

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



MÉMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de MASTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

Présenté par :

MAOUCHE Khoula

THÈME

Dynamique d'un modèle mathématique épidémiologique

Soutenue le 29 septembre 2021, devant le jury composé de :

Mme. A. NASRI	M.A.A U. BÉJAIA	Présidente
Mme. N. MOHDEB	M.C.A U. BÉJAIA	Promotrice
Mme. A. BOULEKROUN	M.A.A U. BÉJAIA	Examinatrice

Promotion 2020/2021

Remerciements

La louange est à Allah le tout puissant qui m'a donné le courage, la patience et la force, et qui m'a guidée et a éclairé mon chemin pour la réalisation de ce mémoire.

J'exprime toute ma gratitude, mon admiration, et mon profond respect à :

*ma promotrice **Mme N. MOHDEB**, pour sa disponibilité, ses encouragements, ses conseils, sa patience et son soutien tout au long de cette période du travail.*

je remercie également les membres du jury :

***Mme A. NASRI** pour l'honneur qu'elle m'a fait de présider le jury et d'évaluer ce travail.*

***Mme A. BOULEKROUN** pour l'honneur qu'elle m'a fait d'examiner le mémoire.*

Enfin, je remercie tous mes enseignants qui m'ont accompagnée durant mon cursus de formation et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à tous ceux et celles qui m'ont aidée de proche ou de loin notamment :

Ma chère maman qu'Allah la garde à moi.

l'âme de mon papa grâce d'Allah étant sur lui et qu'Allah lui accueille dans ses vastes paradis

mes chers frères et mes chères soeurs ainsi que leurs marré(e)s.

mes neveux et mes nièces que j'adore.

tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

toutes mes amies qui m'ont toujours soutenue.

toute la promotion mathématique 2020/2021.

Toute la famille MAOUCHE.

Tous ceux qui ont le mérite pour que ce travail soit réalisé.

Khouloua

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Quelques notions de base	2
1.1.1 Équations différentielles ordinaires du premier ordre	2
1.1.2 Portrait de phase	3
1.2 Nature des points d'équilibre selon la trace et le déterminant de la matrice A (cas linéaire)	8
1.3 Fonctions de Liapounov	10
2 Le modèle épidémiologique SIR	12
2.1 Présentation du modèle	12
2.1.1 Équations du modèle	13
2.1.2 Interprétation biologique	13
2.1.3 Écriture en dimension 2	13
2.1.4 Points d'équilibre	14
2.1.5 Isoclines	15
2.1.6 Stabilité des points d'équilibre	16
2.1.7 Portrait de phase	18
3 La bifurcation backward	22

3.1	Exemple de bifurcation backward avec une fonction de traitement	22
3.1.1	Interprétation des termes du modèle	23
3.1.2	Les points d'équilibre :	23
3.1.3	Analyse de la stabilité :	29
3.1.4	Synthèse	34
	Conclusion	35
	Bibliographie	37

Introduction

Beaucoup de phénomènes réels (physiques, biologiques, économiques, ...) sont modélisés par des systèmes dynamiques, voir des équations différentielles ordinaires. Pour mieux comprendre ces phénomènes il s'agit d'étudier les propriétés des solutions de ces équations différentielles ordinaires.

Ce mémoire a pour objet de donner quelques notions de base, de présenter un modèle épidémiologique à savoir le modèle SIR, et de présenter un type de bifurcation dit "bifurcation backward".

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est entièrement consacré à la présentation de quelques notions préliminaires, concernant les solutions des équations différentielles : champ de vecteurs, portrait de phase et fonction de Liapounov

Dans le deuxième chapitre, on a exposé un modèle qui a été développé pour décrire la dynamique d'une épidémie à savoir le modèle SIR.

Quant au troisième chapitre, on a présenté un type de bifurcations qui trouve un large champ d'application dans les systèmes épidémiologiques dit "bifurcation backward".

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques notions de base

1.1.1 Équations différentielles ordinaires du premier ordre

Définition 1.1. [4] On note $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $D = I \times \Omega$ où I est un ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de E et $f : D \rightarrow E$ une fonction continue. Pour tout $(t, x) \in D$, on notera $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ où chaque fonction f_i est continue de D dans \mathbb{R} . Une équation différentielle du premier ordre s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.1)$$

Si la fonction f dépend explicitement du temps, l'équation (1.1) est dite non autonome.

On dit que l'équation (1.1) est autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.2)$$

Nous allons limiter dans ce travail notre étude aux équations différentielles autonomes.

Remarque 1.1. [4] L'équation différentielle (1.2) est du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée d'ordre 1 de la variable x .

Définition 1.2. [4] On dit que l'équation différentielle (1.2) est linéaire si f est une fonction du premier degré par rapport à la variable x . Sinon on dit qu'elle est non linéaire.

Une solution $x(t, x_0)$ de l'équation différentielle (1.1) est une fonction du temps qui vérifie l'équation différentielle. On peut penser à un point mobile dont l'abscisse x change avec le temps. Une solution particulière dépend de la condition initiale x_0 , c'est-à-dire de la valeur de la variable à un instant initial t_0 ,

$$x_0 = x(t_0).$$

Définition 1.3. [2] On dira que f est lipschitzienne en x et on notera $f \in Lip(D)$, s'il existe $k > 0$ tel que

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \|_E \leq k \| x_1 - x_2 \|_E, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D$$

Définition 1.4. [2] On dira que f est localement lipschitzienne sur D si pour tout $(t, x) \in D$ il existe un cylindre $B = \{(t', x') \in D, \| x - x' \|_E < \epsilon_1, |t - t'| < \epsilon_2\} \subset D$ et une constante $k > 0$ tels que f soit lipschitzienne sur B . On note $f \in Lip_{loc}(D)$.

Théorème 1.1. [2] (Cauchy-Lipschitz) Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$, (on dit que $f \in C(D)$ si f est continue sur D), il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

1.1.2 Portrait de phase

1. Points d'équilibre : [4]

En général, on ne sait pas résoudre l'équation différentielle (1.2). On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude commence par la recherche des points d'équilibre (encore appelés singularités, points stationnaires, ou simplement équilibres) de l'équation différentielle.

Définition 1.5. [4] Les équilibres, (que nous notons x^*), vérifient l'équation suivante :

$$f(x^*) = 0$$

Remarque 1.2. [4] *En un point d'équilibre la vitesse s'annule :*

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

Une équation différentielle peut admettre un point d'équilibre, plusieurs points d'équilibre, ou aucun point d'équilibre.

On distingue deux types de points stationnaires :

Définition 1.6. [3] [5] *Considérons la forme générale d'un système de deux équations différentielles ordinaires autonomes suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.4)$$

où x et y sont deux fonctions dérivables de t à valeurs réelles.

Un point stationnaire (x^, y^*) du système (1.4) est dit **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x^*, y^*)$, où $F = (f, g)$, ont la partie réelle non nulle.*

*Dans le cas contraire, il est dit **non-hyperbolique**.*

- Si au moins une des deux valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x^, y^*)$ est nulle,*

On parle d'un point stationnaire dégénéré.

- Si une seule valeur propre de la matrice Jacobienne $D_F(x^, y^*)$ est nulle, on dit dans ce cas que le point stationnaire est semi-hyperbolique.*

- Si les deux valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x^, y^*)$ sont nulles, la singularité est dite non élémentaire.*

2. Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre :

Considérons la forme générale d'un système de deux équations différentielles ordinaires autonomes (1.4) où x et y sont deux fonctions dérivables de t à valeurs réelles. On suppose que le système (1.4) vérifie les conditions du théorème (1.1) de Cauchy-Lipschitz. On suppose en particulier que f et g sont au moins de classe C^1 .

