents mais qui se caractérisent par des comportements de consommation proches. Le marché principal qui regroupe l'ensemble des produits semblables, par exemple, le marché des boissons gazeuses.

• Les marchés selon la filière, il existe deux types : le marché amont est représenté par les marchés qui se situent avant l'activité de production des biens et services, par exemple, le marché financier, le marché des matières premières, le marché du travail. Le marché aval concerne les étapes qui succèdent à la production des biens et services.

2.3.1 L'offre et de la demande

L'offre et la demande est un modèle économique de détermination des prix dans un marché. On invoque souvent la loi de l'offre et de la demande pour expliquer les hausses et les baisses des prix. Selon la loi de l'offre, lorsque le prix d'un produit sur le marché augmente l'offre de ce produit augmente aussi, c'est-à-dire l'entreprise va proposer plus de quantité de ce produit sur le marché.

Définition 2.6 ***(La demande)*** *La demande est le taux auquel les consommateurs veulent acheter un produit. La théorie économique soutient que la demande se compose de deux facteurs : le goût et la capacité d'achat. Le goût, qui est le désir d'un bien, détermine la volonté d'acheter le bien à un prix déterminé. La capacité d'acheter signifie que pour acheter un bien à un prix spécifique, un individu doit posséder une richesse ou un revenu suffisant.*

Définition 2.7 ***(Courbe de la demande)*** *Courbe de la demande représente l'évolution de la quantité demandée quand le prix du bien varie, tous les autres facteurs constants.*

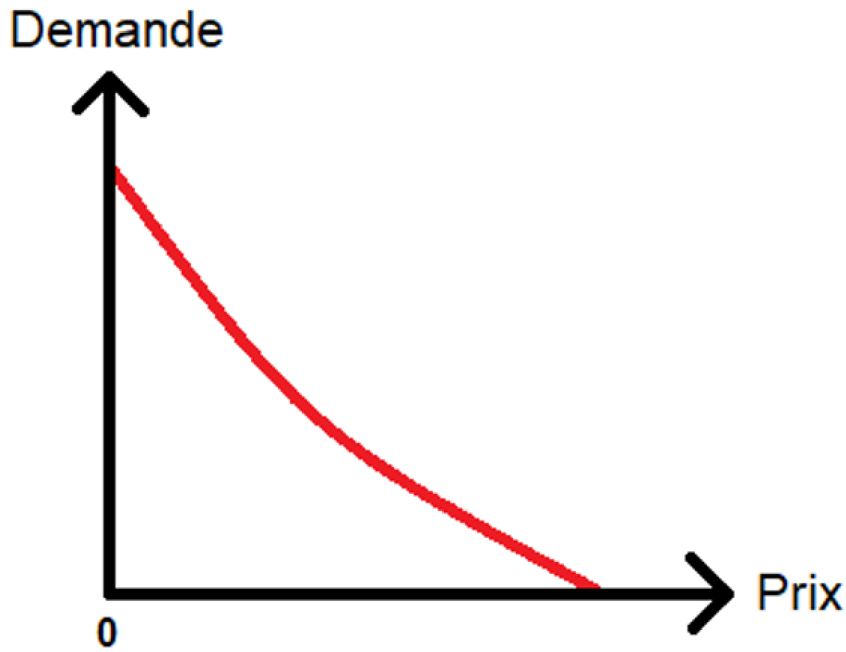


FIGURE 2.1 – Courbe de la demande

Cette figure nous montre que plus le prix du produit diminue, plus la demande des clients (quantité demandée) augmente, et vice versa.

Les déterminants de la demande : la demande dépend du prix, du revenu, des goûts, du prix des produits substituables et des anticipations.

- Le prix : toutes autres choses étant égales par ailleurs, quand le prix d'un bien augmente, la quantité demandée va diminuer.
- Le revenu : quand la demande pour un bien augmente, lorsque le revenu augmente, on parle d'un bien normal et quand la demande pour un bien diminue, lorsque le revenu augmente, on parle d'un bien inférieur.
- Le prix des produits comparables : quand la baisse du prix d'un bien provoque une baisse de la demande d'un autre bien, les deux biens sont substituables et quand la baisse du prix d'un bien provoque une augmentation de la demande d'un autre bien, les deux bien sont complémentaires.
- Les goûts : reflets des préférences individuelles.
- Les anticipations : elles représentent les attentes pour ce qui vient dans le futur.

<u>Fonction de demande :</u>

La fonction de demande montre la correspondance entre la quantité demandée, prix et autres facteurs qui influencent les achats.

$$Q = D(P, P_s, P_c, R, nc),$$

avec :

P : le prix du bien .

P_s : le prix des substituts.

P_c : le prix des compléments.

R : le revenu des consommateurs.

nc : le nombre de consommateurs.

Définition 2.8 ***(La demande du marché)*** *Somme des demandes individuelles pour un bien ou un service particulier, en d'autres termes, c'est la quantité totale de biens et de services que tous les consommateurs souhaitent et peuvent acheter à un prix spécifique sur un marché.*

Remarque 2.2 *Notons que, à mesure que le prix d'un bien change, la demande change également. Moins de gens sont disposés et capables d'acheter des biens à des prix plus élevés, par conséquent, la demande diminue à mesure que les prix augmentent.*

Savoir ce que veulent les consommateurs (la demande) ne suffit pas, à lui seul, pour nous dire le prix du marché et la quantité. Pour déterminer le prix du marché et la quantité, nous devons également savoir comment beaucoup d'entreprises veulent fournir à un prix donné (l'offre).

Définition 2.9 ***(L'offre)*** *La quantité de biens ou services proposés sur un marché et qui varie en fonction du prix, elle se définit aussi comme une fonction croissante du prix et qui lie la quantité offerte au prix de ce bien, tel que : plus le prix d'un bien est élevé, plus les entreprises sont intéressés à le produire.*

2.3.2 La fonction d'offre

Une fonction d'offre doit établir un lien entre le prix du produit et la quantité offerte (produite et proposée à la vente) par le producteur. La relation doit être croissante, c'est-à-dire plus le prix du produit augmente plus la quantité offerte augmente aussi et contrairement (plus le prix du produit diminue, plus la quantité offerte diminue aussi).

Définition 2.10 ***(L'offre du marché)*** *Somme des offres individuelles pour un bien ou un service particulier, l'offre du marché représente la quantité totale d'un article que les producteurs sont disposés et capables de vendre à des prix différents, sur une période de temps donnée. Une courbe d'offre de marché est la somme horizontale de toutes les courbes d'offre de chaque entreprise et qui s'obtient en additionnant les quantités offertes par tous les producteurs à chaque prix.*

Définition 2.11 ***(Courbe de l'offre)*** *La courbe d'offre est une représentation graphique de la corrélation entre le coût d'un bien ou d'un service et la quantité fournie pour une période donnée. Le prix apparaîtra sur l'axe vertical gauche, tandis que la quantité offerte apparaîtra sur l'axe horizontal.*

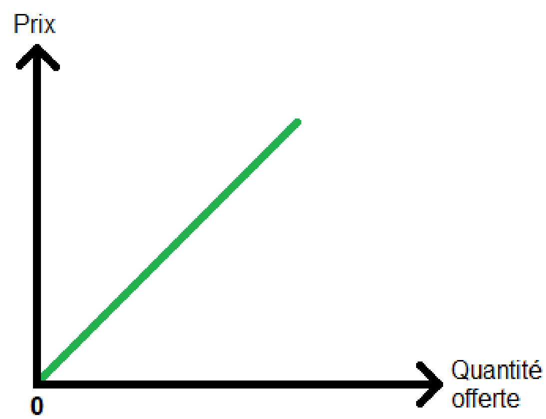


Figure 2.2 – Courbe d'une corrélation linéaire entre l'offre et le prix

Cette figure nous montre que plus le prix du produit augmente, plus la quantité offerte augmente, et vice versa.

Définition 2.12 ***(Loi de l'offre et de la demande)*** *La loi de l'offre et de la demande est une théorie qui explique l'interaction entre les vendeurs d'une ressource et les acheteurs de cette ressource. La loi de l'offre et de la demande définit la relation entre le prix d'un bien ou d'un produit donné et la volonté des gens de l'acheter ou le vendre. En général, à mésure que les prix augmentent, les gens sont prêts à offrir plus et à demander moins et vice versa lorsque le prix baisse.*

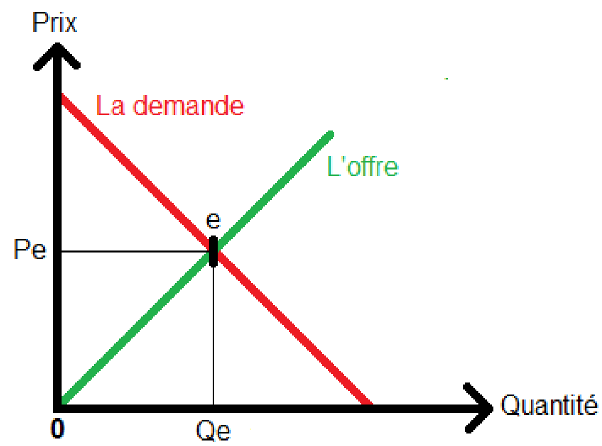


FIGURE 2.3 – Loi de l'offre et de la demande

L'équilibre du marché est atteint à l'intersection des courbes d'offre et de la demande, à l'équilibre la quantité demandée est égale à Qe et le prix de cette quantité est égal à Pe.

Définition 2.13 ***(L'entreprise ou bien la firme)*** *L'entreprise est une unité économique autonome, combinant divers facteurs de production, produisant pour la vente, des biens et des services et distribuant des revenus en contrepartie de l'utilisation des facteurs.*
Une entreprise est un décideur individuel qui procède à la production de marchandises par la combinaison de différents facteurs de production (inputs) grâce à des procédés techniques. Ces inputs sont des marchandises que l'entreprise peut posséder en partie dans sa dotation initiale. Elle doit acheter le reste sur les marchés correspondants. Certains inputs peuvent ne pas être des marchandises : la lumière du soleil dans l'agriculture, par exemple.

L'entreprise joue un rôle très important dans l'économie, il s'agit de répondre à la demande des consommateurs, satisfaire leurs différents besoins et contribuer à l'élimination du chômage en fournissant des emplois, comme elle contribue également à la croissance économique et encourage la production pour que le pays soit présent sur les marchés étrangers.

2.3.3 Classification des entreprises

Les entreprises peuvent être classifiées suivant plusieurs critères :
• Classification selon la dimension (taille) : il existe cinq types d'entreprises qui sont :
TPE (Très Petite Entreprise) : moins de 10 salariés.

PE (Petites Entreprises) : entre 10 salariés et 49 salariés.

ME (Moyenne Entreprise) : entre 50 salariés et 250 salariés.

Grande entreprise : plus de 250 salariés.

Groupe d'entreprises : comporte une société mère et des filiales.

• Classification juridique : la définition de la forme juridique de l'entreprise permet de définir le statut fiscal, on note cinq grandes formes juridiques de l'entreprise : l'entreprise individuelle, l'entreprise individuelle à responsabilité limitée, l'entreprise unipersonnelle à responsabilité limitée, la société de capitaux, la société en nom collectif. Réglementairement, une entreprise individuelle et son détenteur partagent une identité, le détenteur de cette entreprise est personnellement résponsable de toute responsabilité (responsable des achats, des ventes, des contrats, des empolyés...etc) ou dette contractée par l'entreprise, pour éviter cette responsabilité illimitée, certaines entreprises choisissent de former une société à responsabilité limitée distincte de son propriétaire (entreprise individuelle à responsabilité limitée).

• Classification selon leurs activités : il existe trois types d'entreprises :

Entreprise commerciale : elle achète des biens qu'elle revend sans transformation.

Entreprise financière : elle fournit des opérations financières à savoir, la collecte, la transformation et la distribution des ressources monétaires et des ressources d'épargne.

Entreprise de prestation de service : elle fournit deux types de services, service de production vendu à d'autres entreprises et services de consommation (comme par exemple le transport, restaurants, locations).

• Classification sectorielle : on distingue trois types d'entreprise à savoir : le secteur primaire qui regroupe toutes les entreprises utilisant à titre principal le facteur naturel il englobe l'agriculture, l'élevage, la pêche. Le secteur secondaire, regroupe toutes les entreprises ayant comme activité la transformation de matières premières en produits finis. Le secteur tertiaire, regroupe toutes les entreprises prestataires de services et tout ce qui n'appartient pas aux deux autres secteurs dont : les activités de distribution, de transport, de loisir, de crédit, d'assurance.

• Classification selon la branche d'activité : à la différence du secteur, qui rassemble des activités variées, la branche ne regroupe que les entreprises fabriquant, à titre principal, la même catégorie de biens, donc les entreprises du même branche d'activité utilisent les mêmes techniques, mêmes matières premières ce qui leurs permet de regrouper certaines de leurs activités et de créer des services communs, notamment de recherche, d'achat ou de vente, filiales communes, groupement d'intérêts économiques par exemple.

L'entreprise existe dans un environnement (tout ce qui est situé à l'exterieur de l'entreprise, par exemple les clients, les concurrents) dont elle fait partie intégrante, donc elle n'est pas indépendante et ne suffit pas à elle même. Les activités de l'entreprise se développent en interdépendance étroite avec l'environnement qui lui impose des contraintes.

Définition 2.14 ***(Les biens)*** *Les biens sont les moyens qui permettent de satisfaire les besoins, des objets physiques produits pour lesquels il existe une demande, sur lesquels des droits de propriété peuvent être établis et dont la propriété peut être transférée d'une unité institutionnelle à une autre par le biais d'une opération sur le marché.*

Il existe deux types de biens, à savoir : les biens naturels ou biens libres : produits de la nature et non d'une activité humaine, comme l'eau, l'air, la lumière du soleil, ils sont théoriquement en quantité illimitée. Les biens non naturels ou biens économiques : nés de l'activité humaine et transformés tout au long du processus productif, comme la paire de chaussures, l'ordinateur, ils sont d'une grande variété.

