

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.Mira de BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle



## ***MÉMOIRE DE MASTER***

en Mathématiques Appliquées

Spécialité : Mathématiques Financières

***Thème :***

**Analyse de sensibilité dans les modèles de risque**

***Présenté par :***

**M<sup>elle</sup> CHERCHOUR Amira**

**Devant le jury composé de**

Présidente	M <sup>me</sup> TAKHEDMIT Baya	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.
Promoteur	M <sup>r</sup> SOUFIT Massinissa	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.
Co-promoteur	M <sup>r</sup> ABBAS Karim	Professeur	U. A/Mira Bejaia.
Examineur	M <sup>r</sup> OUAZINE Sofiane	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.
Examinatrice	M <sup>me</sup> BACHI Katia	M.C.B	U. A/Mira Bejaia.

Promotion 2020/2021

# Remerciements

---

*Je remercie, avant tout le bon dieu de m'avoir guidé au chemin de la lumière, du savoir et de la réussite.*

*Je tiens à remercier chaleureusement ma très chère familles pour leur présences, leur motivations, et leurs encouragements.*

*Je tiens à remercier Pr. Abbas Karim pour le grand honneur que j'ai eu à travailler avec lui, pour m'avoir proposé ce sujet et dirigé ce travail. Sans ses conseils, sa disponibilité et ses nombreuses suggestions, ce travail n'aurait jamais abouti.*

*Je tiens à remercier également mon pomorteur Dr. Soufit Massinissa pour l'aide et l'assistance qu'il m'a fournit afin de me permettre de mener à bien et à terme ce mémoire de fin d'études, et qu'il me permis de lui exprimer ma profonde gratitude.*

*Je remercie également les membres de jury de m'avoir fait l'honneur de participer au jugement de mon mémoire.*

*Je tiens tout simplement à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin durant tout mon cursus.*

*Amira.*

# *Dédicaces*

---

*Je dédie ce modeste travail à la femme la plus adorable au monde, à la femme que j'aime ma chère Maman à qui grâce à elle je suis ce que je suis aujourd'hui.*

*A premier homme de ma vie, l'homme que j'aime, mon cher Père qui ma aidé et encouragé.*

*A mes chers frères : Nour elddine, Mouhamed el Amine, et le petit Chihab el dinne et ma adorables soeurs Nour el houda.*

*A tous mes amis (es).*

*Amira.*

# Table des matières

Liste des figures . . . . .	III
Liste des algorithmes . . . . .	1
<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Modèles de risques classiques et la probabilité de ruine</b>	<b>4</b>
Introduction . . . . .	4
1.1 Outils et Préliminaires . . . . .	6
1.1.1 Processus de renouvellement . . . . .	6
1.1.2 Lois de probabilité . . . . .	7
1.1.3 Lien entre processus de poisson et la loi exponentielle : . . . . .	8
1.2 Théorie de ruine . . . . .	8
1.2.1 Modèle de risque . . . . .	9
1.2.2 Modèles de risques classiques : . . . . .	10
1.2.3 Processus de réserve et de surplus : . . . . .	11
1.3 Probabilité de ruine : . . . . .	12
1.3.1 Probabilité et survie de ruine à l'horizon fini et infini : . . . . .	12
1.3.2 Probabilité de non ruine (survie) au temps fini et infini : . . . . .	13
1.3.3 Approximations de Cramèr Lundberg des modèles de risques . . . . .	13
1.3.4 Formule de Pollaczek-Khinchine . . . . .	16
1.3.5 Autres approches . . . . .	19
Conclusion . . . . .	19
<b>2 Analyse de sensibilité et dérivation numérique</b>	<b>20</b>
Introduction . . . . .	20
2.1 Analyse d'incertitude . . . . .	22
2.1.1 Types d'incertitudes . . . . .	22
2.2 Propagation d'incertitudes . . . . .	23
2.2.1 Incertitude aléatoire . . . . .	23
2.2.2 Incertitude épistémique . . . . .	23
2.2.3 Principales étapes d'analyse d'incertitude . . . . .	23
2.2.4 Objectif d'analyse d'incertitude . . . . .	24

---

2.3	Analyse de sensibilité . . . . .	25
2.3.1	Types d'analyse de sensibilité . . . . .	25
2.3.2	Objectif d'analyse de sensibilité . . . . .	25
2.4	Dérivation numérique . . . . .	26
2.4.1	Historique . . . . .	26
2.4.2	Approche à partir de la pente de la tangente [Wagschal 1999] . . . . .	26
2.4.3	Dérivabilité . . . . .	27
	Conclusion . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Analyse de sensibilité d'un modèle de risque avec remboursement exponentielle</b>	<b>31</b>
	Introduction . . . . .	33
3.1	Position du problème . . . . .	33
3.2	Remboursements de loi exponentielle . . . . .	34
3.3	Présentation de la borne . . . . .	35
3.4	Incertitude épistémique dans le modèle du risque classique . . . . .	36
3.4.1	Représentation de la borne . . . . .	36
3.4.2	Perturbation du montant de remboursement des sinistres $\mu$ . . . . .	37
3.4.3	Perturbation des inter-arrivées des sinistres $\lambda$ . . . . .	39
3.5	Autre méthode de dérivée . . . . .	41
3.5.1	Dérivation par rapport au paramètre $\mu$ . . . . .	42
3.5.2	Dérivation par rapport au paramètre $\lambda$ . . . . .	44
	Conclusion . . . . .	45
	<b>Conclusion générale</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>
		<b>51</b>

# Table des figures

1.1	Représentation de la théorie de ruine. . . . .	9
1.2	Représentation de surplus de ruine. . . . .	12
2.1	Représentation d'une dérivée à droite. . . . .	28
2.2	Représentation d'une dérivée à gauche. . . . .	29
2.3	Représentation d'une dérivée centrée. . . . .	30
3.1	Graphe représentatif de la borne. . . . .	37
3.2	Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque $u=10$ . . . .	38
3.3	Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque $u=50$ . . . .	38
3.4	Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque $u=100$ . . . .	39
3.5	Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque $u=10$ . . . .	40
3.6	Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque $u=50$ . . . .	40
3.7	Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque $u=100$ . . . .	41
3.8	Graphe représentatif de la dérivé à droite et à gauche de $\psi(\mu)$ . . . . .	42
3.9	Graphe représentatif de la dérivé à droite et à gauche de $\psi(\mu)$ . . . . .	43
3.10	Graphe représentatif de la dérivé à droite et à gauche de $\psi(\lambda)$ . . . . .	44

# Liste des Algorithmes

1	Algorithme de borne de remboursement . . . . .	36
2	Algorithme de borne de remboursement avec la perturbation de $(\mu)$ . . . . .	37
3	Algorithme de borne de remboursement avec la perturbation de $(\lambda)$ . . . . .	39
4	Algorithme de la dérivée à gauche . . . . .	42
5	Algorithme de la dérivée à droite . . . . .	42
6	Algorithme de la dérivée à gauche . . . . .	44
7	Algorithme de la dérivée à droite . . . . .	44

# Introduction générale

*Si la science était un être vivant, les mathématiques seraient le coeur.*

*"Appolinaire Nsabimana"*

**L**ES sciences actuarielles sont une discipline relativement récente bien que les bases de l'assurance soient quand à elles très anciennes. Les principales théories en actuariat ont été développées en grande partie dans le dernier siècle. De plus, avec l'amélioration de l'informatique, entre autres, on remarque une progression rapide dans un grand nombre de domaines en actuariat. Un de ces domaines est la théorie de la ruine ou la complexité mathématique est souvent un facteur limitant les chercheurs. Cependant, en utilisant des ordinateurs pour des approximations numériques ou encore des simulations, du progrès est encore fait continuellement dans ce domaine.

Les actuaires avaient pris conscience de l'existence et l'importance des fluctuations aléatoires peuvent mettre en danger la survie des institutions d'assurances. Dans tous les cas, l'assureur doit être en mesure de fournir les prestations auxquelles il s'est engagé. Et, bien qu'ils soient prêt à assumer un certain risque, les propriétaires de compagnies d'assurance, qu'elles soient privées ou publiques, souhaitent naturellement le maintien de bonne santé financière de leur entreprise. La plupart des moyens techniques dont disposant les assureurs pour faire face aux effets néfastes des fluctuations aléatoires étaient connus : divers types de réassurance, l'inclusion de marge de sécurité dans les primes, établissement de provisions de fluctuation. Le bien-fondé de ces diverses mesures ne fut jamais mis en doute, mais le besoin de justification théoriques et de mesures d'efficacité se fit rapidement sentis.

Le risque est un danger éventuel plus ou moins prévisible. C'est l'éventualité d'un événement futur, incertain, pouvant causer la perte d'un objet, ou tout autre dommage [Tsybakov 2009a].

Le modèle de risque est un outil de base pour les actuaires. Il permet de présenter l'évolution de réserve d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique. A l'aide de ce processus, on définit plusieurs mesures du risque, en particulier, la probabilité de ruine qui est une caractéristique très importante mais, qui ne possède malheureusement pas de formules explicites dans la plupart des modèles de risque. De nombreux résultats ont été démontrés dans la

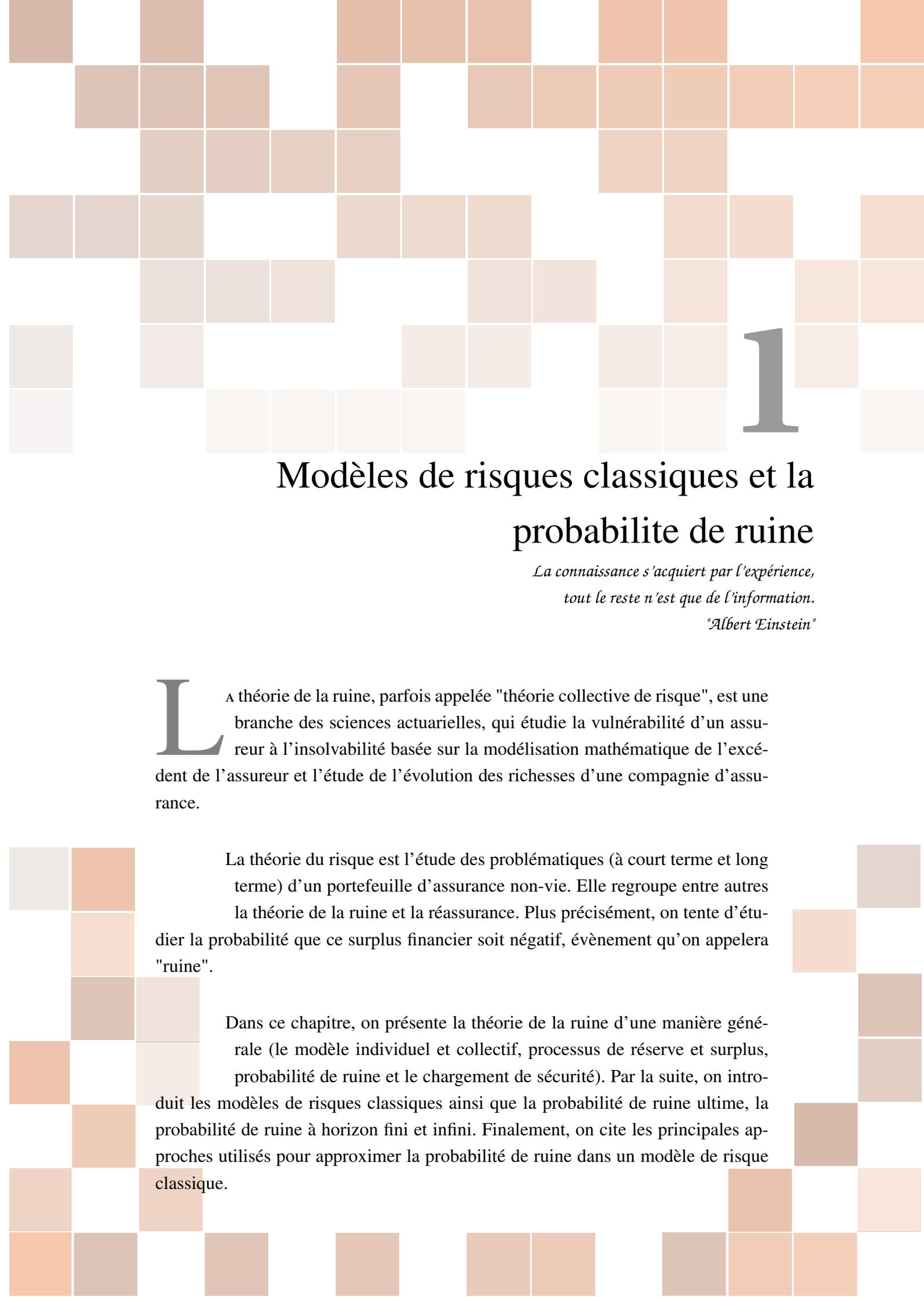
littérature, pour mieux décrire la réalité. Le modèle de risque classique fondé par Filip Lundberg [Malaval 1999] connu comme la base du fondement de la théorie du risque.

Lors de la modélisation des phénomènes réels, tels que les problèmes de l'actuariat, on suppose que les paramètres du modèle sont des constantes, en plus ils sont calculés d'une manière exacte, or que leurs valeurs sont sujets à des erreurs : lacune des données, erreur de mesure, ..., etc. Alors, c'est plus réaliste de prendre en compte cette incertitude paramétrique dans la formulation du problème réel. (Cela permet de rendre le "modèle" plus représentatif du "réel").

Pour analyser un tel système, on fait généralement appel aux différents modèles mathématiques qui servent justement à décrire le comportement de ces dernières. Les incertitudes sur les paramètres qui définissent le modèle sont à l'origine de la non perfection de cette description.

Ce mémoire est subdivisé en trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

- ▷ Dans le premier chapitre, nous décrivons brièvement les principes fondamentaux de la théorie du risque, certaines notions de base sur la probabilité de ruine et certains types de processus stochastiques,
- ▷ Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'analyse de sensibilité et d'incertitude, et ça propagation, qu'une approches fondamentales de l'analyse de risque et nous nous intéressons aussi sur les notions de base de la dérivation numérique,
- ▷ Dans troisième chapitre nous aborderons la partie pratique de notre travail qui s'agit d'une application numérique de ce qui a été présenté lors des deux chapitres théoriques. On effet, nous avons analysé la sensibilité de la sortie (probabilité de ruine) du modèle de risque classique par rapport à ces paramètres d'entrés, à savoir le montant de remboursement  $\mu$  et les inter-arrivées des sinistres  $\lambda$ .



# 1

## Modèles de risques classiques et la probabilité de ruine

*La connaissance s'acquiert par l'expérience,  
tout le reste n'est que de l'information.*

*"Albert Einstein"*

**L**a théorie de la ruine, parfois appelée "théorie collective de risque", est une branche des sciences actuarielles, qui étudie la vulnérabilité d'un assureur à l'insolvabilité basée sur la modélisation mathématique de l'excédent de l'assureur et l'étude de l'évolution des richesses d'une compagnie d'assurance.

