



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Physique Théorique

Thème

**Quelque Aspects Fondamentaux des Qubits : description et réalisations
expérimentales**

Présentée par

Mme. BARCHICHE Amanda

Examiné par le Jury composé de:

Nom	Prénom	Département d'affiliation	Qualité
BELHADI	Zahir	Physique	Président
BELABBAS	Abdelmoumene	Physique	Examineur
GHARBI	Abdelhakim	Physique	Encadreur

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce travail

*A ma Maman qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études,
Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

A mon Père qui a fait de moi la femme que je suis aujourd'hui.

*A mes sœurs qui ont partagés avec moi tous les moments d'émotions,
tous le long de mon parcours.*

*A mon Mari « Nabil », qui m'a toujours accompagné , aidé et soutenu,
je serai rien sans toi.*

*A ma famille, mes beaux parents, mes proches et à tout ceux qui me
donnent de l'amour et de la vivacité.*

*A tous mes amis qui m'ont toujours encouragés, et à qui je souhaite plus
de succès.*

Remerciement

Je remercie le bon dieu de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour accomplir ce travail.

J'aimerais tout d'abord remercier grandement mon rapporteur, le Professeur GHARBI Abdelhakim, de m'avoir proposé ce travail. je lui exprime ma profonde gratitude pour tout ce qu'il m'a apporté sur le plan scientifique et humain, et surtout pour sa disponibilité durant toute cette période de travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, Mr Zahir BELHADI et Mr Abdelmoumene BELABBAS, d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je leurs exprime toute ma reconnaissance.

J'aimerais également remercier l'ensemble des enseignants du département de physique de l'université Abderrahmane Mira de Bejaïa, qui ont contribué à ma formation durant toutes ces longues années.

Table des matières

1	Introduction Générale	4
	Introduction	4
2	Rappel de Mécanique Quantique	7
2.1	Postulats de la Mécanique Quantique	7
2.1.1	Postulat 1 : Espace des Etats	7
2.1.2	Postulat 2 : Evolution Temporelle du système	8
2.1.3	Postulat 3 : Mesure Quantique	9
2.2	Etat Mixte et Matrice Densité	11
2.3	Système composite et Trace Partielle	12
2.3.0.1	Exemple : Spin 1/2	14
2.4	Superposition et Intrication	14
2.4.1	Superposition	15
2.4.2	Intrication	16
2.5	Mesure de Distance dans l'espace de Hilbert	17
2.5.1	Distance de la trace	17
2.5.2	Fidélité et distance de Bures	18
2.6	Systèmes Quantiques Ouverts	19
3	Description Quantique des Qubits	22
3.1	Le principe des Qubits	22
3.2	La Sphère de Bloch de Représentation de l'Etat des Qubits	23

3.3	Un Quantum Bit	24
3.4	Système à Deux Qubits	26
3.5	Superposition	29
3.6	Intrication	30
3.7	Le paradoxe EPR	31
3.8	La Téléportation Quantique	33
4	Réalisations Expérimentales des Qubits	37
4.1	Les critères de Di Vincenzo	37
4.2	Introduction a la RMN	38
4.2.1	Modèle Physique	38
4.2.2	Qubit et RMN	40
4.2.3	Mesure d'un signal RMN :	42
4.3	Ions Piégés	43
4.3.1	Manipulation d'ions	43
4.3.2	Piégeage d'Ions	44
4.3.3	Principe du calcul quantique utilisant des ions piégés	46
5	Conclusion générale	51
	Conclusion générale	51

Depuis toujours, l'homme façonne la matière pour créer des objets qui lui simplifient la vie. Les artisans d'hier créaient les outils nécessaires au travail de l'homme, mais avec la progression des techniques et de la connaissance, ces outils sont devenus de plus en plus petits, réclamant un contrôle dimensionnel toujours plus pointu, contrôle aujourd'hui possible à l'échelle ultime de la matière, l'échelle atomique. Les techniques modernes permettent d'agencer de façon contrôlée un petit nombre d'atomes pour fabriquer des objets de taille nano-métrique (le millionième de millimètre!) qui présentent des propriétés extraordinaires, d'origine quantique, et peuvent être exploitées dans divers domaines[1, 2, 3, 4, 5].