Définition 2.15 ***(Les services)*** *Un service est quelque chose dont le public a besoin, comme les transports, les installations de communication, les hôpitaux ou l'approvisionnement en énergie, qui est fourni de manière planifiée et organisée par le gouvernement ou un organisme officiel, et consiste en la mise à disposition d'une capacité technique ou intellectuelle ou en la fourniture d'un travail directement utile pour l'usage, sans transformation de matière.*

Les opérations sur les biens et services : les opérations qui portent sur la création ou l'utilisation de biens et services sont les suivantes :

- La production qui correspond à la création de biens et services.
- La consommation intermédiaire qui correspond à la destruction de biens et services au cours du processus de production.
- La consommation finale qui correspond à la destruction de biens et services par les ménages pour satisfaire leurs besoins.
- La formation brute de capital fixe qui correspond à l'accumulation de biens et services utilisés de manière durable dans le processus de production.
- La variation des stocks qui correspond à la conservation de biens et services pour une utilisation ultérieure.
- Les acquisitions moins cessions d'objets de valeur qui correspondent à des biens utilisés comme réserve de valeur.

– Les importations et les exportations qui correspondent aux échanges de biens et services.

Définition 2.16 ***(La production)*** *La production est une activité économique exploitant les ressources du travail et du capital, appelées facteurs de production (le savoir et l'information, l'entreprise et les ressources naturelles) dans le but de réaliser des biens ou des services à partir de consommations intermédiaires (biens ou services achetés à d'autres entreprises puis transformés). Cette activité s'exerce dans une unité institutionnelle de type entreprise, administration ou encore association.*

La production est une activité économique dévisée en deux catégories et qui sont : la production marchande correspond à la production de biens et de services destinés à être vendus sur un marché et dont le prix couvre au moins les coûts de production, la production non marchande qui fournit des biens ou des services gratuits ou dont le prix de vente est inférieur à la moitié du coût de production.

2.3.4 Différenciation des produits

Définition 2.17 *[15] La différenciation des produits est une stratégie marketing que les entreprises utilisent pour distinguer un produit d'offres similaires sur le marché. La différence peut être quelque chose de concret, comme la vitesse, la puissance, performance, et un meilleur service, ou, il pourrait s'agir d'une qualité plus éphémère, comme être simplement plus frais ou plus élégant que les concurrents.*

En économie, la différenciation entre produits désigne l'existence de différences objectives ou subjectives faisant que deux biens proches ne sont pas considérés comme identiques par tous les consommateurs du marché, les entreprises utilisent la différentiation des produits (différencier ses produits des produits de leurs adversaires ou bien de ses autres propres produits) dans le but de les rendre plus intéressant pour un marché cible et attirer plus de consommateurs et donc maximiser ses gains. Il existe trois principaux types de différenciation des produits, la différenciation horizontale, la différenciation verticale et la différenciation mixte.

La différenciation horizontale : on parle de différenciation horizontale quand la différenciation concerne des caractéristiques pour lesquelles les préférences varient selon les goûts des consommateurs, la différenciation horizontale fait référence à toute différenciation qui n'est pas associée à la qualité ou au prix du produit, elle s'intéresse à la différence entre les produits par rapport a leurs caractéristiques et non pas à la différence des prix ou bien de qualité entre ces produits dites différenciés horizontalement. L'entreprise fait différencier son produit horizontalement lorsque les caractéristiques de ce produit sont différents de ceux d'un autre produit dans l'objectif de satisfaire les besoins d'un ensemble particulier des consommateurs ayant des préférences spéciales pour ses caractéristiques. La différentiation horizontale est dévisée en deux types selon le critère de nombre de caractéristiques du produit : lorsque le nombre de caractéristiques que les consommateurs peuvent considérer comme des avantages est élevé, dans ce cas on parle d'une différenciation horizontale forte, par contre lorsque la différentitation concerne les produits simples et qui possédent peu de caractéristiques intéressantes pour les consommateurs alors c'est une différenciation horizontale moins forte. Comme par exemple, les variations dans la conception, la taille, le tissu ou la couleur d'une robe constituent une différenciation horizontale, car les produits de type robe sont différencier par rapport à leurs de caractéristiques (la taille du la robe, sa couleur...).

La différenciation verticale : la différentiation verticale c'est le contraire de la différentiation horizontale, deux produits sont dites différencier verticalement lorsque les entreprises

différencier ses produits de ceux de ses adversaires par rapport aux prix et qualité des produits (les entreprises ne prennent pas en considération les caractéristiques de ses produits), les consommateurs préfèrent les produits des meilleures qualités et ce qui compte vraiment, c'est la relation entre la volonté des consommateurs de payer pour l'amélioration de la qualité du produit et l'augmentation du coût unitaire qui vient avec de telles améliorations.

Il existe aussi un autre type de différenciation des produits qui est la différenciation mixte. La différenciation mixte est une combinaison de différenciation à la fois verticale et horizontale [15].

2.4 Notions de base sur les duopoles

Cette section a pour objet de donner les notions de base essentielles sur les duopoles. Nous commencons par une définition générale d'un duopole, nous soulignons ensuite quelques avantages et inconvénients d'un duopole. La dernière partie est consacrée à la présentation de différents types de duopoles classiques ainsi que leurs modèles mathématiques.

Définition 2.18 ***(Duopole)*** *C'est un mode de concurrence qui se produit au sein d'un marché et se caractérise principalement par l'existence de deux entreprises qui produisent* *le même produit et contrôlent l'ensemble du marché (fixant les prix ensemble et utilisant ce prix comme un outil pour contrôler les produits au sein du marché).*

Dans un duopole, deux entreprises concurrentes contrôlent la majorité du secteur du marché pour un produit ou un service particulier qu'elles fournissent et il peut y avoir des entreprises qui fournissent d'autres services qui ne relèvent pas du secteur de marché en question mais qui font partie d'un duopole, et cette concurrence entre les deux entreprises maintient les prix bas et profite aux consommateurs.
Un duopole peut ce transformer en un monopole au une seule entreprise offre un type de produits ou services, et puisqu'il existe une seule entreprise sur le marché donc pas de concurrence et cela peut se réaliser soit par collusion entre les deux entreprises (un accord entre elles pour fixer les prix ensemble), et cela dans le but de manipuler le marché souvent en gonflant les prix afin de réaliser des profits supérieurs aux profits normaux qu'elles devraient obtenir en situation de concurrence), soit si l'une d'entre elles fait faillite.

2.4.1 Les avantages et inconvénients d'un duopole

Un duopole à plusieurs effets positifs (avantages) et négatifs (inconvénients) sur
les entreprises du duopole et les consomateurs, ci-dessous, nous mentionnons certains de ces avantages et inconvénients. Parmi les avantages d'un duopole, on trouve que deux entreprises concurrentes peuvent s'aider et maximiser leurs gains, et au lieu qu'elles essayent de créer de nouveaux produits et services, elles vont consacrer les ressources financières à affiner la qualité et la fonctionnalité des produits et services existants. Le marché duopoliste est considéré plus simple pour les consommateurs car ils n'ont pas besoin de chercher parmi des dizaines d'options pour choisir le meilleur produit ou service pour satisfaire leurs besoins, et grâce à la concurrence entre les deux entreprises dans un duopole le consommateur tire profit car les prix sont contrôlés (par exemple dans le cas de concurrence en prix les entreprises à l'équilibre du duopole de Bertrand proposent le même prix égal à leur coût unitaire et aucune entreprise ne doit changer son prix sinon elle aurait fait des pertes). D'autre part, le duopole à plusieurs inconvénients à savoir : dans le cas d'un duopole, l'etat doit intervenir pour contrôler à la fois la qualité des biens ou services proposés et la fixation des prix maximaux proposés au public, et cette fixation des prix et la collusion qui deviennent plus courantes dans les situations de duopole obligent les consommateurs à payer plus avec peu d'alternatives. Aussi à noter, que sur le marché duopoliste il n'existe pas d'offre diversifiée de biens et services dont leur production nécessite un grand capital.

2.4.2 Les caractéristiques du duopole

Le duopole est personnalisé par plusieurs caractéristiques particulières qui le destingue des autres modes de concurrence. Dans ce qui suit, nous citons quelques unes d'entre elles : sur le marché duopoliste, il existe seulement deux vendeurs ou bien deux entreprises qui produisent le même produit et chaque entreprise possède une connaisance parfaite sur les actions de son concurrent. Les deux entreprises peuvent se mettre d'accord pour toutes les questions concernant la vente de leurs produits, mais lorsqu'elles se mettre pas d'accord la concurrence peut-être très forte et dans ce cas les régulateurs surveillent généralement de proche ce marché pour éviter les pratiques qui empêche la concurrence. Les deux entreprises vont déterminer le prix de leurs produits afin de maximiser leurs profits, ainsi les actions et décisions stratégiques prisent par chaque entreprise ont une influence significatif sur son concurrent.

2.5 Les différents types de duopole

Il existe plusieurs types du duopole qui sont classifiés selon plusieurs critères, dans cette section, nous montionnons certains de ces types les plus connus et nous donnons une idée générale sur chaque duopole ainsi que le modèle mathématique approprié pour chacun d'eux.

Les modèles délaités des différents duopoles cités précédemment sont donnés comme suit.

2.5.1 Duopole de Cournot

Dans le cadre de ce modèle, les deux entreprises choisissent simultanément leur quantité, et chaque entreprise maximise son profit étant donné que l'autre entreprise également prend une décision de production dans l'objectif de maximiser son profit [14].
La concurrence de Cournot est un modèle économique dans lequel des entreprises concurrentes choisissent une quantité à produire indépendamment et simultanément. Le duopole de Cournot considère un marché avec deux entreprises. Ces entreprises produisent un bien homogène, ont des fonctions de coût identiques et se font concurrence en quantité. Chaque entreprise choisit son niveau de production et le prix de marché s'ajuste de façon à ce que l'offre soit égale à la demande.
Le duopole de Cournot décrit une structure industrielle dans laquelle les entreprises sont en concurrence par rapport à leurs volumes de production. Cette théorie est conditionnée aux hypothèses suivantes :

1. $H1$: il y a deux entreprises qui produisent un produit homogène, donc pas de différenciation entre les produits.
2. $H2$: les entreprises ne coopèrent pas.
3. $H3$: le nombre d'entreprises est fixe (égal à 2).
4. $H4$: les entreprises sont en concurrence sur les quantités, et non sur les prix, et choisissent leurs quantités simultanément.
5. $H5$: les entreprises sont rationnelles, et cherchent la maximisation du leurs profits.

Cette situation de duopole du Cournot est modélisée par un jeu sous forme normale définit comme suit :

$$J_C = \prec I, \{S_i\}_{i \in I}, \{\pi_i\}_{i \in I} \succ,$$

avec :

- $I = \{1, 2\}$ est l'ensemble des joueurs (entreprises).
- $S_i = [0, +\infty[$ est l'ensemble des stratégies de chaque entreprise i, $i \in I$, qui représente les quantités possibles de production q_i.
- Fonction d'utilité ou bien de gains de l'entreprise i :

  $$\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(Q) - C_i(q_i), \forall i \in I, q_i \in S_i = [0, +\infty[,$$

  avec : $Q = q_1 + q_2$, est la quantité totale produite par les deux entreprises, et un prix de marché correspondant $P(Q) = a - bQ$ (fonction de demande).
- $C_i(q_i) = c_i q_i$ est la fonction du coût total de production de q_i unités de l'entreprise i, $i \in I$.

L'objectif de chaque entreprise est de déterminer la quantité $q_i \in S_i$ qui maximise son gain π_i, et pour cela chaque entreprise considère comme donné la quantité produite par l'autre entreprise, et doit résoudre le problème suivant :

$$\max_{q_i \in S_i} \pi_i(q_1, q_2), i \in I. \tag{2.1}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre appliquées au problème (2.1) s'écrivent [8] :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_1, q_2) = P(Q) + \frac{\partial P(Q)}{\partial q_i} q_i - \frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i} = 0. \tag{2.2}$$

La solution de (2.2) est donnée par :

$$q_i = \arg \max_{q_i \in S_i} \pi_i(q_1, q_2),$$

et qui dépendra alors des quantités produites par les autres entreprises, noté par $q_i = MR_i(q_j)$ qui représente la fonction de meilleure réponse de l'enreprise i face au choix q_j de l'entreprise j. Dans ce modèle, les stratégies des deux entreprises 1 et 2, sont des quantités offertes de bien. Un équilibre du modèle de Cournot est alors un couple d'offres $q^c = (q_1^c, q_2^c)$ tel que :

$$\begin{cases} q_1^c = MR_1(q_2^c), \\ q_2^c = MR_2(q_1^c). \end{cases} \tag{2.3}$$

La résolution de (2.2) nous donne les fonctions des meilleures réponses des deux entreprises :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c_1 = 0,$$

$$\Rightarrow a - 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0,$$
$$\Rightarrow q_1 = MR_1(q_2) = \frac{a - c_1 - bq_2}{2b}.$$

et puisque les fonctions des profits des entreprises sont symétriques, alors :

$$q_2 = MR_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c_2}{2b},$$

d'où (2.3) s'écrit :

$$\begin{cases} q_1^c = \dfrac{a - c_1 - bq_2^c}{2b}, \\ \\ q_2^c = \dfrac{a - bq_1^c - c_2}{2b}. \end{cases} \tag{2.4}$$

La résolution de (2.4), on remplace la deuxième équation (q_2^c) dans la première équation de ce système on trouve :

$$q_1^c = \frac{a - c_1 - b\left(\dfrac{a - bq_1^c - c_2}{2b}\right)}{2b},$$
$$\Rightarrow q_1^c = \frac{2a - 2c_1 - a + bq_1^c + c_2}{4b},$$
$$\Rightarrow q_1^c = \frac{q_1^c}{4} + \frac{a - 2c_1 + c_2}{4b},$$
$$\Rightarrow \frac{3q_1^c}{4} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{4b},$$

et donc :

$$q_1^c = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b},$$

on remplace q_1^c dans la deuxième équation de (2.4) on trouve :

$$q_2^c = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}.$$

L'équilibre de Nash de jeu de Cournot est donné par :

$$(q_1^c, q_2^c) = \left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}\right)$$

La quantité totale offerte sur le marché à l'équilibre est :

$$Q^c = q_1^c + q_2^c = \frac{2a - c_1 - c_2}{3b}.$$

Les profits des entreprises à l'équilibre sont donnés par :

$$\pi_1^c(q_1^c, q_2^c) = q_1^c(a - bQ^c) - c_1 q_1^c = q_1^c(a - bQ^c - c_1),$$

$$\pi_2^c(q_1^c, q_2^c) = q_2^c(a - bQ^c) - c_2 q_2^c = q_2^c(a - bQ^c - c_2).$$

d'où :

$$\begin{cases} \pi_1^c(q_1^c, q_2^c) = \dfrac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b}, \\ \\ \pi_2^c(q_1^c, q_2^c) = \dfrac{(a - 2c_2 + c_1)^2}{9b}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Exemple 2.1 *[20]*

Soit le marché d'un bien homogène produit par deux entreprises. La demande inverse de marché est donné par $P = 100 - Q$ et les fonctions de coûts des deux entreprises sont $C_i(q_i) = 2q_i$, $i = 1, 2$.