La théorie du risque est l'étude des problématiques (à court terme et long terme) d'un portefeuille d'assurance non-vie. Elle regroupe entre autres la théorie de la ruine et la réassurance. Plus précisément, on tente d'étudier la probabilité que ce surplus financier soit négatif, événement qu'on appellera "ruine".

Dans ce chapitre, on présente la théorie de la ruine d'une manière générale (le modèle individuel et collectif, processus de réserve et surplus, probabilité de ruine et le chargement de sécurité). Par la suite, on introduit les modèles de risques classiques ainsi que la probabilité de ruine ultime, la probabilité de ruine à horizon fini et infini. Finalement, on cite les principales approches utilisés pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique.

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1.1 Outils et Préliminaires</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1.1 Processus de renouvellement . . . . .	6
1.1.2 Lois de probabilité . . . . .	7
1.1.3 Lien entre processus de poisson et la loi exponentielle : . . . . .	8
<b>1.2 Théorie de ruine</b> . . . . .	<b>8</b>
1.2.1 Modèle de risque . . . . .	9
1.2.2 Modèles de risques classiques : . . . . .	10
1.2.3 Processus de réserve et de surplus : . . . . .	11
<b>1.3 Probabilité de ruine :</b> . . . . .	<b>12</b>
1.3.1 Probabilité et survie de ruine à l'horizon fini et infini : . . . . .	12
1.3.2 Probabilité de non ruine (survie) au temps fini et infini : . . . . .	13
1.3.3 Approximations de Cramèr Lundberg des modèles de risques . . . . .	13
1.3.4 Formule de Pollaczek-Khinchine . . . . .	16
1.3.5 Autres approches . . . . .	19
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>19</b>

---

## 1.1 Outils et Préliminaires

Pour comprendre bien la notion de probabilité de ruine, il est nécessaire de rappeler certains processus et leur propriétés.

### 1.1.1 Processus de renouvellement

C'est un processus aléatoire constitué de série d'événements pour lesquelles les durées séparent les occurrences sont des variables aléatoires strictement positives indépendantes et de même loi.

#### Processus Stochastiques

Les processus aléatoires décrivent l'évaluation d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc...) en biologie (évolution, génétique et génétiques des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économiques et finances.

**Définition 1.1.1:** [Baynat 2000]

On appelle processus stochastique une famille indexée  $\{X_t; t \in T\}$  de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilités  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  et à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \xi)$ ,  $t \in T$  représente une date. Lorsque  $T \in \mathbb{Z}$ , on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et lorsque  $T$  est un intervalle dans  $\mathbb{R}$ , on parlera de processus à temps continu.

#### Processus Stationnaires

**Définition 1.1.2:** Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in T}$  est dit stationnaire au sens strict si sa loi de probabilité est invariante par translation i.e.,  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  et  $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \dots, X_{t_n+s})$  ont la même loi,  $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n, s \in T$

**Définition 1.1.3:** Un processus stochastique est dit stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si :

1.  $E(X(t)) = m < \infty$ , indépendant de  $t$ .
2.  $\text{Var}(X(t)) = \sigma^2 < \infty$ , indépendant de  $t$ .
3.  $\text{Cov}(X(t), X(s))$  ne dépend que de la différence  $|t - s|$ .

## Processus Poisson

Un processus de Poisson est un processus de comptage d'évènements entre lesquels s'écoulent des durées indépendantes de distribution exponentielle.

**Définition 1.1.4:** Soit  $\{T_i; i \geq 1\}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre  $\mu > 0$ . Notons  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$ .

Le processus de comptage  $\{N_t; t \geq 0\}$  défini par :

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\sigma_n \leq t\}},$$

est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\mu$ .

## Processus de Poisson Composée

**Définition 1.1.5:** Soit  $N$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et  $\{X_i; i \geq 1\}$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de  $N$ .

Le processus  $Z$  défini par  $Z_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  est dit un processus de Poisson composé.

## 1.1.2 Lois de probabilité

### Loi Poisson $P(\lambda)$

Une variable  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  réel, si  $\mathbb{E} = \mathbb{N}$  et :

$$\Pr[X = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Parmi les caractéristiques de cette loi nous avons :  $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ .

Sous certaines hypothèses de nature mathématiques, la loi de Poisson est utilisée pour décrire le nombre d'apparitions d'un certain évènement dans un intervalle de temps fixé ou dans un domaine spatial fixé.

### Loi Exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$

La fonction de densité de probabilité qui correspond à cette loi est la suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition ou fonction de distribution est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

### 1.1.3 Lien entre processus de poisson et la loi exponentielle :

On considère un processus de Poisson  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de taux  $\lambda$ .

Soit  $\tau_i$  le temps de réalisation du  $i^{\text{ème}}$  évènement.

On pose :

$$\begin{cases} T_1 = \tau_1, & \tau_0 = 0 \\ T_2 = \tau_2 - \tau_1 \\ \vdots \\ T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

le temps séparant la réalisation du  $n^{\text{ème}}$  évènement du  $(n - 1)^{\text{ème}}$  évènement.

**Proposition 1.1.6:** [Ross 2014]

Les variables aléatoires  $T_n$  sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

La proposition suivante est une généralisation de la proposition (1.1.6).

**Proposition 1.1.7:** [Ross 1996]

Posons  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ , alors  $S_n$  suit une loi  $\Gamma(n, \lambda)$  ou  $S_n$  est le temps de réalisation du  $n^{\text{ème}}$  évènement.

## 1.2 Théorie de ruine

La théorie de la ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance. La théorie de la ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, d'évaluer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.

Les modèles de ruine sont des modèles dynamiques en général à temps continu qui décrivent l'évolution des réserves d'une compagnie.

Dans le cadre des assurances, le but est de modéliser l'évolution des réserves en fonction de :

- sa réserve initiale,
- des hypothèses faites sur le processus d'arrivée des sinistres et de la distribution des montants.
- des hypothèses sur le processus de rentrée des primes d'assurances.

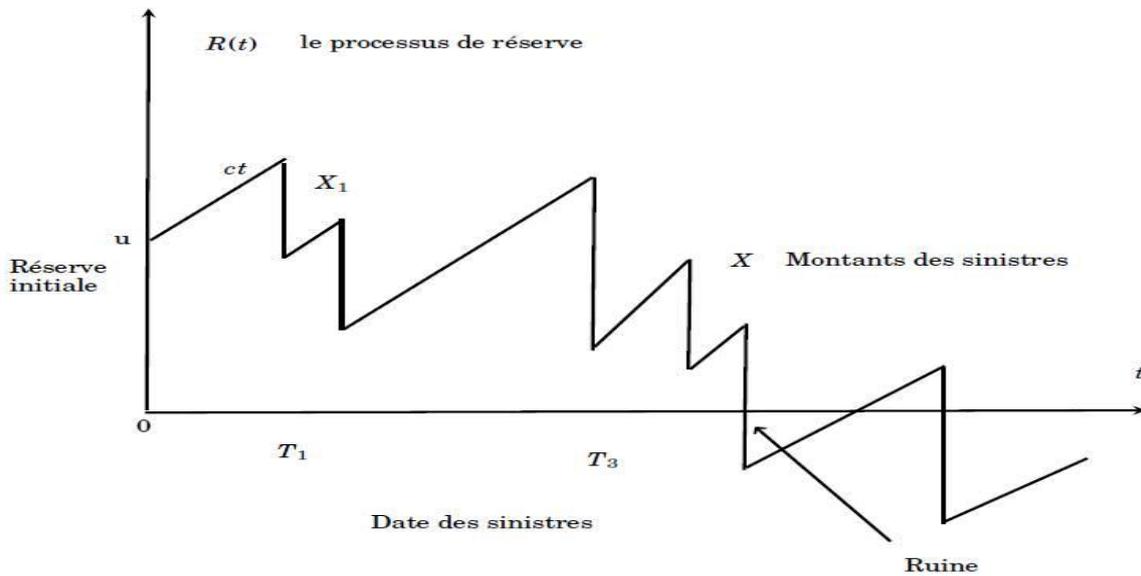


FIGURE 1.1 – Représentation de la théorie de ruine.

### 1.2.1 Modèle de risque

On peut représenter l'évolution de la réserve d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique

#### Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge globale générale par les sinistres individu par individu.

La charge totale pour un portefeuille comprenant  $N$  contrats est définie par :

$$S^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^N X_i,$$

où

- $X_i$  est une variable aléatoire positive qui indique le montant total des sinistres subit par l'assuré  $i$  sur la période d'observation.

Dans ce type de modèle les variables  $X_i$  sont supposées indépendentes mais pas forcément d'une même loi de probabilité.

### Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subie par un portefeuille vue, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre tout assuré, le montant global des pertes est :

$$S^{Col} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

où

- $X_i$  le montant de la  $i^{\text{ème}}$  perte ;
- $N$  Variable aléatoire pour le nombre de pertes.

Les variables aléatoires  $X_i$  supposées de même loi indépendantes, de plus la variable  $N$  indépendante des  $X_i$ .

**Remarque 1.2.1:** On parle du modèle collectif car on associe la même loi de probabilité pour les pertes. Par conséquent, le modèle individuel avec les pertes de même loi de probabilité est un cas particulier du modèle collectif quand  $N$  est une constante :

$$P(N = n) = 1.$$

### 1.2.2 Modèles de risques classiques :

Ce dernier est introduit en 1903 par l'actuaire Suédois Filip Lundberg (cf. Lundberg, F., (1903)) il est la base du fondement de la théorie de la ruine. Il est connue aussi sous le nom du modèle de risque classique ou encore risque Poisson composé. Le processus stochastique régissant l'évolution des réserves financières noté  $\{R_{(t)}, t \geq 0\}$  avec :

$$R_{(t)} = u + ct - Z_{(t)} \quad t \geq 0,$$

où  $Z_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  est le montant cumulé des réclamations à l'instant  $t$ ,

Le processus de risque associé est de la forme

$$S_{(t)} = ct - Z_{(t)}.$$

Les hypothèses selon le modèle est construit sont :

- $u > 0$  est la réserve initiale de la compagnie d'assurance ;
- $c > 0$  est le taux de prime ou (cotisation) reçues continuellement dans le temps ;
- $N(t)$  est un processus de comptage (Poisson) d'intensité  $\lambda$  du nombre de réclamations ;

- $X_i; i \geq 1$ , sont les montants des réclamations, est représentant une suite des variables aléatoire, strictement positives, i.i.d de fonction de répartition  $F_X$ , de moyenne finie  $\mu$ , et indépendantes de  $N_t$ .

### Modèle de Lundberg P/P

Le modèle de risque classique avait un cas particulier qui s'appelle modèle de Lundberg P/P. Il se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations :

$$F_Z(y) = 1 - \exp\left\{\frac{-y}{\mu}\right\}.$$

ou  $F_Z$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z$  qui génère les montants des réclamations.

### 1.2.3 Processus de réserve et de surplus :

On peut définir le surplus financier d'une compagnie d'assurance comme le montant d'argent qu'elle possède pour payer les réclamations de ses clients. Ces derniers paient des primes d'assurance qui sont ajoutées au surplus de l'assureur, et qui sont la seule source de revenus qu'on considère dans les modèles de risque de la forme :

$$R(t) = u + ct - Z(t). \quad (1.1)$$

ou

- $R(t)$  : le processus de risque qui modélise le surplus financier d'une compagnie d'assurance ;
- $u$  : le surplus (capital) initial ;
- $c$  : le taux auquel sont reçues les primes par unité de temps (taux de cotisation) ;
- $Z(t)$  : le processus de pertes agrégés.

Le choix de  $Z(t)$  détermine le processus  $R(t)$ . Lorsque  $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ , ou  $N(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées,  $i = 1, 2, \dots, N(t)$ , on est en présence du modèle classique, exhaustivement étudié dans la littérature. Le lecteur intéressé peut se référer à [De Vylder 1996, HÖssjeri 1994, Kyprianou 2006] ou encore à [Panjer 1981].

Le modèle de surplus prend alors la forme suivante :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

On définit également le processus de surplus  $S(t)$ ,  $t \geq 0$

$$S(t) = ct - R(t), t \geq 0$$

$$S(t) = u - X(t)$$

Ce modèle a été étudié en détail dans plusieurs ouvrages de références [Cramér 1930, Grandell 1991] et récemment dans [Teugels 1982]. Un des premiers résultats historiques sur la probabilité de ruine concerne le cas où les montants de remboursements  $X_i$  suivent une loi exponentielle [Dufresne 1988].

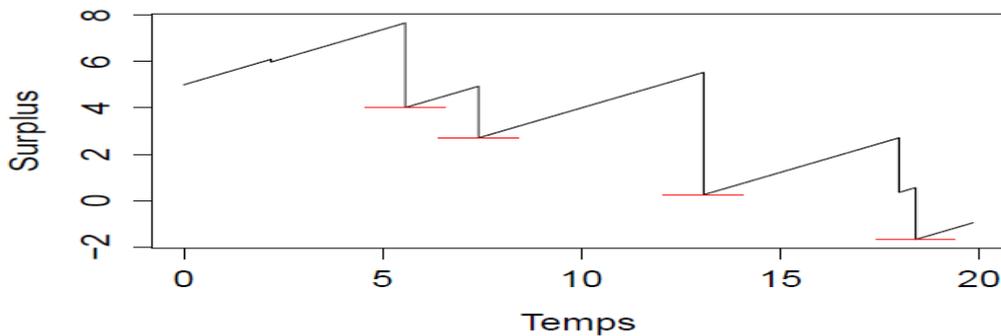


FIGURE 1.2 – Représentation de surplus de ruine.

### 1.3 Probabilité de ruine :

**Définition 1.3.1:** "Probabilité de ruine"

La probabilité de ruine noté  $\Psi(u)$  pour le modèle de risque classique, avec  $X(0) = u$  est :

$$\Psi(u) = P\left(\inf_t X_t < 0 : X_0 = u\right).$$

**Définition 1.3.2:** "Instant de ruine"

Considérons la variable aléatoire  $\tau$  définie par :

$$\tau(u) = \inf_{t \geq 0} \{X(t) < 0 / X(0) = u\}.$$

$\tau$  représente l'instant où le processus de réserve devient négatif, sachant que la réserve initiale est  $u$ .

Autrement dit,  $\tau$  est l'instant de ruine du portefeuille d'assurance.