La théorie quantique permet d'avoir une description de la matière et de la lumière à l'échelle microscopique. La théorie quantique est plus complète que la théorie classique qui apparaît comme une limite de celle-ci

C'est ainsi que la théorie quantique, en tirant profit des paradoxes de la matière, est à l'origine de plusieurs innovations majeurs de la société contemporaine[6, 7, 8] :

- Les sources lasers, utilisées pour la lecture des disques compacts ou en ophtalmologie.
- Les puits quantiques, qui permettent la fabrication des puces électroniques miniaturisées des ordinateurs et des téléphones cellulaires.
- La résonance magnétique des noyaux des atomes, utilisée en médecine pour obtenir des images de plus en plus précises des organes humains.

L'information quantique est un domaine de la physique apparu dans les années quatre vingt, qui s'appuie sur les principes de la mécanique quantique pour le traitement de l'information. Ce dernier, basé sur la mécanique quantique, permet d'exécuter certains algorithmes de façon très efficace qui passent d'une complexité exponentielle en informatique classique à une complexité polynomiale en informatique quantique. Le traitement quantique de l'information tire son efficacité des propriétés de la mécanique quantique ; en particulier du principe de superposition et de l'existence d'états non séparables (intrication). L'unité de base de l'information en informatique classique est le bit classique, supporté par un système (un transistor par exemple) possédant deux états possibles (nommés 0 ou 1). L'analogie quantique du bit classique est le qubit (quantum bit : bit quantique), supporté par un système (atome, spin nucléaire ,etc) pouvant être décrit par une superposition linéaire de deux états orthogonaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$. Il est à noter que les systèmes quantiques sont extrêmement sensibles aux interactions non contrôlées avec l'environnement qui provoquent une perte de cohérence[10, 11] .

Les ordinateurs quantiques sont le fruit d'imagination pour certains et l'accès au « savoir absolu » pour d'autres. Ils sont aussi ceux qui permettent de résoudre de nombreux problèmes auxquels notre société fait face aujourd'hui. Dans les années à venir, l'ordinateur quantique serait donc vu comme une révolution technologique, capable d'apporter des éléments de réponse dans des domaines très variés[12, 13, 14] :

- La santé : la recherche de nouveaux vaccins instantanément, par un test de toutes les combinaisons d'assemblages moléculaires possibles dans une base de données, pour détruire un virus.
- Le nucléaire : la maîtrise totale du nucléaire, pouvant être à l'oeuvre de nouvelles sources d'énergies.
- L'espace : comprendre tous les mystères sur lesquelles se base notre univers et bien d'autres encore.

Aujourd'hui, Les entreprises développant de nouveaux ordinateurs quantiques ont toutes pour objectif de réduire le temps de décohérence tout en ajoutant le plus de qubits possibles. C'est une course à la meilleure technologie utilisée en se penchant sur certains procédés de fabrication des qubits. La réalisation des ordinateurs quantiques est prometteuse via les systèmes physiques suivants :[15, 16, 17, 18, 19]

Les ordinateurs quantiques à technologie de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) à l'état liquide. Le but est d'appliquée à un noyau d'un soluté, un champ de radiofréquence en résonance avec la fréquence de Larmor du noyau en question, entraînant ainsi la rotation de son spin[20, 21, 22, 23, 24].

Mais aussi, les ordinateurs quantiques supraconducteurs possédant des circuits quantiques avec des matériaux supraconducteurs à base de jonctions Josephson et permettent d'encoder l'état d'un qubit dans la charge ou le flux afin de résister suffisamment longtemps à la décohérence.