Chercher l'équilibre de cette industrie si chaque entrepries choisit son niveau de production au début de la période, sans communication avec son concurrent.

Cette situation correspond à un duopole de Cournot, avec : $c_1 = c_2 = 2$, $a = 100$ et $b = 1$.

L'équilibre de Cournot est donné par :

$$q^c = (q_1^c, q_2^c) = \left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}\right),$$

$$\Rightarrow q^c = (q_1^c, q_2^c) = \left(\frac{98}{3}, \frac{98}{3}\right).$$

L'application de (2.5) nous donne les profits de Cournot des deux entreprises :

$$\begin{cases} \pi_1^c(q_1^c, q_2^c) = \left(\dfrac{98}{3}\right)^2, \\ \\ \pi_2^c(q_1^c, q_2^c) = \left(\dfrac{98}{3}\right)^2. \end{cases}$$

2.5.2 Duopole de Bertrand

C'est un mode de concurrence par rapport au prix des produits, il explique les interdépendances entre les entreprises qui fixent les prix simultanément et leurs clients qui choisissent les quantités qui vont acheter en tenant compte des prix fixés et qui veulent tout acheter de l'entreprise avec un prix inférieur (car les produits sont homogènes et qu'il n'y a pas de frais de recherche du meilleur produit).

Ce modèle est un autre cas de concurrence entre deux entreprises. Il est dû au mathématicien et économiste Joseph Louis François Bertrand, qui considère que la véritable variable stratégique de décision sur laquelle les deux entreprises agissent en pratique est le prix de vente et non pas les quantités à produire. Soient deux entreprises vendant un même bien homogène, et ayant la même fonction de coût linéaire avec coût marginal constant égal à c . La fonction de demande de marché est donnée par $D(p)$. On suppose que :

- $H1$: deux entreprises concurrentes sur le marché , $i \in \{1, 2\}$.
- $H2$: les consommateurs achètent toujours auprès de l'entreprise qui propose un prix moin cher (homogénéité du bien).
- $H3$: les deux entreprises se partagent la demande équitablement en cas d'égalité entre les deux prix.
- $H4$: les deux entreprises fixent les prix simultanément.
- $H5$: chaque entreprise i à le même coût marginal constant c_i.

Considérant le modèle de Bertrand du point de vue de la théorie des jeux, il peut être analysé comme un jeu simultané où le choix stratégique porte sur les prix plutôt que sur les quantités. Le jeu de Bertrand est un jeu sous forme normale définit comme suit :

$$J_B = \prec I, \{S_i\}_{i \in I}, \{\pi_i\}_{i \in I} \succ,$$

- $I = \{1, 2\}$ est l'ensemble des joueurs (entreprises).
- $S_i = [0, +\infty[$ est l'ensemble des stratégies de chaque entreprise i, $i \in I$, qui représente les prix p_i proposés par chaque entreprise i.
- Fonction d'utilité ou bien de gains de l'entreprise i :

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c_i) D_i(p_1, p_2), i \in I.$$

- La demande qui s'adresse à chaque entreprise dépend du prix qu'elle fixe et du prix de l'entreprise concurrente, la demande individuelle de chaque entreprise est donnée par :

$$D_i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i) & \text{si } p_i < p_j, \\ \dfrac{D(p)}{2} & \text{si } p_i = p_j = p, (i \neq j = 1, 2), \\ 0 & \text{si } p_i > p_j, \end{cases}$$

avec : $D(p) = D_1(p_1, p_2) + D_2(p_1, p_2)$, est la demande de marché.

Le but de chaque entreprise est de maximiser son gain donné par :

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i)(p_i - c_i) & \text{si } p_i < p_j, \\ \dfrac{D(p)}{2}(p_i - c_i) & \text{si } p_i = p_j = p, (i \neq j = 1, 2), \\ 0 & \text{si } p_i > p_j. \end{cases}$$

La réolution du jeu de Bertrand consiste à trouver un équilibre de Nash (équilibre de Bertrand) qui est un couple (p_1^B, p_2^B), où chaque entreprise joue sa meilleure réponse à la stratégie d'équilibre de l'autre entreprise. Dans ce modèle, les consommateurs achèteront auprès de l'entreprise qui offre le prix le plus bas, nous pouvons donc facilement avoir l'intuition que l'équilibre de Nash du jeu de Bertrand ce réalise lorsque les deux entreprises fixant le même prix ($p_1 = p_2 = c$). L'équilibre du duopole de Bertrand est tel que les deux entreprises proposent le même prix égal à leur coût unitaire (Bertrand suppose, comme Cournot, que celui-ci est constant). Il y a équilibre car dans une telle situation aucune entreprise ne regrette d'avoir proposé pour prix le coût unitaire, après avoir constaté que l'autre entreprise a fait la même chose. Si une des deux entreprises avait proposé un prix inférieur, elle aurait fait des pertes, et si elle avait proposé un prix supérieur, toute la demande se serait reportée sur l'autre entreprise. Donc le couple $(p_1^B, p_2^B) = (c, c)$ est l'équilibre de Nash du jeu de Bertrand. Les profits des entreprises à l'équilibre sont données par :

$$\begin{cases} \pi_1^B(p_1^B, p_2^B) = \dfrac{D(p)}{2}(p_1^B - c) = 0, \\ \\ \pi_2^B(p_1^B, p_2^B) = \dfrac{D(p)}{2}(p_2^B - c) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Exemple 2.2 *[20]*

Supposons que deux entreprises se font concurrence en prix (duopole de Bertrand). La demande de marché est donnée par $D(p) = A - p$ et les fonctions de coûts des deux entreprises sont données par $C_i(q_i) = c_i q_i, \quad i = 1, 2$ avec $c_i = c < A$. Nous connaissons l'équilibre de *ce jeu (équilibre de Bertrand), il se réalise lorsque les deux entreprises proposent le même prix ($p_1 = p_2 = c$), donc le couple $(p_1^B, p_2^B) = (c, c)$ est l'équilibre de jeu, et dans ce cas les profits de Bertrand des deux entreprises sont nulles :*

$$\begin{cases} \pi_1^B(p_1^B, p_2^B) = (p_1^B - c)\dfrac{D(p)}{2} = 0, \\ \\ \pi_2^B(p_1^B, p_2^B) = (p_2^B - c)\dfrac{D(p)}{2} = 0. \end{cases}$$

2.5.3 Duopole de Stackelberg

Un mode de compétition tel que l'une des deux entreprises est dit leader et l'autre suiveur, c'est-à-dire que les deux entreprises concurrentes n'ont pas la même puissance c'est pour cela que ce type de duopole est asymétrique, l'entreprise leader se déplace d'abord, puis l'entreprise suiveuses se déplace de manière séquentielle.

Le duopole de Stackelberg, également appelé compétition de Stackelberg, est un modèle de compétition imparfaite basé sur un jeu non coopératif. C'est un duopole asymétrique, l'une des deux entreprises peut stratégiquement influencer l'autre qui va prendre sa décision en regardant vers l'entreprise dominante. En considérant deux entreprises, ce modèle est basé sur les hypothéses suivantes :

- $H1$: il y a deux entreprises l'une est dit leader (dominante) et l'autre est considérée comme suiveur, ces deux entreprises produisent un produit homogène, donc pas de différenciation entre les produits.
- $H2$: les entreprises ne coopèrent pas, il n'y a pas de collusion.
- $H3$: il y a donc barrière à l'entrée, car le nombre d'entreprises est fixe (égal à 2).
- $H4$: les entreprises sont en concurrence sur les quantités, et non sur les prix, et choisissent leurs quantités séquentiellement.
- $H5$: les entreprises sont rationnelles, et recherchent la maximisation du leurs profits

La situation de duopole de Stackelberg est modéliser par un jeu dit de Stackelberg jeu séquentiel à information parfaite, à deux étapes :

Étape 1 : dans cette étape, l'entreprise leader choisit sa quantité, cette décision est irréversible et ne peut être modifiée en deuxième étape.

Étape 2 : dans la deuxième étape, l'entreprise suiveur choisit sa quantité après avoir observé la quantité choisit par l'entreprise leader.

Le jeu de Stackelberg définit comme suit :

$$J_S = \prec I, \{S_i\}_{i \in I}, \{\pi_i\}_{i \in I} \succ,$$

avec :

- $I = \{1,2\}$ est l'ensemble des joueurs (entreprises).
- $S_i = [0, +\infty[$ est l'ensemble des stratégies de chaque entreprise i, $i \in I$, qui représente les quantités possibles de production q_i.
- Fonction d'utilité ou bien de gains de l'entreprise i :

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(Q) - C_i(q_i), \forall i \in I, q_i \in S_i = [0, +\infty[,$$

  avec : $Q = q_1 + q_2$, est la quantité totale produite par les deux entreprises, et un prix de marché correspondant $P(Q) = a - bQ$ (fonction de demande).
- $C_i(q_i) = c_i q_i$ est la fonction du coût total de production de q_i unités de l'entreprise i, $i \in I$.

L'entreprise 1 (leader en quantités ou leader de Stackelberg) choisit avant l'autre entreprise 2 la quantité q_1 qu'elle veut produire. L'entreprise suiveur 2 fixe alors son niveau de production q_2 en considérant q_1 comme donnée, mais l'entreprise 1 lorsqu'elle fixe son niveau de production doit tenir compte de l'offre de l'entreprise suiveur 2 car elle sait que sa décision va influencer sur la décision de l'entreprise 2. Donc le plus simple pour l'entreprise leader 1, c'est de supposer que le but de son adversaire l'entreprise 2 est aussi de maximiser son profit π_2, donc faut d'abord maximiser le profit de suiveur π_2 puis celui de leader π_1.
La fonction du profit pour chaque entreprise i, $i \in I$:

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(Q) - C_i(q_i), \quad i \in I.$$

On doit d'abord trouver la quantité que l'entreprise suiveur 2 va produire aprés avoir connaitre la quantité q_1 de l'entreprise leader 1 :

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2) - bq_2 - c_2 = 0,$$

$$a - bq_1 - bq_2 - bq_2 - c_2 = 0,$$

$$2bq_2 = a - bq_1 - c_2,$$

$$\Rightarrow q_2(q_1) = \frac{a - c_2 - bq_1}{2b},$$

où $q_2(q_1)$ c'est la quantité que l'entreprise suiveur 2 va produire en fonction de la quantité q_1 de l'entreprise leader 1. La meilleure réponse de l'entreprise leader est de trouver la valeur de q_1 qui maximise son profit étant donné $q_2(q_1)$:

$$\pi_1(q_1, q_2(q_1)) = (a - b(q_1 + q_2(q_1)))q_1 - c_1(q_1).$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(q_1, q_2(q_1)) = (-b + \frac{b}{2})q_1 + (a - bq_1 - (\frac{a - c_2 - bq_1}{2})) - c_1 = 0,$$

$$bq_1 = \frac{a + c_2 - 2c_1}{2} \Rightarrow q_1^S = \frac{a + c_2 - 2c_1}{2b}.$$

q_1^S représente la meilleure réponse du leader à la réaction du suiveur (à $q_2(q_1)$).
Pour trouver la meilleure réponse du suiveur à q_2^S, on va remplacer q_1^S dans $q_2(q_1)$:

$$q_2^S = \frac{a - c_2 - bq_1^S}{2b},$$

$$q_2^S = \frac{a - c_2 - b(\frac{a + c_2 - 2c_1}{2b})}{2b},$$

$$q_2^S = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{a + c_2 - 2c_1}{4b},$$

$$q_2^S = \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b}.$$

L'équilibre de Nash du duopole de Stackelberg est donné par :

$$(q_1^S, q_2^S) = \left(\frac{a + c_2 - 2c_1}{2b}, \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b} \right).$$

La quantité totale offerte sur le marché à l'équilibre est :

$$Q^S = q_1^S + q_2^S = \frac{3a - 2c_1 - c_2}{4b}.$$

Les profits des deux entreprises à l'équilibre sont donnés par :

$$\pi_1^S(q_1^S, q_2^S) = q_1^S(a - bQ^S) - c_1 q_1^S = q_1^S(a - bQ^S - c_1),$$

$$\pi_2^S(q_1^S, q_2^S) = q_2^S(a - bQ^S) - c_2 q_2^S = q_2^S(a - bQ^S - c_2).$$

d'où :

$$\begin{cases} \pi_1^S(q_1^S, q_2^S) = \dfrac{(a + c_2 - 2c_1)^2}{8b}, \\ \\ \pi_2^S(q_1^S, q_2^S) = \dfrac{(a - 3c_2 + 2c_1)^2}{16b}. \end{cases} \tag{2.7}$$

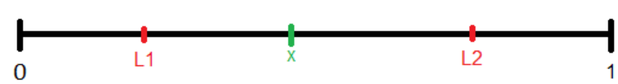
2.5.4 Duopole de Hotelling

C'est un mode de concurrence entre deux entreprises en introduisant la différenciation horizontale des produits où les consommateurs confrontés au même prix d'achat pour tous les produits, et font des choix différents, et il est supposé que la variable de décision c'est le

prix des produits, et non la quantité.
Le duopole de Hotelling, est un autre mode de concurrence entre deux entreprises basé sur la différenciation des produits (différenciation horizontale des produits). Dans ce modèle on suppose que les consommateurs aient une demande unitaire et que les préférences des consommateurs soient uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 1]$, ces consommateurs vont décider auprès de quelle entreprise $i, \quad i = 1, 2$ vont acheter avec prise en considération du prix des produits et des frais de transport. Les deux entreprises offrent des produits homogènes avec des bruts utilitaire v et sont localisés aux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$. Un consommateur avec un emplacement de préférence de x et qui achète auprès de l'entreprise i risque un coût d'utilité de kx, et un coût des services publics de $k(1-x)$ s'il achète auprès de la deuxième entreprise j, avec $k > 0$. Mais si on suppose plutôt que cette entreprise i est située sur l'intervalle $[0, 1]$ à la position $L_i, \quad i \in \{1, 2\}$, alors on peut désigner l'utilité que le consommateur tire du produit de chaque entreprise i par la fonction :

$$U_i(p_i, x) = v - p_i - k \mid (x - L_i) \mid^{\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Si pour certains consommateurs individuels ils tirent une utilité négative lors de l'achat d'un produit auprès de l'entreprise $i, \quad i = 1, 2$ ($U_i(p_i, x) < 0$), alors ces consommateurs vont pas acheter aucun produit (ce cas est considérer comme une perte pour les deux entreprises puisque elles vont perdre ces consommateurs). Supposons maintenant que les prix $p_i, \quad i = 1, 2$ ne sont pas trop élevés par rapport à v et $\gamma = 1$, pour simplifier les calculs, dans un tel cas, et en supposant aussi que $0 \leq L_1 \leq x \leq L_2 \leq 1$.