La démarche pour l'étude d'un système de deux équations différentielles est la même

que celle utilisée pour une seule équation. La première étape consiste à rechercher les équilibres et à déterminer leur propriété de stabilité locale. Un point d'équilibre (x^*, y^*) du système (1.4) est un point où la vitesse est nulle. Un point d'équilibre est donc défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Un système d'équations différentielles ordinaires peut admettre aucun, un seul ou plusieurs points d'équilibre. Pour avoir des informations sur la stabilité locale d'un point d'équilibre, on procède à la linéarisation du système au voisinage de chaque point d'équilibre.

Soient $(u(t), v(t))$ les coordonnées locales au voisinage d'un point d'équilibre donné (x^*, y^*) :

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x^* \\ v(t) = y(t) - y^* \end{cases}$$

Si les variables locales $u(t)$ et $v(t)$ tendent vers 0, alors la trajectoire tend vers l'équilibre (x^*, y^*) . Pour linéariser le système différentiel (1.4), on recherche le système d'équations qui gouverne les variables (u, v) en faisant une approximation du premier ordre au voisinage du point d'équilibre. Comme f et g sont de classe C^1 , on peut écrire le système (1.4) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + R_1(x - x^*, y - y^*) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + R_2(x - x^*, y - y^*) \end{cases} \quad (1.6)$$

En utilisant les relations définissant le point d'équilibre, c'est-à-dire

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$$

après substitution des coordonnées locales dans les équations du système (1.6) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 dans le développement de Taylor, nous obtenons le

système linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\ \dot{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v \end{cases} \quad (1.7)$$

qu'il est possible de réécrire sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

On note la matrice Jacobiennne A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Le modèle linéaire s'obtient donc en calculant la Jacobienne au point d'équilibre du système (1.4). On a aussi :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Le modèle linéaire (1.10) est aussi appelé la partie linéaire du système (1.4) au voisinage d'un équilibre (x^*, y^*) . Ce modèle est un modèle plus simple que le système non linéaire initial (1.4) dont il est issu, car il est linéaire. Cependant ce n'est pas une approximation du système (1.4) au premier ordre qui n'a de sens que dans un voisinage immédiat d'un point d'équilibre de ce système. [4]

3. Trajectoires, Isoclines :

Définition 1.7. [4] On appelle *trajectoire* (ou orbite) du système (1.4), l'ensemble parcourru dans le plan (x, y) par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t parcourt \mathbb{R} .

En d'autres termes, une trajectoire du système (1.4) est l'ensemble des points du plan

$$\{(x(t), y(t)); t \in \mathbb{R}\}$$

Définition 1.8. [4] Les *isoclines zéros* du système (1.4) sont les lieux des points du plan (x, y) où des composantes du vecteur vitesse sont nulles.

Par conséquent en dimension deux, il existe deux types d'isoclines zéro :

Définition 1.9. [4] *Les isoclines vérifiant $\dot{x} = f(x, y) = 0$, sont appelées isoclines **verticales** du système (1.4). La composante "horizontale" est nulle.*

Lorsqu'une trajectoire coupe une isocline $\dot{x} = 0$, la direction du vecteur vitesse, qui est tangent à la trajectoire, est verticale.

Définition 1.10. [4] *Les isoclines vérifiant $\dot{y} = g(x, y) = 0$, qui sont appelées isoclines **horizontales** du système (1.4). La composante "verticale" de la vitesse y est nulle.*

Lorsqu'une trajectoire coupe une isocline $\dot{y} = 0$, la direction du vecteur vitesse, qui est tangent à la trajectoire, est horizontale.

Bien sûr, les points d'équilibre doivent annuler les deux composantes du vecteur vitesse et se trouvent par conséquent à l'intersection des isoclines horizontales et verticales. En pratique, lorsque cela est possible, il est donc très utile de tracer le graphe des isoclines afin d'identifier les points d'équilibre à leurs intersections.

4. Champ de vecteurs :

Définition 1.11. [4] *L'application*

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$$

définit un champ de vecteurs.

À chaque point $M = (x, y)$ du plan, on associe le vecteur $V(M) = (f(x, y), g(x, y))$. Un champ de vecteurs associé au système (1.4) est donné par la propriété suivante :

En tout point M du plan où $V(M) \neq 0$, la trajectoire passant par M est tangente à $V(M)$.

Pratiquement, pour présenter le champ de vecteurs associé au système (1.4), on se donne un quadrillage de la partie du plan choisie ; en chaque point de ce quadrillage, on trace

un petit vecteur égal, ou colinéaire à $V(M)$.

en observant le champ de vecteurs, on a déjà une idée du comportement des trajectoires.

5 . Tracé du portrait de phase :

Nous allons étudier la façon dont les trajectoires du système (1.4) s'organisent dans le plan et notamment comment elles se comportent près des points où $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ s'annulent simultanément, c'est-à-dire près des points stationnaires.

Définition 1.12. [4] *On appelle portrait de phase d'un système différentiel l'ensemble de ses trajectoires.*

Dans la pratique, tracer le portrait de phase d'un système de dimension deux, c'est tracer dans le plan (x, y) , suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.

1.2 Nature des points d'équilibre selon la trace et le déterminant de la matrice A (cas linéaire)

Nous allons voir ici que la nature des points stationnaires d'un système linéaire homogène à coefficients constants de dimension deux ne dépend que de la trace et du déterminant de la matrice associée à ce système.

où

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$$

et

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme caractéristique de la matrice A

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

Notons

$$\text{disc} = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

le discriminant de ce polynôme.

La classification des points stationnaires du système différentiel $\dot{X} = AX$ tel que $X = (x, y)$ s'exprime comme ceci :

- 1 . Si $disc > 0$ (c'est-à-dire si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles), alors :
 - si $det(A) > 0$, l'origine est un noeud, attractif si $tr(A) < 0$ et répulsif si $tr(A) > 0$.
 - si $det(A) < 0$, l'origine est un col.
- 2 . Si $disc < 0$ (c'est-à-dire si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées), alors :
 - si $tr(A) < 0$, l'origine est un foyer attractif.
 - si $tr(A) = 0$ (c'est-à-dire si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures), l'origine est un centre.
 - si $tr(A) > 0$, l'origine est un foyer répulsif.

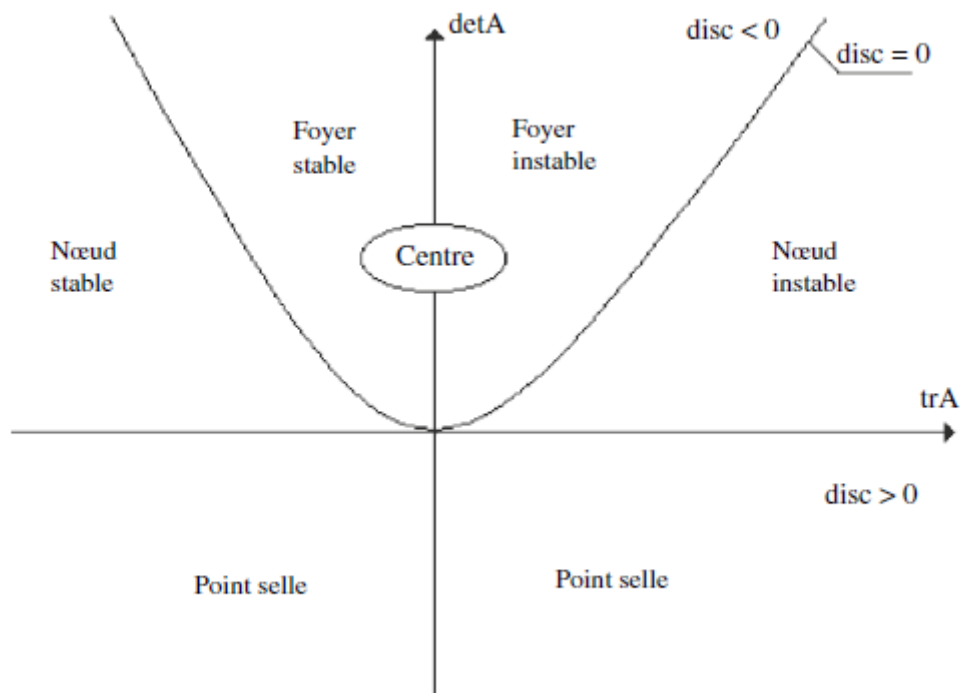


FIGURE 1.1 – Typographie des systèmes planaires en dimension 2 en fonction de la trace et du déterminant de la matrice A dans le cas $detA \neq 0$.

