

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



MÉMOIRE DE FIN DE CYCLE
En vue de l'obtention du diplôme Master en Mathématiques Financières

Thème

Évaluation des options sous le modèle de Heston

Présenté par :

- ✓ *M^r*. BOUHENNI OUSSAMA.
- ✓ *M^r*. DERAMCHIA MOHAMED HABIB.

Devant le jury composé de :

Présidente	<i>M^{me}</i> Tabti.H	M.C.B	U. A. Mira Béjaïa.
Rapporteur	<i>M^{me}</i> Takhedmit.B	M.C.B	U. A. Mira Béjaïa.
Examinatrice	<i>M^{lle}</i> Bouchabah.K	M.A.A	U. A. Mira Béjaïa.
Examineur	<i>M^r</i> Cheurfa.F	M.A.A	U.Boumerdès.

Promotion : 2019/2020

Remerciements

En premier lieu, nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir accordé santé, courage et volonté pour accomplir ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à toutes les personnes qui nous ont soutenues, et qui n'ont pas cessés de nous donner des conseils en signe de reconnaissance et qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire .

Je tiens à remercier mon encadreur *Madame TAKHEDMIT* pour son aide et ses précieux conseils durant toute la période de la réalisation de ce travail, pour leur disponibilité et pour leurs qualités humaines et scientifiques.

Nous désirons exprimer toute notre considération et en profond respect à Madame **Tabti.H** qu'elle a présidé ce jury. Nous adressons également nos sincères remerciements à Madame **Bouchabah.K**, Monsieur **Cheurfa.F** pour avoir accepté d'examiner et de faire partie du jury de ce mémoire .

Notre plus grande reconnaissance est pour nos parents pour leurs soutient.

Dédicace

Je tiens à d'édier ce travail à :

A ma mère pour le don divin d'amour et d'affection qu'elle ma toujours portée,
et son soutient infini durant toute ma vie;

A mon père qui m'a soutenu et m'a encouragé durant ma carrière d'études ;

A ma soeurs : Aya ;

A mes frères: Yazid, Wail, Chams eddin;

A toute ma famille ;

A mes chér(e)s ami(e)s ;

A tout ceux que

j'aime.

Bouhenni Oussama

Dédicace

Je Dédie Ce Travail à :

ma très cher mère et mon très chère père

pour leur soutien, les sacrifices et tous les efforts consentis

pour mon éducation et ma formation

Je tiens à vous témoigner ma reconnaissance mon amour et mon affection

à ma soeur bouthaina et mes frères tarek et walid

Que Dieu vous protège et vous bénisse.

Deramchia Mohamed Habib

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
1 NOTIONS ELEMENTAIRES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES	5
1.1 Notions Financières	6
1.1.1 Marché financier	6
1.1.2 Produit dérivé	6
1.1.3 Actif financier	6
1.1.4 Actif sous-jacent	7
1.1.5 Prix d'exercice	7
1.1.6 Option	7
1.1.7 Portefeuille financier	8
1.2 Notions mathématiques	9
1.2.1 Valeur d'une option	9
1.2.2 Caractéristiques importantes des options	10

TABLE DES MATIÈRES

1.2.3	Prix d'option d'achat européenne	14
1.3	Modèle de Black-Scholes	15
1.3.1	Formule du modèle Black-Scholes	16
1.3.2	Insuffisance du Modèle de Black-Scholes	17
1.4	Conclusion	17
2	EVALUATION DES OPTIONS SOUS VOLATILITE STOCHAS-	
	TIQUE	18
2.1	Introduction	18
2.2	Quelques modèles de volatilité stochastiques	19
2.2.1	Modèle de Hull et White	19
2.2.2	Modèle Gaussien de Ornstein-Uhlenbeck	20
2.2.3	Modèle de Heston	20
2.3	Évaluation des options sous le modèle de Heston	21
2.4	Avantages et Inconvénients du modèle de Heston	21
2.5	Put Européen	22
2.6	Call Européen	23
2.7	Analyse des sensibilités : Greeks	24
2.7.1	Description du modèle de Heston	24
2.7.2	Calcul du Delta	25
2.7.3	Calcul de vega	26
2.8	Méthodes numériques	27
2.8.1	Simulation des formes semi-analytiques	27
2.8.2	L'approche d'évaluation complète	28
2.8.3	L'approche de résolution analytique	28
2.8.4	Evaluation de l'option sur Straddle	29

TABLE DES MATIÈRES

2.9 Conclusion	29
3 CARACTERISTIQUES DU MODELE DE HESTON	30
3.1 Formule du modèle (Gamma de Heston)	30
3.2 Coefficient d'asymétrie	32
3.3 Coefficient d'aplatissement	34
3.4 Calcul de la moyenne et la variance	36
3.5 Simulation	37
3.5.1 Intégration Numérique	37
3.6 Conclusion	47
Conclusion Générale	48
Bibliographie	i
Résumé	A

TABLE DES FIGURES

1.1	Tableau d'achat et vendre d'une option	12
2.1	Greek en B-S-M et H-S-V modèles des option de Call Européenne . .	27
3.1	Distribution d'une loi de probabilité selon le Skewness.	32
3.2	Asymétrie d'une distribution	34
3.3	Une distribution platicurtique	35
3.4	Une distribution leptocurtique	35
3.5	Une distribution mesocurtique	36
3.6	la distribution de S_t	40
3.7	Le prix sous jacent S_t en fonction de la date d'échéance T	40
3.8	la distribution de V_t	41
3.9	La volatilité V_t en fonction de la date d'échéance T	42
3.10	la distribution de S_t	43
3.11	la distribution de V_t	44

INTRODUCTION GÉNÉRALE



Les outils mathématiques sont devenus déterminants en finance. Ils ont initialement contribué avec Black-Scholes à l'explosion des activités de marché et, aujourd'hui, la demande en profils hautement techniques reste importante, malgré les crises financières.

En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule analytique pour des options sur actions .

Le modèle de Black-Scholes a été toujours une référence pour tous ceux touchent de près où de loin à la finance des marchés. Il est très utilisé dans le monde de la

Introduction générale

finance moderne, il est considéré comme le plus grand succès dans le domaine de la théorie financière. alors que ces hypothèses ne sont pas toujours réalistes. Il permet d'évaluer le prix d'une option en se basant sur l'hypothèse que l'évolution d'un titre suit un mouvement brownien géométrique et que la volatilité est constante.

Le fait que les variations de la variance des rendements de l'actif sous-jacent ne puissent être que partiellement expliquées, par les mouvements de son prix, a amené plusieurs chercheurs Wiggins [29] , Hull et White [15] et Scott [25] à conclure que la volatilité des rendements de l'actif sous-jacent pourrait être elle-même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spécifique. Ainsi, les variations du prix d'une option sont expliquées par les variations aléatoires des deux variables d'état qui sont le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité.

Les modèles à volatilité stochastique sont une approche permettant de résoudre le problème du modèle de Black Scholes. Ils considèrent que la volatilité du prix du sous-jacent est un processus stochastique. Ainsi, il est possible de trouver un modèle plus proche de la réalité. Et pour la simulation de modèle de Heston on a plusieurs méthodes : La simulation de Monte Carlo, la méthode par différences finies, Schéma d'Euler...

Il y'a une bonne raison à priori de considérer la volatilité comme stochastique. Des études empiriques sur les rendements du cours du sous-jacent permettent d'estimer la volatilité qui semble présenter un comportement stochastique. Mais modéliser la volatilité par un processus stochastique, c'est en fait reconnaître que quantifier le risque à travers un paramètre de volatilité constant est aujourd'hui insuffisant pour expliquer certains phénomènes du marché, en particulier, pour expliquer la courbe de "smile". C'est une modification profonde et puissante qui permet de décrire un marché bien plus complexe que le marché de Black et Scholes. En effet, si le modèle de Black et Scholes ne fait intervenir que les deux premiers moments du rendement

instantané du prix du sous-jacent, le modèle à volatilité stochastique fait intervenir, en plus, le moment d'ordre 3 (**kurtosis**) et le moment d'ordre 4 (**skewness**). (Le kurtosis est le coefficient de dissymétrie de la courbe de la distribution des rendements du sous-jacent, alors que le skewness est son coefficient d'aplatissement). Le fait que les variations de la volatilité des rendements de l'actif sous-jacent ne puissent être que partiellement expliquées par les mouvements de son prix a amené plusieurs chercheurs Wiggins (1987) [29], Hull et White (1987) [15] et Scott (1987) [25] à conclure que la volatilité des rendements de l'actif sous-jacent pourrait être elle-même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spécifique. Ainsi, les variations du prix d'une option sont expliquées par les variations aléatoires des deux variables d'état qui sont le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité.

Cependant, pour une dynamique particulière de la volatilité et suivant certaines hypothèses Stein et Stein (1991) [26] et Heston (1993) [14] ont réussi à trouver, analytiquement, une solution exacte relative au modèle à volatilité stochastique (closed form solution). Le premier s'est basé sur une technique relative à l'équation de la chaleur et le second sur l'inversion de Fourier. La plupart des autres chercheurs qui ont traité le sujet ont eu recours à une résolution numérique de cette équation. On peut citer, à cet effet, (Merton, 1976) [22], Johnson et Shanno (1985) [16], Eisenberg (1985) [13], Hull et White (1987) [15], Scott(1987) [25], Wiggins (1987) [29], Clifford et Roma (1994) [3], Gurdip et al.(1997) et Fouque et al. (2000) [10], Stein (1991) [26] et Heston (1993) [14].