Nous pouvons trouver l'emplacement de préférence x de consommateur qui est indifférent entre les deux produits :

$$U_1(p_1, x) = U_2(p_2, x),$$

$$v - p_1 - k(x - L_1) = v - p_2 - k(L_2 - x),$$

$$\Rightarrow -p_1 + kL_1 + p_2 + kL_2 = 2kx$$

$$\Rightarrow x = \frac{p_2 - p_1 + k(L_1 + L_2)}{2k}.$$

On peut alors définir les fonctions de demande pour les deux entreprises comme suit :

$*$ Pour l'entreprise 1 :

$$Q_1(p_1, p_2) = D(x) = \left(\frac{p_2 - p_1 + k(L_1 + L_2)}{2k}\right), \quad p_1 \leq p_2 + k(L_1 + L_2), \quad p_1 \leq v.$$

Si $p_1 > v$ ou $p_1 > p_2 + k(L_1 + L_2)$, alors $Q_1(p_1, p_2) = 0$, car si $p_1 > v$ alors $U_1(p_1, x) = v - p_1 - k(x - L_1) < 0$ et si $p_1 > p_2 + k(L_1 + L_2)$ le produit de l'entreprise 1 est plus cher que celui de l'entreprise 2, alors dans les deux cas le consommateur ne va pas acheter le produit de l'entreprise 1 c'est pour cela que $Q_1(p_1, p_2) = 0$ (autrement dit il y'aura pas de demande sur le produit de l'entreprise 1).

$*$ Pour l'entreprise 2 :

$$Q_2(p_1, p_2) = D(1 - x) = \left(\frac{p_1 - p_2 + k(-L_1 - L_2 + 2)}{2k}\right), \; p_2 < p_1 - k(L_1 + L_2), \; p_2 \leq v.$$

Si $p_2 > v$ ou $p_2 > p_1 - k(L_1 + L_2)$, alors $Q_2(p_1, p_2) = 0$,

avec : la fonction D est une fonction linéaire définie comme suit : $D(x) = x$.
Les fonctions des profits pour les deux entreprises sont :

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c_1)Q_1(p_1, p_2) = (p_1 - c_1)\left(\frac{p_2 - p_1 + k(L_1 + L_2)}{2k}\right).$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c_2)Q_2(p_1, p_2) = (p_2 - c_2)\left(\frac{p_1 - p_2 + k(-L_1 - L_2 + 2)}{2k}\right).$$

Nous pouvons déterminer les fonctions des meilleures réponses des deux entreprises 1 et 2 en maximisant leurs profits $\pi_1(p_1, p_2)$ et $\pi_2(p_1, p_2)$:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1}(p_1, p_2) = \left(\frac{p_2 - p_1 + k(L_1 + L_2)}{2k}\right) - \left(\frac{p_1 - c_1}{2k}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow p_1 = MR_1(p_2) = \frac{p_2 + c_1 + k(L_1 + L_2)}{2}.$$

Pour l'entreprise 2 :

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2}(p_1, p_2) = \left(\frac{p_1 - p_2 + k(-L_1 - L_2 + 2)}{2k}\right) - \left(\frac{p_2 - c_2}{2k}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow p_2 = MR_2(p_1) = \frac{p_1 + c_2 + k(-L_1 - L_2 + 2)}{2}.$$

L'équilibre de Nash du modèle de Hotelling (p_1^H, p_2^H) est donné par :

$$\begin{cases} p_1^H = MR_1(p_2^H) = \dfrac{p_2^H + c_1 + k(L_1 + L_2)}{2}, \\ \\ p_2^H = MR_2(p_1^H) = \dfrac{p_1^H + c_2 + k(-L_1 - L_2 + 2)}{2}. \end{cases} \tag{2.8}$$

La résolution de (2.8) nous donne l'équilibre de Nash :

$$(p_1^H, p_2^H) = \left(\frac{2c_1 + c_2 + k(L_1 + L_2 + 2)}{3}, \frac{c_1 + 2c_2 + k(4 - L_1 - L_2)}{3} \right).$$

2.6 Analyse des duopoles

Dans cette section on va faire une comparaison entre les différents types de duopoles, on va déterminer la différence entre les duopoles qui sont étudiés dans ce chapitre et les points communs entre eux.

1. **Duopole de Cournot et Bertrand :** les deux modèles décrivent des modes de concurrence entre deux entreprises qui décident simultanément et produire des produits homogènes, mais la différence c'est que le modèle de Cournot traite le cas de concurrence en quantité entre deux entreprises, par contre les deux entreprises dans le modèle de Bertrand sont en concurrence par rapport aux prix qu'elles doivent fixer pour ses produits et les deux modèles sont modèliser par un jeu simultané sous forme normal.
2. **Duopole de Cournot et Stackelberg :** les deux modèles décrivent des modes de concurrence en quantité entre deux entreprises qui produisent des biens homogènes, dans le modèle de Cournot les deux entreprises décident simultanément de leurs quantités qu'elles doivent produire, par contre les deux entreprises dans le modèle de Stackelberg décident séquentiellement une entreprise 1 décide en premier (1 c'est le leader) puis l'entreprise 2 prendre sa décision pour sa quantité q_2 (2 c'est le suiveur).
3. **Duopole de Bertrand et Stackelberg :** la différence entre les deux modèles réside dans le fait que la concurrence en Bertrand est une concurrence en prix et les deux entreprises décident simultanément, par contre la concurrence dans le duopole de Stackelberg est une concurrence en quantité et les entreprises décident séquentiellement, mais les deux duopoles sont deux modes de conccurence entre deux entreprises qui produisent des produits homogènes

4. **Duopole de Hotelling, Cournot, Bertrand et Stackelberg :** le seul point commun entre les quatre modèles est qu'ils décrivent des modes de conccurence entre deux entreprises, mais le duopole de Hotelling est basé sur la différentiation horizontale des produits, par contre pour les autres modèles les produits des deux entreprises sont homogènes (il n'existe pas de différentiation entre les produits et les préférences des consommateurs n'a aucune influence sur les décisions et les gains des entreprises).

Deux points très importants dans la comparaison entre les différents types de duopoles à savoir : l'équilibre de duopole et les profits à l'équilibre des entreprises dans chaque duopole. Dans le cas de concurrence en quantité (duopole de Cournot et duopole de Stackelberg), pour l'entreprise 1 :

$$\pi_1^S(q_1^S, q_2^S) = \frac{(a + c_2 - 2c_1)^2}{8b} > \pi_1^c(q_1^c, q_2^c) = \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b},$$

c'est-à-dire que le profit (le gain) de l'entreprise 1 à l'équilibre augmente lorsqu'elle est leader (elle fixe sa quantité q_1 en premier avant l'entreprise 2) par rapport a son profit qu'elle obtient lorsqu'elle fixe sa quantité q_1 au même temps que l'entreprise 2. L'entreprise 1 sa quantité produite à l'équilibre de duopole de Stackelberg est supérieure à sa quantité produite à l'équilibre de duopole de Cournot :

$$q_1^S = \frac{a + c_2 - 2c_1}{2b} > q_1^c = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}.$$

Pour l'entreprise 2,

$$\pi_2^S(q_1^S, q_2^S) = \frac{(a - 3c_2 + 2c_1)^2}{16b},$$

$$\pi_2^c(q_1^c, q_2^c) = \frac{(a - 2c_2 + c_1)^2}{9b}.$$

Il existe deux cas de figure :

1. Si $c_2 < c_1$, alors $\pi_2^c < \pi_2^S$.
2. Si $c_2 > c_1$ ou $c_2 = c_1 \Rightarrow \pi_2^c > \pi_2^S$.

Pour la quantité produite de l'entreprise 2 à l'équilibre :

$$q_2^S = \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b}.$$

$$q_2^c = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}.$$

Il existe deux cas de figure :

1. Si $c_1 < c_2$ ou $c_1 = c_2$, alors : $q_2^S < q_2^c$.

2. Si $c_1 > c_2$, alors : $q_2^S > q_2^c$.

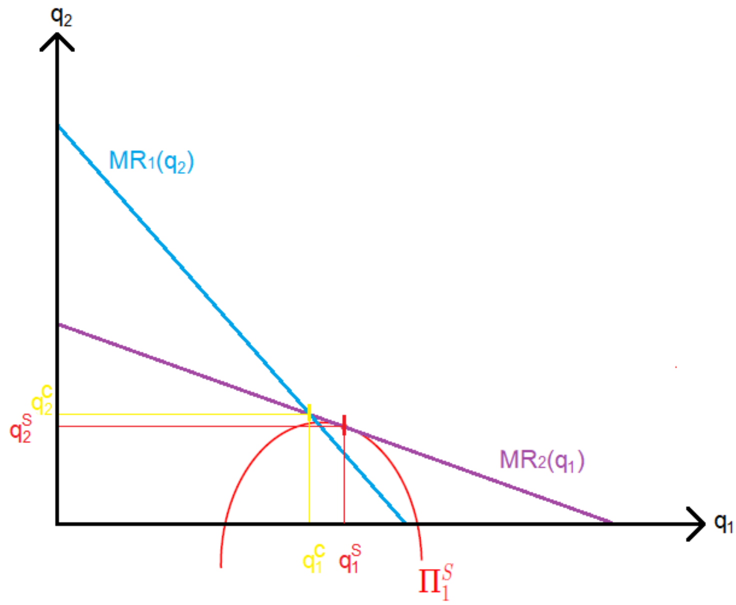


FIGURE 2.4 – L'équilibre de Nash de duopole de Cournot et Stackelberg

Dans le cas de concurrence en prix (duopole de Bertrand et duopole de Hotelling), les profits des deux entreprises s'annulent à l'équilibre dans le duopole de Bertrand :

$$\pi_1^B(p_1^B, p_2^B) = \pi_2^B(p_1^B, p_2^B) = 0.$$

Par contre les profits des deux entreprises ne s'annulent pas à l'équilibre dans le duopole de Hotelling :

$$p_1^H = \frac{2c_1 + c_2 + k(L_1 + L_2 + 2)}{3} \neq c_1,$$
$$p_2^H = \frac{c_1 + 2c_2 + k(4 - L_1 - L_2)}{3} \neq c_2,$$

d'où :

$$\pi_1^H(p_1^H, p_2^H) = (p_1^H - c_1)Q_1(p_1^H, p_2^H) \neq 0,$$
$$\pi_2^H(p_1^H, p_2^H) = (p_2^H - c_2)Q_2(p_1^H, p_2^H) \neq 0.$$

2.7 Conclusion

Le marché duopoliste est caractérisé en principe par la concurrence entre deux entreprises. Il existe deux modes de concurrence qui sont la concurrence en quantité modélisé par soit le duopole de Cournot ou bien le duopole de Stackelberg, le cas de concurrence en prix modélisé par le duopole de Bertrand ou bien le duopole de Hotelling. Ces quatre modèles de l'organisation industrielle représente le cas statique des duopoles.

CHAPITRE 3

MODÈLES DE LA THÉORIE DES JEUX STATIQUES POUR UN MARCHÉ D'ASSURANCE

3.1 Introduction

Après avoir étudier les différents duopoles classiques à savoir : Cournot, Bertrand, Stackelberg et Hotelling dans la deuxième partie du Chapitre 2. Ce chapitre est consacré pour l'application de deux duopoles pour deux marchés duopolistes qui sont le marché d'assurance pour le quel on va appliquer le modèle de duopole de Bertrand et le marché bancaire pour lequel le modèle de duopole de Hotelling est appliqué.

3.2 Modèle de la théorie des jeux pour le marché duopoliste d'assurance

Cette section va être dans l'intérêt et la motivation d'application des modèles de la théorie des jeux aux marché des assurances. Le marché de l'assurance se caractérise par l'achat et la vente d'assurance, un consommateur achète une assurance auprès d'une entreprise d'assurance (compagnie d'assurance), c'est-à-dire qu'il signe un contrat avec cette entreprise d'assurance, dans lequel on détermine la prime que le consommateur doit payer, en échange l'entreprise d'assurance indemnisera ce consommateur en cas de la survenue d'un sinistre (risque). Autrement dit, dans ces contrats entre les consommateurs (assurés) et l'entreprise d'assurance (assureur), on détermine les primes mensuelles qui sont versées par les consommateurs à l'entreprise d'assurance en échange de couverture contre différents risques. L'entreprise d'assurance lorsqu'elle détermine et fixe la prime que le consommateur doit payer, elle ne prend pas en considération les réactions des autres entreprises d'assurance (ses concurrents). Par exemple, si l'entreprise d'assurance fixe une prime élevée et une autre entreprise d'assurance fixe une prime inférieure, le consommateur va changer d'entreprise d'assurance pour la deuxième entreprise, ainsi la première entreprise va perdre ses clients et cela lui causera des pertes financières. La théorie des jeux et plus particulièrement, l'application des duopoles qui modélisent et traitent les différents cas de concurrences, est un outil important et efficace pour éviter les pertes de l'entreprise d'assurance causées par son ignorance des réactions de ses concurrents lors de la fixation de la prime. Donc dans le marché duopoliste d'assurance deux entreprises d'assurance vont être en concurrence en prix, les deux entreprises d'assurance fixent leurs primes simultanément [17].

3.2.1 Modèle de duopole de Bertrand pour un marché d'assurances

Nous adoptons le modèle de duopole de Bertrand à la concurrence en prix pour le marché des assurances. Le modèle est basé sur les hypothéses suivantes :

1. : le marché compte deux entreprises d'assurance.
2. : chaque entreprise $i \in I$, fabrique un produit homogène et vend une unité à chaque consommateur.
3. : $S_i = [0, +\infty[$, $i \in I$, est l'ensemble des stratégies de chaque entreprise i considérés comme étant le prix p_i (ou les primes).
4. : les deux entreprises ne coopèrent pas et se font concurrence en fixant les prix (les primes) simultanément.
5. : pour chaque entreprise $i \in I$, des coûts marginaux c_i.