1.3 Fonctions de Liapounov

Une fonction de Liapounov est un outil permettant de déterminer par exemple la stabilité d'un point d'équilibre d'un point de vue global et non seulement local. Par ailleurs, une fonction de Liapounov peut également être utilisée pour déterminer la stabilité d'un équilibre non hyperbolique, c'est-à-dire lorsque la linéarisation ne permet pas de conclure. Pour commencer définissons ce qu'est une fonction définie positive.

Définition 1.13. *Fonction définie positive [4]*

On appelle fonction définie positive (respectivement négative) une fonction $V(x, y)$ définie, différentiable et de différentielle continue sur un ouvert D contenant l'origine et vérifiant les propriétés suivantes :

- 1 . $V(0, 0) = 0$
- 2 . $\forall (x, y) \in D, (x, y) \neq 0, V(x, y) > 0$ (respectivement $V(x, y) < 0$)

Théorème 1.2. *Théorème de stabilité de Liapounov [4]*

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

admettant l'origine comme point d'équilibre. S'il existe une fonction réelle d'une variable réelle $V(x, y)$ définie dans un voisinage de l'origine telle que :

- 1 . Les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ existent et sont continues.
- 2 . $V(x, y)$ est définie positive.

Si \dot{V} est définie négative, alors l'origine est un équilibre asymptotiquement stable.

On dit que la fonction V est une fonction de Liapounov forte.

Si \dot{V} est définie positive, alors l'origine est un équilibre instable.

Il y a des cas où il est impossible de trouver une fonction de Liapounov forte, c'est-à-dire que l'on a seulement $\dot{V} \leq 0$ sur un domaine contenant l'équilibre. Il y a des points du domaine où

$\dot{V} = 0$. Dans ce cas, On dit que la fonction de Liapounov est faible et on a alors : l'équilibre est stable mais pas nécessairement asymptotiquement stable.

Remarque 1.3. La fonction \dot{V} est donnée par :

$$\dot{V}(t, x(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) / \frac{dx}{dt}(t) \right) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t))$$

où "/" : représente le produit scalaire.

Chapitre 2

Le modèle épidémiologique SIR

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle qui a été développé par "Kermack" et "McKendrick" en 1927 pour décrire la dynamique d'une épidémie. Ce chapitre est essentiellement inspiré du livre [4]

2.1 Présentation du modèle

Ce modèle distingue trois classes d'individus selon leur sensibilité vis-à-vis d'une maladie contagieuse :

- Les individus sains notés par (S) : sont sains et peuvent être contaminés.
- Les individus infectés notés par (I) : peuvent contaminer les individus sains, le taux de contamination est β . les individus infectés meurent de la maladie avec un taux ν .
- Les individus immunisés ou remis notés par (R) : ont été infectés et sont immunisés quelques temps contre la maladie. Ils redeviennent ensuite sains avec un taux γ .

2.1.1 Équations du modèle

Les équations différentielles décrivant le modèle SIR sont présentées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS + \gamma R \\ \dot{I} = \beta IS - \nu I \\ \dot{R} = \nu I - \gamma R \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.2 Interprétation biologique

Dans le modèle SIR donné par le système (2.1), on a :

- βIS est le terme d'interaction entre les individus sains et les individus infectés. C'est la quantité d'individus sains devenant infectés par unité de temps.
- νI est la quantité d'individus infectés qui guérissent par unité de temps.
- γR est la quantité d'individus immunisés qui perdent leur immunité par unité de temps.

2.1.3 Écriture en dimension 2

Si on note par $N = S + I + R$ la taille de la population étudiée, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \\ &= \beta IS - \beta IS + \gamma R - \gamma R + \nu I - \nu I \\ &= 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

Ceci est équivalent à

$$N = N_0$$

Ce qui est conforme au fait que l'effectif de la population N est constant.

On peut donc réduire ce système à un système à deux dimensions en S et I .

On aura ainsi, à tout instant

$$R = N_0 - S - I \quad (2.2)$$

En utilisant la relation (2.2), le modèle SIR (2.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{S} = \gamma(N_0 - S - I) - \beta IS \\ \dot{I} = \beta IS - \nu I \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.4 Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système (2.3) sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \gamma(N_0 - S - I) - \beta IS = 0 \\ \beta IS - \nu I = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

En additionnant l'équation (1) et (2) du système (2.4), on obtient :

$$S = N_0 - \left(1 + \frac{\nu}{\gamma}\right)I$$

L'équation (2) du système (2.4) donne :

$$(\beta S - \nu)I = 0$$

Ce qui donne :

$$S = \frac{\nu}{\beta} \text{ ou } I = 0$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} S = N_0 - \left(1 + \frac{\nu}{\gamma}\right)I \\ I = 0 \text{ ou } S = \frac{\nu}{\beta} \end{cases}$$

- Lorsque $I_0^* = 0$, on aura : $S_0^* = N_0$, cet équilibre $(S_0^*, I_0^*) = (N_0, 0)$ signifie que tous les individus sont sains.

- Si $S_1^* = \frac{\nu}{\beta}$ alors,

$$I_1^* = \frac{\gamma(N_0 - S_1^*)}{\gamma + \nu}$$

C'est-à-dire :

$$I_1^* = \frac{\gamma(N_0 - \frac{\nu}{\beta})}{\gamma + \nu}$$

Finalement :

$$I_1^* = \frac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)}$$

le point (S_1^*, I_1^*) n'existe que si

$$N_0 > \frac{\nu}{\beta}.$$

2.1.5 Isoclines

L'isocline verticale associée au système (2.3) est donnée par

$$\dot{S} = 0.$$

L'isocline horizontale associée au système (2.3) est donnée par

$$\dot{I} = 0.$$

On a :

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \gamma(N_0 - S - I) - \beta IS = 0 \\ I(\beta S - \nu) = 0 \end{cases}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} I = \frac{\gamma(N_0 - S)}{\gamma + \beta S} = h(S) \\ I = 0 \text{ ou } S = \frac{\nu}{\beta} \end{cases}$$

Dans le plan (S, I) , l'isocline verticale est une hyperbole d'équation $I = h(S)$.

L'isocline horizontale est la réunion de l'axe horizontal et de la droite verticale $S = \frac{\nu}{\beta}$.