Heston a utilisé une nouvelle technique, pour établir une «closed form solution», pour évaluer un call européen sur un actif, en considérant la volatilité comme stochastique. Avec des simulations, il a démontré que la corrélation, entre la volatilité et le prix du sous-jacent, est importante pour expliquer la skewness et les écarts par rapport au modèle à volatilité stochastique. Il a étudié l'effet de l'aspect stochastique

Introduction générale

de la volatilité sur la valeur d'une option et la comparaison du modèle correspondant avec le modèle de Black et Scholes.

Le travail empirique, relatif à ce mémoire, se base sur trois chapitres comme suit :

Une introduction, où on situe notre travail.

Le premier chapitre, est un chapitre introductif qui présente des notions élémentaires de mathématiques financières et on définit le modèle de Black-Scholes.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'évaluation des options sous volatilité stochastique et les caractéristiques du modèle de Heston.

Le troisième chapitre, on parle sur le modèle de Heston (la formule Gamma) et on donne un exemple de simulation .

CHAPITRE 1

NOTIONS ELEMENTAIRES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES

Introduction

Les marchés financiers permettent d'échanger des contrats financiers et de produits dérivés sur ses contrats. Sur ces marchés, des intervenants achètent et vendent des biens divers, à un prix qui dans la plupart du temps, semble varier de manière assez aléatoire en fonction de l'offre et de la demande. Ces biens s'appellent de manière générale des actifs qui peuvent être une devise, une action, une obligation, ou bien encore un produit dérivé. Un produit dérivé (ou un contrat dérivé) est un instrument financier sous-jacent d'un actif qui permet de fixer le prix de ce dernier pour une période donnée. La valeur d'un produit dérivé dépendra donc de la valeur de son actif sous-jacent au cours du temps. Initialement ces produits avaient pour

but de couvrir les entreprises contre des risques financiers tel qu'une flambée du prix des matières ou un risque de change.

1.1 Notions Financières

1.1.1 Marché financier

Un marché financier appelé aussi "Bourse des valeurs" est un lieu de rencontre au sein duquel des acheteurs et des vendeurs achètent et vendent de plus dans n'importe quel marché le prix de vente et d'achat est déterminé par le niveau de l'offre et de la demande, c'est le lieu d'émission et d'échange des valeurs mobilières principalement les actions et les obligations [7].

1.1.2 Produit dérivé

Un produit dérivé est un instrument financier dont la valeur varie en fonction de l'évolution d'un actif appelé sous-jacent. Initialement, les produits dérivés ont été créés pour que les entreprises puissent se couvrir contre plusieurs risques : marché, liquidité, contrepartie, risque politique [28].

1.1.3 Actif financier

C'est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable, qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque. Initialement ces contrats avaient pour but de couvrir les entreprises contre des risques financiers [4] .

1.1.4 Actif sous-jacent

Un actif sous-jacent est un actif financier sur lequel se porte un produit dérivé. Ça peut être tout type d'actif financier (même un produit dérivé puisqu'il existe aujourd'hui des dérivés d'actifs dérivés). Un actif sous-jacent va alors être le modèle du produit dérivé qui en découle puisque le cours d'un produit dérivé dépend du cours de l'actif sous-jacent [7][4].

1.1.5 Prix d'exercice

Un prix d'exercice ou strike est le prix auquel peut être acheté ou vendu un actif sous-jacent lors de la souscription d'une option (Call / Put) [7].

1.1.6 Option

En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation d'acheter (Call) ou de vente (Put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou à une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance. Si, dans les marchés financiers, les biens échangés sont des actifs financiers (actions, obligations), l'option donne le droit pour l'acheteur d'acheter (Call) ou de vendre (Put) l'actif financier défini dans le contrat. Les prix fixés à l'avance et la durée de validité de l'option sont définis dans le contrat. Le vendeur s'engage à respecter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option, en contrepartie l'acheteur lui donne de l'argent. Si l'option n'est pas exercée, le vendeur a gagné un montant égal au prix de l'option. Le terme Stock option désigne généralement une rémunération versée par une entreprise, à ses employés sous la forme d'option d'achat sur des actions de cette même entreprise.

Il existe deux types d'options échangées sur les marchés, les options d'achat (Call) et les options de vente (Put).

Call :

L'acheteur d'une option call dispose du droit d'acheter un actif sous-jacent pendant une période donnée à un prix convenu.

Put :

L'acheteur d'une option put dispose du droit de vendre un actif sous-jacent pendant une période donnée à un prix convenu.

Il existe deux styles d'option : les options de style américain ou de style européen.

Les options de style américain : sont exerçables durant toute la période jusqu'à l'échéance.

Les options de style européen : ne sont exerçables qu'à la date d'échéance [4].

1.1.7 Portefeuille financier

Un Portefeuille est un ensemble d'actifs financiers détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent provenir de différentes classes : actions, obligations, produits dérivés, matières premières, fonds, cash, etc. L'investisseur, pour diminuer son risque, procède souvent à une diversification de ses actifs. Ces derniers possèdent chacun une

volatilité qui leur est propre et sont plus ou moins corrélés entre eux. La détention de plusieurs actifs différents tend donc, généralement, à diminuer la volatilité globale du portefeuille.

1.2 Notions mathématiques

1.2.1 Valeur d'une option

A l'instar du prix d'une action, le prix d'une option (la prime) qui est déterminé par l'offre et la demande dépendra aussi des anticipations de résultats de la valeur à l'échéance [8][18].

La valeur d'une option est composée de deux parties : la valeur intrinsèque et la valeur temps.

Prix d'une option = valeur intrinsèque + valeur temps

◇ **valeur intrinsèque :**

La valeur intrinsèque représente le profit qui serait obtenu immédiatement si l'on décidait d'exercer l'option.

C'est la différence positive ou nulle entre le cours de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice.

Valeur intrinsèque d'un Call = $\max \{S_t - K, 0\} = (S_t - K)_+$

Où S_t désigne le prix du sous-jacent au cours du temps et K le prix d'exercice.

Et dans le cas d'un Put, elle est la différence positive ou nulle entre le prix d'exercice et le cours de l'actif sous-jacent.

Valeur intrinsèque d'un Put = $\max\{K - S_t, 0\} = (K - S_t)_+$

◇ **La valeur temps :**

La valeur temps se mesure par la différence entre le prix de marché d'option et sa valeur intrinsèque. Elle est nulle à l'échéance pour une option européenne [24].

1.2.2 Caractéristiques importantes des options

Actif sous-jacent :

C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'options peut être un actif physique (matières premières ou agricoles), un instrument financier (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore un indice boursier ou climatique [4].

Échéance :

C'est la date de fin de validité du contrat. Pour les contrats d'options, les dates d'échéance sont standardisées (le 3^{me} vendredi du mois d'échéance). Par ailleurs, il faut distinguer deux types d'options selon le mode d'exercice :

✓ **Européenne** : l'exercice se fait à l'échéance uniquement.

✓ **Américaine** : l'exercice se fait jusqu'à l'échéance. L'option peut être exercée pendant toute la durée du contrat [4].

Call :

Un call accorde à son acheteur le droit d'acheter, pendant une période (ou à une échéance) et à un prix convenus à l'avance, une certaine quantité d'actifs sous-jacents. Lorsque l'acheteur exerce son call et fait valoir son droit d'achat, le vendeur du call est obligé de livrer les actifs sous-jacents au prix fixé au préalable. Grâce au call, l'acheteur fixe à l'avance le prix d'achat de l'actif sous-jacent. L'acheteur du call verse une prime au vendeur pour rémunérer son obligation de vente. Elle reste définitivement acquise au vendeur même si l'acheteur décide de ne pas exercer son option.

Anticipation : l'acheteur d'un call anticipe en général une hausse du sous-jacent. Il exercera son option d'achat si le cours du sous-jacent évolue dans un sens favorable à ses anticipations et dépasse le prix d'exercice [4] .

Put :

Un put accorde à son acheteur le droit de vendre, pendant une période et à un prix convenus à l'avance, une certaine quantité d'actifs sous-jacents. Lorsque l'acheteur exerce son put et fait valoir son droit de vente, le vendeur du put est obligé d'acheter l'actif sous-jacent au prix fixé au préalable. Grâce au put, l'acheteur fixe à l'avance le prix de vente de l'actif sous-jacent. L'acheteur du put verse une prime au vendeur pour rémunérer son obligation d'achat. Elle reste définitivement acquise au vendeur même si l'acheteur décide de ne pas exercer son option.

Anticipation : l'acheteur d'un put anticipe en général une baisse du sous-jacent. Il exercera son option d'achat si le cours du sous-jacent évolue dans un sens favorable à ses anticipations et dépasse le prix d'exercice [24].

Le prix d'exercice (ou strike) :

C'est le prix auquel l'acheteur de l'option peut :

- Acheter l'actif sous-jacent (call).
- Vendre l'actif sous-jacent (put).

Le prix d'exercice est également le prix auquel le vendeur devra livrer les actions dans le cas d'un call, ou le prix auquel il devra les acheter dans le cas d'un put.