Et enfin, les ordinateurs quantiques à base d'ions piégés. Les ions stockent les qubits dans des états stables et l'information quantique est transférée dans un piège grâce à la force électrostatique des ions [25, 26, 27, 28].

Dans le présent mémoire, nous allons présenter tout d'abord le formalisme théorique permettant une description succincte des systèmes quantiques à un et à deux qubits. Par la suite, nous nous focaliserons sur quelques systèmes quantiques pouvant être utilisées dans la pratique pour implémenter les qubits.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante : au premier chapitre, nous passerons en revue les idées fondamentales de la mécanique quantique. Dans le deuxième chapitre, nous nous focaliserons sur la description quantique des qubits. Le troisième chapitre sera consacré aux réalisations expérimentales des qubits. Nous terminons le manuscrit par une conclusion générale.

Dans le présent chapitre, nous allons présenter en premier lieu un rappel des postulats de la mécanique quantique, puis nous aborderons la notion d'états mixtes décrits par des opérateurs densités. par la suite, nous passerons en revue les concepts de systèmes composés, de trace partielle, de superposition et d'intrication.

2.1 Postulats de la Mécanique Quantique

Dans ce qui suit, nous énonçons et commentons les postulats de base de la mécanique quantique, en mettant l'accent, sur la description des états, des mesures et de l'évolution des systèmes quantiques[2, 25, 6].

Enoncés des postulats

2.1.1 Postulat 1 : Espace des Etats

L'état physique d'un système est entièrement défini, à chaque instant, par un élément $|\psi\rangle$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} approprié. L'espace de Hilbert est un espace vectoriel complexe doté d'un produit scalaire "inner product" $\langle\varphi|\psi\rangle$ avec des valeurs en \mathbb{C} . On définit la norme telle que $|||\psi\rangle||^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Toute superpositions linéaire d'états est un élément de \mathcal{H}

$$|\psi\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | \psi \rangle = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle \quad (2.1.1)$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$, $|\varphi_n\rangle \in \mathcal{H}$. Les $|\varphi_n\rangle$ sont donc également des vecteurs d'état et la base $\{|\varphi_n\rangle\}$ est orthonormée. Ce sont les amplitudes de projections $a_n = \langle \varphi_n | \psi \rangle$ de l'état $|\psi\rangle$ sur l'ensemble des états $|\varphi_n\rangle$ du système qui caractérisent l'état du système. Autrement $|\psi\rangle$ est l'être mathématique qui décrit la réalité physique d'un état quantique individuel.

Si le système est composé, c'est à dire constitué de plusieurs sous-système plus petits, alors son espace des états est le produit tensoriel des espaces de Hilbert correspondant à chaque sous système :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$$

2.1.2 Postulat 2 : Evolution Temporelle du système

L'évolution temporelle du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est régit par l'équation de Schrödinger ou équation d'évolution.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.1.2)$$

Où $H(t)$ est l'opérateur hermitien associé à l'énergie totale du système ou hamiltonien du système. D'une manière équivalente l'évolution peut être décrite par un opérateur unitaire $U(t, t_0)$ avec ($U^{-1} = U^+$). On écrit :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t, t_0)\rangle \quad (2.1.3)$$

Avec $UU^+ = U^+U = 1$ ce qui implique que $U^{-1} = U^+$. $U(t, t_0)$ est solution de l'équation de Schrodinger :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H(t)U(t, t') \\ U(t, t) = 1 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Si le système est stationnaire, il ne dépend pas du temps t explicitement, alors :

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)\right) \quad (2.1.5)$$

2.1.3 Postulat 3 : Mesure Quantique

La mesure en mécanique quantique est différente de la mesure en mécanique classique car elle est fondamentalement aléatoire. La mesure quantique est définie par une collection d'opérateurs $\{M_m\}$ qui agissent dans l'espace de Hilbert. La probabilité d'un système dans un état $|\psi\rangle$ de donner le résultat m lors de la mesure est donnée par [8, 9, 15, 18] :

$$\mathcal{P}_m = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (2.1.6)$$

L'état du système juste après la mesure sera :