2.1.6 Stabilité des points d'équilibre

La matrice Jacobienne associée au système (2.3) en un point (S, I) , est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -\gamma - \beta I & -\gamma - \beta S \\ \beta I & \beta S - \nu \end{pmatrix}$$

Au point $(S_1^*; I_1^*)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\gamma - \beta I_1^* & -\gamma - \beta S_1^* \\ \beta I_1^* & 0 \end{pmatrix}$$

Ici, on a nécessairement $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, pour garantir l'existence du point d'équilibre (S_1^*, I_1^*) . Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} \text{tr}(M_1) = -\gamma - \beta I_1^* < 0 \\ \det(M_1) = \beta I_1^* (\gamma + \beta S_1^*) > 0 \end{cases}$$

On a ainsi le résultat suivant :

Proposition 2.1. (S_1^*, I_1^*) est asymptotiquement stable.

Au point (S_0^*, I_0^*) , la matrice Jacobienne s'écrit :

$$M_0 = \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma - \beta N_0 \\ 0 & \beta N_0 - \nu \end{pmatrix}$$

On a :

$$\text{tr}(M_0) = -\gamma + \beta N_0 - \nu \text{ et } \det(M_0) = -\gamma(\beta N_0 - \nu)$$

On distingue deux cas :

- 1^{er} cas : $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

on a dans ce cas :

$$\det(M_0) < 0.$$

D'où le résultat suivant :

Proposition 2.2. Si $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, alors le point d'équilibre $(S_0^*; I_0^*)$ est un point selle

- 2^{me} cas : $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$

Dans ce cas,

$$\det(M_0) > 0 \text{ et } \operatorname{tr}(M_0) < 0$$

Le discriminant $\Delta = (\det(M_0))^2 - 4\operatorname{tr}(M_0)$ est donné par

$$\Delta = (-\gamma - \beta N_0 + \nu)^2$$

On a ainsi le résultat suivant :

Proposition 2.3. *Si $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, alors le point d'équilibre $(S_0^*; I_0^*)$ est un noeud asymptotiquement stable.*

2.1.7 Portait de phase

1^{er} cas : $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

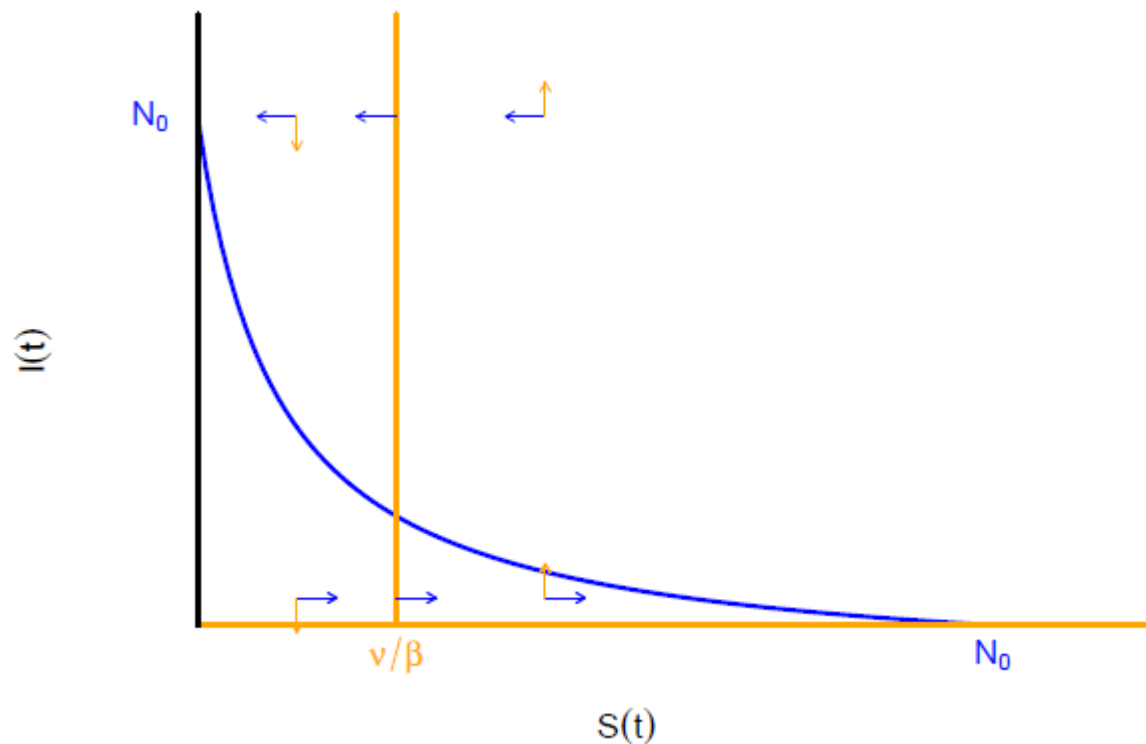


FIGURE 2.1 – Isoclines du système (2.3) quand $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

Interprétation du graphe : les isoclines horizontale et verticale et le champ de vecteurs du système (2.3) sont représentés sur la figure (2.1) lorsque $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$.

L'isocline horizontale est représentée avec la couleur orange, et l'isocline verticale est représentée avec la couleur bleue.

Les trajectoires et le portrait de phase du système différentiel (2.3) dans le cas où $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, sont représentés sur la figure (2.2).

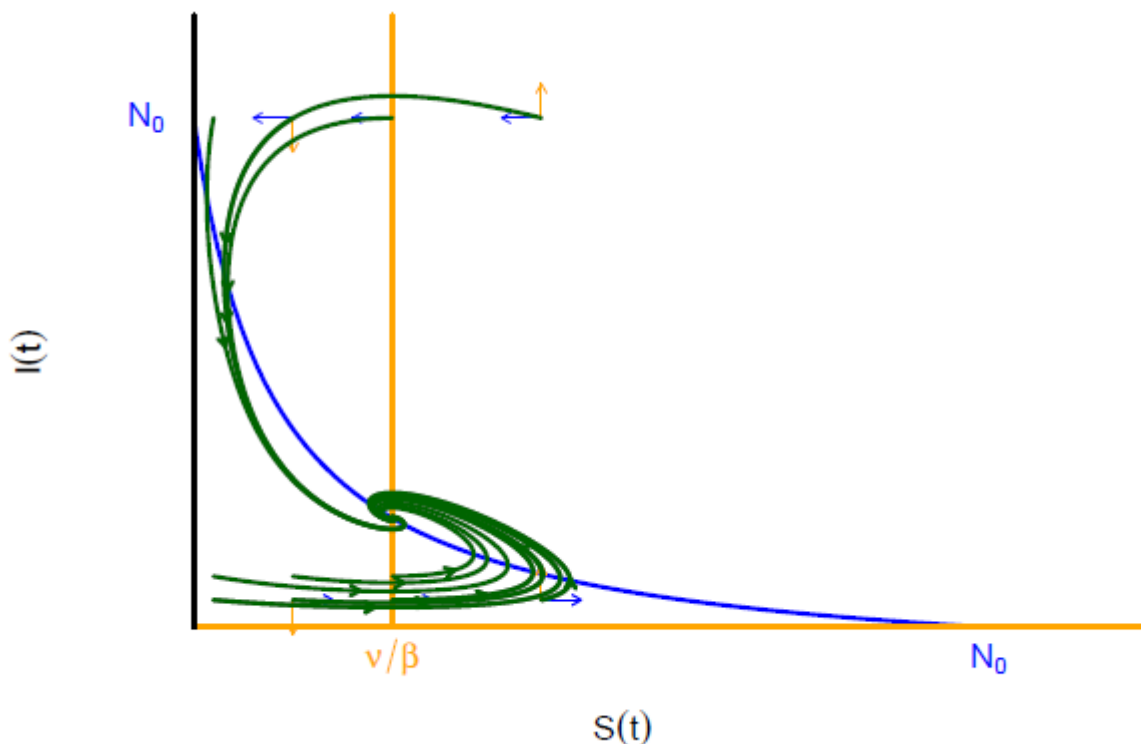


FIGURE 2.2 – Portrait de phase du système (2.3) quand $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$.