Attention, le vendeur aura l'obligation de le faire que si l'acheteur demande l'exercice de l'option [4].

L'exercice :

L'acheteur d'une option acquiert un droit d'acheter pour le call et un droit de vendre pour le put. C'est lui qui va décider de faire valoir (d'exercer) ou non ce droit en fonction de la réalisation de ses anticipations [28].

	ACHETEUR D'UNE OPTION	VENDEUR D'UNE OPTION
CALL	L'acheteur de call décide d'acheter le sous-jacent au prix d'exercice	Le vendeur de call doit vendre le sous-jacent au prix d'exercice (si l'acheteur exerce son droit)
PUT	L'acheteur de put décide de vendre le sous-jacent au prix d'exercice	Le vendeur de put doit acheter le sous-jacent au prix d'exercice (si l'acheteur exerce son droit)

FIG. 1.1 – Tableau d'achat et vendre d'une option

La prime (le prix de l'option) :

Le montant qu'un acheteur verse à un vendeur pour obtenir le droit d'acheter ou de vendre un contrat s'appelle tout simplement le prix. Il est bien sûr versé par l'acheteur au vendeur qui trouve ainsi une compensation financière à une situation dans laquelle il a toutes les obligations et aucun droit. Quelle que soit la nature de l'option, c'est à son acheteur qu'il appartient de décider si elle sera ou non exercée, l'émetteur est toujours soumis à la décision de l'acheteur. Ainsi avant son échéance, l'option peut être négociée et échangée sur le marché. Au-delà de l'échéance prévue, elle cesse d'exister et perd toute valeur.

Une option est dite :

- **Dans la monnaie** (in the money ou ITM) lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent (pour un call) ou supérieur au prix de son actif sous-jacent (pour un put).
- **Hors de la monnaie** (out of the money ou OTM) dans le cas contraire.
- **À la monnaie** (at the money ou ATM) si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent de l'option [24].

Volatilité du cours du sous-jacent :

Celle-ci est mesurée par l'écart type de la distribution du taux de rentabilité du support. Plus le cours du titre est volatil ; plus il a de chance, au terme d'une période donnée ; de s'élever au dessus du prix d'exercice (ce qui est favorable au Call) et plus il a de chance aussi de descendre au dessus de celui-ci (cas favorable au Put) [24].

Le taux d'intérêt :

En tant que d'opportunité d'un placement alternatif, le loyer de l'argent influence la valeur des options [24].

1.2.3 Prix d'option d'achat européenne

Soient :

- S_0 : le cours de l'actif sous-jacent à la maturité de l'option.
- K : le prix d'exercice de l'option.
- T : date d'échéance de l'option.
- r : taux d'intérêt sans risque.
- σ : volatilité de prix de l'actif.

La valeur théorique d'une option d'achat de prix d'exercice K , jusqu'à une date d'échéance T , est donnée par son flux de trésorerie (Payoff)

$$\max(S_t - K, 0) = (S_t - k, 0)_+$$

1.3 Modèle de Black-Scholes

Description du modèle de Black et Scholes

L'évolution des cours [28]

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0). On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire)

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux annuel ou le taux sur une période des modèles discrets). On pose $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$ pour $t \geq 0$. On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \tag{1.1}$$

Où

✓ **La tendance** μ , correspondant au rendement (annualisé) du titre espéré par unité de temps.

✓ **La volatilité** σ , qui rend compte de la variabilité du titre. Sa valeur (annualisée) dépend énormément du type de marché (pour les actions : entre 20 et 50 ; pour le change : entre 10 et 30 ; pour les taux d'intérêt : entre 5 et 20 ; pour les matières premières : entre 50 et 300).

✓ B_t est un mouvement brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$, où T est la date d'échéance de l'option que l'on se propose de traiter.

L'équation a pour solution explicite

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} dt + \sigma dB_t \right),$$

Où S_0 est le cours observé à la date 0 [28]

1.3.1 Formule du modèle Black-Scholes

Le prix théorique d'une option d'achat européenne est établi par une espérance [28] :

$$C_T = E \left[(\max(S_t - K, 0)_+) e^{-rt} \right] \quad (1.2)$$

la formule de Black-Scholes-Merton est :

$$C_T = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (1.3)$$

Où

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (1.4)$$

est une fonction de répartition de loi normale centrée et réduite en point d_1

Et

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1.5)$$

Et

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (1.6)$$

1.3.2 Insuffisance du Modèle de Black-Scholes

Dans le modèle de B-S(Black-scholes), la volatilité implicite d'une option est entendue équivalente à la volatilité historique et les rendements de l'actif sous-jacent suivent une loi normale. Dans cette hypothèse, l'évolution future de la volatilité sera inspirée par son évolution passée et l'écart-type des rendements qui est constant en est un bon estimateur. Cependant, dans la pratique, les prix réels des options permettent de calculer une volatilité implicite qui dépend du temps avant maturité. Quelques données montrent qu'en général, la volatilité implicite est plus élevée que son équivalent historique et les périodes de forte volatilité se traduisent souvent par des cours bas permettant d'anticiper une rentabilité plus élevée. Ainsi, le modèle de volatilité réel doit prendre en compte la variable temps. Dans le cas où l'on prend en compte de l'incertitude de la volatilité du sous-jacent d'une option, on parle de modèles à volatilité stochastique. Bien que le modèle de B-S diverge de la réalité en de nombreux points, il en demeure néanmoins que c'est une approximation très utile et fort intéressante. Ainsi, on peut facilement montrer que si la volatilité constante du modèle constitue une borne (majorant/minorant) de la vraie volatilité, il en suit que le prix obtenu constitue aussi une borne du vrai prix. Cette propriété connue sous le nom de "robustesse de la formule de Black-Scholes" [9].

1.4 Conclusion

En conclusion, la connaissance de la volatilité joue un rôle essentiel dans l'évaluation et dans la couverture d'un investissement quelconque, surtout lorsque celui-ci est risqué. Par conséquent, la prévision de cette volatilité est indispensable afin de contrôler le risque (et lorsque possible, le diminuer).

CHAPITRE 2

EVALUATION DES OPTIONS SOUS VOLATILITE STOCHASTIQUE

2.1 Introduction

Nous nous intéressons, dans ce travail, à la couverture d'une option européenne sous volatilité stochastique. Étant donné la multitude de modèles de volatilité stochastique disponible dans la littérature, nous proposons dans ce chapitre de présenter sommairement quelques unes des plus couramment utilisées. Le modèle de Heston étant celui de base de notre étude, nous accorderons une attention particulière à la description de ce modèle et des 'greeks'.

2.2 Quelques modèles de volatilité stochastiques

En général, on suppose que le prix de l'actif et sa volatilité suivent des mouvements stochastiques dont la formulation est donnée comme suit [9] :

$$A) \begin{cases} dS(t) = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1 \\ \sigma_t = f(y_t) \\ dy(t) = a(t, y_t) dt + b(t, y_t) dW_t^2 \\ dW_t^2 \cdot dW_t^1 = \rho dt \end{cases}$$

Avec μ_t encore appelé drift représente le taux de rendement instantané (déterministe). σ_t est la volatilité instantanée et ρ qui est déterministe et généralement négatif est la corrélation entre les deux mouvements Browniens standard (processus de Wiener). De façon équivalente, les termes aléatoires W_t^1, W_t^2 de l'équation (A) peuvent être réécrits en deux mouvements Browniens indépendants $d\widehat{W}_t^1, d\widehat{W}_t^2$ suivant la relation ci-dessous

$$\begin{cases} dW_t^1 = d\widehat{W}_t^1 \\ dW_t^2 = d\widehat{W}_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} d\widehat{W}_t^1 \end{cases}$$

Suivant l'expression de $y(t), a(t, y_t), b(t, y_t)$ de l'équation (A), les modèles ci-dessous ont été développés dans la littérature.

2.2.1 Modèle de Hull et White

Dans le modèle de Hull et White, l'expression de la volatilité suit une loi lognormale et on obtient l'expression [9].

$$B) \begin{cases} \rho = 0 \\ f(y_t) = \sqrt{(y_t)} \\ dy(t) = ay_t dt + by_t dW_t^2 \end{cases}$$

a et b sont des constantes. Le problème avec ce modèle c'est que les moments d'ordre supérieurs peuvent facilement diverger ou encore la volatilité peut croître/décroître indéfiniment.

2.2.2 Modèle Gaussien de Ornstein-Uhlenbeck

Ce modèle introduit à la dynamique de la volatilité la notion de retour à la moyenne. Cette dernière est en accord avec les données empiriques [9].

$$C) \begin{cases} \rho = 0 \\ \sigma_t = y_t \\ dy(t) = \delta(\theta - \sigma_t) dt y_t + \beta y_t dW_t^2 \end{cases}$$

L'inconvénient du modèle est non seulement que la volatilité a une forte chance de tendre vers zéro et d'être négative, mais aussi elle suppose que le risque de la volatilité est constant. Les variantes suivantes de ce modèle ont été développées : Stein and Stein assume $f(y) = |y|$ alors que pour Scott, on a $f(y) = \exp(y)$.