#### 1.3.1 Probabilité et survie de ruine à l'horizon fini et infini :

##### Probabilité et survie de ruine à horizon fini :

Soit  $\{R(t) : t \geq 0\}$  un processus de surplus qui définit précédemment, dénotant par  $\Psi_T(u)$  la probabilité de ruine à horizon fini, pour un surplus initial  $R(0) = u$ , alors

$$\Psi_T(u) = P\{\tau < T / R(0) = u\}.$$

De plus, il est clair que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Psi_T(u) = \Psi(u). \quad (1.2)$$

La probabilité  $\Psi_T(u)$  est beaucoup plus facile à simuler que  $\Psi(u)$ . De plus, grâce à la limite obtenue par la formule (1.2), on peut approcher  $\Psi(u)$  par  $\Psi_T(u)$ , qui est la probabilité que la ruine survienne à l'intérieur de l'intervalle de temps  $[0, T]$  lorsqu'il n'existe pas d'expression analytique exacte pour exprimer  $\Psi(u)$ .

Cette probabilité a donc deux utilités remarquables : Elle est facile à calculer, cela nous offre une alternative aux obstacles posés par la simulation de  $\Psi(u)$ , elle a un aspect plus pratique.

### Probabilité de ruine à horizon infini :

On note que cette probabilité est définie pour un horizon de temps infini.

$$\Psi(u) = P\{\tau < \infty / R(0) = u\}.$$

### 1.3.2 Probabilité de non ruine (survie) au temps fini et infini :

**Définition 1.3.3:** "Probabilité de survie"

La probabilité de survie ou de non ruine, notée  $\phi$ , est définie par :

*En temps fini :*

$$\phi(u, T) = 1 - \Psi(u, T).$$

*En temps infini :*

$$\phi(u) = 1 - \Psi(u).$$

### 1.3.3 Approximations de Cramèr Lundberg des modèles de risques

Soit  $\Psi(u)$ , avec  $u \geq 0$ , la probabilité de ruine du modèle défini en (1.1). Afin d'éviter une ruine certaine, on suppose que le chargement de sécurité relatif  $\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}$  est strictement positif.

On note  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ , ou  $F$  est la fonction de distribution des montants des réclamations.

En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine qui vérifie l'équation intégrale suivante [Gerber 1979] :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Psi(u - y) \bar{F}(y) dy.$$

En général, il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur l'approximation des probabilités de ruine ont été réalisés par Cramèr-Lundberg dès 1930 .

La condition Cramèr-Lundberg stimule l'existence d'une constante  $k > 0$  satisfaisant l'équation suivante de Lundberg :

$$\int_0^{\infty} e^{kx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}.$$

Qui est équivalente à :

$$\int_0^{\infty} e^{kx} dG(x) = 1 + \rho, \quad (1.3)$$

ou  $G(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{ky} \bar{F}(y) dy$  est la distribution équilibrée de F.

Supposons que l'équation de Polazeck-Khinchene est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est donnée comme suite :

Si  $\int_0^{\infty} e^{kx} dG(x) < \infty$ , alors,

$$\Psi(u) \sim \frac{\rho u}{k \int_0^{\infty} y e^{ky} \bar{F}(y) dy} e^{-ku} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty,$$

$$\text{avec } a(x) \sim b(x) \text{ quand } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$

Si  $\int_0^{\infty} e^{kx} dG(x) = \infty$ , alors,

$$\Psi(u) = o(e^{-ku}) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

Ainsi, on a l'inégalité de Lundberg donnée par :

$$\Psi(u) \leq e^{-ku}, \quad u \geq 0.$$

### Approximations de Cramèr-Lundberg dans le modèle P/P

La distribution des montants de réclamations dans le modèle de Lundberg est exponentielle, d'où :

$$\bar{F}(x) = \exp\left\{\frac{-x}{\mu}\right\} \quad x \geq 0,$$

on aura la formule de la probabilité de ruine :

$$\Psi(u) = \frac{1}{1 + \varrho} \exp \left\{ -\frac{\varrho u}{\mu(1 + \varrho)} \right\} \quad u \geq 0.$$

### La borne de lundberg :

Pour garantir que la probabilité de ruine  $\psi(u)$  est à horizon infini [Silverman 1986] il faut que  $\varrho > 0$  existe, est bornée par une fonction qui décroît de façon exponentielle en fonction du capital initial  $u$  dans l'ingalité de lundberg.

#### **Théorème 1.3.4:** [Silverman 1986]

Supposons que le coefficient d'ajustement (la charge de sécurité)  $\varrho > 0$  existe, alors :  
 $\forall u \geq 0,$

$$a_- \exp\{-\varrho\mu\} \leq \Psi(u) \leq a_+ \exp\{-\varrho\mu\},$$

ou :

$$a_- = \inf_{z \in [0, z_0)} \frac{e^{\varrho z} \int_z^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_z^\infty e^{\varrho y} (1 - F_Z(y)) dy} \quad \text{et} \quad a_+ = \sup_{x \in [0, z_0)} \frac{e^{\varrho x} \int_x^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\varrho y} (1 - F_Z(y)) dy}.$$

### Condition de non ruine :

Considérons la réserve  $R_t$  d'une certaine compagnie d'assurance à l'instant  $t$ , avec le capital initial est  $u$  et les cotisations sont versées par les clients à un taux instantané  $c$ .

$$R_{(t)} = u + ct - Z_{(t)} = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Ainsi, avec le théorème de Wald [Grimmett 2004], nous permet d'obtenir :

$$E(R_{(t)}) = u + ct - \lambda\mu t,$$

avec  $\mu$  étant le taux de remboursement.

Une condition qu'il est naturel d'imposer que l'espérance de la fortune d'une compagnie d'assurance soit toujours positive, soit  $c \geq \lambda\mu$ .

Remarquons que la ruine peut se produire nécessairement à l'occasion d'un sinistre, c'est-à-dire à l'une des dates  $T_n$ .

On à donc :

$$\Psi(u) = P \{ \exists t \geq 0 / R(t) < 0 \} = P \{ \exists n \geq 0 / R_{(T_n)} < 0 \}.$$

Or, on a :

$$R_{(T_n)} = u + cT_n - Z_{(T_n)} = u - \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i).$$

D'ou :

$$\Psi(u) = P \left\{ \exists n \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) > \mu \right\} = 1 - P \left\{ \max_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) \leq \mu \right\}.$$

Par la loi des grands nombres, on sait que  $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i)}{n}$  converge presque sûrement vers

$$(X_1 - c\tau_1) = \mu - (c/\lambda).$$

**Proposition 1.3.5:** (cf. Asmussen, S., (2000))[[Asmussen 1984](#)]

- Si  $(\theta > 0)$  cela garantit, d'après la loi forte des grands nombres, que le processus de réserve tend presque sûrement vers  $+\infty$  et que  $\Psi(u) < 1$ .  
La ruine n'est pas presque sûre, L'activité est dite dans ce cas rentable.
- Si  $(\theta < 0)$ , alors  $X(t)$  tend vers  $-\infty$  presque sûrement quand  $t$  tend vers l'infini et par conséquent  $\Psi(u) = 1$ .

La condition de non-ruine est donc :

$$\lambda\mu < c.$$

On peut alors définir la charge de sécurité  $\varrho$  par :

$$\varrho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1,$$

### 1.3.4 Formule de Pollaczek-Khinchine

**Théorème 1.3.6:** [Cai 2002]

 Pour tout  $u > 0$  :

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^i (\overline{F_Z^s})^{*i}(u). \quad (1.4)$$

Où :

$(\overline{F_Z^s})^{*n}(u) = 1 - (F_Z^s)^{*n}(u)$  et  $(F_Z^s)^{*n}(u)$  est la  $n^{\text{ème}}$  convolution de la fonction de distribution complémentaire telle que  $F_Z^s$  est la fonction de répartition de  $X$  définie par :

$$F_Z^s(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z (1 - F_Z^s(y)) dy, z \geq 0.$$

La formule (1.4) est appelée formule de Pollaczek-Khinchine ou encore formule de Beehan.

La représentation en série infinie donnée dans (1.4) est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des approximations numériques de la probabilité de ruine  $\Psi(u)$ , telle que l'algorithme de Panjer [Ken-Iti 1999].

**Formule de Pollaczek-Khinchine dans le modèle P/P**

En utilisant la formule de Pollaczek-Khinchine pour des montants de réclamations de distribution exponentielle et de moyenne  $\mu$ , nous allons déduire l'expression exacte de la probabilité de ruine :

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^i (\overline{F_Z^s})^{*i}(u).$$

Pour des montants de réclamations exponentiels de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ , nous avons :

$$F_Z(u) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{u}{\mu}\right) & u \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

calculons :

$$F_Z^s(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z (1 - F_Z(y)) dy, \quad u \geq 0.$$

$$F_Z^s(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{1}{\mu}\right) \left[e^{-\frac{y}{\mu}}\right]_0^z = 1 - e^{-\frac{z}{\mu}}$$

Ainsi,  $F_Z^s(u) = F_Z(u) \in \mathbb{R}$ ,  $(F_Z^s)^{*n}$  représente la  $n^{\text{ème}}$  convolution de  $(F_Z^s)$ .

Puisque nous avons l'indépendance des  $n$  variables aléatoires  $Z_i, i=1, \dots, n$  de distribution commune  $\text{Exp}\left(\frac{1}{\mu}\right)$  et que  $F_Z^s(u) = F_Z(u)$  alors  $(F_Z^s)^{*n}$  est la fonction de répartition de la somme de  $n$

variables aléatoires  $Z_i, i = \overline{1, n}$ .

Nous utilisons les transformées de Laplace [Schiff 1999] afin de déterminer  $(F_Z^s)^{*n}$ .

$L_{(F_Z)^{*n}}(z) = [L_{(F_Z)}(z)]^n$ , ou encore  $L_{(f_Z)^{*n}}(z) = [L_{(f_Z)}(z)]^n$ , ou  $f_Z$  est la densité de probabilité des montants de réclamations  $Z_i, i = \overline{1, n}$

Ainsi,

$$L_{(f_Z)}(z) = \int_0^{\infty} f_Z(t)e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-(\frac{1}{\mu})t} dt = \frac{1}{1 + \mu z}.$$

D'où

$$L_{(f_Z)^{*n}}(z) = \frac{1}{1 + \mu z}.$$

En utilisant la table des transformées de Laplace [Schiff 1999], nous trouvons que :

$$(f_Z)^{*n}(z) = \frac{\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{(n-1)!}}{(n-1)!} e^{(-1/\mu)x}, x \geq 0$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'Erlang  $(\frac{1}{\mu}, n)$  dont la fonction de répartition est donnée par :

$$(F_Z)^{*n}(z) = (F_Z^s)^{*n}(z) = \frac{\Gamma\left(n, \frac{1}{\mu}z\right)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{\mu}z} \frac{\left(\frac{1}{\mu}z\right)^k}{k!},$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= (1 - \rho) \sum_{i=1}^{n-1} \rho^i e^{(\frac{1}{\mu})u} \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^i u^i}{i!} \\ &= (1 - \rho) e^{(1/\mu)u} \sum_{i=1}^{n-1} \rho^i \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^i u^i}{i!} \\ &= (1 - \rho) e^{(1/\mu)u} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^i u^i}{i!} \frac{\rho^{i+1}}{1 - \rho} \\ &= \rho e^{\left(\frac{-u}{\mu}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left(\frac{\rho u}{\mu}\right)^i}{i!} = \rho e^{\left(\frac{-u}{\mu}\right)} e^{\left(\frac{\rho u}{\mu}\right)} = \rho e^{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\right)u} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\Psi(u) = \frac{\lambda \mu}{c} \exp\left\{-u \left(\frac{c - \lambda \mu}{c \mu}\right)\right\},$$

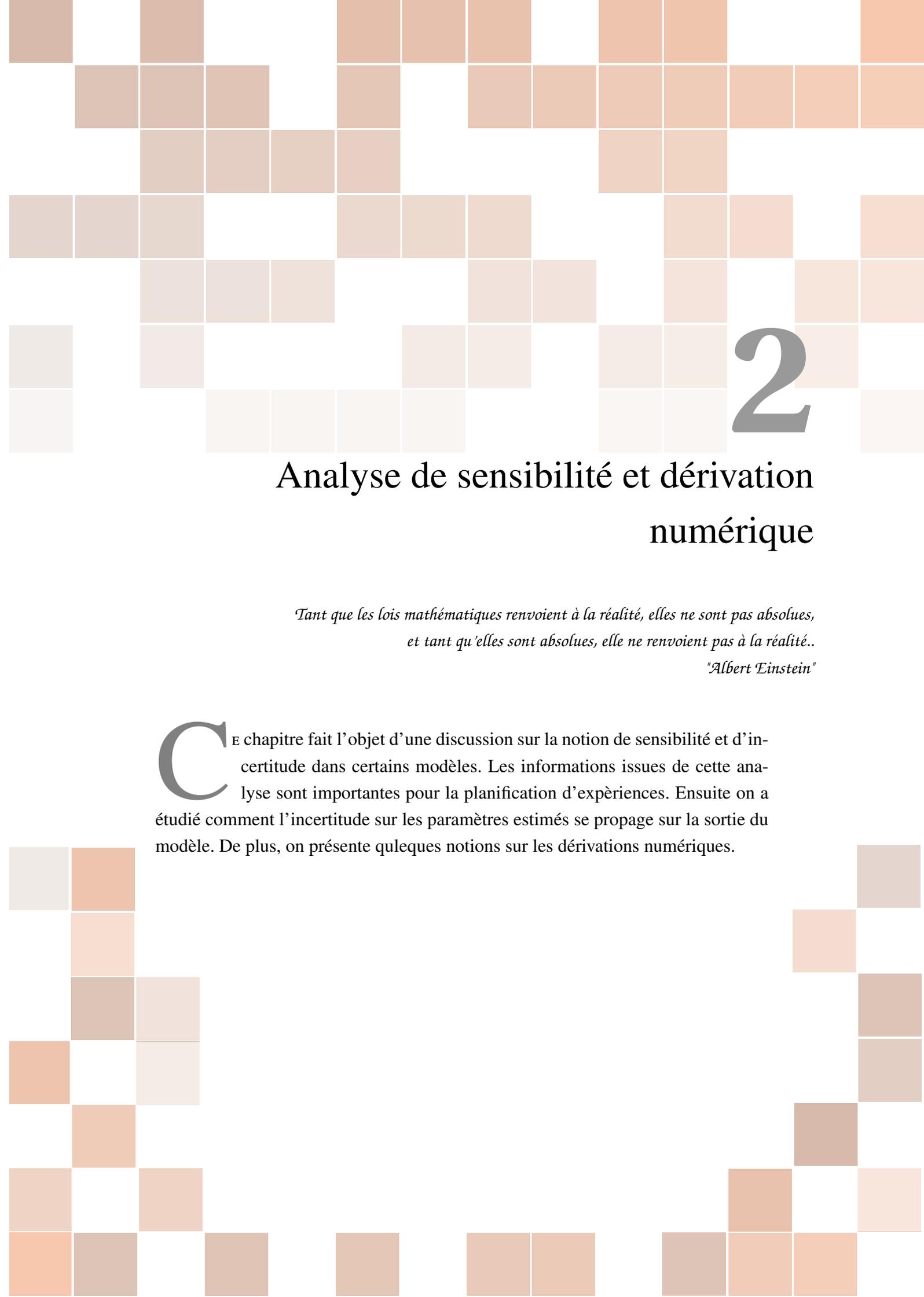
### 1.3.5 Autres approches

En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de larges champs d'application dans les modèles de risques, il existe plusieurs autres approches. Ces approches permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation stochastique se retrouvent dans d'autres domaines. C'est le cas des réactions des assureurs et des assurés dans la théorie des jeux.