La demande d'une entreprise est déterminée par le taux de conversion qui est la proportion de consommateur qui achète le produit de l'entreprise i, nous avons donc la fonction de la demande de chaque entreprise est donnée par :

$$Q_i(p_1, p_2) = D(z_i(p_1, p_2)) = z_i(p_1, p_2),$$

où z_i est le taux de conversion (correspond au pourcentage de visiteurs sur le site de l'entreprise qui prennent une action souhaitée, par exemple le pourcentage de visiteurs qui

achètent un produit ou un service) de l'enreprise d'assurance i, qui est une fonction des primes facturées par toutes les entreprises du marché.
Les profits des deux entreprises 1 et 2 sont donnés par :

$$\pi_1(p_1, p_2) = z_1(p_1, p_2) \times (p_1 - c_1 + b_1) - C_1, \tag{3.1}$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = z_2(p_1, p_2) \times (p_2 - c_2 + b_2) - C_2, \tag{3.2}$$

avec : C_1, C_2 sont les coûts fixes, b_1, b_2 sont deux constantes qui reflètent le bénéfice net moyen futur actualisé par ce segment de clientèle et les coûts marginaux c_1, c_2. Les meilleures réponses pour les deux entreprises 1 et 2, peuvent être calculées en appliquant les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre des formules (3.1) et (3.2) :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1}(p_1, p_2) = \frac{\partial z_1(p_1, p_2)}{\partial p_1}(p_1 - c_1 + b_1) + z_1(p_1, p_2) = 0. \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2}(p_1, p_2) = \frac{\partial z_2(p_1, p_2)}{\partial p_2}(p_2 - c_2 + b_2) + z_2(p_1, p_2) = 0. \tag{3.4}$$

Une fonction importante qui relie la demande et le prix est l'élasticité-prix e définit comme suit si $z_i \neq 0$:

$$\begin{cases} e_1(p_1, p_2) = \dfrac{\partial z_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} \times \dfrac{p_1}{z_1(p_1, p_2)}, \\ e_2(p_1, p_2) = \dfrac{\partial z_2(p_1, p_2)}{\partial p_2} \times \dfrac{p_2}{z_2(p_1, p_2)}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Le système (3.3), (3.4) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial p_1}(p_1, p_2) = e_1(p_1, p_2) \times \dfrac{z_1(p_1, p_2)}{p_1}(p_1 - c_1 + b_1) + z_1(p_1, p_2) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial p_2}(p_1, p_2) = e_2(p_1, p_2) \times \dfrac{z_2(p_1, p_2)}{p_2}(p_2 - c_2 + b_2) + z_2(p_1, p_2) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

d'où :

$$\begin{cases} e_1(p_1, p_2) \times \dfrac{z_1(p_1, p_2)}{p_1}(p_1 - c_1 + b_1) = -z_1(p_1, p_2), \\ \\ e_2(p_1, p_2) \times \dfrac{z_2(p_1, p_2)}{p_2}(p_2 - c_2 + b_2) = -z_2(p_1, p_2), \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} e_1(p_1, p_2) \times \dfrac{(p_1 - c_1 + b_1)}{p_1} = -1, \\ \\ e_2(p_1, p_2) \times \dfrac{(p_2 - c_2 + b_2)}{p_2} = -1, \end{cases}$$

valable si $z_i \neq 0$, $i \in I$, d'où :

$$\begin{aligned} e_1(p_1, p_2) &= \frac{p_1}{(c_1 - p_1 - b_1)}, \\ e_2(p_1, p_2) &= \frac{p_2}{(c_2 - p_2 - b_2)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous remarquons que la solution des équations données par (3.7) dépend de la fonction du taux de conversion z_i, de chaque entreprise d'assurance $i \in I$ et elle dépend aussi de la fonction d'élasticité e_i, $i \in I$, c'est pour ça qu'en principe, il n'y a pas de solution analytique générale pour ce modèle contrairement au modèle classique et standard de Bertrand. Nous tenons à souligner aussi que le niveau de la prime d'équilibre dans la concurrence en prix entre deux entreprises d'assurance dépend de l'élasticité-prix du marché, c'est-à-dire plus l'élasticité est faible, plus la prime d'équilibre est élevée. De plus la prime d'équilibre doit être supérieure au coût marginal (sinistre), ce qui est différent du modèle standard de Bertrand où à l'équilibre les deux entreprises fixent le même prix qui égal au coût marginal $((p_1^B, p_1^B) = (c, c))$.

Dans le cas où tous les assureurs ont les mêmes coûts marginaux $c_1 = c_2 = c$ et $b_1 = b_2$, la même élasticité e, les fonctions de prime de meilleure réponse seront les mêmes :

$$e(p, p) = \frac{p}{(c - p - b)}. \tag{3.8}$$

Les primes d'équilibre seront les mêmes pour tous les assureurs, c'est-à-dire que les deux entreprises d'assurance fixent la même prime à l'équilibre, $p_1^* = p_2^* = p^* \neq c$ et p^* sera la solution de (3.8) et cette équation n'admet pas une solution analytique générale car elle dépend de la fonction de taux de conversion et de la fonction d'élasticité e.

3.3 Modèle de duopole d'Hotelling pour un marché bancaire

La banque est une entreprise financière qui fournit des services bancaires à savoir les dépôts d'argent, les crédits ou les prêts. Le marché bancaire est le lieu de rencontre des banques où elles proposent de nombreux produits et services bancaires dans le but de la satisfaction des besoins de leurs clients et de maximiser leurs gains. La théorie des jeux et surtout les modèles de duopoles intervient comme un outil très efficace pour la modélisation de cas de concurrence en prix entre deux banques (chaque banque fixe le taux pour lequel elle offre le crédit pour ses clients) dans un marché duopoliste bancaire où chaque banque cherche à maximiser ses gains. Dans cette section on s'interesse à l'application du duopole de Hotelling qui modélise le cas de concurrence en prix avec différentiation horizontale des produits [18].

Le modèle de duopole du Hotelling pour le marché bancaire constitue une extension du modèle standard de Hotelling en y introduisant la différentiation verticale, complétant ainsi la différentiation horizontale initiale. La différentiation verticale dans ce modèle porte sur la différence de rémunération des dépôts entre les banques.

La différentiation horizontale appliquée à un duopole bancaire composé de deux banques 1 et 2, est une distribution des goûts des consommateurs dans un espace continu de caractéristiques. Les banques 1 et 2 se situent chacune à une distance respective L_1 et L_2 des extrémités de l'intervale $[0, 1]$ (les clients des banques sont répartis uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$ et leur comportement va conditionner celui des deux banques). L'aire de marché de la banque 1 correspond au segment x, et l'aire de marché de la banque 2 est définie par le segment $(1-x)$. Le domaine sur lequel s'exercera ouvertement la concurrence entre les deux banques corréspond à la distance $(1 - L_1 - L_2)$ qui représente l'espace bancaire. Ainsi plus L_1 augmente, plus les caractéristiques de la banque 1 se rapprochent de ceux de la banque 2.

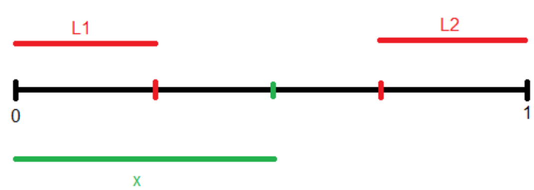


FIGURE 3.1 – L'espace linéaire bancaire

3.3.1 Le comportement des banques et la détermination du produit net bancaire

On admet que les deux banques se refinancent auprès de la banque centrale (c'est-à-dire qu'elles peuvent emprunter auprès de la banque centrale) pour un montant Re au taux ρ, le refinancement des banques auprès de la banque centrale correspond aux crédits fourni par la banque centrale pour ces banques.

Elles constituent des réserves obligatoires Ro sur les dépôts reçus d, ces réserves sont versées à la banque centrale sur la base d'un taux, noté $\alpha (0 < \alpha < 1)$ tel que :

$$Ro = \alpha \times d.$$

Les deux banques 1 et 2 doivent respecter la contrainte d'équilibre du bilan (le total de l'actif du bilan qui informe sur l'origine des ressources c'est-à-dire les fonds collectés par la banque, doivent être forcément égales au total du passif du bilan qui renseigne sur l'utilisation des fonds collectés par la banque) :

$$d + Re = Ro + l.$$

Les deux banques 1 et 2 doivent faire face à des coûts opératoires (C) induits par la gestion des dépôts (c_d) et des crédits c_l.

On suppose que la fonction des coûts opératoires est linéaire et elle est définie comme suit :

$$C(d, l) = c_d d + c_l l.$$

Les coûts opératoires représentent l'ensemble des dépenses obligatoires qu'une entreprise est amenée à faire pour être en mesure de produire. Ces coûts incluent les charges de personnel, les locaux, les stocks, les frais de sécurité et d'entretien, l'achat de matières premières ou transformées, les machines et équipements de bureau, et ses dépenses énergétiques.

Les deux banques offrent du crédit au taux t, et on admet qu'elles rémunèrent les dépôts au moins au condition du marché monétaire (ρ). La figure 3.2 nous montre les paramètres ainsi que le comportement des banques (d'après la référence [18]).

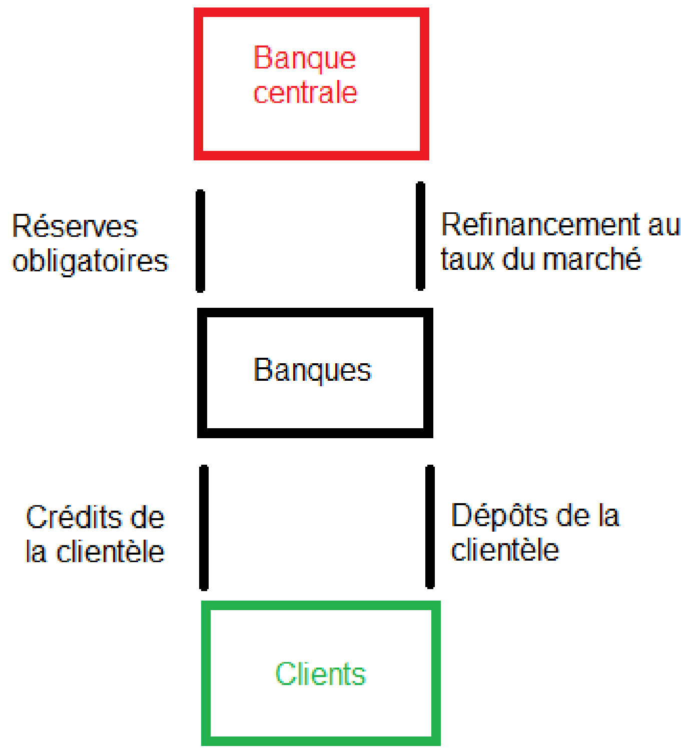


FIGURE 3.2 – Les paramètres du comportement des banques

Avec : les réserves obligatoires sont Ro et α, refinancement au taux du marché Re, ρ, les crédits de la clientèle sont l, t, c_l, et les dépôts de la clientèle sont d, ρ, c_d.
Les profits des banques sont donnés par :

$$\pi(t) = tl - \rho(d + Re) - c_d d - c_l l,$$

on a : $d+Re = Ro+l$ (la contrainte d'équilibre du bilan), le montant de réserves obligatoires $Ro = \alpha d$, d'où :

$$\pi(t) = (t - \rho - c_l)l - (\alpha\rho + c_d)d, \tag{3.9}$$

avec : $(t - \rho - c_l)l$ correspond aux intérêts débiteurs perçus par la banque sur l'activité de crédit, $(\alpha\rho + c_d)d$ les intérêts créditeurs versés par la banque au titre par la collecte des dépôts, on déduit donc que π est une approximation du produit net bancaire exempt des coûts opératoires.
Les intérêts débiteurs sont les intérêts que les clients d'une banque doivent payer lorsque

le solde de leurs comptes actuels est inférieur à zéro (solde négatif) car les clients de la banque utilisent un découvert convenu ou bien car ils ne possèdent pas de fonds suffisants pour couvrir leurs transactions effectuées. Par contre les intérêts créditeurs représentent une somme d'argent que la banque doit payer pour ses clients quand ils disposent des comptes rémunérés ou bien des épargnes placées.

Les deux banques 1 et 2 offrent du crédit à des conditions de taux différentes.

On note t_1 et t_2 les taux débiteurs endogènes des deux banques.

On suppose que la deuxième banque rémunère ses dépôts au taux du marché ρ plus le paramètre de différentiation $\varepsilon \geq 0$ qui représente une prime permettant à la banque 2 d'attirer éventuellement une partie des clients de la banque 1, par contre la première banque rémunère ses dépôts juste au taux du marché ρ.

Si les taux créditeurs sont réglementés alors $\varepsilon > 0$, dans ce cas il y a une discrimination par les taux ce qui provoque une différentiation verticale, et si $\varepsilon = 0$, alors pas de discrimination ni différentiation verticale des produits.

Concernant l'utilité des clients, pour le client qui dépose des liquidités auprès de la banque 1 reçoit ρd et $(\rho + \varepsilon)d$ s'il dépose des liquidités auprès de la banque 2.

Si l'on admet dans le temps que le client demande des crédits alors on déduira les intérets débiteurs $t_1 l$ perçus par la banque 1 et $t_2 l$ ceux perçus par la banque 2.

On doit prendre en considération aussi les coûts de transport qui peut s'apparenter à deux notions soit les coûts de changement de banque ou bien de non changement (coûts d'opportunité en termes de caractéristiques). Un coût de changement de banque implique indiscutablement un coût associé à la recherche de la nouvelle banque et un surcoût induit par les perts en termes de relation de clientèle avec l'ancienne banque. Lorsque ces coûts de changement de banque sont élevés ça implique une faible concentration bancaire (le client n'est pas vraiment intéressé par cette banque).