2.2.3 Modèle de Heston

[12] Ce modèle représente une généralisation du modèle Black et Scholes du fait qu'il incorpore une volatilité qui varie avec le temps lors du calcul du prix de l'option. Ce modèle fournit une solution analytique ("closed-form solution") pour calculer le

2.3. ÉVALUATION DES OPTIONS SOUS LE MODÈLE DE HESTON

prix d'une option d'achat, call, lorsqu'il y a une corrélation entre le prix du sous-jacent et sa volatilité. Il peut être adapté pour incorporer des taux d'intérêts stochastiques et par conséquent il peut être utilisé pour calculer le prix des options sur obligations et devises étrangères.

2.3 Évaluation des options sous le modèle de Heston

Cette section porte sur l'évaluation des options Européenne, des options forwards et des options sur option forward. Nous n'entrerons pas dans les détails techniques des différentes dérivations des modèles. Pour d'amples informations, le lecteur pourra consulter les références fournies [9].

Par rapport à BSM (Black-scholes et Merton), la mise en œuvre du modèle de Heston nécessite des mathématiques plus sophistiquées et implique également un processus plus difficile pour calibrer le modèle pour l'adapter aux prix du marché.

2.4 Avantages et Inconvénients du modèle de Heston

Bien que le modèle de Heston soit largement utilisé dans les recherches financières, il a toujours ses propres inconvénients. Ici, nous résumerions les avantages et les inconvénients du modèle de Heston [30].

Avantages :

- Fournit une solution de forme fermée pour l'option d'achat européenne.
- Être capable d'expliquer la propriété du cours de l'action lorsque sa distribution est une distribution non gaussienne.

- Convient à la surface de volatilité implicite des prix des options sur le marché.
- Permet à la corrélation entre le cours de l'action et la volatilité d'être négative.

Inconvénients

- Difficile de trouver les paramètres appropriés pour calibrer le modèle stochastique.
- Les prix des produits par le modèle de Heston sont sensibles aux paramètres, donc l'adéquation du le modèle dépend de l'étalonnage. (Mikhailov et Nogel, 2003) [23].
- Il ne peut pas capturer le biais à court terme comme celui donné par le marché (Mikhailov et Nogel, 2003) [23].

2.5 Put Européen

Heston a montré que pour un Put Européen $P(x, v, \tau)$ de maturité T , dont le temps courant est donné par $\tau = T - t$, r le taux sans risque sous Q , $S(t)$ le prix du sous-jacent, $A(t, T)$ le facteur d'actualisation et K le prix d'exercice. En posant $x = \ln(S(t))$, le prix d'un put est donné par l'expression [9]

$$P(x, v, \tau) = S(\tau)P_1(x, v, \tau) - KA(t, T)P_2(x, v, \tau) + KA(t, T) - S(\tau) \quad (2.1)$$

Où les probabilités P_j de l'équation (2.1) sont données par

$$P_j(x, v, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\varphi y} f_j(x, v, \tau, \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi \quad (2.2)$$

Les fonctions caractéristiques $f_j(x, v, \tau, \varphi)$ proposées par Heston dans l'équation (2.2) sont de la forme

$$f_j(x, v, \tau, \varphi) = e^{C_j(\tau, \varphi) + D_j(\tau, \varphi)V + i\varphi x} \quad (2.3)$$

Où :

$$D_j(\tau, \varphi) = \frac{b_j - \rho\sigma\varphi i - d_j}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - c_j e^{-d_j\tau}} \right] \quad (2.4)$$

$$C_j(\tau, \varphi) = r\varphi i\tau + \frac{a}{\sigma^2}(b_j - \rho\sigma\varphi i - d_j)\tau - 2\ln \left[\frac{1 - c_j e^{-d_j\tau}}{1 - c_j} \right] \quad (2.5)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\varphi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\varphi i - \varphi^2)} \quad (2.6)$$

$$c_j = \frac{b_j - \rho\sigma\varphi i - d_j}{b_j - \rho\sigma\varphi i + d_j} \quad (2.7)$$

$$a = \kappa\theta, u_1 = -\frac{1}{2}, b_1 = \kappa + \lambda - \sigma V\rho \text{ et } b_2 = \kappa + \lambda$$

Albrecher et al. [2] et Agnieszka et al. [1] ont montré que d_j tel que ci-dessus formulé est numériquement stable.

2.6 Call Européen

La formule de Heston d'une option d'achat européenne peut être écrite de la manière suivante [27] :

$$C(K) = S\psi_1 - Ke^{-r\tau}\psi_2$$

Où

$$\psi_j = Pr(\ln s_t > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi$$

Avec la fonction caractéristique f_j est :

$$f_j(\phi; x, v) = E[e^{-i\phi x\tau}] = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v + i\phi x)$$

Où :

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}$$

$$C_j(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right]$$

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right)$$

$\forall j = 1, 2$ avec $x = \ln S$, $\tau = (T - t)$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\theta$, $b_2 = \kappa + \lambda$,
 $a = \kappa\theta$ et $i = \sqrt{-1}$

2.7 Analyse des sensibilités : Greeks

Nous nous intéressons uniquement à la discription du modèle de Heston et les calculs de Delta et Véga et .

2.7.1 Discription du modèle de Heston

Le modèle de Heston 1993 postule que le cours d'une action S_t , et de sa volatilité V_t suivant la dynamique suivante [9].

$$D) \begin{cases} dS(t) = \mu_t S(t) dt + \sqrt{V(t)} S(t) dW_t^1 \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t)) dt + \eta \sqrt{V(t)} dW_t^2 \\ \langle dW_t^2, dW_t^1 \rangle = \rho dt \end{cases}$$

Avec

- κ : vitesse de retour à la moyenne. Il est toujours positif.
- θ : moyenne à long terme de la variance $V(t)$.
- η : la volatilité de la variance $V(t)$.
- ρ : le coefficient de corrélation entre mouvement Brownien du prix S_t et celui de la variance v_t .

- $V(0)$ et $S(0)$ sont les valeurs initiales positives de la variance et du prix du sous-jacent. La volatilité est strictement positive quand $2\kappa\theta \geq \eta^2$ et $0 \leq 2\kappa\theta \leq \eta^2$. dW_t^1 et dW_t^2 sont des mouvements Browniens.

De tous les modèles de dynamique d'un actif risqué, le modèle de Heston est sans doute celui qui a gagné en popularité dans le marché. Cet attrait tient entre autres de sa robustesse et de :

- L'existence d'une forme semi-analytique pour le prix des options, facilitant ainsi la calibration du modèle.
- La correspondance entre la forme de la volatilité implicite et celui du marché.
- l'effet de levier.

Le fait que le coefficient de corrélation $\rho \neq 0$ rend ce modèle très intéressant sur la plan pratique pour la génération des smiles et skew de la volatilité (modèle qui cadre avec la réalité sur le marché). Une corrélation positive implique que le prix bouge dans le même sens et en même temps que la volatilité alors qu'une corrélation négative est généralement interprétée en terme d'effet de levier : En effet, des données empiriques montrent qu'une grande chute des prix des options est associée à une hausse de la volatilité. [9]

2.7.2 Calcul du Delta

[9] Le Delta d'une option mesure la sensibilité de ce dernier par rapport au prix du sous-jacent. Un portefeuille sera dit Delta neutre si elle est couverte de façon optimale contre les variations du prix, cela consiste à prendre des positions sur des proportions de sous-jacent. Sous le modèle de Heston, on montre que l'expression de Δ est donnée par

$$\Delta_p = \frac{dP}{dS} = -1 + P_1 + S \cdot \frac{dP_1}{dS} - Ne^{-rt} \cdot \frac{dP_2}{dS}. \quad (2.8)$$

Où $\frac{dP_j}{dS} = \frac{dP_j}{dx} \cdot \frac{dx}{dS}$, et en sachant que

$$\frac{dP_j}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}[e^{-i\varphi y} f_j(x, v, \tau, \varphi)] d\varphi = P_j \quad (2.9)$$

Avec

$$\frac{dx}{dS} = \frac{1}{S}$$

On obtient

$$\frac{dP_j}{dS} = \frac{1}{A} \cdot P_j \quad (2.10)$$

Nous concluons que

$$\Delta_P = -1 + P_1 + P_1 - \frac{N}{S} e^{-r\tau} \cdot P_2 \quad (2.11)$$

2.7.3 Calcul de vega

[9] Le véga mesure la sensibilité d'une option par rapport à la volatilité. Ainsi une option est dite Véga-neutre si elle est moins sensible aux variations de la volatilités des prix. Dans la pratique, on utilise les dérivées de volatilités (options sur VIX) ou des instruments comme les options Straddle pour rendre le portefeuille véga-neutre. Le véga de l'option est donnée par

$$\Lambda_p = A \cdot \frac{dP_1}{dv} - N e^{-r\tau} \cdot \frac{dP_2}{dv} \quad (2.12)$$

Avec

$$\frac{dP_j}{dV} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-i\varphi y} D_j f_j(x, v, \tau, \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi \quad (2.13)$$

Definitions of Greek Letters	Formulae for H-S-V Model	Formulae for B-S-M Model
$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_1}{i\phi} \right] d\phi$	$N(d_1)$
$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$	$\frac{1}{\pi S_0} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi \ln K} f_1 \right] d\phi$	$\frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma_{bsm} \sqrt{\tau}}$
$\rho = \frac{\partial C}{\partial \tau}$	$K\tau e^{-r\tau} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_2}{i\phi} \right] d\phi \right]$	$Ke^{-r\tau} N(d_2)$
$\vartheta = \frac{\partial C}{\partial v}$	$2\sqrt{v_0} \left[\frac{S_0}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_1 D_1}{i\phi} \right] d\phi \right]$ $-2\sqrt{v_0} \left[\frac{Ke^{-r\tau}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_2 D_2}{i\phi} \right] d\phi \right]$	$S_0 \sqrt{\tau} N'(d_1)$

FIG. 2.1 – Greek en B-S-M et H-S-V modèles des option de Call Européenne

2.8 Méthodes numériques

Etant donné qu'il n'existe aucune forme analytique connue pour l'évaluation de cet instrument et des "greeks" y afférents, nous présentons dans cette partie une approche numérique de son implémentation.