En général, les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur : les théorèmes limites des marches aléatoires [[Gerber 1979](#), [Tsybakov 2009b](#)], les représentations matricielles avec modèles markoviens [[Asmussen 2000](#)], la théorie des martingales et intégralités de probabilistes [[Rolski 2009](#)], les méthodes d'optimisation [[De Vylder 1997](#)], les transformations analytiques [[De Vylder 1995](#)], et la théorie de distributions [[Lundberg 1993](#), [Willmot 1997](#)].

## Conclusion

**D**ANS ce chapitre, nous avons présenté les résultats principales de la théorie de ruine à partir des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique. Une attention particulière est portée sur le modèle de Cramèr-Lundberg (modèle classique), connu comme le fondement théorique de la théorie du risque dû à plusieurs études, et de nombreux résultats pour la probabilité de ruine existent pour ce modèle.



# 2

## Analyse de sensibilité et dérivation numérique

*Tant que les lois mathématiques renvoient à la réalité, elles ne sont pas absolues,  
et tant qu'elles sont absolues, elle ne renvoient pas à la réalité..*

*"Albert Einstein"*

**C**E chapitre fait l'objet d'une discussion sur la notion de sensibilité et d'incertitude dans certains modèles. Les informations issues de cette analyse sont importantes pour la planification d'expériences. Ensuite on a étudié comment l'incertitude sur les paramètres estimés se propage sur la sortie du modèle. De plus, on présente quelques notions sur les dérivations numériques.

---

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>2.1 Analyse d'incertitude</b> . . . . .	<b>22</b>
2.1.1 Types d'incertitudes . . . . .	22
<b>2.2 Propagation d'incertitudes</b> . . . . .	<b>23</b>
2.2.1 Incertitude aléatoire . . . . .	23
2.2.2 Incertitude épistémique . . . . .	23
2.2.3 Principales étapes d'analyse d'incertitude . . . . .	23
2.2.4 Objectif d'analyse d'incertitude . . . . .	24
<b>2.3 Analyse de sensibilité</b> . . . . .	<b>25</b>
2.3.1 Types d'analyse de sensibilité . . . . .	25
2.3.2 Objectif d'analyse de sensibilité . . . . .	25
<b>2.4 Dérivation numérique</b> . . . . .	<b>26</b>
2.4.1 Historique . . . . .	26
2.4.2 Approche à partir de la pente de la tangente [Wagschal 1999] . . . . .	26
2.4.3 Dérivabilité . . . . .	27
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>30</b>

---

## 2.1 Analyse d'incertitude

La construction de tout modèle mathématique est sujette à plusieurs types d'incertitudes

### Définition 2.1.1: " Incertitude "

L'incertitude est un concept très vaste. Peu d'auteurs prennent le temps de la définir. Selon Haimès [Haimès 2009], l'incertitude est l'incapacité à connaître le vrai état d'un système. Ayyub et Klir [Ayyub 2006], quant à eux, l'interprètent comme l'incomplétude de la connaissance en général due à des difficultés intrinsèques à acquérir de la connaissance. Les deux visions sont compatibles puisque l'incapacité à déterminer un état mène nécessairement à une connaissance incomplète.

### 2.1.1 Types d'incertitudes

#### Incertitude structurelle

On peut classer l'incertitude structurelle en plusieurs catégories suivant que le système à identifier est monovarié ou multivarié, déterministe ou stochastique, à temps continu ou discret, linéaire ou non, invariant dans le temps ou non. La structure de modèle considérée est en général monovarié, à temps discret, invariant dans le temps et non-linéaire.

#### Analyse d'incertitude paramétrique

Considérons un modèle mathématique, formé d'un ensemble de variables d'entrée aléatoires, d'une fonction déterministe, et d'un ensemble de variables de sortie aléatoires. Le modèle est sous la forme suivante :

$$Z = f(X)$$

où :

- $Z$  représente la sortie du modèle ;
- $X = (X_1, \dots, X_n)$  est le vecteur  $n$ -dimensionnel des entrées ;
- $f$  est la fonction permettant de calculer la sortie  $Z$  en fonction des entrées  $X$ .

Elle peut être analytique, implicite ou sous la forme d'un code de calcul complexe.

L'incertitude paramétrique est l'incertitude des valeurs observées ou mesurées [Lloyd 2007]. Ces valeurs servent les inputs d'un modèle. Leur incertitude se propage dans ce dernier et engendre une incertitude dans les outputs.

On peut avoir deux origines de l'incertitude sur les paramètres :

La première provient du caractère aléatoire de l'information due à une variabilité naturelle résultant de phénomènes stochastiques. On parle alors d'incertitudes de variabilité ou d'incertitudes stochastiques.

La seconde est liée au caractère imprécis de l'information lié à un manque de connaissance et qui résulte par exemple d'erreurs systématiques lors de mesures ou d'avis d'experts. On parle alors d'incertitudes épistémiques.

## 2.2 Propagation d'incertitudes

La construction de tout modèle mathématique est soumise à deux sources d'incertitudes [Abramson 1993, Pulkkinen 1996, Oberkampff 2002, Walters 2002] : incertitude aléatoire, due au certaines paramètres du modèle qui sont des estimations de moments de variables aléatoires, et l'incertitude épistémique due à l'impossibilité de connaître parfaitement le problème étudié.

### 2.2.1 Incertitude aléatoire

Cette incertitude est due à la variabilité naturelle de toute quantité physique mesurée car il appartient à l'estimation des paramètres du modèle. Elle s'explique parfois comme l'incertitude responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète une expérience dans les mêmes conditions.

### 2.2.2 Incertitude épistémique

L'incertitude épistémique décrit ce que le modèle ne sait pas parce que les données de formation n'étaient pas appropriées. L'incertitude épistémique est due à des données et des connaissances limitées. Avec suffisamment d'échantillons de formation, l'incertitude épistémique diminuera. Une incertitude épistémique peut survenir dans les régions, où il y a moins d'échantillons pour la formation.

### 2.2.3 Principales étapes d'analyse d'incertitude

L'analyse des incertitudes consiste à déterminer la variation ou l'imprécision des résultats du modèle qui découle de la variation collective des paramètres et des hypothèses utilisées pour définir le modèle. Cette approche considère en générale les paramètres incertains d'un modèle comme un objet aléatoire, avec un objectif de calculer ou caractériser la variabilité induite dans la solution du modèle ou des quantités d'intérêt en sortie du modèle.

Afin de connaître l'influence des différents paramètres d'entrées et quantifier l'impact de leurs incertitudes sur la sortie du modèle, les divers types d'incertitude dans chacun des paramètres d'entrée du modèle doivent être propagées à travers le modèle stochastique.

Les principales étapes [[Fajraoui 2014](#)] d'une analyse d'incertitude sont :

- Identifier les paramètres qui pourraient contribuer significativement à l'incertitude dans les sorties du modèle ;
- Déterminer les densités de probabilité des paramètres d'entrée, à l'aide des techniques d'estimation statistique ou à partir de jugements d'experts. Les techniques d'estimation statistique permettent l'estimation des distributions de probabilité à partir des données disponibles ou par le biais d'un échantillon informatif. Dans le cas où les données disponibles sont limitées et /ou bien non informatives, un jugement d'experts fournit les informations sur la distribution de probabilité d'entrée. Ainsi, par exemple : une distribution uniforme est sélectionnée si une seule gamme de valeurs possibles pour une entrée est disponible, mais qu'aucune valeur préférentielle susceptible de se produire n'est favorisée ;
- Tenir compte des dépendances entre les paramètres du modèle ;
- Propager l'incertitude à travers le modèle : il s'agit de propager l'incertitude des paramètres dans le modèle et caractériser la variabilité induite de la sortie du modèle .

Cette dernière sera donc caractérisée par une densité de probabilité qui est dépendante de la variabilité des paramètres d'entrée.

#### 2.2.4 Objectif d'analyse d'incertitude

La propagation d'incertitude à des principaux objectifs [[Crestaux 2011](#)] qui sont :

- Vérifier la prédictibilité du système physique, notamment que les changements dus à de petites perturbations des données incertaines ne bouleversent pas totalement le comportement global de la solution ;
- Valider les simulations par des comparaisons avec des mesures physiques réelles et donc entachées d'incertitudes de mesure ;
- Déterminer la dispersion autour de la moyenne ou de la valeur nominale de la réponse du système ;
- Analyser le risque de dépassement des valeurs critiques du système en quantifiant la probabilité d'observer ces dépassements par rapport aux lois de probabilité des données incertaines .
- Analyser la sensibilité du système par rapport aux différentes sources d'incertitudes distinctes dans le but d'établir des stratégies optimales pour les réduire.

## 2.3 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est l'étude de la façon dont l'incertitude de la sortie d'un code où d'un système peut être attribuée à l'incertitude dans ses entrées.

### 2.3.1 Types d'analyse de sensibilité

#### Analyse de sensibilité locale

L'analyse de sensibilité locale [[Turányi 1990](#)], étudie comment des petites perturbations sur les entrées du modèle répercutent sur la valeur de la sortie. Bien qu'elle est très classique et souvent utilisée dans divers domaines, ne permet pas de considérer les interactions paramétriques.

#### Analyse de sensibilité globale

L'analyse de sensibilité globale étudie comment la variabilité des entrées se répercute sur celle de la sortie, en déterminant la part de variance de la sortie due à chacune des entrées [[De Vylder 1995](#)].

Il est possible de distinguer l'analyse locale de analyse globale de la sorte l'analyse locale s'intéresse à la valeur de la réponse. tandis que l'analyse globale s'intéresse à sa variabilité. De nombreuses méthodes d'analyse de sensibilité globale existent dans la littérature.

### 2.3.2 Objectif d'analyse de sensibilité

Les objectifs principaux d'une analyse de sensibilité sont les suivants [[Saltelli 2006](#)] :

1. La hiérarchisation des variables d'entrée : l'objectif est d'identifier l'entrée la plus influente, ou plus précisément de classer les variables d'entrée de la plus influente à la moins influente ;
2. La calibration des variables d'entrée : le but est d'identifier les variables d'entrée qui peuvent être fixées car elles n'influencent pas la variance de la sortie. Le modèle est alors réduit aux seules variables d'entrée influentes ;
3. La réduction de la variance : l'objectif est de réduire la variance de la sortie à un niveau prédéterminé en fixant le moins de variables d'entrée possible ;
4. Le pouvoir discriminant : déterminer l'ensemble des facteurs responsables de la présence de la réponse dans une certaine région quand le domaine des sorties est séparé en sous-domaines distincts. Le but est d'exhiber les variables d'entrée qui influencent le plus l'appartenance de la sortie à un des sous-domaines.

## 2.4 Dérivation numérique

En mathématiques, la dérivée d'une fonction d'une variable réelle mesure l'ampleur du changement de la valeur de la fonction (valeur de sortie) par rapport à un petit changement de son argument (valeur d'entrée). Les calculs de dérivées sont un outil fondamental du calcul infinitésimal. Par exemple, la dérivée de la position d'un objet en mouvement par rapport au temps est la vitesse (instantanée) de l'objet.

La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse permettant d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation.

### 2.4.1 Historique

La notion de nombre dérivé a vu le jour au XVIII<sup>e</sup> siècle dans les écrits de Leibniz et ceux de Newton, qui le nomme fluxion et qui le définit comme " le quotient ultime de deux accroissements évanescents". C'est à Lagrange (fin du XVIII<sup>e</sup> siècle) que l'on doit la notation  $f'(x)$ , aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de  $f$  en  $x$ . C'est aussi à lui qu'on doit le nom de " dérivée" pour désigner ce concept mathématique.

### 2.4.2 Approche à partir de la pente de la tangente [Wagschal 1999]

Pour approcher cette notion de manière graphique, commençons par nous donner une courbe représentative d'une fonction continue dans un repère cartésien, c'est-à-dire tracée d'un seul trait de crayon, et bien "lisse" ; on dira là que la fonction associée est dérivable.

Quel que soit le point que l'on choisit sur la courbe, on pourra alors tracer ce qu'on appelle une tangente, c'est-à-dire une droite qui épouse localement la direction de cette courbe. Si l'on trace la courbe et sa tangente et que l'on s'approche en zoomant suffisamment, on aura de plus en plus de mal à distinguer la courbe de sa tangente. Si la courbe " monte " (c'est-à-dire si la fonction associée est croissante), la tangente sera également montante ; inversement, si la fonction est décroissante, la tangente sera descendante.

Si on se donne une abscisse  $x_0$  pour laquelle la fonction  $f$  est dérivable, on appelle nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $x_0$ . Ce réel donne de précieuses informations sur le comportement local d'une fonction : c'est la mesure algébrique de la vitesse à laquelle cette fonction change lorsque sa variable change.

Ainsi, si le nombre dérivé d'une fonction est positif sur un intervalle, cette fonction sera croissante sur ce même intervalle. Inversement, s'il est négatif, elle sera décroissante. Lorsque le nombre dérivé est nul en un point, la courbe admet une tangente horizontale en ce point.

**Définition 2.4.1:** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur une réunion quelconque d'intervalles non triviaux (c'est-à-dire non vides et non réduits à un point), et  $x_0$  appartenant à l'intérieur de l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ . Pour tout  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $[x_0, x_0 + h] \subset \mathcal{D}_f$ , on appelle taux d'accroissement de  $f$  en  $x_0$  et avec un pas de  $h$  la quantité :

$$t_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite reliant les points de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ .

Si  $t_{x_0}(h)$  admet une limite finie lorsque  $h$  tend vers 0, on dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$ , dans ce cas le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  est égal à la limite de ce taux d'accroissement. On note alors :

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} t_{x_0}(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

où, de manière équivalente :

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Une fonction pour laquelle le taux d'accroissement en un point admet une limite finie (qui est le nombre dérivé) est dite dérivable en ce point.

**Remarque 2.4.2:** Le calcul de la dérivée peut être :

- Onéreux : (expression difficile à évaluer),
- Imprécis : Fonction donnée par un ensemble discret de valeurs (données expérimentales par exemple),
- Impossible : Dérivées intervenant dans des équations différentielles par exemple.