Interprétation du graphe : Dans ce cas, on a la coexistence de deux points d'équilibre (S_0^*, I_0^*) et (S_1^*, I_1^*) qui est asymptotiquement stable. On constate que les trajectoires du système (2.3) issues de la condition initiale (S_0^*, I_0^*) vérifiant $S_0 > 0$ et $I_0 > 0$, tendent vers le point d'équilibre (S_1^*, I_1^*) sachant que $S_1^* > 0$ et $I_1^* > 0$. Ainsi la maladie se stabilise et se maintient à un état d'équilibre.

2^{me}: cas : $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$

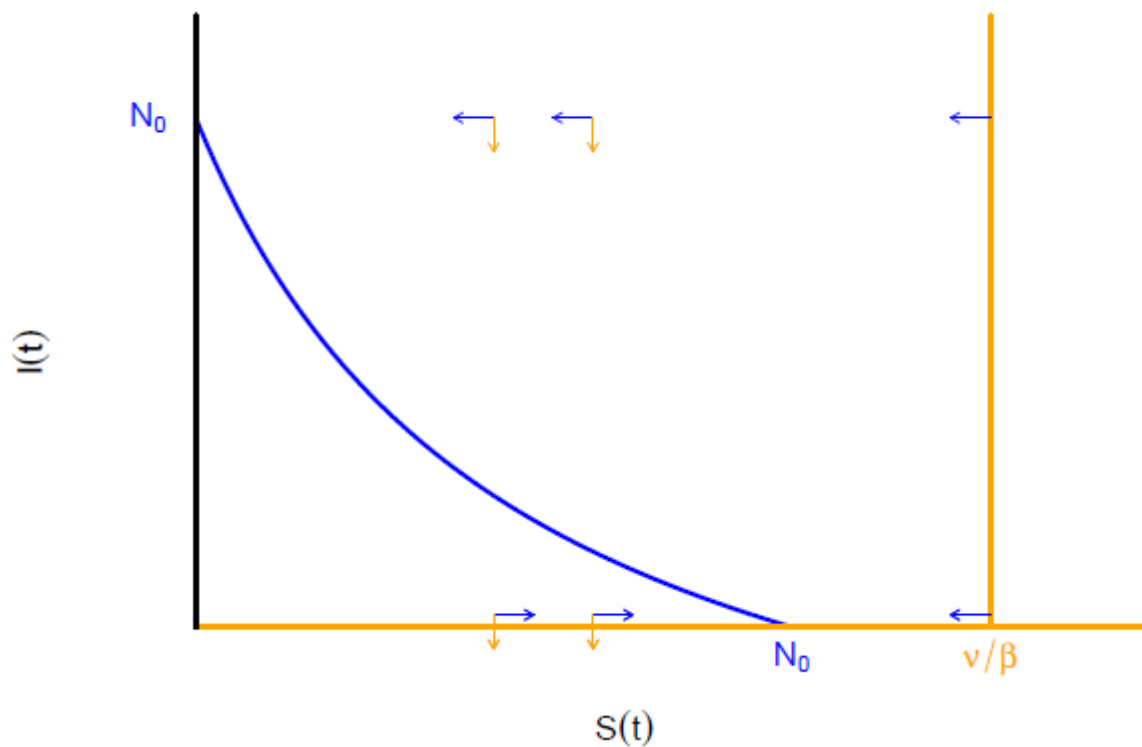


FIGURE 2.3 – Isoclines du système (2.3) quand $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$

Interprétation du graphe : Les isoclines horizontale et verticale et le champ de vecteurs du système (2.3) sont représentés sur la figure (2.3) lorsque $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$.

L’isocline horizontale est représentée avec la couleur orange, et l’isocline verticale est représentée avec la couleur bleue.

Les trajectoires et le portrait de phase du système différentiel (2.3) dans le cas où $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, sont représentés sur la figure (2.4).

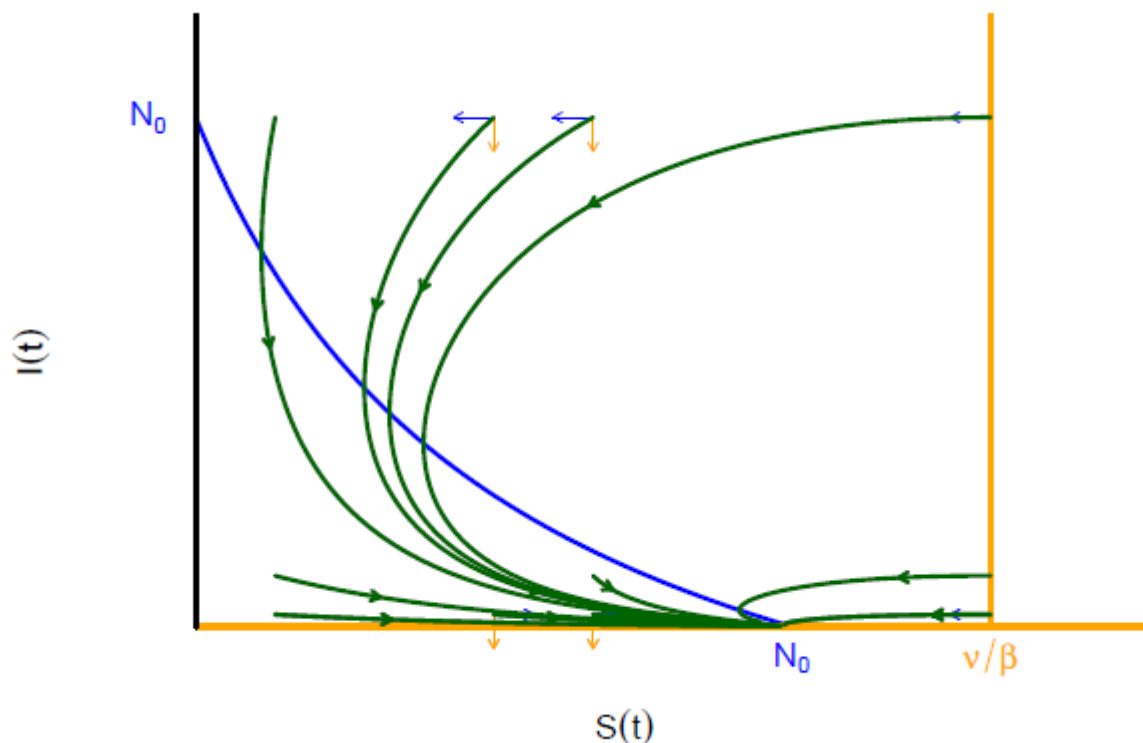


FIGURE 2.4 – Portrait de phase du système (2.3) quand $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$

Interprétation du graphe : Dans ce cas, le point d'équilibre (S_1^*, I_1^*) disparaît et n'existe plus et seul le point d'équilibre (S_0^*, I_0^*) existe, et il est dans ce cas asymptotiquement stable. On constate que toutes les trajectoires du système (2.3) issues de la condition initiale (S_0, I_0) telles que $S_0 > 0$ et $I_0 > 0$, tendent vers le point d'équilibre $(S_0^*, I_0^*) = (N_0, 0)$. Par conséquent dans le cas où $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, l'infection ne se maintient pas dans la population.

Chapitre 3

La bifurcation backward

Durant ces dernières années, la bifurcation backward dans le domaine de l'épidémiologie a suscité l'intérêt des chercheurs mathématiciens.