2.8.1 Simulation des formes semi-analytiques

L'implémentation de la forme semi-analytique des équations de Heston concerne principalement les fonctions caractéristiques de l'équation (2.1) et particulièrement l'intégrant (2.2). Les approches suivantes sont généralement utilisées :

Transformée de Fourier

Des auteurs comme Carr et Madan Carr [6], Lewis [19] et Lipton [20] ont développé une approche de résolution de l'intégrand (2.3) basée sur la transformée de Fourier. L'avantage d'une telle méthode tient de la rapidité des algorithmes de FFT (fast fourier transform). Cependant, des problèmes relativement compliqués peuvent apparaître sur l'implémentation des probabilités de densité de fonctions (pdf) issus des fonctions cumulatives.

2.8.2 L'approche d'évaluation complète

Cette approche est une simulation Monte Carlo. Un grand nombre de trajectoires du prix de l'action est généré durant la vie de l'option selon le processus stochastique de S_t . Pour chaque trajectoire de prix, la valeur terminale de l'option est actualisée au taux sûr jusqu'au temps zéro. Ceci donne le prix de l'option pour une trajectoire. Ce processus est répété plusieurs fois et le prix de l'option sera évalué comme la moyenne des prix de l'option actualisés sur chaque trajectoire. [12]

2.8.3 L'approche de résolution analytique

Cette méthode est plus rapide que la précédente puisque l'on n'a pas à générer des trajectoires de prix. Cependant elle est plus difficile à implanter car elle requiert l'évaluation d'intégrales complexes lors du calcul des probabilités risque neutres $P1$ et $P2$. Cette approche requiert de connaître le prix spot S_t de l'action, le prix d'exercice K , le temps jusqu'à échéance $\tau = T - t$, et le taux sans risque r . Elle requiert également d'estimer les paramètres du processus tels que la variance à long terme θ , la variance courante v_t , le prix du risque de la volatilité λ , le paramètre de retour

à la moyenne κ , la volatilité de la variance σ , et le facteur de corrélation ρ entre le processus décrivant le prix de l'action et celui de sa volatilité [12].

Dans ce cas, la faiblesse du modèle de Heston (1993) provient de la nécessité d'une intégration numérique et les prix de l'option seront très sensibles à la dimension de l'intervalle d'intégration.

2.8.4 Evaluation de l'option sur Straddle

En rappel, la structure de l'option sur Straddle nécessite au moins deux étapes

✓ Période T_0-T_1

On achète l'option de maturité T et de strike K_{STO} sur un straddle 'Forward At the money' dont le prix d'exercice ne sera connu qu'à T_1

✓ Période $T_1 - T_2$.

On reçoit en T_1 le straddle 'At-the Money Forward' (ATMF Straddle) i.e le prix d'exercice est $K_{Str} = (S(T_1)e^{r(T_2-T_1)})$. La fonction payoff à T_2 est donc $(S(T_2) - K_{Str})_+$.

L'évaluation de l'option sur ATMF Straddle peut s'effectuer avec le schéma numérique de Euler cidessus mentionné[9].

2.9 Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'évaluation des options sous volatilité stochastique, plus précisément, nous avons présenté quelques modèles sous la volatilité stochastique, quelques méthodes numériques pour la simulation. Nous nous intéressons sur le modèle de Heston qui est plus fort que le modèle de Black Scholes.

CHAPITRE 3

CARACTERISTIQUES DU MODELE DE HESTON

Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons introduit le modèle de Heston comme instrument pour couvrir la variation de la volatilité. Etant donné qu'il n'existe aucune forme analytique connue pour l'évaluation de cet instrument et des "greeks" y afférents, nous présentons dans ce chapitre une approche numérique de son implémentation.

3.1 Formule du modèle (Gamma de Heston)

Le Gamma a pour objet de mesurer l'évolution du Delta aux variations de la valeur de l'actif sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer plus

ou moins vite que le prix du sous jacent :

$$\Gamma = \frac{1}{\pi S_0} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_1(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi \quad (3.1)$$

Avec la fonction caractéristique f_1 est :

$$f_1(\phi; x, v) = E[e^{-i\phi x \tau}] = \exp(C_1(\tau, \phi) + D_1(\tau, \phi)v + i\phi x) \quad (3.2)$$

Où :

$$g_1 = \frac{b_1 - \rho\sigma i\phi + d_1}{b_1 - \rho\sigma i\phi - d_1} \quad (3.3)$$

$$d_1 = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_1)^2 - \sigma^2(2u_1 i\phi - \phi^2)} \quad (3.4)$$

$$C_1(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_1 - \rho\sigma i\phi + d_1)\tau - 2\ln \left(\frac{1 - g_1 e^{d_1\tau}}{1 - g_1} \right) \right] \quad (3.5)$$

$$D_1(\tau, \phi) = \frac{b_1 - \rho\tau i\phi + d_1}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_1\tau}}{1 - g_1 e^{d_1\tau}} \right) \quad (3.6)$$

Avec $x = \ln S$, $\tau = (T - t)$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\theta$, $a = \kappa\theta$ et $i = \sqrt{-1}$

Albrecher et al. [2] et Agnieszka et al. [1] ont montré que d_j tel que ci-dessus formulé est numériquement stable.

Par conséquent, le modèle de Heston fournit un cadre de modélisation polyvalent qui peut prendre en compte bon nombre des caractéristiques spécifiques généralement observées dans le comportement des actifs financiers. En particulier, le paramètre η contrôle le kurtosis de la distribution de rendement de l'actif sous-jacent, tandis que ρ définit son asymétrie.

Il y a deux façons d'utiliser ce modèle, soit à travers la simulation de Monte Carlo du processus décrivant le prix de l'action, soit à travers une résolution analytique du prix de l'option qui exige l'évaluation d'intégrales complexes. Des expérimentations empiriques ont démontré que le modèle d'Heston tient compte de l'asymétrie (skewness) et du coefficient d'aplatissement (Kurtosis) de la distribution des prix de l'action et ajuste le prix des options en conséquence.

3.2 Coefficient d'asymétrie

Le coefficient d'asymétrie ou le **Skewness** mesure le degré d'asymétrie d'une distribution autour de sa moyenne. Une variable est dite normalement distribuée si le Skewness est très proche de ou égale à 0. Tandis que ce dernier s'écarte plus loin de zéro, une valeur positive indique que la queue de droite de la distribution est plus grosse et elle est serrée vers le haut que le bas et vice versa si la valeur est négative [5].

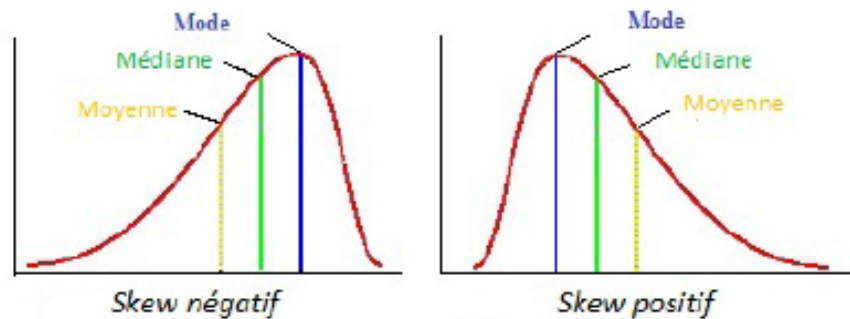


FIG. 3.1 – Distribution d'une loi de probabilité selon le Skewness.

Dans le cas d'un Skewness négatif, la moyenne est inférieure à la médiane qui est inférieure au mode, et inversement dans le cas d'une distribution asymétrique à droite.

Définition [5]

On dit qu'une distribution est **symétrique** autour de sa moyenne, si chaque fois que la distribution centrée associée prend la valeur X avec un effectif n , elle prend également la valeur X avec le même effectif n .

Elle est dite **oblique** dans le cas contraire. Le skewness est mesuré par le moment d'ordre

$$Skew = E \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right]$$

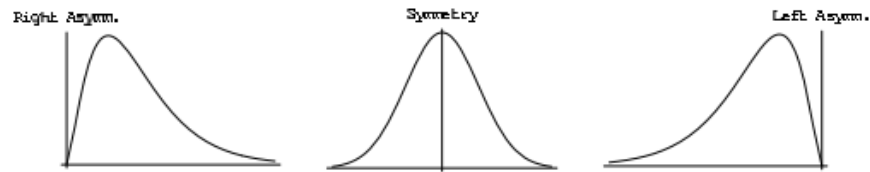


FIG. 3.2 – Asymétrie d'une distribution

3.3 Coefficient d'aplatissement

Le coefficient d'aplatissement (**Kurtosis**) de la distribution d'une variable aléatoire mesure, abstraction faite de la dispersion, la répartition des masses de probabilité autour de leur centre c'est-à-dire, leur concentration à proximité ou à distance du centre de probabilité [5].