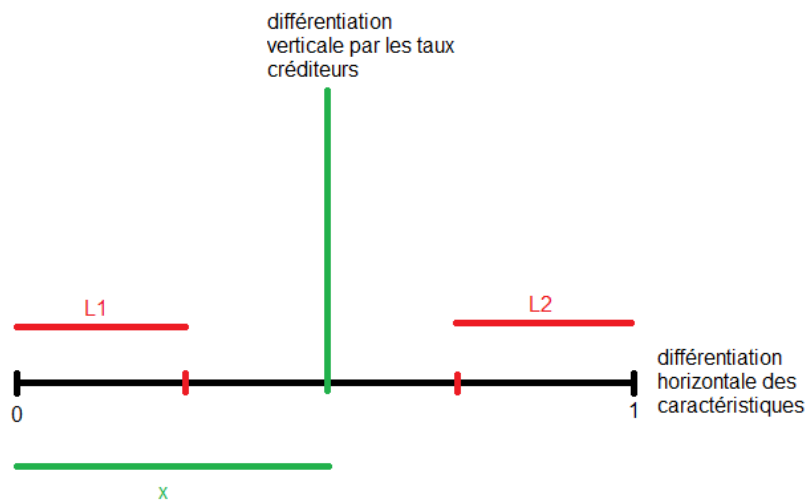


FIGURE 3.3 – L'espace bi-dimensionnel bancaire

La Figure 3.3 nous montre l'espace bi-dimensionnel bancaire, c'est un espace dit bi-dimensionnel car il y a à la fois différentiation horizontale des caractéristiques et différentiation verticale par les taux créditeurs lorsque $\varepsilon > 0$. Le client qui se localise dans l'espace des caractéristiques $(1 - L_1 - L_2)$ sera indifférent entre les deux banques 1 et 2 si la condition suivante est vérifiée :

$$\rho d - \rho(x - L_1)^2 - t_1 l = (\rho + \varepsilon)d - \rho(1 - L_2 - x)^2 - t_2 l, \tag{3.10}$$

avec : $\rho d - \rho(x - L_1)^2 - t_1 l$ est la fonction d'utilité des consommateurs de la banque 1 et $(\rho + \varepsilon)d - \rho(1 - L_2 - x)^2 - t_2 l$ est la fonction d'utilité des consommateurs de la banque 2. La résolution de (3.10) nous permet de déduire la valeur de x qui représente la part de marché de la banque 1 en termes de crédits et de dépôts :

$$x = \frac{l(t_1 - t_2) + \varepsilon d}{2\rho(L_1 + L_2 - 1)} + \frac{(L_1 - L_2)(L_1 + L_2) + 2L_2 - 1}{2(L_1 + L_2 - 1)}, \tag{3.11}$$

d'où, la part de marché de la banque 2, $(1 - x)$ est donnée par :

$$1 - x = \frac{(2L_1 - 1) - (L_1 - L_2)(L_1 + L_2)}{2(L_1 + L_2 - 1)} - \frac{l(t_1 - t_2) + \varepsilon d}{2\rho(L_1 + L_2 - 1)}. \tag{3.12}$$

Les profits des deux banques 1 et 2 sont données par :

$$\pi_1(t_1, t_2) = x(t_1 - \rho(1 + \alpha) - c_d - c_l), \tag{3.13}$$

$$\pi_2(t_1,t_2) = (1-x)(t_2 - \rho(1+\alpha) - c_d - c_l - \varepsilon), \tag{3.14}$$

on remplace x et $(1-x)$ par leurs formules données dans (3.11) et (3.12) :

$$\pi_1(t_1,t_2) = \frac{[l(t_2-t_1) + \rho(L_2-L_1)(L_2+L_1) + \rho(1-2L_2) - \varepsilon d][\rho(1+\alpha) + c_d + c_l - t_1]}{2\rho(L_1+L_2-1)}.$$

$$\pi_2(t_1,t_2) = \frac{[l(t_1-t_2) + \rho(L_1-L_2)(L_1+L_2) + \rho(1-2L_1) + \varepsilon d][\rho(1+\alpha) + c_d + c_l - t_2 + \varepsilon]}{2\rho(L_1+L_2-1)}.$$

On applique les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour les deux fonctions de profit $\pi_1(t_1,t_2)$ et $\pi_2(t_1,t_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial t_1}(t_1,t_2) = 0, \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial t_2}(t_1,t_2) = 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

la résolution de (3.15) nous donne les fonctions des meilleurs réponses des deux banques :

$$t_1 = MR_1(t_2) = \frac{t_2}{2} + \frac{\rho(1+\alpha) + c_d + c_l}{2} + \frac{\rho(L_2-L_1)(L_2+L_1) + \rho(1-2L_2) - \varepsilon d}{2l},$$

$$t_2 = MR_2(t_1) = \frac{t_1}{2} + \frac{\rho(1+\alpha) + c_d + c_l + \varepsilon}{2} + \frac{\rho(L_1-L_2)(L_1+L_2) + \rho(1-2L_1) + \varepsilon d}{2l}.$$

L'équilibre de ce modèle (l'équilibre de ce marché duopoliste bancaire) est donné par le couple (t_1^*, t_2^*) tel que :

$$\begin{cases} t_1^* = MR_1(t_2^*), \\ t_2^* = MR_2(t_1^*). \end{cases} \tag{3.16}$$

La résolution de (3.16) nous donne les variables stratégiques des banques qui sont les taux débiteurs optimaux t_1^* et t_2^* :

$$t_1^* = \rho(1+\alpha) + c_d + c_l + \frac{\rho(3-2L_1-4L_2) - \rho(L_1-L_2)(L_1+L_2) + \varepsilon(l-d)}{3l}.$$

$$t_2^* = \rho(1+\alpha) + c_d + c_l + \frac{\rho(3-4L_1-2L_2) + \rho(L_1-L_2)(L_1+L_2) + \varepsilon(2l+d)}{3l}.$$

Comme interprétation de résultat obtenu (l'équilibre de Nash de modèle de duopole de Hotelling pour un marché bancaire), à l'équilibre les deux banques 1 et 2 offrent de crédit à leurs clients pour des taux débiteurs optimaux t_1^* et t_2^*. Le taux débiteur optimal t_1^* de la banque 1 est sa meilleure réponse face au taux débiteur optimal t_2^* de la banque 2, ainsi l'utilité de l'application intérvient dans le fait qu'à l'équilibre aucune banque ne va changer son taux débiteur optimal et donc aucun risque d'avoir des pertes financières (par exemple si la banque 1 offre de crédit à ses clients pour un taux débiteur inférieur à t_1^* et que la banque 2 ne change pas son taux débiteur et elle garde t_2^*, dans ce cas la banque 1 va perdre ses clients qui vont la changer par une autre banque ce qui va causer des pertes financières pour la banque 1). C'est très important aussi de mentionner la différence entre ce modèle et le modèle classique et standard de duopole de Hotelling, cette différence consiste dans l'ajout de la différentiation verticale ce qui a fait un changement dans les fonctions des gains des deux entreprises (banques) et puis un changement dans l'équilibre de Nash.

3.4 Conclusion

Le marché des assurances et le marché bancaire sont deux marchés essentiels dans le domaine de la finance, ainsi pour bien modéliser les cas de concurrence dans ces deux marchés il est nécessaire d'appliquer deux modèles de la théorie des jeux statiques. Grâce à l'application de modèle de duopole de Bertrand pour le marché des assurances, les deux entreprises d'assurance maximisent leurs profits sans risque d'avoir des pertes financières causées par leurs ignorance des réactions des autres entreprises d'assurance lors de la fixation des primes. L'application de modèle de duopole de Hotelling pour le marché bancaire permet aux deux banques de fixer les taux débiteurs pour lesquels elles offrent de crédit à leurs clients, de maximiser leurs profits et d'éviter les pertes financières causées par exemple par la perte de leurs clients.

CHAPITRE 4

DYNAMIQUE DU DUOPOLE DE COURNOT POUR UN MARCHÉ BANCAIRE

4.1 Introduction

La dynamique d'un duopole est caractérisée par des changements dans le duopole statique, par exemple changement dans la production des entreprises dans le temps. Dans ce chapitre on va étudier la dynamique du duopole de Cournot où les deux entreprises utilisent leurs profits relatifs au lieu de leurs profits absolus. La dynamique de duopole de Cournot est modélisée par un modèle de jeu répété où les deux entreprises rationnelles mettent à jour leurs stratégies quantitatives à des périodes de temps discrètes, par un mécanisme d'ajustement.

Pour compléter notre étude de cas dynamique de duopole de Cournot étudié dans la première partie de ce Chapitre, on va faire une application d'un modèle dynamique pour le marché bancaire dans lequel on considère une concurrence en quantité tel que chaque banque cherche à fixer le niveau de prêts qu'elle peut donner pour ses clients dans le futur en évitant des pertes financières maximisent au même leurs profits.

4.2 Modèle dynamique de duopole de Cournot

Dans cette section on va étudier le modèle dynamique du duopole de Cournot.

Considérons le duopole de Cournot statique donné par la forme normale suivante :

$$J_C = \prec I, \{S_i\}_{i\in I}, \{\pi_i\}_{i\in I} \succ .$$

Dans le modèle dynamique de duopole de Cournot la fonction du coût total de production change par rapport à sa formule de base $C_i(q_i) = c_i q_i$, dans ce modèle dynamique la fonction du coût total de production est définie par :

$$C_i(q_i, q_j) = c_i q_i + d_i q_i q_j, \quad i \neq j, \quad i, j \in I.$$

Singh et Vives [19] supposent que la fonction d'utilité du consommateur représentatif sur le marché est donnée par :

$$U(q_1, q_2) = a(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + 2bq_1q_2). \tag{4.1}$$

Cette fonction d'utilité donne lieu à une structure de demande linéaire. Les fonctions de demande inverse des deux entreprises qui proviennent de la maximisation de (4.1) sont données par :

$$\begin{aligned} P_1(q_1, q_2) &= a - q_1 - bq_2, \\ P_2(q_1, q_2) &= a - q_2 - bq_1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Avec les hypothèses précédentes, nous avons les profits absolus de chaque entreprise sont donnés par :

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2) &= q_1(a - q_1 - bq_2) - c_1q_1 - d_1q_1q_2, \\ \pi_2(q_1, q_2) &= q_2(a - q_2 - bq_1) - c_2q_2 - d_2q_2q_1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Le profit relatif à l'entreprise $i \in I$ est la différence entre son profit absolu π_i et le profit absolu π_j de l'entreprise concurrente $j \neq i$ (d'après la référence [8]).

On note le profit relatif de l'entreprise $i \in I$ par R_i, les profits relatifs R_1 et R_2 des deux entreprises 1 et 2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} R_1(q_1, q_2) &= \pi_1(q_1, q_2) - \pi_2(q_1, q_2), \\ R_2(q_1, q_2) &= \pi_2(q_1, q_2) - \pi_1(q_1, q_2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

En remplaçant π_1 et π_2 par leurs formules données dans (4.3) on obtient :

$$\begin{aligned} R_1(q_1, q_2) &= q_1(a - q_1 - (d_1 + b)q_2) - q_2(a - q_2 - (d_2 + b)q_1) - c_1q_1 + c_2q_2, \\ R_2(q_1, q_2) &= q_2(a - q_2 - (d_2 + b)q_1) - q_1(a - q_1 - (d_1 + b)q_2) + c_1q_1 - c_2q_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

On applique les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour les deux fonctions de profit R_1 et R_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial q_1}(q_1, q_2) &= a - c_1 + (d_2 - d_1)q_2 - 2q_1 = 0, \\ \frac{\partial R_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) &= a - c_2 + (d_1 - d_2)q_1 - 2q_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les deux entreprises adoptent le mécanisme d'ajustement dit myope [3] :

$$q_i(t+1) = q_i(t) + \alpha_i q_i \Phi_i(q_i), \quad i \in I, \tag{4.7}$$

avec : t représente le temps dans lequel les quantités produits des entreprises changent (le changement à chaque instant t), $\Phi_i(q_i) = \dfrac{\partial R_i}{\partial q_i}$ est le profit relatif marginal de l'entreprise $i \in I$, α_i est la vitesse d'ajustement de l'entreprise i. L'entreprise i augmente ou diminue sa production q_i en fonction de l'information donnée par le profit relatif marginal $\Phi_i(q_i)$ de la dernière période modulé par un paramètre positif α_i [8]. Ainsi, on remplace $\Phi_1(q_1)$ et $\Phi_2(q_2)$ par leurs formules données dans (4.6) on obtient :

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \alpha_1 q_1(a - c_1 + (d_2 - d_1)q_2 - 2q_1), \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \alpha_2 q_2(a - c_2 + (d_1 - d_2)q_1 - 2q_2). \end{cases} \tag{4.8}$$

L'équilibre de Nash est un point fixe de système dynamique (4.8), en effet, un équilibre de Nash se situe à l'intersection des courbes de réaction définies par $\dfrac{\partial R_i}{\partial q_i}(q_1, q_2) = 0, i \in I$ [3]. L'équilibre de Nash est donné par le couple $q^* = (q_1^*, q_2^*)$ tel que :

$$\begin{cases} q_1^* = MR_1(q_2^*) = \dfrac{(a - c_1)}{2} + \dfrac{(d_2 - d_1)}{2} q_2^*, \\ q_2^* = MR_2(q_1^*) = \dfrac{(a - c_2)}{2} + \dfrac{(d_1 - d_2)}{2} q_1^*. \end{cases} \tag{4.9}$$

La résolution de système (4.9), nous donne :

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{(2 + d_2 - d_1)a - 2c_1 + (d_1 - d_2)c_2}{4 + (d_1 - d_2)^2}, \\ q_2^* &= \frac{(2 + d_1 - d_2)a - 2c_2 + (d_2 - d_1)c_1}{4 + (d_1 - d_2)^2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

En conclusion, on constate que le modèle dynamique de duopole de Cournot est obtenu par affectation des changements sur le modèle standard et statique de duopole de Cournot. Ainsi, la dynamique de duopole de Cournot est représentée dans le changement des fonctions de profit des entreprises et donc le changement dans l'équilibre de Nash et le plus important est que la production des deux entreprises change dans le temps ce qui est différent de modèle statique.

4.2.1 Analyse de jeu dynamique de Cournot

Une analyse du modèle dynamique de Cournot présenté précédemment est nécessaire, cette analyse se base en principe sur l'utilisation de la matrice jacobienne.

Plus le point d'équilibre de Nash q^*, le système dynamique (4.8) admet trois autres points d'équilibre qui sont :

$$\begin{aligned} q^1 &= (0,0), \\ q^2 &= \left(\frac{a-c_1}{2}, 0\right), \\ q^3 &= \left(0, \frac{a-c_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Remarques 4.1 *1.* $q^1 = (0,0)$ *lorsque dans le système* (4.9), $q_1^* = q_2^* = 0$.

2. $q^2 = \left(\frac{a-c_1}{2}, 0\right)$ *lorsque dans le système* (4.9), $q_2^* = 0$.

3. $q^3 = \left(0, \frac{a-c_2}{2}\right)$ *lorsque dans le système* (4.9), $q_1^* = 0$.