Ce chapitre est essentiellement inspiré de l'article [6]

Définition 3.1. [4] *Le changement qualitatif du comportement des solutions d'un système différentiel est dit "bifurcation". La valeur du paramètre associé est appelé "valeur de bifurcation".*

Définition 3.2. [1] *La bifurcation backward se produit lorsque un équilibre endémique stable coexiste avec un équilibre non endémique stable lorsque le nombre moyen des nouveaux cas infectés pendant la période d'infection soit plus petit que 1.*

3.1 Exemple de bifurcation backward avec une fonction de traitement

Considérons le modèle SIR suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = A - dS - \lambda SI \\ \dot{I} = \lambda SI - (d + \gamma)I - h(I) \\ \dot{R} = \gamma I + h(I) - dR \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$h(I) = \begin{cases} r \text{ si } I > 0 \\ 0 \text{ si } I = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.1 Interprétation des termes du modèle

Dans le modèle SIR (3.1), il est désigné par :

S : le nombre des susceptibles.

I : le nombre des infectés.

R : le nombre des remis.

Les paramètres d , λ , γ , r , R_0 sont des réels supposés positifs. On désigne par :

A : le nombre des naissances susceptibles ; dans ce modèle les naissances sont automatiquement susceptibles.

d : le taux de mortalité naturelle et ceci est supposé constant pour toutes les classes des individus.

λ : le taux de transmission.

γ : le taux de guérison (naturelle).

r : le nombre de médicaments stockés.

La fonction $h(I)$ représente la fonction de traitement qui représente le nombre des individus traités.

3.1.2 Les points d'équilibre :

Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $I(t) = 0$, le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{S} = A - dS \\ \dot{I} = 0, \text{ puisque dans ce cas } h(I) = 0. \\ \dot{R} = -dR \end{cases} \quad (3.3)$$

Les points d'équilibre du système (3.3) satisfont

$$\begin{cases} A - dS = 0 \\ I = 0 \\ -dR = 0 \end{cases}$$

Ainsi dans ce cas le système (3.3) n'admet qu'un seul point d'équilibre (S^*, I^*, R^*) tel que :

$$S^* = \frac{A}{d}, I^* = 0 \text{ et } R^* = 0.$$

Le point d'équilibre $(S^*, I^*, R^*) = (\frac{A}{d}, 0, 0)$ est l'équilibre en l'absence de l'épidémie.

Dans ce cas le système (3.3) est résoluble et admet pour solution :

$$\begin{cases} S(t) = S(t_0)e^{-dt} + \frac{A}{d}(1 - e^{-dt}) \\ I(t) = 0 \\ R(t) = R(t_0)e^{-dt} \end{cases} \quad (3.4)$$

On va s'intéresser maintenant au cas $I > 0$.

Les deux premières équations du système (3.1) ne dépendant pas de R .

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{S} = A - dS - \lambda SI \\ \dot{I} = \lambda SI - (d + \gamma)I - r \end{cases} \quad (3.5)$$

Du fait que

$$N = S + I + R$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} \\ &= A - dN \end{aligned}$$

Résolvons l'équation différentielle :

$$\dot{N} = A - dN \quad (3.6)$$

qui est équivalente à :

$$\dot{N} + dN = A$$

Résolvons d'abord l'équation homogène (sans second membre) :

$$\dot{N} + dN = 0$$

On a :

$$\dot{N} = -dN$$

D'où :

$$\log(N) = -dt + c, \text{ } c \text{ est une constante réelle}$$

D'où :

$$\begin{aligned} N_0(t) &= e^{-dt+c} \\ &= e^c e^{-dt} \\ &= C e^{-dt}, \text{ } C \text{ est une constante réelle.} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$N_0(t) = C e^{-dt}$$

Cherchons maintenant une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante :

On pose :

$$N(t) = C(t)e^{-dt} \tag{3.7}$$

On aura :

$$\dot{N}(t) = C'(t)e^{-dt} - dC(t)e^{-dt} \tag{3.8}$$

En substituant (3.7) et (3.8) par leurs valeurs dans (3.6), on aura :

$$C'(t) = A e^{dt}$$

D'où :

$$C(t) = \frac{A}{d} e^{dt} + B, \text{ } B \in \mathbb{R}$$

D'où :

$$\begin{aligned} N_p(t) &= \left(\frac{A}{d}e^{dt} + B\right)e^{-dt} \\ &= \frac{A}{d} + Be^{-dt} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$N(t) = \frac{A}{d} + Ee^{-dt}, \quad E \in \mathbb{R}$$

Où :

$N_0(t)$ est la solution de l'équation différentielle sans second membre associée à l'équation différentielle en question.

$N_p(t)$ est la solution particulière de l'équation différentielle en question.

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{d}$$

Ceci signifie que : $N^* = \frac{A}{d}$ est globalement stable.

On peut écrire donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0 \text{ telle que } \forall t > a, \left|N(t) - \frac{A}{d}\right| < \varepsilon$$

Dans ce cas, on peut considérer que la population est constante à long terme, et on peut alors écrire :

$$N(t) = N^* = \frac{A}{d}, \quad \forall t > a.$$

Taux de reproduction de base R_0

Le système (3.5) admet $(\frac{A}{d}, 0)$ comme point d'équilibre sans épidémie. Posons :

$$R_0 = \frac{\lambda A}{d(d + \gamma)}$$

C'est-à-dire : le nombre moyen de nouvelles infections causées par un individu dans toute la population susceptible.

Calcul des points d'équilibre endémiques

Les points d'équilibre du système (3.5) sont données par :

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \end{cases}$$

L'équation $\dot{S} = 0$ donne :

$$A - dS - \lambda SI = 0$$

qui implique que

$$S = \frac{A}{d + \lambda I}$$

L'équation $\dot{I} = 0$ donne :

$$\lambda SI - (d + \gamma)I - r = 0 \quad (3.9)$$

Remplaçant S par sa valeur dans (3.9), on obtient :

$$\lambda \frac{A}{d + \lambda I} I - (d + \gamma)I - r = 0 \quad (3.10)$$

Multiplions les deux termes de (3.10) par $(d + \lambda I)$ on trouve :

$$\lambda AI - d(d + \gamma)I - \lambda(d + \gamma)I^2 - r(d + \lambda I) = 0$$

Autrement dit :

$$-\lambda(d + \gamma)I^2 - I(d(d + \gamma) - \lambda A + r\lambda) - rd = 0 \quad (3.11)$$

Divisons les deux termes de (3.11) par $-d(d + \gamma)$, on aura :

$$\frac{\lambda}{d} I^2 - \left(\frac{\lambda A}{d(d + \gamma)} - \frac{r\lambda}{d(d + \gamma)} - 1 \right) I + \frac{r}{d + \gamma} = 0$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\lambda}{d} I^2 - (R_0 - H - 1)I + \frac{r}{d + \gamma} = 0 \quad (3.12)$$

avec

$$H = \frac{\lambda r}{d(d + \gamma)}$$

Discussion

Posons :

$$f(I) = \frac{\lambda}{d}I^2 - (R_0 - H - 1)I + \frac{r}{d + \gamma} = 0$$

On a :

$$f'(I) = \frac{2\lambda}{d}I - (R_0 - H - 1) = 0$$

Ceci donne :

$$I = \frac{d(R_0 - H - 1)}{2\lambda}$$

et

$$f(0) = \frac{r}{d + \gamma}.$$

Donc si $R_0 - H - 1 < 0$ alors l'équation (3.12) n'admet pas de solutions positives et la même chose pour $R_0 < 1$ (ie. on a l'absence des solutions endémiques dans ce cas).