Définition [17]

Le **Kurtosis** est défini comme suit

$$Kurto = E \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right]$$

Une distribution est dite **platicurtique** ($Kurto < 3$) (si elle est plus aplatie que la distribution normale et **leptocurtique** ($Kurto > 3$) si elle est moins aplatie que la distribution normale. La distribution normale est dite **mesocurtique** ($Kurto = 3$).

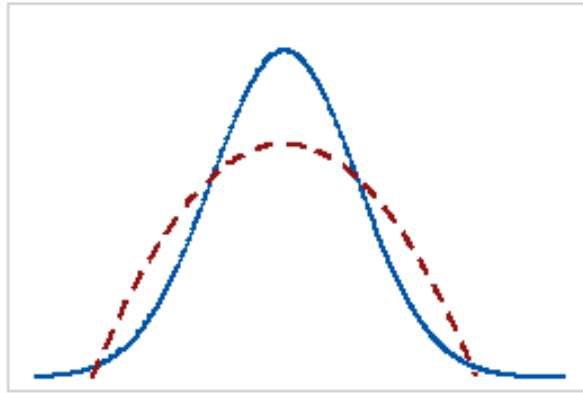


FIG. 3.3 – Une distribution platicurtique

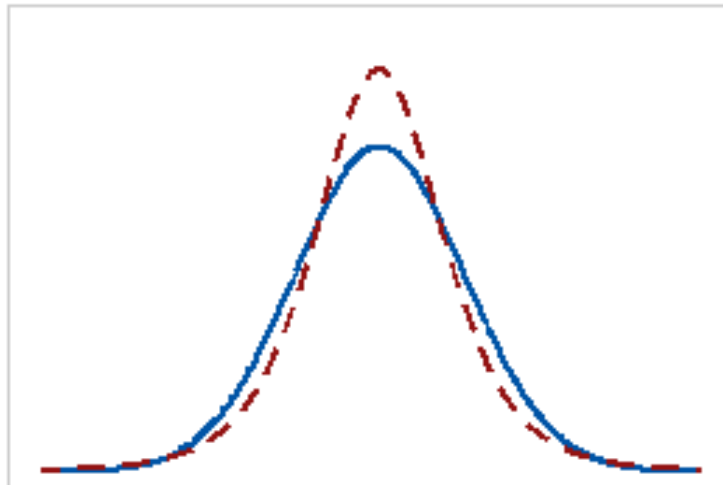


FIG. 3.4 – Une distribution leptocurtique

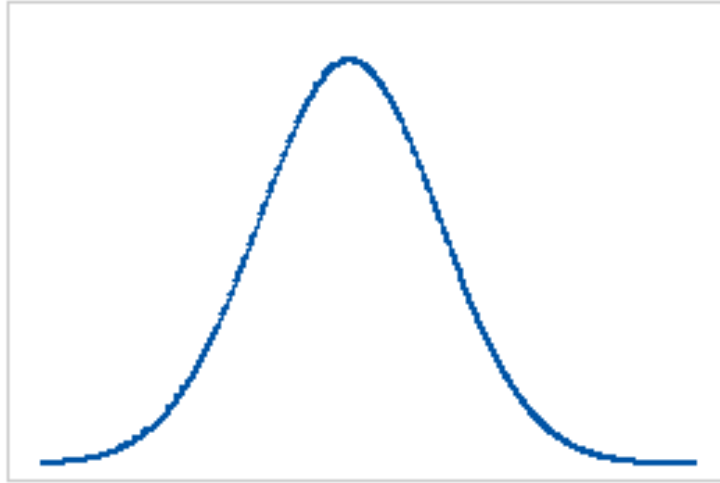


FIG. 3.5 – Une distribution mesocurtique

3.4 Calcul de la moyenne et la variance

La moyenne et la variance de v_t conditionnelle à la valeur de v_s ($t > s$) sont respectivement [27]

$$\begin{cases} m = E[v_t|v_s] = \theta + (v_s - \theta)e^{-\kappa(t-s)} \\ var = Var[v_t|v_s] = \frac{v_s\sigma^2 e^{-\kappa(t-s)}}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 \end{cases}$$

3.5 Simulation

Dans cette sous section, nous partons de la fonction caractéristique de Heston proposé par Gatheral [2006] [11].

3.5.1 Intégration Numérique

La fonction caractéristique utilisée en (2.2) est légèrement différente de celle proposée par Heston. Pour cette dernière, il est vite apparu que les schéma d'intégration classique (Simpson, Trapèze et bien d'autres) entraînaient des instabilités numériques (pour les maturités très courtes) dues à l'oscillation de l'intégrant dans l'inverse de Fourier de l'équation (2.2). Pour contourner la difficulté, les facteurs C_j , D_j de ce travail sont des modèles transformés (simple inversion) du modèle original de Heston. Albrecher et al. [2] Gatheral [11] ont montré qu'une telle transformation est équivalente au modèle de Heston et est suffisante pour résoudre le problème de stabilité par des schéma classiques.

L'implémentation numérique usuelle est le programme sous l'environnement Matlab qui se résume à réévaluer le prix d'une option suite à une perturbation sur des variables prix $S(t)$ ou volatilité $V(t)$, pour une option f .

Programme pour calculer l'intégrale par la méthode de Trapèze

Algorithm 1 Calcul l'intégrale par la méthode de Trapèze

```

function [int]=trapez(I,f)
a=I(1);
b=I(2);
n=100;
x0=a;
xn=b;
h=(b-a)/n;
s=0;
for j=1 :n-1 do
    xi=x0+(j*h);
    s=s+(f(xi));
end for
int=h/2*(f(x0)+f(xn))+h*s;
int

```

Simulation de la distribution de densité de probabilité du cours de l'action avec le modèle de Heston

Programme pour calculer le S_t et V_t

Algorithm 2 Calcul le S_t et V_t

```
S0 = 100 ;
V0 = 0.01 ;
mu = 0 ;
kappa = 100 ;
theta = 0.01 ;
sigma = 0.1 ;
delT = 0.1 ;
rho = 0 ;
times = 100 ;
random1=randn(1,times) ;
random2=randn(1,times) ;
S=zeros(1,times) ;
V=zeros(1,times) ;
V=V0+kappa*(theta-V0)*delT+sigma*sqrt(V0)*random1*sqrt(delT) ;
V=abs(V) ;
S = S0 + mu * S0 * delT + S0 * V.0.5 * (rho * random1 + sqrt(1 - rho2) * random2) *
sqrt(delT) ;
figure ; plot(S)
figure ; plot(V)
```

Les figures (3.6) et (3.7) illustrent comment utiliser ces fonctions pour valoriser une option d'appel où $S_0 = 100$, $V_0 = 0.01$, $\mu = 0$, $\kappa = 100$, $\theta = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $\Delta T = 0.1$, $\rho = 0$

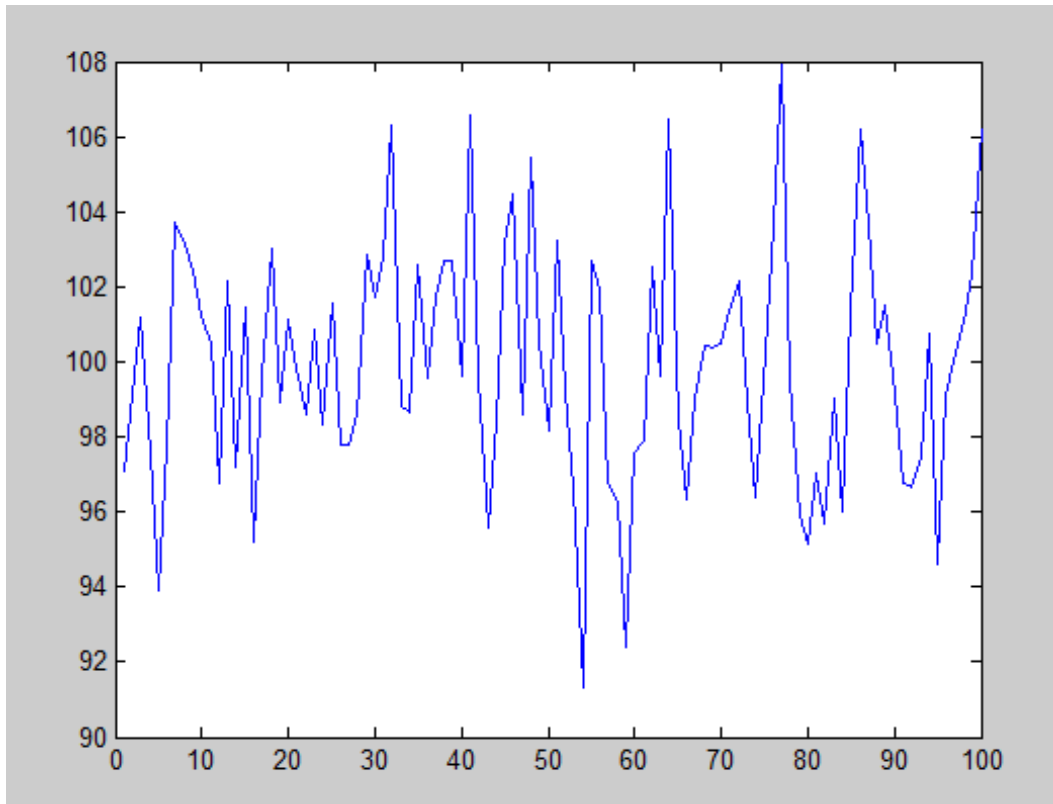


FIG. 3.6 – la distribution de S_t

T	20	60	70	80	100
S_t	100	98	99	98	106

FIG. 3.7 – Le prix sous jacent S_t en fonction de la date d'échéance T

On obtient, sur la figure (3.6) un graphe de sous jacent $S(t)$, dans le modèle de Heston (la vol de vol). On note que le prix du produit est très sensible dans ce modèle à la volatilité de la volatilité (vol de vol). La vol de vol prend une part très importante du prix dans ce modele .