On peut partir de l'opérateur de différence première progressive pour calculer la dérivée d'une fonction  $f$  en un point  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right],$$

mais également de ses homologues rétrograde et centrée :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right].$$

### 2.4.3 Dérivabilité

Une fonction réelle d'une variable réelle est dérivable en un point  $x_0$  quand elle admet une dérivée finie en  $x_0$ , c'est-à-dire, intuitivement, quand elle peut être approchée de manière assez fine par une fonction affine au voisinage de  $x_0$ . Elle est dérivable sur un intervalle réel ouvert

non vide si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle. Elle est dérivable sur un intervalle réel fermé et borné (c'est-à-dire sur un segment réel) non réduit à un point si elle est dérivable sur l'intérieur de cet intervalle et dérivable à droite en sa borne gauche, et dérivable à gauche en sa borne droite.

### Dérivée à gauche et à droite

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant un intervalle de la forme  $[x_0, x]$  ou  $x \neq x_0$ , on dit que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$  si la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[x_0, x]$  est dérivable en  $x_0$ . On note alors  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$  la dérivée en  $x_0$  de cette restriction, et on l'appelle le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $x_0$  à droite. En son point d'abscisse  $x_0$ , la courbe représentative de  $f$  admet une demi-tangente à droite, non parallèle à l'axe des ordonnées.

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

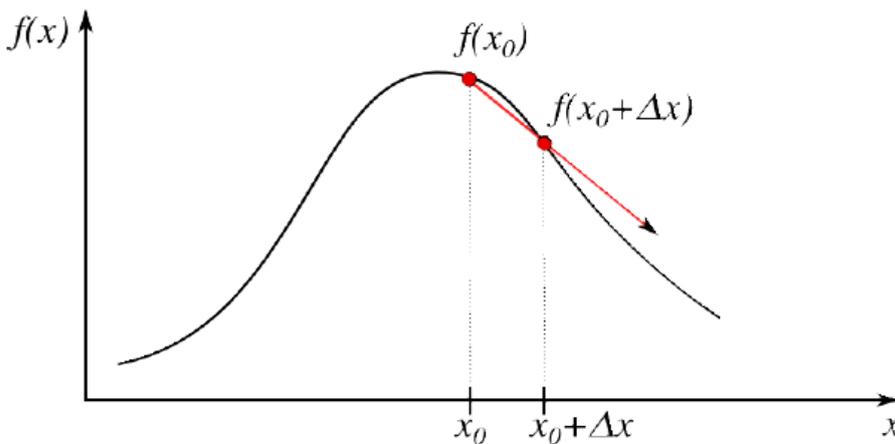


FIGURE 2.1 – Représentation d'une dérivée à droite.

On définit de même la dérivabilité à gauche en  $x_0$  comme la dérivabilité en  $x_0$  de la restriction de  $f$  à un intervalle  $[x_0, x]$ .

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}.$$

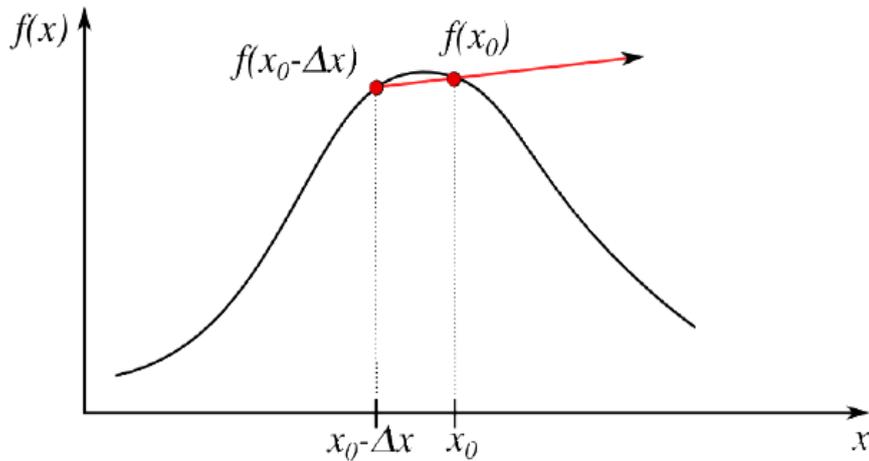


FIGURE 2.2 – Représentation d’une dérivée à gauche.

### Dérivée centrée

Une fonction dérivable en  $x_0$  est, a fortiori, dérivable à droite et à gauche en  $x_0$ , si  $x_0$  est un point intérieur à l’intervalle  $I$ . Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  sans pour autant être dérivable en  $x_0$ . Si  $x_0$  est un point intérieur à l’intervalle  $I$ ,  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  avec  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ , c’est-à-dire, on fait la moyenne des deux dérivées décentrée à gauche et à droite.

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

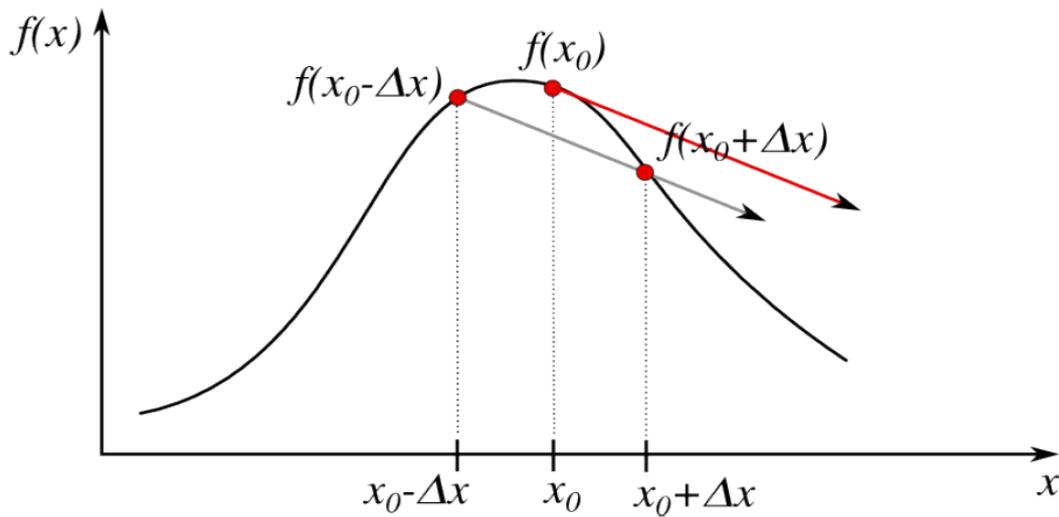
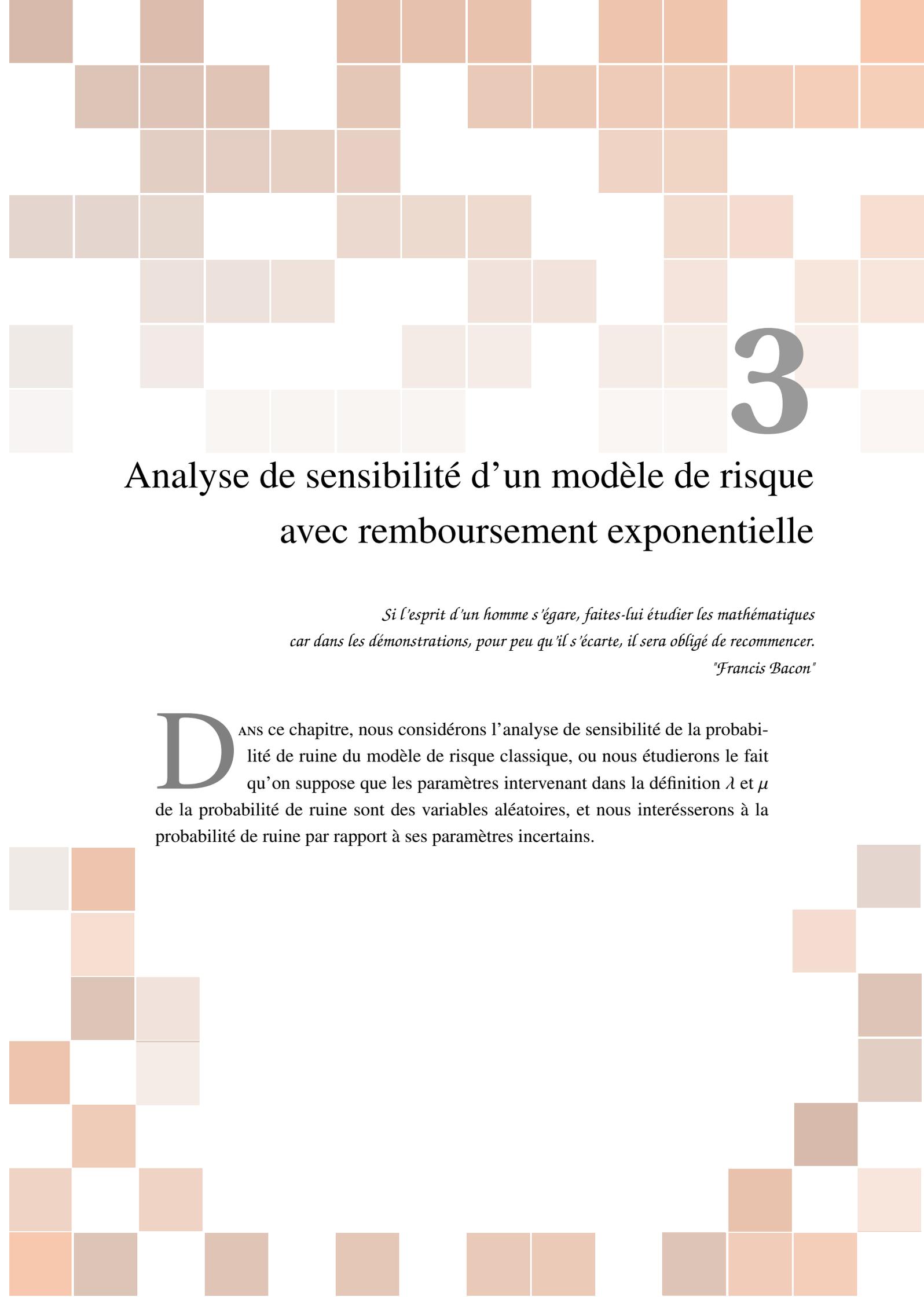


FIGURE 2.3 – Représentation d'une dérivée centrée.

## Conclusion

**N**ous avons consacré ce chapitre à la présentation des méthodes qui sont les plus couramment utilisées en analyse de sensibilité. Dans la première section on a présenté l'analyse d'incertitude cette dernière vient comme élément complémentaire à l'analyse de sensibilité fait quant à elle l'objet de la deuxième section de ce chapitre enfin on a parlé sur les dérivations numériques qui l'on besoin dans le chapitre suivant.



# 3

## Analyse de sensibilité d'un modèle de risque avec remboursement exponentielle

*Si l'esprit d'un homme s'égaré, faites-lui étudier les mathématiques  
car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.*

*"Francis Bacon"*

**D**ANS ce chapitre, nous considérons l'analyse de sensibilité de la probabilité de ruine du modèle de risque classique, ou nous étudierons le fait qu'on suppose que les paramètres intervenant dans la définition  $\lambda$  et  $\mu$  de la probabilité de ruine sont des variables aléatoires, et nous intéresserons à la probabilité de ruine par rapport à ses paramètres incertains.

---

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3.1 Position du problème</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3.2 Remboursements de loi exponentielle</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>3.3 Présentation de la borne</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>3.4 Incertitude épistémique dans le modèle du risque classique</b> . . . . .	<b>36</b>
3.4.1 Représentation de la borne . . . . .	36
3.4.2 Perturbation du montant de remboursement des sinistres $\mu$ . . . . .	37
3.4.3 Perturbation des inter-arrivées des sinistres $\lambda$ . . . . .	39
<b>3.5 Autre méthode de dérivée</b> . . . . .	<b>41</b>
3.5.1 Dérivation par rapport au paramètre $\mu$ . . . . .	42
3.5.2 Dérivation par rapport au paramètre $\lambda$ . . . . .	44
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>45</b>

---

### 3.1 Position du problème

Dans le modèle le plus simple, une compagnie d'assurance dispose d'un capital initial positif  $u$ , chiffré dans une unité quelconque. Au cours du temps, le capital de cette compagnie peut évoluer en fonction des cotisations des assurés, de la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés et des montants à rembourser que ces sinistres occasionnent.

On convient de noter  $u + X_t$  le capital au temps  $t$ . On suppose que :

- les occurrences des sinistres suivent un processus de Poisson  $\{N_t; t \geq 0\}$  de paramètre  $\lambda > 0$ ;
- le sinistre  $k$  occasionne pour la compagnie une perte aléatoire  $Z_k > 0$ ;
- les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps à un taux constant  $c > 0$ .

Le paramètre  $\lambda$  représente l'intensité des sinistres et  $c$  est appelé le taux de cotisation. Dans la pratique, les cotisations sont rarement capitalisées continûment au cours du temps, mais en général à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et on suppose donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'évènement  $N_t = 0$ , la valeur du capital de la compagnie au temps  $t$  est donc égal à  $u + ct$ .

On suppose, de plus, que les variables aléatoires  $(Z_k)_{k \geq 1}$  correspondant au montants des remboursements forment un processus de renouvellement de loi  $F$ , et telle que

$$E[Z_k] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(Z_k) = \sigma^2.$$

**Définition 3.1.1:** On appelle le processus de risque, le processus défini par

$$\forall t \geq 0 \quad X_t = ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k.$$

Il vient immédiatement de cette définition que le capital de la compagnie d'assurance au temps  $t$  est égal à  $u + X_t$ . De plus, le risque moyen pour un intervalle  $[0, t]$  est égal à

$$E[X_t] = ct - E[N_t]\mu = (c - \lambda\mu)t.$$

On suppose par la suite que  $\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0$ , cela garantit que le processus de risque dévie presque-sûrement vers  $+\infty$ . D'après la loi forte des grands nombres on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = c - \lambda\mu \quad \text{presque-sûrement.}$$

En effet, nous avons :

$$\forall t \geq 0, \frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t}.$$

D'après la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{prèsque-sûrement.}$$

et

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda \quad \text{prèsque-sûrement.}$$

Ceci entraîne :

$$\frac{X_t}{t} = c - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i}{N_t} \frac{N_t}{t} \rightarrow c - \lambda\mu \quad \text{prèsque-sûrement.}$$

Puisque  $\varrho > 0$ ,  $(X_t)$  devient négatif un nombre fini de fois.