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} \quad (2.1.7)$$

Du fait que $\sum_m \mathcal{P}_m = 1$, on impose aux opérateurs de mesure la condition :

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = 1 \quad (2.1.8)$$

Désormais, on ne s'intéresse pas à l'état du système après la mesure et d'une façon générale, il est usuel dans la littérature, de définir la mesure avec un ensemble

d'opérateurs Π_m qui vérifient

$$\langle \psi | \Pi_m | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \quad (2.1.9)$$

et

$$\sum_m \Pi_m = 1 \quad (2.1.10)$$

Le processus de mesure est appelé mesure à valeur positive d'opérateur (POVM).

La probabilité que la mesure produise le résultat m est alors

$$\mathcal{P}_m = \langle \psi | \Pi_m | \psi \rangle \quad (2.1.11)$$

L'état du système après la mesure dépend de la mise en oeuvre spécifique de l'expérience. En effet, étant donné un opérateur positif -semi-défini Π_m , il existe un nombre infini d'opérateurs M_m tels que $\Pi_m = M_m M_m^\dagger$. Les opérateurs M_m sont parfois appelés opérateurs de détection

Une classe pertinente de mesures est celle des mesures projectives, c'est-à-dire les mesures décrites par un opérateur hermitien M agissant sur \mathcal{H} . Étant hermitien, M admet une décomposition spectrale

$$M = \sum_i m_i \mathcal{P}_i \quad (2.1.12)$$

ou les \mathcal{P}_i sont des projecteurs sur les vecteurs propres $|i\rangle$ de M , c'est-à-dire les solutions de l'équation de la valeur propre $M|i\rangle = m_i|i\rangle$. Les projecteurs \mathcal{P}_i satisfont la condition d'orthogonalité $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \delta_{ij} \mathcal{P}_i$ et la relation de complétude $\sum_i \mathcal{P}_i = \mathbb{I}$. La probabilité d'obtenir le résultat m_i est $p_i = \langle \psi | \mathcal{P}_i | \psi \rangle$ et la valeur moyenne de l'observable M est alors donnée par

$$\langle M \rangle = \sum_i m_i p_i = \langle \psi | \sum_i m_i \mathcal{P}_i | \psi \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle \quad (2.1.13)$$

2.2 Etat Mixte et Matrice Densité

Dans la plupart des cas, nous ne sommes pas en mesure de savoir avec certitude dans quel état se trouve le système. Ceci se produit en particulier lorsque nous considérons une partie d'un système composite, ou lorsque le système considéré interagit avec un environnement. De la manière la plus générale, notre connaissance du système est représenté par une distribution statistique $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, ce qui signifie que le système a la probabilité p_i de se trouver dans l'état $|\psi_i\rangle$, ou évidemment $\sum_i p_i = 1$. Nous dirons que le système est dans un état mixte. on peut définir la contrepartie quantique de la fonction de densité classique d'une distribution de probabilité qui s'appelle opérateur de densité et qui est défini comme suit [15, 18, 23] :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.2.1)$$

L'opérateur densité défini dans l'équation (2.2.1) est hermitien, défini positif, et sa trace $\text{tr} \rho = 1$. Inversement, tout opérateur ayant ces trois propriétés peut être utilisé comme opérateur de densité pour un certain système. Nous notons l'ensemble de tous les opérateurs de densité possible pour un espace de Hilbert \mathcal{H} par $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Pour un état pur, l'opérateur de densité est un projecteur et donc $\text{Tr} \rho^2 = 1$. Lorsque le système est dans un mélange statistique, $\text{Tr} \rho^2 < 1$. il est alors utile de définir la pureté de l'état comme

$$\mu = \text{Tr} (\rho^2) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{d} \leq \mu \leq 1$$

ou d est la dimension de l'espace de Hilbert. La valeur minimale de μ est atteinte lorsque le système se trouve dans un mélange de d états avec une probabilité de $1/d$ chacun. Nous appelons un tel état complètement mélangé et l'opérateur de densité correspondant est \mathbb{I}/d .