On va s'intéresser donc au cas

$$R_0 - H - 1 > 0 \quad (R_0 > 1)$$

L'équation (3.12) a pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (R_0 - H - 1)^2 - 4H \\ &= (R_0 - H - 1 - 2\sqrt{H})(R_0 - H - 1 + 2\sqrt{H}) \\ &= (R_0 - (\sqrt{H} + 1)^2)(R_0 - (\sqrt{H} - 1)^2) \end{aligned}$$

On a $R_0 - (\sqrt{H} - 1)^2$ est positif pour $R_0 - H - 1 > 0$, car

$$R_0 - (\sqrt{H} - 1)^2 = R_0 - H - 1 + 2\sqrt{H} > R_0 - H - 1 > 0$$

Ceci signifie que $\Delta > 0$ si et seulement si

$$R_0 - (\sqrt{H} + 1)^2 > 0$$

C'est-à-dire si et seulement si :

$$\sqrt{R_0} - 1 > \sqrt{H}$$

Donc $\Delta > 0$ si et seulement si

$$(\sqrt{R_0} - 1)^2 > H$$

On aura ainsi $\Delta < 0$ si et seulement si

$$(\sqrt{R_0} - 1)^2 < H.$$

Et $\Delta = 0$ si et seulement si

$$(\sqrt{R_0} - 1)^2 = H$$

On va s'intéresser au cas $\Delta > 0$:

Dans ce cas, les composantes I des points d'équilibre sont :

$$I_1 = \frac{d}{2\lambda}(R_0 - 1 - H - \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H})$$

Et

$$I_2 = \frac{d}{2\lambda}(R_0 - 1 - H + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H})$$

Mais I_1 et I_2 sont simultanément positifs si et seulement si

$$R_0 - 1 - H > 0, \text{ alors } R_0 - 1 > H$$

On a

$$R_0 - 1 = (\sqrt{R_0} - 1)(\sqrt{R_0} + 1) > (\sqrt{R_0} - 1)^2 > H$$

Donc pour $\Delta > 0$, on a I_1 et I_2 coexistent avec

$$S_1 = \frac{A}{d + \lambda I_1} \text{ et } S_2 = \frac{A}{d + \lambda I_2}$$

3.1.3 Analyse de la stabilité :

La matrice Jacobienne $J(S, I)$ associée au système (3.5) en un point (S, I) est donnée par :

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -d - \lambda I & -\lambda S \\ \lambda I & \lambda S - d - \gamma \end{pmatrix}$$

On a au point (S_1, I_1)

$$J(S_1, I_1) = \begin{pmatrix} -d - \lambda I_1 & -\lambda S_1 \\ \lambda I_1 & \lambda S_1 - d - \gamma \end{pmatrix}$$

On sait que l'équilibre du système (3.5) vérifie

$$A - dS_1 = \lambda S_1 I_1 = (d + \gamma)I_1 + r$$

Alors

$$S_1 = \frac{1}{d}(A - (d + \gamma)I_1 - r)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \det J(S_1, I_1) &= (-d - \lambda I_1)(\lambda S_1 - d - \gamma) + \lambda^2 S_1 I_1 \\ &= -d\lambda S_1 + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_1 \\ &= -\lambda(A - (d + \gamma)I_1 - r) + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_1 \\ &= -\lambda A + 2\lambda(d + \gamma)I_1 + \lambda r + d(d + \gamma) \\ &= d(d + \gamma)\left[-R_0 + \frac{2\lambda}{d}I_1 + H + 1\right] \\ &= d(d + \gamma)\left[-R_0 + H + 1 + R_0 - H - 1 - \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}\right] \\ &= -d(d + \gamma)\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\det J(S_1, I_1) < 0$$

Ceci signifie que (S_1, I_1) est un point selle lorsqu'il existe.

De même, on a au point d'équilibre (S_2, I_2) ,

$$J(S_2, I_2) = \begin{pmatrix} -d - \lambda I_2 & -\lambda S_2 \\ \lambda I_2 & \lambda S_2 - d - \gamma \end{pmatrix}$$

On a aussi :

$$S_2 = \frac{1}{d}(A - (d + \gamma)I_2 - r)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\det J_2 &= (-d - \lambda I_2)(\lambda S_2 - d - \gamma) + \lambda^2 S_2 I_2 \\
&= -d\lambda S_2 + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_2 \\
&= -\lambda(A - (d + \gamma)I_2 - r) + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_2 \\
&= -\lambda A + 2\lambda(d + \gamma)I_2 + \lambda r + d(d + \gamma) \\
&= d(d + \gamma)\left[-R_0 + \frac{2\lambda}{d}I_2 + H + 1\right] \\
&= d(d + \gamma)\left[-R_0 + H + 1 + R_0 - H - 1 + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}\right] \\
&= d(d + \gamma)\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\det J_2 > 0$$

Alors la stabilité de (S_2, I_2) dépend de $tr J_2$.

Si $tr J_2 > 0$ alors (S_2, I_2) est instable.

et si $tr J_2 < 0$ alors le point d'équilibre (S_2, I_2) est localement asymptotiquement stable.

On a :

$$\begin{aligned}
tr J_2 &= -2d - \gamma - \lambda I_2 + \lambda S_2 \\
&= -2d - \gamma - \lambda I_2 + \frac{\lambda}{d}(A - (d + \gamma)I_2 - r) \\
&= -2d - \gamma - \lambda I_2 + \frac{\lambda A}{d} - \frac{\lambda}{d}(d + \gamma)I_2 - \frac{\lambda r}{d} \\
&= -\lambda I_2 \frac{2d + \gamma}{d} - \frac{2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d}{d}
\end{aligned}$$

Si

$$2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d > 0$$

alors

$$tr J_2 < 0.$$

Dans ce cas le point d'équilibre (S_2, I_2) est localement asymptotiquement stable.

Supposons donc que $2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0$. on cherche les valeurs des paramètres donnant

$tr J_2 < 0$.

Ceci signifie que :

$$-\lambda I_2 \frac{2d + \gamma}{d} - \frac{2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d}{d} < 0$$

C'est-à-dire :

$$I_2 > -\frac{2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d}{\lambda(2d + \gamma)} = D_1 > 0$$

Donc :

$$\frac{d}{2\lambda}(R_0 - 1 - H + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}) > \frac{d(d + \gamma)}{\lambda(2d + \gamma)} \left[-\frac{d}{d + \gamma} - 1 + R_0 - H \right]$$

Ainsi :

$$(R_0 - 1 - H + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}) > -\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H) \frac{2d + 2\gamma}{2d + \gamma}$$

Alors :

$$\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} > -\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H) \left[\frac{2d + 2\gamma}{2d + \gamma} - 1 \right]$$

On obtient :

$$\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} > -\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H) \frac{\gamma}{2d + \gamma} = D_2 \quad (3.13)$$

$$\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} > \frac{\gamma}{2d + \gamma} \left[(R_0 - 1 - H) - \frac{2d}{\gamma} \right]$$

Finalement : si

$$(R_0 - 1 - H) - \frac{2d}{\gamma} < 0.$$

Par conséquent, le point d'équilibre (S_2, I_2) est localement asymptotiquement stable.