## 3.2 Remboursements de loi exponentielle

Prenant le cas particulier du modèle de ruine classique (modèle de lundberg P/P), ou les réclamations suivent une loi exponentielle de fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\mu}\right), \quad x > 0. \quad (3.1)$$

Lorsque  $F$  est de loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{\mu}$ , on a :

$$\forall u \geq 0, \quad \Psi(u) = \frac{1}{1 + \varrho} \exp\left(\frac{-\varrho u}{\mu(1 + \varrho)}\right). \quad (3.2)$$

On remplace  $\varrho$  dans la formule (3.2), on aura :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u \left(\frac{c - \lambda\mu}{c\mu}\right)\right). \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  évoqués dans la définition de la probabilité de ruine (3.3) sont incertains. Plus précisément, nous associons les deux modèles suivants pour leurs présentation :

$$\mu = \bar{\mu} + \Delta_1 \quad \text{avec} \quad \Delta_1 \in [0, 0.1];$$

$$\lambda = \bar{\lambda} + \Delta_2 \quad \text{avec} \quad \Delta_2 \in [0, 0.1].$$

### 3.3 Présentation de la borne

Dans cette section, nous fournissons une limite pour la probabilité de ruine lorsque nous approximations la distribution de la taille excédentaire des sinistres avec une distribution connue, par exemple une distribution de type phase. Si nous approximations  $B_0$  avec une distribution connue (pas seulement un type de phase), nous pouvons calculer la probabilité de ruine par la formule de Pollaczek-Khinchine (1.4). D'après l'équation (1.4) et l'inégalité triangulaire, l'erreur entre la probabilité de ruine et son approximation est alors de

$$|\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n (B_0^{*n}(u) - \tilde{B}_0^{*n}(u)) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n |B_0^{*n}(u) - \tilde{B}_0^{*n}(u)| \quad (3.4)$$

Où,  $\tilde{F}$  désigne l'approximation d'une distribution  $F$ , et  $\tilde{\psi}$  est le résultat exact que nous obtenons à partir de la formule de Pollaczek-Khinchine pour la probabilité de ruine lorsque nous utilisons une distribution approximative de la taille des créances. A partir de l'équation (3.4), nous voyons que la première étape pour trouver une limite pour la probabilité de ruine est de trouver une limite pour la différence  $|B_0^{*n}(u) - \tilde{B}_0^{*n}(u)|$ . Ceci est donné dans la Proposition (3.3.1).

**Proposition 3.3.1:** [Vatamidou 2012]

Si  $\sup_x |B_0(x) - \tilde{B}_0(x)| \leq \varepsilon$  pour  $x \in [0, u]$ , puis  $|B_0^{*n}(u) - \tilde{B}_0^{*n}(u)| \leq n\varepsilon$

**Proposition 3.3.2:** Si  $\sup_x |B_0(x) - \tilde{B}_0(x)| \leq \varepsilon$  pour  $x \in [0, u]$ , alors une limite pour la probabilité de ruine est

$$\frac{|\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|}{\Delta} \leq \frac{\varepsilon\rho}{(1-\rho)\Delta} \quad (3.5)$$

**Preuve 3.3.3:**

$$\begin{aligned} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n |B_0^{*n}(u) - \tilde{B}_0^{*n}(u)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n n\varepsilon = \varepsilon\rho(1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} \\ &= \varepsilon\rho(1-\rho) \left( \frac{1}{1-\rho} \right)' = \varepsilon\rho(1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\varepsilon\rho}{1-\rho} \\ \frac{|\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|}{\Delta} &\leq \frac{\varepsilon\rho}{(1-\rho)\Delta}. \end{aligned}$$

Remarquez que la borne de la proposition (3.3.2) est indépendante de  $u$ , pour tout  $u \geq 0$ . Ainsi, si nous définissons la distance supra-normale entre deux distributions définies positives  $F_1$  et  $F_2$  comme  $\mathcal{D}(F_1, F_2) = \sup_u |F_1(u) - F_2(u)|$ ,  $u \geq 0$ , on a conclut que  $\mathcal{D}(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\varepsilon\rho}{(1-\rho)\Delta}$ ,

chaque fois que  $\mathcal{D}(B_0, \tilde{B}_0) \leq \varepsilon$ . Observez que le terme  $(1 - \rho)\Delta$  au dénominateur a pour conséquence que, plus la charge  $\rho$  est élevée, plus il faut une approximation précise de la  $B_0$  pour obtenir des bornes serrées pour la probabilité de ruine.

En résumé, lorsque la distribution de la taille de la réclamation excédentaire est approximée avec une certaine précision alors une limite pour la probabilité de ruine, qui est linéaire par rapport à  $\varepsilon$ , est garantie par la proposition (3.3.1).

### 3.4 Incertitude épistémique dans le modèle du risque classique

Dans ce modèle, on suppose que l'incertitude affecte les deux paramètres. Pour analyser la propagation, les paramètres incertains sont décrits comme des variables aléatoires dans la fonction de densité est supposée connue, par conséquent la sortie du modèle est aussi une variable aléatoire qu'on cherche à caractériser. Considérons  $\mathbf{Z}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$  la sortie du modèle avec les perturbations suivantes :

#### 3.4.1 Représentation de la borne

Dans cette partie, on a défini la borne de remboursement et sa représentation par l'algorithme suivant :

---

#### Algorithme 1: Algorithme de borne de remboursement

---

##### Début

**Entrées :**  $\mu, \lambda, u, c, \varepsilon = 0.1$  et  $\Delta \in [0, 0.1]$ .

**Sorties :** La figure de la borne;

1. Calculer la valeur de la borne  $B = \frac{\varepsilon\rho}{(1 - \rho)\Delta}$ ;

**Fin.**

---

L'implémentation de l'algorithme 1 sous l'environnement **MATLAB** avec  $\mu = 0.9, c=1.5, \varepsilon = 0.1$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

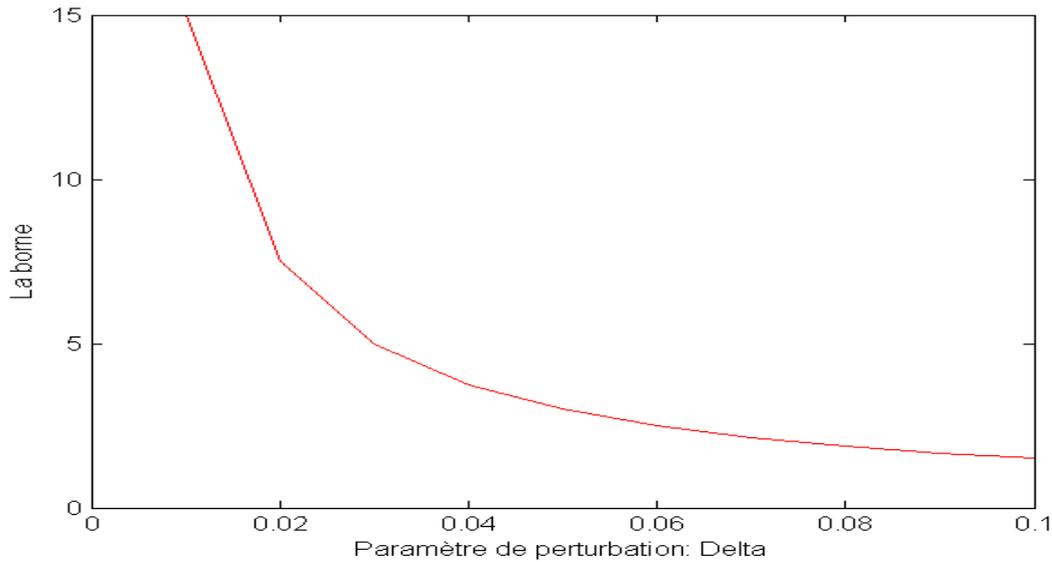


FIGURE 3.1 – Graphe représentatif de la borne.

On remarque que lorsque  $\Delta$  (taux de perturbation) variée la valeur de la borne diminue.

### 3.4.2 Perturbation du montant de remboursement des sinistres $\mu$

Dans cette partie, on compare la borne (3.5) avec la perturbation du moyens de remboursement des sinistres  $\mu$  avec  $\mu = \bar{\mu} + \Delta_1$ , et on applique l’algorithme suivant :

---

**Algorithme 2:** Algorithme de borne de remboursement avec la perturbation de ( $\mu$ )

---

**Début**

**Entrées :**  $\bar{\mu}$ ,  $\lambda$ ,  $c$ ,  $u$  et  $\Delta_1 \in [0, 0.1]$ .

**Sorties :** La figure de la borne et l’erreur relative;

1. Calculer la valeur de la borne  $B = \frac{\epsilon\rho}{(1-\rho)\Delta_1}$ ;
2. Calculer la valeur de la probabilité de ruine  $\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right)$ ;
3. Calculer la valeur de la probabilité de ruine après la perturbation  $\frac{|\Psi(\mu, \lambda) - \Psi(\bar{\mu}, \lambda)|}{\Delta_1}$ ;

**Fin.**

---

L’implémentation de l’algorithme 2 sous l’environnement **MATLAB** avec  $u=10$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $c=1.5$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

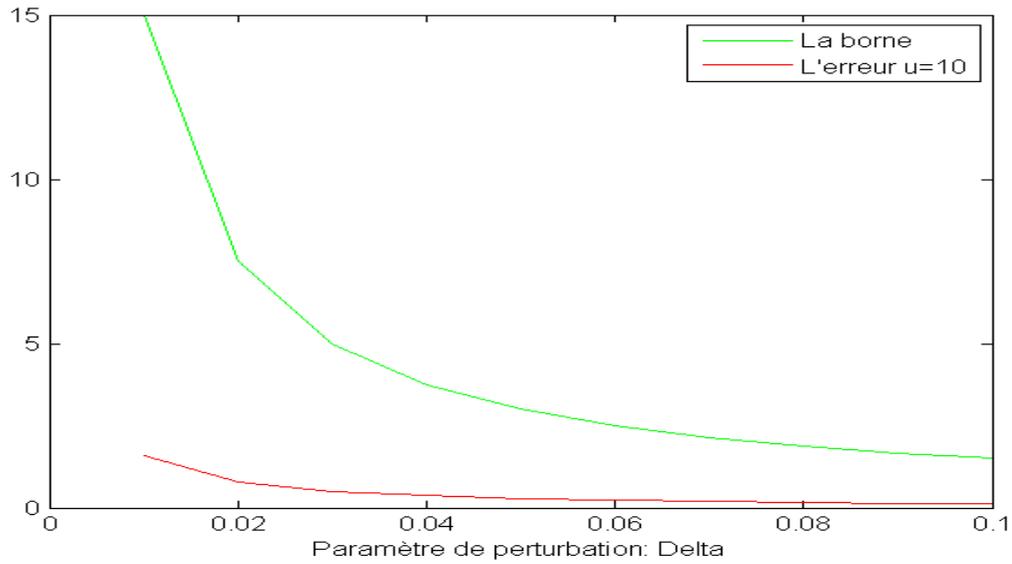


FIGURE 3.2 – Graphe représentatif de la borne et l’erreur relative absolue lorsque  $u=10$ .

Après, on refait le même algorithme 2 sous l’environnement *MATLAB* avec  $u=50$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

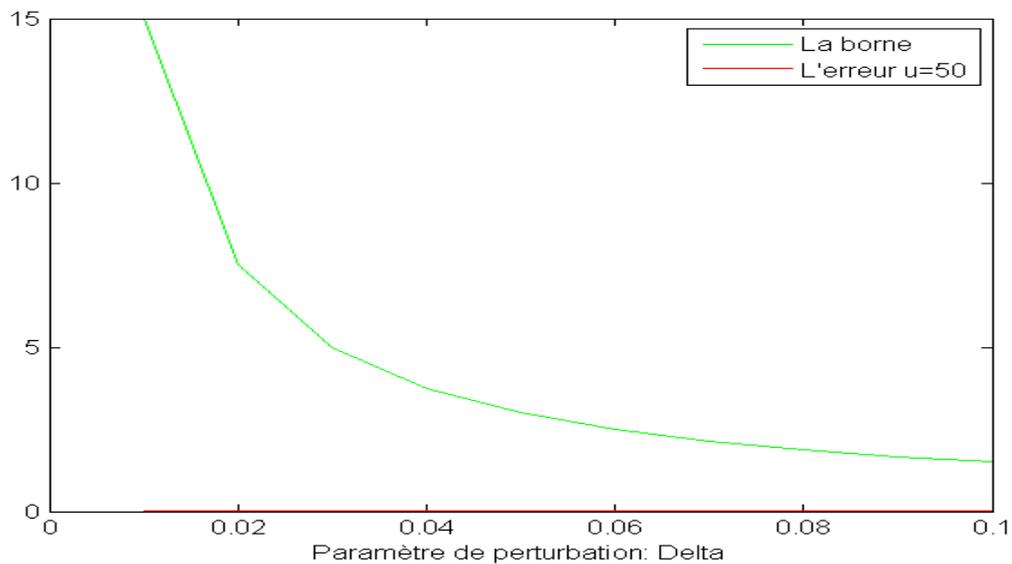


FIGURE 3.3 – Graphe représentatif de la borne et l’erreur relative absolue lorsque  $u=50$ .

Enfin, on répète l’algorithme 2 avec  $u=100$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $c=1.5$ ,  $\epsilon = 0.1$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

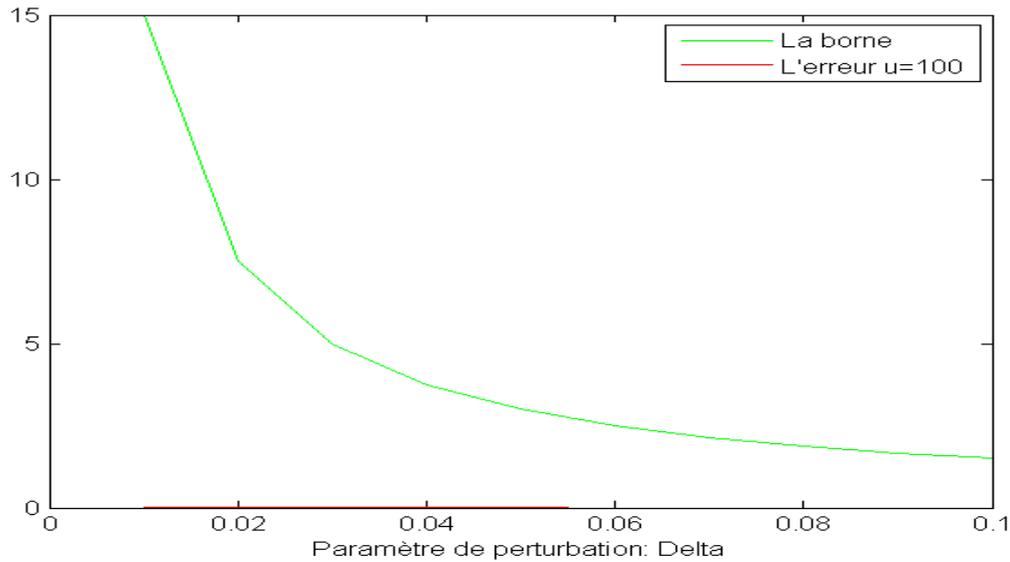


FIGURE 3.4 – Graphe représentatif de la borne et l’erreur relative absolue lorsque  $u=100$ .