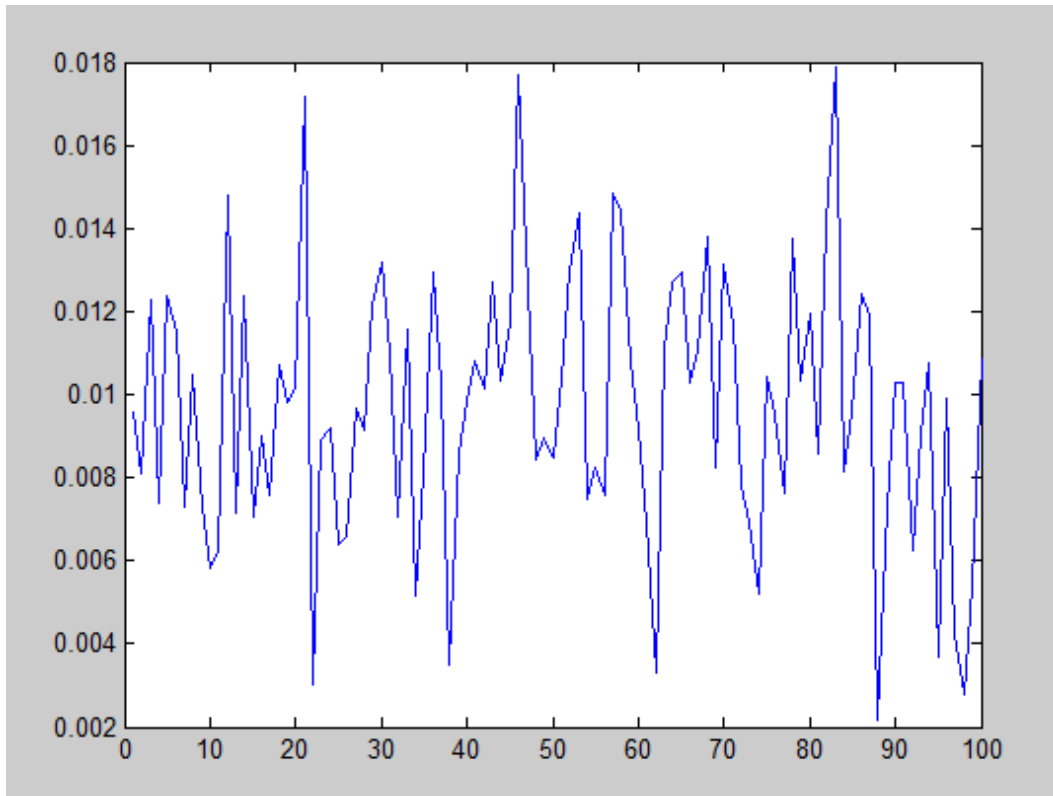


FIG. 3.8 – la distribution de V_t

T	10	30	60	90	100
V_t	0.006	0.01	0.008	0.01	0.012

FIG. 3.9 – La volatilité V_t en fonction de la date d'échéance T

D'après la figure (3.7) de la distribution de $v(t)$ on obtient que la volatilité stochastique du modèle de Heston est très sensible, et on remarque que dans un temps ($t = 100$) elle est toujours positive et elle tente sa valeur maximale 0.018 et sa valeur minimale 0.002

Les figures (3.10) (3.11) pour 1000 itérations

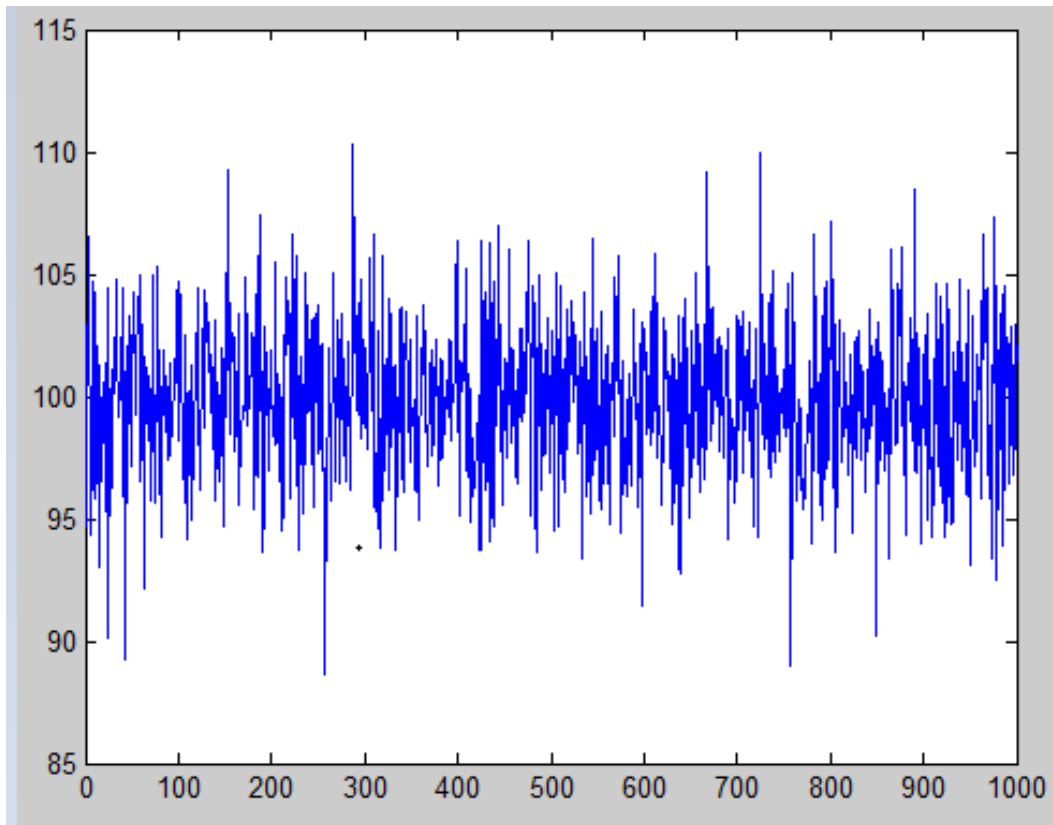
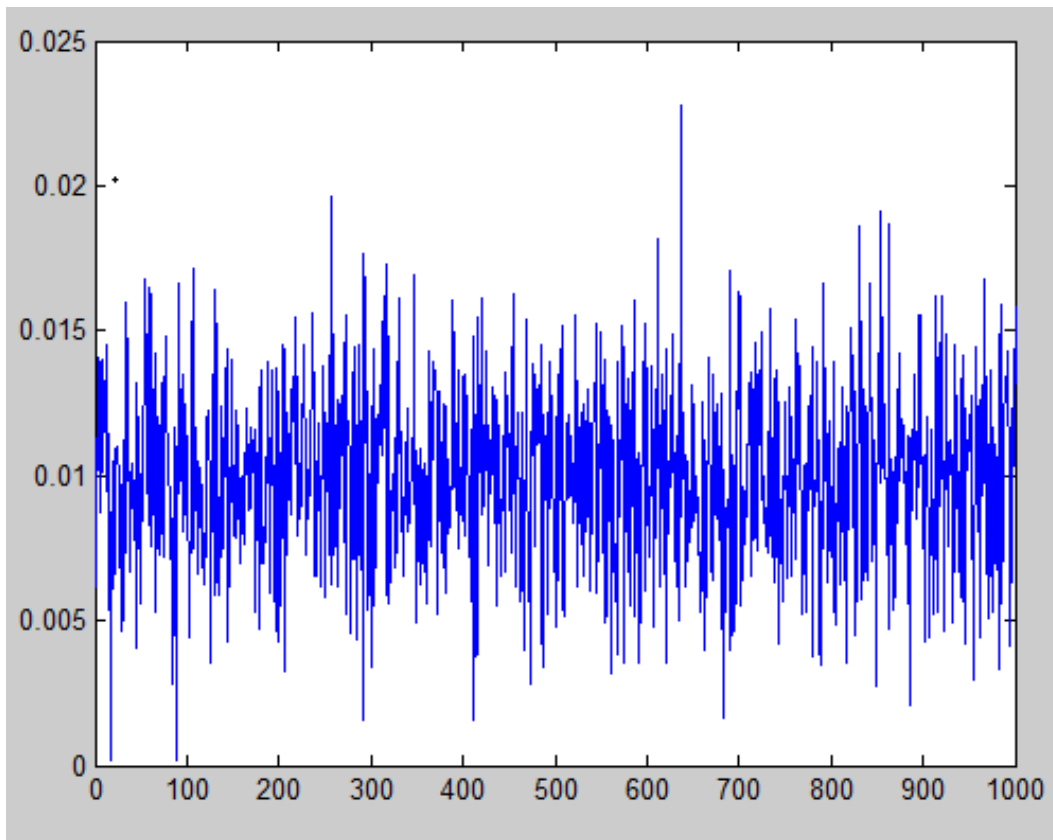