La matrice jacobienne pour ce modèle dynamique à (q_1, q_2) est donnée par :

$$J = J(q_1,q_2) = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1(a-c_1-4q_1-(d_1-d_2)q_2) & -\alpha_1(d_1-d_2)q_1 \\ -\alpha_2(d_2-d_1)q_2 & 1+\alpha_2(a-c_2-4q_2-(d_2-d_1)q_1) \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne J est donné par :

$$P(\lambda) = det(J - \lambda I_2) = \lambda^2 - Tr(J)\lambda + det(J), \tag{4.13}$$

avec I_2 est la matrice identique d'ordre 2.

$$Tr(J) = 2 + \alpha_1(a-c_1-4q_1-(d_1-d_2)q_2) + \alpha_2(a-c_2-4q_2-(d_2-d_1)q_1). \tag{4.14}$$

$$det(J) = (1+\alpha_1(a-c_1-4q_1-(d_1-d_2)q_2))(1+\alpha_2(a-c_2-4q_2-(d_2-d_1)q_1)) + \alpha_1\alpha_2(d_1-d_2)^2 q_1 q_2. \tag{4.15}$$

Remarque 4.1 *[8] Le jeu de ce modèle dynamique de Cournot est dit :*

- *Jeu dynamique dissipatif, lorsque* $det(J) < 1$.

- *Jeu dynamique conservateur, lorsque* $det(J) = 1$.

Dans les autres cas, le jeu de ce modèle dynamique de Cournot est dit jeu dynamique non dissipé.

Un point d'équilibre de ce modèle dynamique sera localement stable si toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) de la matrice jacobienne J sont à l'intérieur du disque de l'unité ($|\lambda_i| < 1$), les λ_i sont les valeurs propres de la matrice jacobienne J.

Lemme 1 *[8] Étant donné λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de la matrice jacobienne J (les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ donné dans (4.13)), il existe quatre cas possibles qui peuvent se réaliser et qui sont :*

1. *Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, alors le point d'équilibre est dit noeud attirant et il est localement asymptotiquement stable.*

2. *Si $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$, alors le point d'équilibre est dit noeud répulsif et il est instable.*

3. *Si $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| < 1$ (ou bien $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$), alors le point d'équilibre est un point selle.*
4. *Si $|\lambda_1| = 1$ et $|\lambda_2| \neq 1$ (ou bien $|\lambda_2| = 1$ et $|\lambda_1| \neq 1$), alors le point d'équilibre est dit non hyperbolique.*

Théorème 4.1 *[8] Le point d'équilibre trivial q^1 est un noeud répulsif.*

Théorème 4.2 *[8] Les deux points d'équilibre q^2 et q^3 sont des points selles.*

Étudions maintenant la stabilité de l'équilibre de Nash $q^* = (q_1^*, q_2^*)$.
La matrice jacobienne calculée à l'équilibre de Nash est donnée par :

$$J^* = J(q_1^*, q_2^*) = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha_1 q_1^* & -\alpha_1(d_1 - d_2)q_1^* \\ -\alpha_2(d_2 - d_1)q_2^* & 1 - 2\alpha_2 q_2^* \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Ainsi la trace et le déterminant de la matrice J^* sont définis comme suit :

$$Tr(J^*) = 2 - 2\alpha_1 q_1^* - 2\alpha_2 q_2^*.$$

$$det(J^*) = 1 - 2\alpha_1 q_1^* - 2\alpha_2 q_2^* + 4\alpha_1\alpha_2 q_1^* q_2^* + \alpha_1\alpha_2(d_1 - d_2)^2 q_1^* q_2^*.$$

Le polynôme caractéristique pour la matrice J^* est donné par :

$$P^*(\lambda) = \lambda^2 - Tr(J^*)\lambda + det(J^*).$$

L'équilibre de Cournot-Nash est asymptotiquement stable si et seulement si [8] :

$$\begin{cases} P^*(1) = 1 - Tr(J^*) + det(J^*). \\ P^*(-1) = 1 + Tr(J^*) + det(J^*) = 4 - 4\alpha_1 q_1^* - 4\alpha_2 q_2^* + 4\alpha_1\alpha_2 q_1^* q_2^* + \alpha_1\alpha_2(d_1 - d_2)^2 q_1^* q_2^* > 0. \\ |det(J^*)| < 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

La région stable locale d'équilibre de Nash est définie par les deux dernières inégalités de (4.17). Si les deux dernières conditions de (4.17) ne sont pas vérifiés, alors l'équilibre de Nash q^* devient instable. Par conséquent, les deux dernières conditions de (4.17) représentent des surfaces dans l'espace des paramètres sur lequel ont lieu respectivement une bifurcation Flip et une bifurcation Neimark-Sacker.
Le seuil de la bifurcation Neimark-Sacker se produit pour $\alpha_1 = \alpha_1^{NS}$.

$$\begin{aligned} \alpha_1^F &= \frac{4(4 + (d_1 - d_2)^2 + \alpha_2(2c_2 - 2a + (d_1 - d_2)(c_1 - a)))}{(\alpha_2((a - c_1)(d_1 - d_2) + 2a - 2c_2) - 4)(2c_1 - 2a + (d_1 - d_2)(a - c_2))}, \\ \alpha_1^{NS} &= \frac{2\alpha_2(2c_2 - 2a + (d_2 - d_1)(a - c_1))}{(\alpha_2((a - c_1)(d_1 - d_2) + 2a - 2c_2) - 2)(2c_1 - 2a + (d_1 - d_2)(a - c_2))}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

où α_1^F et α_1^{NS} désignant les valeurs de la vitesse de réglage de l'entreprise 1 conduisant à une bifurcation Neimark-Sacher ou Flip, respectivement.

Théorème 4.3 *[8] L'équilibre de Nash q^* est dit :*

1. *Évier si $\alpha_1^F < \alpha_1 < \alpha_1^{NS}$.*

2. *La source si $\alpha_1 > \alpha_1^F$ et $\alpha_1 > \alpha_1^{NS}$.*

3. *Point Selle si $\alpha_1 < \alpha_1^F$ et $\alpha_1 > \alpha_1^{NS}$ ou bien $\alpha_1 > \alpha_1^F$ et $\alpha_1 < \alpha_1^{NS}$.*

4. *Non hyperbolique si $\alpha_1 = \alpha_1^F$ ou bien $\alpha_1 = \alpha_1^{NS}$.*

4.3 Application d'un modèle dynamique de Hotelling pour le marché duopoliste bancaire

Après avoir appliqué un modèle statique de duopole de Hotelling pour le marché duopoliste bancaire dans le Chapitre 3, cette section est dédiée à l'application d'un modèle dynamique pour le marché duopoliste bancaire.

4.3.1 Présentation de modèle dynamique

Le modèle dynamique de Hotelling est une version duopolistique simplifiée de Klein (1971) et les modèles de Monti (1972), qui représentent les modèles standards en ce qui concerne la vision microéconomique du secteur bancaire [10]. La concurrence dans les modèles de Klein (1971) et Monti (1972) est une concurrence imparfaite [9].

Pour simplifier le modèle, on suppose qu'il n'y a pas de positions ouvertes entre les banques sur le marché interbancaire, le bilan de chaque banque $i \in I = \{1, 2\}$ est composé uniquement de prêts L_i à l'actif et de capital K_i et les dépôts D_i au passif. Pour plus de simplification, on suppose aussi que les coûts marginaux des deux banques sont constants c pour les dépôts et les crédits.

La fonction de demande linéaire pour les prêts est supposée :

$$r_L(L_1 + L_2) = a - b(L_1 + L_2), \tag{4.19}$$

avec a, b des constantes strictement positives et r_L est la fonction de demande inverse pour les prêts.

Les fonctions des profits des deux banques sont données par [10] :

$$\begin{aligned} \pi_1(L_1, L_2) &= [a - b(L_1 + L_2)]L_1 - r_K K_1 - c(D_1 + L_1), \\ \pi_2(L_1, L_2) &= [a - b(L_1 + L_2)]L_2 - r_K K_2 - c(D_2 + L_2), \end{aligned} \tag{4.20}$$

avec r_K est la rémunération du capital déterminée de manière exogène par l'équilibre sur les marchés des capitaux. En faisant correspondre les actifs et les passifs au bilan, nous avons :

$$L_i = K_i + D_i, i \in I. \tag{4.21}$$

En désignant le capital requis par unité de prêt par γ, on a $K_i \geq \gamma L_i$ où γ est un pourcentage fixe déterminé par le régulateur.

On suppose, pour simplifier, que l'exigence de capital est contraignante :

$$K_i = \gamma L_i, i = 1, 2, \tag{4.22}$$

ainsi, le système (4.20) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_1(L_1, L_2) &= [a - b(L_1 + L_2)]L_1 - L_1[2c + \gamma(r_K - c)], \\ \pi_2(L_1, L_2) &= [a - b(L_1 + L_2)]L_2 - L_2[2c + \gamma(r_K - c)]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Supposons que $a > 2c$ et que la rémunération du capital est supérieur au coût marginal $r_K > c$.

On applique les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour les deux fonctions de profit des deux banques π_1 et π_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial L_1}(L_1, L_2) = a - b(2L_1 + L_2) - 2c - \gamma(r_K - c) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial L_2}(L_1, L_2) = a - b(L_1 + 2L_2) - 2c - \gamma(r_K - c) = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

La résolution de système (4.24) nous donne les fonctions des meilleurs réponses des deux banques :

$$\begin{cases} L_1 = MR_1(L_2) = \dfrac{a - bL_2 - 2c - \gamma(r_K - c)}{2b}, \\ \\ L_2 = MR_2(L_1) = \dfrac{a - bL_1 - 2c - \gamma(r_K - c)}{2b}. \end{cases} \tag{4.25}$$

La banque qui a des anticipations rationnelles sur le niveau de prêts qu'elle peut donner à ses clients et qui devraient être fixés dans le futur, c'est-à-dire la banque qui anticipe rationnellement le niveau de prêts qu'elle peut donner à ses clients dans le futur et ce niveau de prêts doit être fixer ce qui veut dire que ce n'est pas dans l'intérêt de la banque qu'elle donne des prêts qui depassent le niveau qu'elle a déja fixé sinon elle risque d'avoir des pertes financières dans le futur, cette banque utilise les informations disponibles sur les résultats actuels soit pour augmenter ou diminuer les prêts dans le futur (au temps $t + 1$) et cela dépend de signe des profits marginaux (positifs ou négatifs). Par conséquent, le mécanisme d'ajustement des prêts dans le temps du la banque i rationnellement borné est donné par :

$$L_i(t + 1) = L_i(t) + \alpha_i L_i(t) \frac{\partial \pi_i}{\partial L_i(t)}, \tag{4.26}$$

où $\alpha_i L_i(t)$ signifie que la vitesse d'ajustement des prêts de la banque i par rapport à une variation marginale des bénéfices lorsque L_i varie est supposée linéaire avec le coefficient $\alpha_i > 0$ conformément à la littérature susmentionnée [10]. Par conséquent, étant donné ces types de formation d'attentes, le système qui caractérise la dynamique de duopole bancaire de Cournot est définie comme suit :

$$\begin{cases} L_1(t + 1) = L_1(t) + \alpha_1 L_1(t)[a - b(2L_1(t) + L_2(t)) - 2c - \gamma(r_K - c)], \\ L_2(t + 1) = \dfrac{a - bL_1(t) - 2c - \gamma(r_K - c)}{2b}. \end{cases} \tag{4.27}$$

L'équilibre de Nash de ce modèle dynamique est un point fixe de système dynamique (4.27), il est donné par le couple (L_1^*, L_2^*) tel que :

$$\begin{cases} L_1^* = MR_1(L_2^*), \\ L_2^* = MR_2(L_1^*). \end{cases} \tag{4.28}$$

L'équilibre de Nash f^* est déterminé en posant $L_1(t+1) = L_1(t) = L_1$ et $L_2(t+1) = L_2(t) = L_2$ dans (4.27) et ça revient à résoudre (4.28) ce qui nous donne :

$$\begin{cases} L_1^* = \dfrac{a-2c-\gamma(r_K-c)}{3b}, \\ L_2^* = \dfrac{a-2c-\gamma(r_K-c)}{3b}, \end{cases} \tag{4.29}$$

avec $a > 2c + \gamma(r_K - c)$ pour assurer que $L_1^* = L_2^* = \dfrac{a-2c-\gamma(r_K-c)}{3b} > 0$. Puisqu'à l'équilibre de Nash on a $L_1^* = L_2^*$, donc les profits des deux banques à l'équilibre sont égaux $\pi_1^* = \pi_2^* = \pi^*$ tel que :

$$\pi^* = \frac{(a-2c-\gamma(r_K-c))^2}{9b}. \tag{4.30}$$

Comme interprétation de résultat de cette application, à l'équilibre de Nash (L_1^*, L_2^*), les deux banques offrent les mêmes prêts pour leurs clients, ainsi aucune banque n'a intérêt de dévier unilatéralement de la situation d'équilibre, et si une des deux banques change sa stratégie L_i^* à l'équilibre elle risque de perdre ses clients ce qui va lui causer des pertes financières.

4.3.2 Analyse de stabilité des points d'équilibre

Le système dynamique (4.27) admet deux points fixes qui sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(0, \frac{a-2c-\gamma(r_K-c)}{2b}\right), \\ f^* &= (L_1^*, L_2^*), \end{aligned} \tag{4.31}$$

où f_1 est dit un équilibre aux limites où seule l'entreprise 2 sert le marché en tant que monopole et l'entreprise 1 ne produit pas et pour assurer une production non négative de l'entreprise 2, et f^* est l'équilibre de Nash.

Afin d'étudier la stabilité locale des points d'équilibre f_1 et f^*, considérons la matrice jacobienne J évaluée à chaque point d'équilibre et définie comme suit :

$$J = J(L_1, L_2) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

Pour simplifier les calculs on pose $\theta = a - 2c - \gamma(r_K - c)$.

Lemme 2 *[10] L'équilibre aux limites f_1 est un point selle.*

$$J(f_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\theta+2}{2} & 0 \\ \dfrac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

dont les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \dfrac{\alpha\theta + 2}{2}$ *et* $\lambda_2 = 0$ *et puisque* $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$, *alors* f_1 *est un point selle.*

Les prêts d'équilibre et les profits diminuent avec une exigence de capital croissante γ.