Interprétation des résultats des figures (3.2), (3.3) et (3.4) :

On constate que dans les trois figures à savoir la première ou  $u = 10$ , la deuxième  $u = 50$  et la troisième  $u = 100$  que l’erreur relative absolue engendré par la perturbation du paramètre  $\mu$  (le montant de remboursement) est inférieur à la borne calculer auparavant.

Lorsque on augmente le  $u$  (capital initial) on remarque que l’erreur relative absolue tend vers 0. Cela ce justifier facilement car lorsque on augmente le capital ( $u$ ) la probabilité de ruine diminue ce qui se confirme par les figures précédentes.

### 3.4.3 Perturbation des inter-arrivées des sinistres $\lambda$

Dans cette partie, on compare la perturbation de la borne (3.5) avec la perturbation des inter-arrivées  $\lambda$  avec  $\lambda=\bar{\lambda}+\Delta_2$ , et on applique l’algorithme suivant :

**Algorithme 3:** Algorithme de borne de remboursement avec la perturbation de ( $\lambda$ )

**Début**

**Entrées :**  $\bar{\lambda}$ ,  $\mu$ ,  $c$ ,  $u$  et  $\Delta_2 \in [0, 0.1]$ .

**Sorties :** La figure de la borne et l’erreur relative;

1. Calculer la valeur de la borne  $B = \frac{\epsilon\rho}{(1-\rho)\Delta_2}$ ;
2. Calculer la valeur de la probabilité de ruine  $\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right)$ ;
3. Calculer la valeur de la probabilité de ruine après la perturbation  $\frac{|\Psi(\mu, \lambda) - \Psi(\mu, \bar{\lambda})|}{\Delta_2}$ ;

**Fin.**

L'implémentation de l'algorithme 3 sous l'environnement *MATLAB* avec  $u=10$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $c=1.5$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

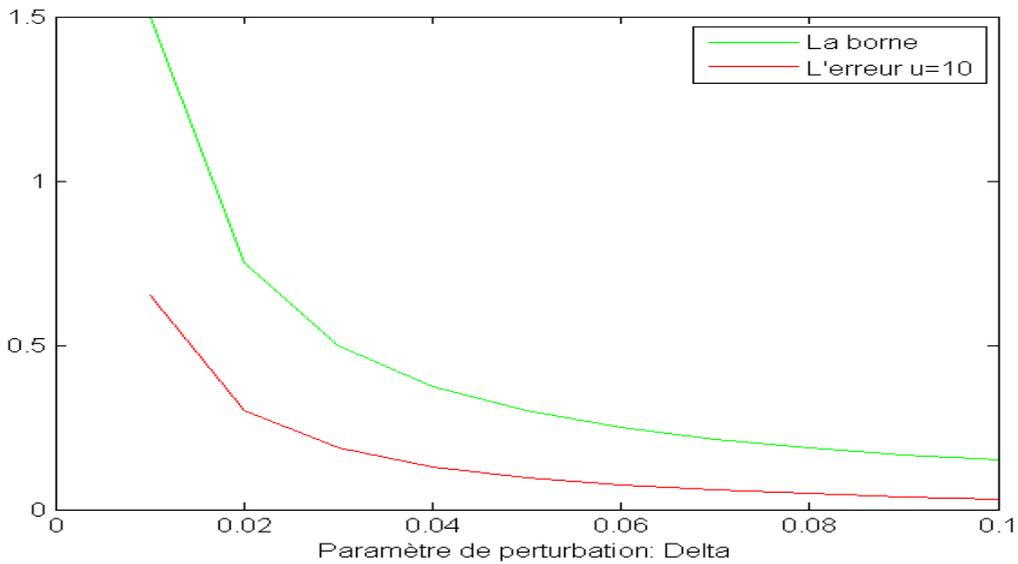


FIGURE 3.5 – Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque  $u=10$ .

Après, on refait l'algorithme 3 sous l'environnement *MATLAB* avec  $u=50$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $c=1.5$ ,  $\epsilon = 0.1$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

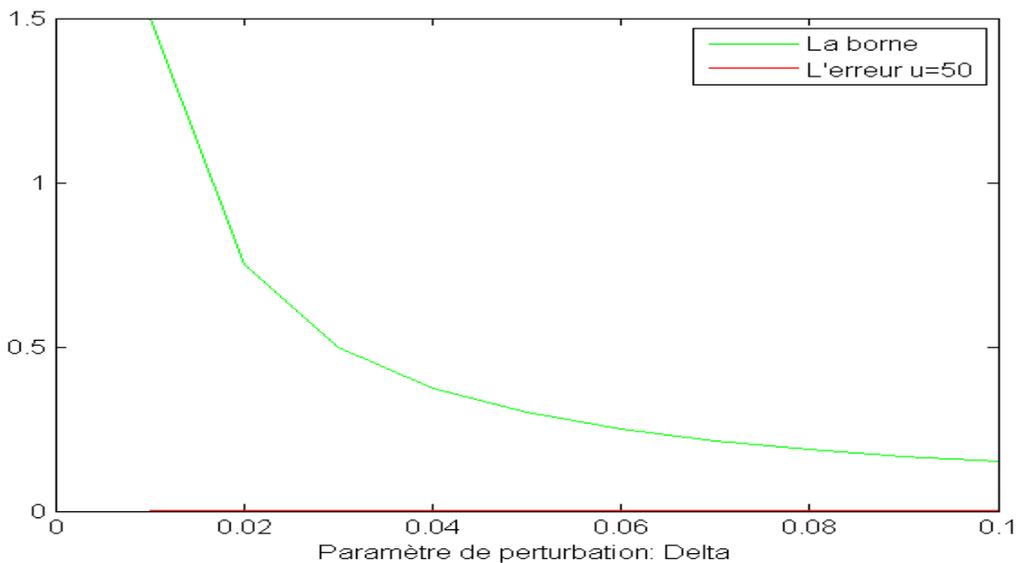


FIGURE 3.6 – Graphe représentatif de la borne et l'erreur relative absolue lorsque  $u=50$ .

Enfin, on répète l'algorithme 3 avec  $u=100$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $c=1.5$ ,  $\epsilon = 0.1$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

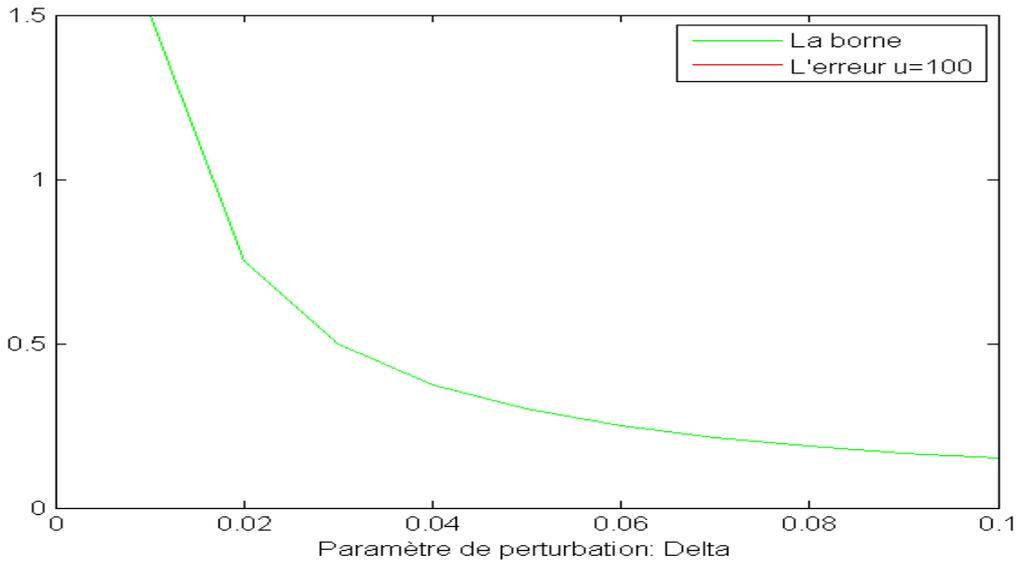


FIGURE 3.7 – Graphe représentatif de la borne et l’erreur relative absolue lorsque  $u=100$ .

Interprétation des résultats des figures (3.5), (3.6) et (3.7) :

On constate que dans les trois figures à savoir la première ou  $u = 10$ , la deuxième  $u = 50$  et la troisième  $u = 100$  que l’erreur relative absolue engendré par la perturbation du paramètre  $\lambda$  (les inter-arrivées des sinistres) est inférieur à la borne calculer auparavant.

Lorsque on augmente le  $u$  (capital initial) on remarque que l’erreur relative absolue tend vers 0. Cela ce justifier facilement car lorsque on augmente le capital ( $u$ ) la probabilité de ruine diminuer ce qui se confirme par les figures précédentes.

### 3.5 Autre méthode de dérivée

Dans cette section on a présenté les figures de la perturbations des paramètres de la probabilité de ruine avec deux méthodes différentes de dérivation numérique décrite dans le chapitre précédent :

La première c’est *la Dérivée à gauche* est donnée par la formule suivante :

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}.$$

Et l'autre c'est *la Dérivée à droite* est défini par :

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

### 3.5.1 Dérivation par rapport au paramètre $\mu$

**Algorithme 4:** Algorithme de la dérivée à gauche

**Début**

**Entrées :**  $\lambda, \mu, c, u$  et  $\Delta \in [0, 0.1]$ .

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right);$$

**Sorties :** La figure de la dérivée à gauche;

1. Calculer la valeur de dérivé  $\psi'(\mu) \simeq \frac{\psi(\mu) - \psi(\mu - \Delta)}{\Delta}$ .

**Fin.**

**Algorithme 5:** Algorithme de la dérivée à droite

**Début**

**Entrées :**  $\lambda, \mu, c, u$  et  $\Delta \in [0, 0.1]$ .

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right);$$

**Sorties :** La figure de la dérivée à droite;

1. Calculer la valeur de dérivé  $\psi'(\mu) \simeq \frac{\psi(\mu + \Delta) - \psi(\mu)}{\Delta}$ .

**Fin.**

L'implémentation de l'algorithme 4 et 5 sous l'environnement **MATLAB** avec  $u=10, \mu = 0.9, c=1.5$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

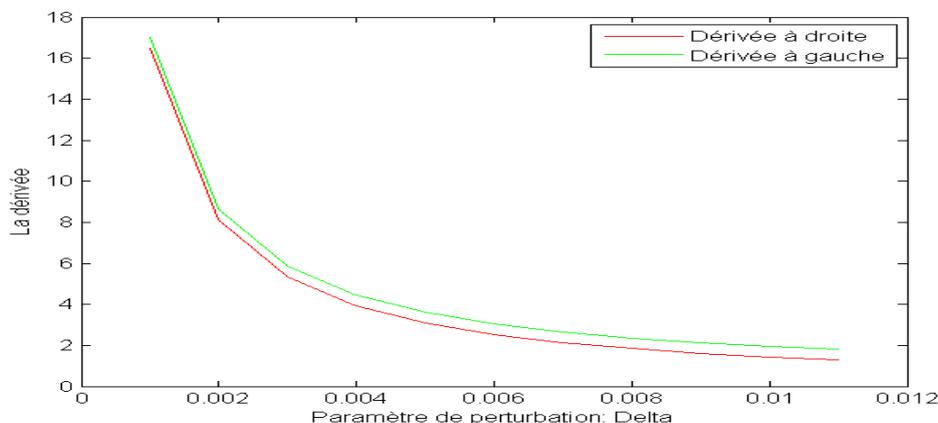


FIGURE 3.8 – Graphe représentatif de la dérivée à droite et à gauche de  $\psi(\mu)$ .

On constate que la probabilité de ruine admet une dérivée à gauche et une autre dérivée à droite qui sont similaire.

On remarque que les valeurs obtenues par la méthode de dérivation sont presque similaire au résultat obtenue de la borne, ce qui nous permet de conclure sur l'efficacité de celle ci.

Pour confirmer l'égalité des deux résultat obtenues par les deux dérivées on sera obligé de tendre le  $\Delta$  vers 0. car dans l'exemple précédent on c'est contentait de fixé  $\Delta$  à l'ordre  $10^{-2}$  pour qu'il soit identique à celui prit dans la démarche de calcule des erreurs relatives absolues. De ce fait, diminuant la valeur de  $\Delta = 10^{-3}$  on obtient le résultat suivant :

### Rappel :

La formule de dérivée à gauche lorsque  $h$  tend vers 0

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right].$$

La formule de dérivée à droite lorsque  $h$  tend vers 0

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right].$$

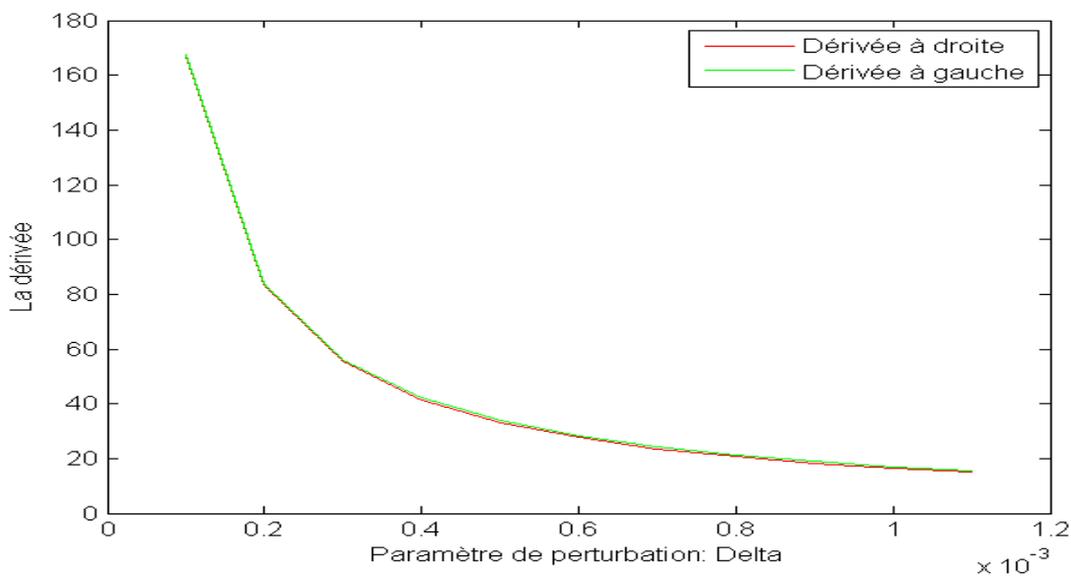


FIGURE 3.9 – Graphe représentatif de la dérivé à droite et à gauche de  $\psi(\mu)$ .