FIG. 3.10 – la distribution de S_t

FIG. 3.11 – la distribution de V_t

Programme pour calculer Gamma et la moyenne, la variance, kurtosis, skewness

Algorithm 3 Calcul de Gamma et la moyenne, la variance, kurtosis, skewness

```
S0 = 10;  
v0 = 100;  
K = 10;  
r = 0.25;  
kappa = 2;  
theta = 2;  
lambda = 1;  
sigma = 2;  
rho = 0 : 0.25 : 1; n = length(rho);  
t = 1;  
T = 1;  
tau = T - t;  
symsphi;  
i = sqrt(-1);  
x = log(S0);  
u1 = 0.5;  
G = zeros(1, n);  
I = [0 1];
```

Algorithm 4 Calcul de Gamma et la moyenne, la variance, kurtosis, skewness

```

for  $p = 1 : n$  do
     $b1 = kappa + lambda - (rho(p) * sigma);$ 
     $d1 = sqrt((rho(p) * sigma * i * phi - b1)^2 - sigma^2 * (2 * u1 * i * phi - phi^2));$ 
     $g1 = (b1 - rho(p) * sigma * i * phi + d1) / (b1 - rho(p) * sigma * i * phi - d1);$ 
     $C1 = r * phi * i * tau + kappa * theta / sigma^2 * ((b1 - rho(p) * sigma * i * phi +$ 
     $d1) * tau - 2 * log(1 - g1 * exp(d1 * tau) / (1 - g1)));$ 
     $D1 = ((b1 - rho(p) * sigma * i * phi + d1) / sigma^2) * ((1 - exp(d1 * tau)) / (1 -$ 
     $g1 * exp(d1 * tau)));$ 
     $f1 = exp(C1 + D1 * v0 + i * phi * x);$ 
     $f = exp(-i * phi * log(K)) * f1;$ 
     $f = inline(f);$ 
     $G(p) = (1 / (pi * S0)) * real(trapez(I, f))$ 
end for

 $m = theta + (v0 - theta) * exp(-kappa * (t - S0))$ 
 $var = ((v0 * sigma^2 * exp(-kappa * (t - S0)) / kappa) * (1 - (exp(-kappa * (t -$ 
 $S0)))) + (theta * sigma^2) / (2 * K) * (1 - (exp(-kappa * (t - S0))))^2$ 
for  $p = 1 : n$  do
     $skew(p) = mean((G(p) - m) / var.^3)$ 
     $kurto(p) = mean((G(p) - m) / var.^4)$ 
end for

```

Remarque

D'après notre travail sur le programme qui permet de calculer la fonction **Gamma** (Γ) On trouve qu'il y a une contradiction sur les résultats , notamment que le prix soit toujours positive

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à le modèle de Heston et ses caractéristique après on fait des programmes numériques sur **Matlab** pour calculer l'integral de la fonction **Gamma**, et on a calculer le prix de sous jacent S_t et la volatilité V_t et aussi on a calculé le coefficient d'aplaticement et le coefficient d'asymétrie.

Notre analyse a montré que la volatilité est le paramètre le plus influant sur le prix d'une option.

Conclusion Générale

En conclusion, nous avons essayé de valoriser et de couvrir les options Européenne à l'aide de modèle de Heston, qui était créé en 1993, et qui conduit à des formules aujourd'hui couramment utilisée par les praticiens. Nous étions intéressés au début par le rappel du calcul stochastique. Ensuite, nous avons introduit quelques concepts et terminologies en mathématiques financières. Enfin, nous avons introduit le modèle Heston et l'avons utilisé pour résoudre le problème de l'évaluation des options sous volatilité stochastique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Agnieszka Jank, Tuno Kluge, Rafael Weron, and Uwe Wystup. FX smile in the Heston model, volume 2, 2011.
- [2] Albercher Hansjorg, Philipp Mayer, Wim Schoutens, and Jurgen Tistaert. The little Heston trap. Working Paper, 2006.
- [3] Ball, Clifford A. and Antonio Roma. "Stochastic Volatility Option Pricing" Journal of Financial and Quantitative Analysis 29 (December) :589-607, 1994.
- [4] Binck.FR, Comprendre La Bourse, Les options.
- [5] Brad S.C. Interpretation of the Kurtosis Statistic. Journal of Taylor et Francis, Vol.24, pp. 19-22, 1970.
- [6] Carr P. and Madan D. Option valuation using the fast Fourier transform. Journal of Computational Finance, page 61, 1999.
- [7] El Karoui N. Couverture des risques dans les marchés financiers. Palaiseau, 2003.

-
- [8] El Karoui N. et E. Gobet. Les outils stochastiques des marchés financiers : une visite guidée de Einstein a Black-Scholes. Ecole Polytechnique, 2011.
- [9] Emmanuel Penka Fowé, Couverture D'une Option Sous Volatilité Stochastique Et Coûts De Transactions, université laval canada, 2016.
- [10] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., Sircar, R., Mean-Reverting Stochastic Volatility, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Volume 3, Issue1, pp. 101-142, 2000.
- [11] Gatheral, J. The Volatility Surface : A Practitioner's Guide. Hoboken, NJ : John Wiley et Sons, (2006).
- [12] Georges Azzi, Le Modèle De Heston Et L'Estimation De La Volatilité De L'Indice S et P500, Université Du Québec à Montréal, Mai 2008.
- [13] Heisenberg, W.Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. In Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten ; Springer : Berlin/Heidelberg, Germany ; pp. 478-504, 1985.
- [14] Heston, S. L., A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Review of Financial Studies, Vol.6, No 2, pp. 327-343, (1993).
- [15] Hull J. and White a., The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. Journal of Finance, 42, 281-300, (1987).
- [16] Johnson H. and Shanno D., Option Pricing when the Variance Is Changing. Journal of Finance and Quantitative Analysis 29 (December) :589-607. Journal of Theoretical and Applied Finance, Volume 3, Issue1, pp. 101-142, (2000).
- [17] Kane. K. Méthodes Monte Carlo pour l'évaluation des paramètres de sensibilité des valeurs d'options sur plusieurs actifs sous-jacents. Thèse. Université de Montréal, 2006.

-
- [18] Lamberton D, B.Lapeyer, "Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance", 1997.
- [19] Lewis. A. Option valuation under stochastic volatility : With Mathematica code. Finance Press, 2000.
- [20] Lipton. A. Mathematical methods for foreign exchange. World Scientific, 2001.
- [21] Lord R. and Kahl C. Why the rotation count algorithm works. Tinbergen Institute Discussion Paper, 2006.
- [22] Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, Journal of financial Economics, 1976.
- [23] Mikhailov , S.,Nogel, U :heston's stochastic volatility model : implementation, calibration and some extensions. Wilmott Mag. 74-79, 2003.
- [24] My Ali Rachidi,La gestion des options,Université MOULAY ISMAÏL Meknès, 2010/2011.
- [25] Scott L. O. Option pricing when the variance changes randomly : Theory, estimation and an application. Journal of financial and quantitative analysis Vol. 22 N°4 December 1987.
- [26] Stein E.M.and Stein J.C. Stock price distributions with stochastic volatility : an analytic approach. The review of financial studies Vol.4 number 4 pp727-752, 1991.
- [27] Tahmid Tamrin Suki and A B M Shahadat Hossain,A Comparative Analysis Of The Black-Scholesmerton Model And The Heston Stochastic,Department of Applied Mathematics, University of Dhaka, Dhaka-1000, Bangladesh, 2019.
- [28] Takhedmit.B, Cours, Master en Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, 2019/2020.

- [29] Wiggins J. B., Option Values under Stochastic Volatility : Theory and Empirical Estimates Journal of Financial Economics, 19, 351-372, 1987
- [30] Yuang Yang, Valuing a European option with the Heston model, Rochester Institute of Technology, Rochester New York, May 2013.

Résumé

Dans ce travail, nous présentons quelques modèles de volatilité stochastique couramment utilisé en finance sous le thème de l'évaluation des options sous le modèle de Heston. Ce modèle, notamment utilisé en dérivés actions, est un modèle à volatilité stochastique. Nous montrons comment établir la formule de GREEKS. Nous avons appliqué le programme matlab pour écrire un programme qui résume à réévaluer le prix d'une option suite à une perturbation sur des variables (prix ou volatilité).

Abstract

In this work, we present some stochastic volatility models common used in finance under the theme of option pricing under the Heston model. This model, used in particular in actions derivatives, is a stochastic volatility model. We show how to establish the GREEKS formula. We applied the matlab program to write a program that summarizes a reevaluating the price of an option following a disturbance on variables (price or volatility).