La matrice Jacobienne évaluée a l'equilibre de Nash f^* *est donnée par :*

$$J^* = J(f^*) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\alpha\theta - 3}{3} & -\dfrac{\alpha\theta}{3} \\ & \\ -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

La trace et le déterminant de la matrice jacobienne (4.34) *sont respectivement donnés par :*

$$Tr(J^*) = -\frac{2\alpha\theta - 3}{3}. \tag{4.35}$$

$$det(J^*) = \left(-\frac{2\alpha\theta - 3}{3}\right) \times 0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\alpha\theta}{3}\right) = -\frac{\alpha\theta}{6} \neq 0. \tag{4.36}$$

Donc le polynôme caractéristique de la matrice J^* *est donné par :*

$$P(\lambda) = det(J^* - \lambda I_2).$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\dfrac{2\alpha\theta - 3}{3} - \lambda & -\dfrac{\alpha\theta}{3} \\ & \\ -\dfrac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}, \tag{4.37}$$

d'où :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{2\alpha\theta - 3}{3}\right)\lambda - \frac{\alpha\theta}{6}, \tag{4.38}$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = \left(\frac{2\alpha\theta - 3}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha\theta}{6}\right).$$

Nous étudions maintenant les propriétés de stabilité locale de l'équilibre de Nash de Cournot f^* *au moyen de conditions de stabilité bien connues pour un système à deux dimensions à temps discret qui sont donnés par :*

$$\begin{cases} A := 1 + Tr(J^*) + det(J^*) > 0, \\ B := 1 - Tr(J^*) + det(J^*) > 0, \\ C := 1 - det(J^*) > 0. \end{cases} \tag{4.39}$$

Pour le cas particulier de la matrice Jacobienne J^*, il est facile de voir que les conditions B sont vérifiées, les conditions A et C définissent des surfaces dans l'espace des paramètres sur lesquelles une bifurcation Flip (c'est-à-dire une valeur propre réelle qui passe par 1) lorsque $A = 0$ et une bifurcation Neimark-Sacker (c'est-à-dire le module d'une paire de valeurs propres complexe qui passe par 1) lorsque $C = 0$ (ce qui nous donne $det(J^*) = 1$ et $|Tr(J^*)| < 2$ qui est obtenu par remplacer $det(J^*) = 1$ dans B), se produisent, respectivement, car il peut être facilement déterminé à partir de ce qui suit :

$$\begin{cases} A = \dfrac{-5\alpha\theta + 12}{6} > 0, \\ C = \dfrac{+\alpha\theta + 6}{6}. \end{cases} \tag{4.40}$$

Puisque l'équilibre de Nash de Cournot f^* est stable lorsque les trois conditions A, B et C données dans (4.39) *sont vérifiées, aussi puisque la bifurcation Flip et la bifurcation Neimark-Sacker se produisent respectivement lorsque $A = 0$ et $C = 0$ (c'est-à-dire la première et la dernière condition de* (4.39) *ne sont pas toujours vérifiées), donc on peut conclure que l'équilibre de Nash de Cournot f^* perd sa stabilité soit par une bifurcation Neimark-Sacker ou bien par une bifurcation Flip.*
Soit l'équation suivante :

$$\beta(\alpha, \gamma) = -5\alpha\theta + 12. \tag{4.41}$$

L'équation (4.41) *représente une courbe de bifurcation à dont le point d'équilibre positif $L_1^* = L_2^*$ perd sa stabilité par une bifurcation Flip (ou doublement de période), c'est-à-dire :*

$$\beta(\alpha, \gamma) = -5\alpha\theta + 12 = 0.$$

D'après le Lemme 1, les résultats suivants sont obtenus :

1. La courbe de bifurcation $\beta(\alpha, \gamma)$ coupe l'axe horizontal à :

$$\alpha = \alpha^A = \frac{12}{5\theta}, \tag{4.42}$$

ou bien à :

$$\gamma = \gamma^A = \frac{5\alpha(a - 2c) - 12}{5\alpha(r_K - c)}. \tag{4.43}$$

L'équation (4.43) est obtenue en remplaçant θ dans (4.42) par sa formule ($\theta = a - 2c - \gamma(r_K - c)$).
L'équilibre de Nash f^* est stable lorsque $\beta(\alpha, \gamma) > 0$, c'est-à-dire quand $\alpha < \dfrac{12}{5\theta}$ ou bien $\gamma > \dfrac{5\alpha(a - 2c) - 12}{5\alpha(r_K - c)}$.

2. Considérons maintenant l'équation suivante :

$$\mu(\alpha, \gamma) = +\alpha\theta + 6. \tag{4.44}$$

La courbe de bifurcation $\mu(\alpha, \gamma)$ coupe l'axe horizontal à :

$$\alpha = \alpha^C = -\frac{6}{\theta}, \tag{4.45}$$

L'équilibre de Nash f^* est stable lorsque $\mu(\alpha, \gamma) > 0$ c'est-à-dire quand $\alpha < -\frac{6}{\theta}$ [10]. Étant donné que l'équilibre de Nash peut devenir instable soit par une bifurcation Flip ou par une bifurcation Neimark-Sacker, pour cela il est nécessaire de vérifier quel type de bifurcation qui se produit en premier, en partant d'une situation de stabilité avec une augmentation de la valeur de α (diminution de la valeur de γ). Ainsi les résultats ci-dessous 3 et 4 sont obtenus.

3. L'équilibre de Nash f^* peut perdre sa stabilité uniquement par une bifurcation Flip. Cette remarque découle directement de la simple observation que $\alpha^A < \alpha^C$ [10]. Une fois établi qu'une seule bifurcation Flip peut se produire, on va se concentrer sur le capital requis. Nous devons vérifier si la solution $\gamma = \gamma^A$ est réalisable à partir d'un point de vue économique. Par conséquent, on obtient le résultat 4.

4. Une valeur de bifurcation inversée de l'exigence de capital existe, à condition que les valeurs seuils suivantes de la vitesse de réglage soient maintenues [10] :

$$0 < \gamma^A < 1 \tag{4.46}$$

Par conséquent, à condition que la vitesse relative de réglage ne soit pas trop petite ou trop grande, auquel cas le marché duopoliste bancaire est toujours stable ou instable indépendamment du niveau de la norme de capital, la réglementation par le choix d'un niveau approprié d'exigence de capital est réalisable et efficace pour stabiliser le duopole bancaire. Sur la base d'une simple observation des effets des paramètres c et r_K sur la valeur de bifurcation Flip de γ ($\frac{\partial \gamma^A}{\partial c} < 0$, $\frac{\partial \gamma^A}{\partial r_K} < 0$) nous pouvons voir que des coûts marginaux plus élevés et une rémunération du capital exogène plus élevée (un coût d'opportunité du capital plus élevé) favorisent l'effet stabilisateur du capital requis [10].

4.4 Conclusion

L'étude de cas dynamique d'un duopole soit en quantité ou bien en prix est très important en raison de changement des quantités produites des deux entreprises dans le temps (ou bien des prix proposés) ce qui provoque un changement dans l'équilibre de marché ainsi que le changement des fonctions de demande et les profits des entreprises contrairement au cas statique, où par exemple, les quantités produites ne changent pas dans le temps ce qui peut causer des pertes financières pour les entreprises. Le cas dynamique permet aux entreprises de changer leurs quantités de production selon le comportement de leurs clients et selon aussi leurs profits marginaux. Si le profit marginal est positif à la période t, alors l'entreprise $i \in I$ va augmenter sa production q_i à la période $t+1$. Par contre si le profit marginal à la période t est négatif, dans ce cas l'entreprise i va diminuer sa production q_i à la période $t+1$, et grâce à ce mécanisme de changement dans les quantités produites de l'entreprise, elle va éviter d'avoir des pertes financières dans le futur.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre travail traite les différents modèles de la théorie des jeux pour un marché duopoliste. Notre objectif est d'étudier et modéliser les différents cas de concurrence (soit en prix ou en quantité) entre deux entreprises sur les même marchés.

D'après ce travail, on déduit que l'application des différents modèles de la théorie des jeux (statiques et dynamiques) est très efficace pour l'étude et la modélisation des différents cas de concurrence sur un marché duopoliste. Ainsi, pour traiter le cas de concurrence en quantité on utilise le duopole de Cournot et le duopole de Stackelberg, par contre le cas de concurrence en prix entre deux entreprises est modélisé soit par le duopole de Bertrand ou bien le duopole de Hotelling. Deux marchés très importants et essentiels à savoir le marché des assurances et bancaire ont été modélisés par des modèles de duopole de Bertrand et Hotelling. Ces modèles permettent aux deux compagnies d'assurance et deux entreprises bancaires de maximiser leurs profits sans risque d'avoir des pertes financières ce qui exprime l'intérêt et l'avantage des modèles de la théorie des jeux statiques.

Mais malheuresement les modèles statiques ne sont pas toujours suffisants pour modéliser tous les cas de concurrence dans un marché et cela à cause de leurs changements et leurs dynamique, de plus le facteur du temps a une grande importance dans la vie économique car l'activité économique à l'instant $t+1$ dépend de celle à l'instant t. D'autre part, les informations de passé renseignent les entreprises sur leurs environnements et sur leurs adversaires, par exemple dans le cas de concurrence en qunatité les entreprises fixent leurs quantités qu'elles vont produire dans le futur (à l'instant $t+1$) en fonction des informations disponibles sur ses qunatités produites à l'instant t et les quantités de l'entreprise concurrente et en fonction de la demande des clients à l'instant t. Pour toutes ces raisons, il est nécessaire de passer de cas statique au cas dynamique. L'étude de modèle dynamique de duopole de

Cournot permet de voir que la dynamique d'un duopole est constitue dans le changement de comportement des clients, changement des profits des entreprises et surtout le changement des quantités produites des entreprises dans le temps par adopter le mécanisme d'ajustement dit myope. L'analyse de jeu dynamique de Cournot nous montre que l'équilibre de Nash perd sa stabilité soit par une bifurcation Flip ou bien une bifurcation Neimark-Sacker. L'application de duopole dynamique de Cournot pour le marché bancaire dans lequel on considère une concurrence en quantité entre les deux banques, permet aux deux banques de fixer leurs niveaux de prêts qu'elles peuvent donner pour leurs clients dans le futur sans risque d'avoir des pertes financières et au même temps elles maximisent leurs profits.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. BOUIBED. Théorie des jeux et stratégie managériale. Cours de Master 1 Mathématiques Financières, Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, 2019/2020.

[2] R. BOURlÉS, D. HENRIET. Théorie des jeux. EAO-32-O-FIST, Deuxième année, 2016/2017.

[3] G. I. BISCHI, A. NAIMZADA. Global analysis of a dynamic duopoly game with bounded rationality. Advances in Dynamic Games and Applications : 361-385, 2000.

[4] E. V. BELMEGA. Introduction à la théorie des jeux et ses applications aux communications sans fils. Lycée Chrestien de Troyes, 2017.

[5] G. BONANNO. Game theory. University of California, Davis, 2015.

[6] B. M. CHANCEL BARDIN. Cours de microéconomie. Université Libre du congo, 2016.

[7] P. CAILLOU. Analyse des interactions multi-agents : théorie des jeux. Cours de Master IAC, 2014/2015.

[8] A. A. ELSADANY. Dynamics of a Cournot duopoly game with bounded rationality based on relative profit maximization. Applied Mathematics and Computation : 253-263, 2016.

[9] M. FRANCK. Concurrence bancaire, jeux séquentiels et information complète. Revue économique : 301-324, 1995.

[10] L. FANTI. The dynamics of a banking duopoly with capital regulations. Economic Modelling : 340-349, 2014.

[11] G. FAYE. An introduction to bifurcation theory. Neuromathcomp Laboratory, INRIA, Sophia Antipolis, CNRS, ENS Paris, France, 2011.

[12] L. F. GAMSORE. Cours d'économie de l'entreprise, Deuxième année - DEUG, 2006.

[13] B. GUERRIEN. La théorie des jeux. Economica , 2002.

[14] A. GLIZ. Theorie des jeux et economie de l'information. Ecole superieure de commerce, Rampe Salah Gherbi, Agha, Alger, 2010.

[15] D. HE, X. DENG. Price Competition and product differentiation based on the subjective and social effect of consumers environmental awareness. Environmental research and public health , 2020.

[16] S. KONIECZNY. Introduction à la théorie des jeux. Notes de cours CRIL-CNRS Université d'Artois-Lens.

[17] W. RYAN, Y. JI, R. TIM, I. JAN. Game Theory in General Insurance How to outdo your adversaries while they are trying to outdo you. Institute and Faculty of Actuaries, GIRO, 2012.

[18] D. SAÏDANE. Concurrence spatiale, différentiation verticale et comportement bancaire. Economie appliquée : 37-62, 1997.

[19] N. SINGH, X. VIVES. Price and quantity competition in a differentiated duopoly. Rand Journal of Economics : 546-554, 1984.

[20] M. YILDIZOGLU. Introduction à la théorie des jeux. DUNOD, 2003.

[21] M. YILDIZOGLU. Introduction à la microéconomie. Université Paul Cézanne. Libre, 2009.

[22] Y. YAHIAOUI. Sur certains aspects des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels. Mémoire de Magister en Mathématiques, Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, 2009.

[23] B. ZILIOTTO. Théorie des Jeux. Polycopié de cours, 2017.

Résumé

Nous avons étudié et analysé dans ce mémoire plusieurs marché duopoliste dans le cadre de la théorie des jeux. Un modèle de duopole de Bertrand a été appliqué pour modéliser la concurrence entre deux compagnies d'assurance ainsi que les primes d'équilibre ont été déterminées. Le deuxième modèle consiste en une application du modèle de Hotelling pour un marché bancaire. Comme les modèles de la théorie des jeux statiques en général ne suffisent pas pour traiter et modéliser toutes les situations réelles d'un marché d'où la nécessité d'application des modèles de la théorie des jeux dynamiques. Nous avons ainsi étudié la dynamique de duopole de Cournot, puis une application de ce modèle a été présenté pour un marché bancaire en montrant effectivement l'avantage et l'efficacité des modèles dynamiques.

Mots clés : Marché duopoliste, Théorie des jeux, Duopole de Cournot, Duopole de Bertrand, Duopole de Hotelling, Compagnies d'assurance, Concurrence bancaire.

Abstract

We have studied and analyzed in this thesis several duopoly markets within the framework of game theory. A Bertrand duopoly model was applied to model the competition between two insurance companies and the equilibrium premiums were determined. The second model consists of an application of the Hotelling model for a banking market. As models of static game theory in general are not sufficient to process and model all real market situations, hence the need to apply models of dynamic game theory. We have thus studied the dynamics of Cournot's duopoly, then an application of this model was presented for a banking market by effectively showing the advantage and efficiency of dynamic models.

Keywords : Duopoly market, Game theory, Duopoly of Cournot, Bertrand duopoly, Hotelling Duopoly, Insurance companies, Banking competition.