### 3.5.2 Dérivation par rapport au paramètre $\lambda$

On utilise les mêmes formule de la dérivée à gauche et à droite

**Algorithme 6:** Algorithme de la dérivée à gauche

**Début**

**Entrées :**  $\lambda, \mu, c, u$  et  $\Delta \in [0, 0.1]$ .

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right);$$

**Sorties :** La figure de la dérivée à gauche ;

1. Calculer la valeur de dérivé  $\psi'(\lambda) \simeq \frac{\psi(\lambda) - \psi(\lambda - \Delta)}{\Delta}$ .

**Fin.**

**Algorithme 7:** Algorithme de la dérivée à droite

**Début**

**Entrées :**  $\lambda, \mu, c, u$  et  $\Delta \in [0, 0.1]$ .

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\left(-u\left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right)\right);$$

**Sorties :** La figure de la dérivée à droite ;

1. Calculer la valeur de dérivé  $\psi'(\lambda) \simeq \frac{\psi(\lambda + \Delta) - \psi(\lambda)}{\Delta}$ .

**Fin.**

L'implémentation de l'algorithme 6 et 7 sous l'environnement **MATLAB** avec  $u=10, \mu = 0.9, c=1.5$  et  $\lambda = 1$ , on obtient les résultats représentés dans la figure suivante :

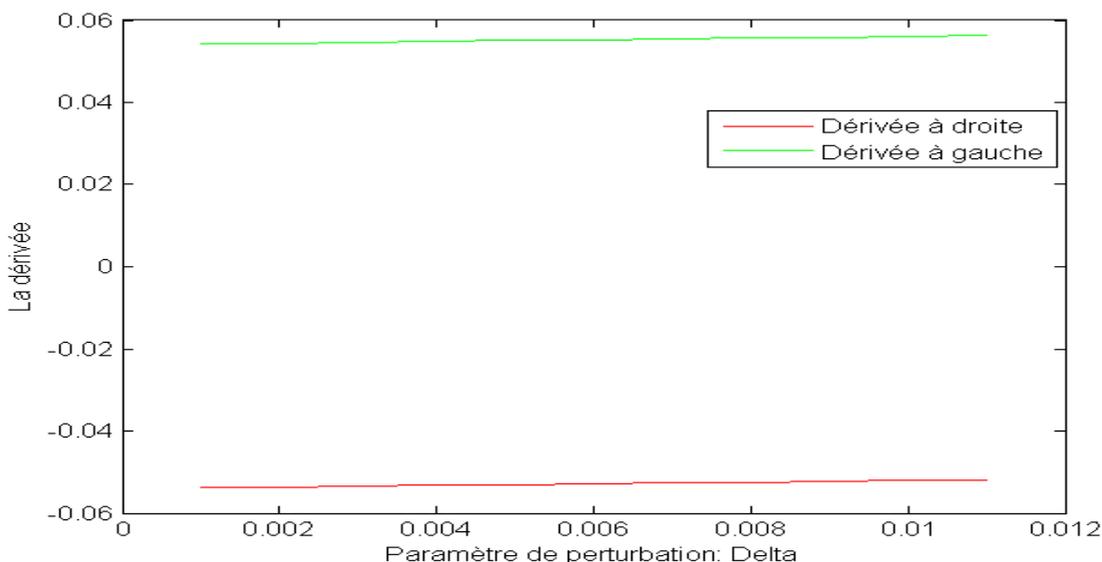


FIGURE 3.10 – Graphe représentatif de la dérivé à droite et à gauche de  $\psi(\lambda)$ .

On constate que  $\psi(\lambda)$  admet une dérivée à gauche et une autre dérivée à droite mais ils ont pas identique ce qui nous permet de conclure sur la non dérivabilité de la probabilité de ruine

par rapport au paramètre  $\lambda$ .

## Conclusion

DANS ce chapitre, nous avons pu illustrer l'analyse de sensibilité paramétrique sur le calcul de la probabilité de ruine dans les modèles de risques classiques ou on a considéré le montant de remboursement exponentielle.

On premier lieu nous avons pu construire une borne de la probabilité de ruine. De plus, on a calculer les erreurs relatives absolues de celle-ci sous différentes valeurs de capital initiale ( $u$ ). Enfin, une autre méthode a été aborder c'est-à-dire la méthode de dérivation numérique pour la confronter au résultat précédent.

## Conclusion générale

**L**a théorie du risque ayant un but de fournir différents outils mathématiques d'évaluation et de quantification des risques souscrits par les compagnies d'assurance et de réassurance. L'assurance être formé une opération de transfert de risque d'un assuré vers un assureur qui, en contrepartie d'une prime, s'engage à supporter les coûts financiers de sinistres éventuels. Afin de garantir le respect de leurs engagements auprès des assurés, les assureurs et ré-assureurs ont recours à une modélisation actuarielle des risques. La plus part des modèles mathématiques sont sans cesse développés pour répondre à une meilleure compréhension des risques et de leur amélioration.

Les méthodes de l'analyse de sensibilité sont de plus en plus utilisées dans tout processus de modélisation, soit pour améliorer la prédiction du modèle ou bien pour alléger le modèle et finalement pour mieux comprendre le phénomène étudié en analysant les différentes interactions entre variables. Dans ce contexte, la probabilité de ruine qui est la mesure de risque la plus importante pour la prise de décisions au sein d'une compagnie d'assurance, qui rarement possède des formules explicites pratiquement exploitables, nous mesurons la sensibilité de la sortie de cette probabilité sur la variation de ses paramètres d'entrée.

Initialement, nous avons rappelé quelques processus et notions de base sur quelques approches utilisées dans l'évaluation de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique. Ensuite nous avons détaillé deux méthodes d'analyse d'incertitude, une méthode qui nécessite aucune hypothèse sur le modèle, et une autre méthode basés sur la dérivation numérique. Finalement, nous avons terminé par une courte étude bibliographique sur l'incertitude des modèles.

La contribution majeure de ce travail consiste à analyser l'incertitude dans le modèle de risque classique. En effet avons obtenu une borne associée à la probabilité de ruine. De plus, nous avons appliqué les dérivations numériques sur le modèle exponentielle.

Enfin, nous avons élaboré un algorithme en se basant sur la méthode de dérivation afin de quantifier cette incertitude. Une fois l'algorithme construit, nous sommes passés à son implémentation sous l'environnement **MATLAB** les résultats obtenus nous permettent de bien caractériser la probabilité de ruine.

Ce projet de recherche reste une opportunité pour aspirer à d'autres problématiques. En effet, ce dernier représente une base intéressante pour d'éventuelles perspectives prometteuses telles que :

- Étude de ce modèle dans le cas de la perturbation simultanées des deux paramètres, ainsi que leur dépendance.
- Élargir l'analyse de sensibilité pour d'autres modèles de risque qui cernent mieux la réalité, en tenant compte des différents comportements des paramètres qui gouvernent le modèle, comme la variation de la prime et la dépendance entre les risques.
- Élargissement de la prise en considération de l'incertitude, sur le modèle de risque classique.
- Considérer les paramètres du modèles de risques comme processus aléatoire.

## Bibliographie

- [Abramson 1993] LR Abramson. *Model uncertainty form a regulatory point of view*. In Workshop, Model Uncertainty : its Characterization and Qualification, Anapolis (Maryland, USA), 1993.
- [Asmussen 1984] Søren Asmussen. *Approximations for the probability of ruin within finite time*. Scandinavian Actuarial Journal, vol. 1984, no. 1, pages 31–57, 1984.
- [Asmussen 2000] S Asmussen. *Ruin Probabilities*, World Sci. Publ. Co., Singapore, 2000.
- [Ayyub 2006] Bilal M Ayyub et George J Klir. *Uncertainty modeling and analysis in engineering and the sciences*. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [Baynat 2000] Bruno Baynat. *La théorie des files d'attente : des chaînes de markov aux réseaux à forme produit*. Hermès, 2000.
- [Cai 2002] Jun Cai. *Ruin probabilities with dependent rates of interest*. Journal of applied probability, vol. 39, no. 2, pages 312–323, 2002.
- [Cramér 1930] H Cramér. *On the mathematical theory of risk*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm. Reprinted in : MartinLof, A.(Ed.) Cramer, H.(1994). *Collected Works*, 1930.
- [Crestaux 2011] Thierry Crestaux. *Méthode adaptative d'intégration multi-dimensionnelle et sélection d'une base de polynômes de chaos*. PhD thesis, Paris 13, 2011.
- [De Vylder 1995] F De Vylder et E Marceau. *Explicit analytic ruin probabilities for bounded claims*. Insurance : Mathematics and Economics, vol. 16, no. 1, pages 79–105, 1995.
- [De Vylder 1996] Florent Etienne De Vylder. *Advanced risk theory : a self-contained introduction*. Éd. de l'Univ. de Bruxelles, 1996.
- [De Vylder 1997] F De Vylder, Marc Goovaerts et E Marceau. *The bi-atomic uniform minimal solution of Schmitter's problem*. Insurance : Mathematics and Economics, vol. 20, no. 1, pages 59–78, 1997.
- [Dufresne 1988] François Dufresne et Hans U Gerber. *The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin*. Insurance : mathematics and Economics, vol. 7, no. 3, pages 193–199, 1988.
- [Fajraoui 2014] Noura Fajraoui. *Analyse de sensibilité globale et polynômes de chaos pour l'estimation des paramètres : Application aux transferts en milieu poreux*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2014.

- [Gerber 1979] Hans U Gerber. An introduction to mathematical risk theory. Numéro 517/G36i. 1979.
- [Grandell 1991] Jan Grandell. *The classical risk model*. In Aspects of Risk Theory, pages 1–32. Springer, 1991.
- [Grimmett 2004] Geoffrey Grimmett. *The random-cluster model*. In Probability on discrete structures, pages 73–123. Springer, 2004.
- [Haimès 2009] Y Haimès. *Risk Modeling, Assessment, and Management*.-3-rd edition, John Wiley & Sons, Inc. 2009.
- [Hössjeri 1994] Ola Hössjeri et David Ruppert. *Taylor series approximations of transformation kernel density estimators*. Journal of Nonparametric Statistics, vol. 4, no. 2, pages 165–177, 1994.
- [Ken-Iti 1999] Sato Ken-Iti. Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge university press, 1999.
- [Kyprianou 2006] Andreas E Kyprianou. Introductory lectures on fluctuations of lévy processes with applications. Springer Science & Business Media, 2006.
- [Lloyd 2007] Shannon M Lloyd et Robert Ries. *Characterizing, propagating, and analyzing uncertainty in life-cycle assessment : a survey of quantitative approaches*. Journal of industrial ecology, vol. 11, no. 1, pages 161–179, 2007.
- [Lundberg 1993] F Lundberg. *Approximerad framställning*. Almqvist Wiksell, 1993.
- [Malaval 1999] Frédéric Malaval. Développement durable, assurances et environnement. Economica, Editions (FR), 1999.
- [Oberkampf 2002] William L Oberkampf, Sharon M DeLand, Brian M Rutherford, Kathleen V Diegert et Kenneth F Alvin. *Error and uncertainty in modeling and simulation*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 75, no. 3, pages 333–357, 2002.
- [Panjer 1981] Harry H Panjer. *Recursive evaluation of a family of compound distributions*. ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA, vol. 12, no. 1, pages 22–26, 1981.
- [Pulkkinen 1996] Urho Pulkkinen et Tapio Huovinen. *Model uncertainty in safety assessment*. 1996.
- [Rolski 2009] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt et Jozef L Teugels. Stochastic processes for insurance and finance, volume 505. John Wiley & Sons, 2009.
- [Ross 1996] Sheldon M Ross, John J Kelly, Roger J Sullivan, William James Perry, Donald Mercer, Ruth M Davis, Thomas Dell Washburn, Earl V Sager, Joseph B Boyce et Vincent L Bristow. Stochastic processes, volume 2. Wiley New York, 1996.
- [Ross 2014] Sheldon M Ross. Introduction to probability models. Academic press, 2014.
- [Saltelli 2006] Andrea Saltelli, Marco Ratto, Stefano Tarantola, Francesca Campolongo, European Commission et al. *Sensitivity analysis practices : Strategies for model-based inference*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 91, no. 10-11, pages 1109–1125, 2006.

- [Schiff 1999] Joel L Schiff. *The laplace transform : theory and applications*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [Silverman 1986] BW Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, London, 1986. Crossref, á, 1986.
- [Teugels 1982] JL Teugels. *Estimation of the ruin probability, insurance*. Mathematics and Economics, vol. 14, pages 169–175, 1982.
- [Tsybakov 2009a] Alexandre B Tsybakov. *Lower bounds on the minimax risk*. In Introduction to Nonparametric Estimation, pages 77–135. Springer, 2009.
- [Tsybakov 2009b] Alexandre B Tsybakov. *Nonparametric estimators*. In Introduction to Nonparametric Estimation, pages 1–76. Springer, 2009.
- [Turányi 1990] Tamás Turányi. *Sensitivity analysis of complex kinetic systems. Tools and applications*. Journal of mathematical chemistry, vol. 5, no. 3, pages 203–248, 1990.
- [Vatamidou 2012] E Vatamidou, IJBF Adan, M Vlasiou et AP Zwart. *On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models*. 2012.
- [Wagschal 1999] Claude Wagschal. *Dérivation, intégration*. Editions Hermann, 1999.
- [Walters 2002] Robert W Walters et Luc Huyse. *Uncertainty analysis for fluid mechanics with applications*. 2002.
- [Willmot 1997] GE Willmot et Xiaodong Lin. *Simplified bounds on the tails of compound distributions*. Journal of Applied Probability, vol. 34, no. 1, pages 127–133, 1997.



---

## Résumé

---

**D**ANS ce mémoire, nous considérons une analyse de sensibilité pour le modèle de risque classique, en généralisant la méthodologie de la probabilité de ruine . Ensuite, nous dérivons une borne efficace de remboursement de la probabilité de ruine. De plus, en utilisant les différentes méthodes de dérivations numériques. L'efficacité de la méthode proposée est montrée avec des exemples numériques.

**Mots clés :** Théorie de la ruine ; Analyse d'incertitude ; Analyse de sensibilité ; Propagation d'incertitude ; Modèle de risque classique ; dérivabilité ; Incertitude paramétrique.

---

## Abstract

---

**I**N this work, we consider sensitivity analysis for the classical risk model, generalizing the methodology of the ruin probability. Then we derive an effective reimbursement limit from the probability of ruin. Otherwise, using the different methods of numerical derivations. The effectiveness of the proposed method is shown with numerical examples.

**Keywords :** : Ruin Theory ; Uncertainty analysis ; Sensitivity analysis ; Uncertainty propagation ; Classic risk model ; Differentiability ; Parametric uncertainty.