Supposons que $(R_0 - 1 - H) - \frac{2d}{\gamma} > 0$. Alors d'après (3.13),

$$(R_0 - 1 - H)^2 - 4H > \left[-\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H) \frac{\gamma}{2d + \gamma} \right]^2$$

$$(R_0 - 1 - H)^2 - 4H - D_2^2 > 0$$

C'est-à-dire :

$$(R_0 - 1 - H)^2 - 4H - (R_0 - 1 - H)^2 \frac{\gamma^2}{(2d + \gamma)^2} - \frac{4d^2}{(2d + \gamma)^2} + \frac{4\gamma d}{(2d + \gamma)^2} (R_0 - 1 - H) > 0$$

En remplaçant H et R_0 par leurs valeurs, on obtient :

$$(d(d + \gamma) - \lambda A + r\lambda)^2 \frac{4}{d(d+\gamma)(2d+\gamma)^2} - 4 \frac{\lambda r}{d(d+\gamma)} - \frac{4d^2}{(2d+\gamma)^2} + 4 \frac{d\gamma}{d(2d+\gamma)^2(d+\gamma)} (-d(d + \gamma) + \lambda A - r\lambda) > 0$$

C'est-à-dire :

$$\frac{4}{d(2d+\gamma)^2(d+\gamma)} [-\lambda r(2d + \gamma)^2 - d^3(d + \gamma) + (d(d + \gamma) - \lambda A + r\lambda)^2 + d\gamma(-d(d + \gamma) + \lambda A - r\lambda)] > 0$$

Donc :

$$\frac{4}{d(2d+\gamma)^2(d+\gamma)} [-\lambda r(4d^2 + \gamma^2 + 4d\gamma) - d^4 - \gamma d^3 + \lambda^2 A^2 + \lambda^2 r^2 - 2\lambda^2 Ar + d^2(d^2 + \gamma^2 + 2d\gamma) - 2(\lambda A - r\lambda)(d^2 + d\gamma) + d\gamma\lambda A - d\gamma\lambda r - \gamma d^3 - \gamma^2 d^2] > 0$$

On aura :

$$\frac{4}{d(2d+\gamma)^2(d+\gamma)} [-4\lambda r d^2 - \lambda r \gamma^2 - 4d\gamma\lambda r - d^4 - \gamma d^3 + \lambda^2 A^2 + \lambda^2 r^2 - 2\lambda^2 Ar + d^4 + d^2\gamma^2 + 2\gamma d^3 - 2\lambda A d^2 - 2\lambda A d\gamma + 2r\lambda d^2 + 2r\lambda d\gamma + d\gamma\lambda A - d\gamma\lambda r - \gamma d^3 - \gamma^2 d^2] > 0$$

Ainsi :

$$\frac{4\lambda}{d(2d + \gamma)^2(d + \gamma)} [\lambda r^2 + r(-2d^2 - 3d\gamma - \gamma^2 - 2\lambda A) + \lambda A^2 - Ad\gamma - 2Ad^2] > 0$$

Posons

$$D_3 = \lambda r^2 + r(-2d^2 - 3d\gamma - \gamma^2 - 2\lambda A) + \lambda A^2 - Ad\gamma - 2Ad^2$$

Si $D_3 > 0$, alors $tr J_2 < 0$ et par conséquent (S_2, I_2) est localement asymptotiquement stable.

Si $D_3 < 0$ alors $tr J_2 > 0$, donc (S_2, I_2) est instable.

Considérons D_3 comme fonction de la variable r , et étudions son signe.

Le discriminant associé au polynôme D_3 s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= ((2d + \gamma)(d + \gamma) + 2\lambda A)^2 - 4\lambda A(\lambda A - d\gamma - 2d^2) \\ &= (2d + \gamma)^2(d + \gamma)^2 + 4\lambda^2 A^2 + 4\lambda A(2d + \gamma)(d + \gamma) - 4\lambda^2 A^2 + 4\lambda Ad\gamma + 8\lambda Ad^2 \\ &= (2d + \gamma)^2(d + \gamma)^2 + 4\lambda A(2d + \gamma)(d + \gamma) + 4\lambda Ad\gamma + 8\lambda Ad^2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta_1 > 0.$$

Donc le polynôme D_3 admet deux racines réelles

$$r_1 = \frac{1}{2\lambda} [2\lambda A + (2d + \gamma)(d + \gamma) + \sqrt{\Delta_1}]$$

et

$$r_2 = \frac{1}{2\lambda}[2\lambda A + (2d + \gamma)(d + \gamma) - \sqrt{\Delta_1}]$$

Si $r > r_1$ ou $r < r_2$, alors $D_3 > 0$, donc $\text{tr}J_2 < 0$.

Si $r_2 < r < r_1$, alors $D_3 < 0$, donc $\text{tr}J_2 > 0$.

Par la condition,

$$2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0,$$

Soit

$$-2d^2 + \lambda A - \gamma d < \lambda r \tag{3.14}$$

On obtient après avoir remplacé r_1 par sa valeur :

$$\begin{aligned} \lambda r_1 &= \frac{1}{2}[2\lambda A + (2d + \gamma)(d + \gamma) + \sqrt{\Delta_1}] \\ &= \lambda A + d^2 + \frac{3}{2}d\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 + \sqrt{\Delta_1} \\ &> \lambda A - \gamma d - 2d^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda r_1 > \lambda A - \gamma d - 2d^2 \tag{3.15}$$

Contradiction entre (3.14) et (3.15), donc la condition $r > r_1$ est éliminée.

3.1.4 Synthèse

Le point d'équilibre (S_2, I_2) est stable si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1 .

$$2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d > 0$$

2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0 \\ \text{et } R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\lambda} < 0 \end{array} \right.$$

3 .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0 \\ \text{et } R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\lambda} > 0 \\ \text{et } r < r_2 \end{array} \right.$$

Le point d'équilibre (S_2, I_2) est instable si la condition suivante est vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0 \\ \text{et } R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\lambda} > 0 \\ \text{et } r_1 > r > r_2 \end{array} \right.$$

Conclusion

À la lumière de cette étude, nous avons illustré l'utilité de la modélisation en mathématiques. Les modèles mathématiques décrivant une épidémie ont joué un rôle important en contrôle de la propagation des maladies contagieuses. Le modèle épidémiologique SIR présenté dans ce mémoire est donc de première importance.

Ce domaine des mathématiques appliquées a eu un rôle important dans la compréhension de la dynamique des phénomènes réels.

Bibliographie

- [1] A. B. Gumel, *Causes of backward bifurcations in some epidemiological models*, J. Math. Anal. App, 395, 355-365, 2012
- [2] J. P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Grenoble sciences, 2006.
- [3] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [4] P. Auger, L. Christophe, P. Jean-Christophe. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*, Dunod, 2010.
- [5] S. Wiggins, *Intoduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, 2003.
- [6] W. Wendi, R. Shigui, *Bifurcations in an epidimic model with constant removal rate of the infectives*, Journal of Mathematical Anasysis and Applications, vol. 291, no 2, p. 775-793. 49, 2004.
- [7] W. Wendi, *Backward bifurcations of an epidimic model with treatment*.Mathematical biosciences, vol. 201, no 1, p. 58-71. 57, 2006.
- [8] Z. Xu, L. Xianning, *Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function*, Journal of mathematical analysis and Applications, no 1, p. 433-443. 57, 2008.

Résumé

L'objet de ce mémoire consiste à mettre en évidence l'importance et l'utilité de la modélisation mathématique en épidémiologie pour mieux comprendre la dynamique d'une épidémie.

Ce contexte porte sur la théorie des équations différentielles ordinaires qui nous permet de connaître le comportement des solutions des systèmes différentiels modélisant l'évolution d'une épidémie en se focalisant sur le modèle SIR.

Abstract

The object of this dissertation consists in putting in evidence the importance and the utility of the mathematical modelling in epidemiology in order to understand better the dynamic of an epidemic.

This context speaks about the theory of ordinary differential equations which allows us to know the behaviour of the differential systems's solutions modeling the evolution of an epidemic by focusing in the SIR model.