Le système est complètement décrit par le formalisme de l'opérateur densité. L'évolution du système est donnée par l'équation de Liouville-Von Neumann, qui est

équivalente à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (2.2.2)$$

où H est l'Hamiltonien du système dans l'image de Schrödinger. De manière équivalente, nous pouvons écrire :

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) \quad (2.2.3)$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution. le processus de mesure est également facile à décrire . Nous considérons une mesure $\{M_m\}$ la probabilité d'obtenir le résultat m est donnée par l'équation suivante :

$$p(m) = \text{Tr} (M_m \rho M_m^\dagger) = \text{Tr} (M_m^\dagger M_m \rho) \quad (2.2.4)$$

et si le résultat est m , le système sera après la mesure dans l'état

$$\rho' = \frac{(M_m \rho M_m^\dagger)}{\text{Tr} (M_m^\dagger M_m \rho)} \quad (2.2.5)$$

la valeur moyenne d'une observable M est donc donnée par

$$\langle M \rangle = \text{Tr} [M \rho] \quad (2.2.6)$$

qui se réduit à l'équation (2.1.13) pour un état pur.

2.3 Système composite et Trace Partielle

Si le système est composé de plus d'un système, alors son espace d'état est le produit tensoriel des espaces de Hilbert correspondant aux sous -systèmes : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. Pour un système bipartite ,c'est-à-dire un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, on adopte la notation standard de la théorie de l'information quantique

, \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B sont détenus par deux parties , Alice et Bob. la discussion peut être généralisée à un système avec un nombre arbitraire de composants. on peut définir une base tensoriel orthonormée[24, 25, 11, 6] :

$$|ij\rangle \equiv |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \quad (2.3.1)$$

où $\{|i\rangle_A\}$ et $\{|j\rangle\}$ sont respectivement des bases dans \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B . L'expression la plus générale pour la matrice de densité est alors :

$$\rho = \sum_{ij} \sum_{hk} |ij\rangle \langle hk| \rho_{ij,hk} \quad (2.3.2)$$

La description de la connaissance qu'Alice a de son sous -système est donnée par l'opérateur densité réduit ρ_A . Ce dernier sera construit par l'outil mathématique de la trace partielle :

$$\begin{aligned} \rho_A \equiv Tr_B(\rho) &= \sum_i \langle l|\rho|l\rangle_B = \sum_l \sum_{ij} \sum_{hk} \rho_{ij,hk} \langle l|ij\rangle \langle hk|l\rangle_B \\ &= \sum_l \sum_{ih} \rho_{il,hl} |i\rangle_A \langle h|_A \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

on a utilisé l'ortho-normalité de la base \mathcal{H}_B , $\langle i|j\rangle_B = \delta_{ij}$. La matrice de densité ρ_A est appelée la matrice de densité réduite pour le système A. une définition analogue peut être considérée pour la trace partielle par rapport au sous -système A, qui donne la matrice de densité réduite pour ρ_B .

La trace partielle décrit correctement l'état du système A, car elle donne les bonnes prédictions pour les mesures effectuées sur ce sous-système. Pour comprendre cela, considerons un operateur de mesure O_A sur le système d'Alice. Vu que la mesure n'affecte pas le sous-système de Bob, l'opérateur agissant sur l'ensemble de l'espace

de Hilbert est $O = O_A \otimes \mathbb{I}$. Donc on aura :

$$\begin{aligned}
 \langle O \rangle &= Tr(\rho O) = \sum_{ij} \langle ij | \rho O | ij \rangle & (2.3.4) \\
 &= \sum_{ij} \langle ij | \left(\sum_{lm} \sum_{hk} \rho_{lm,hk} |lm\rangle \langle hk| \right) (O_A \otimes \mathbb{I}) |ij\rangle \\
 &= \sum_{ij} \sum_h \rho_{ij,hj} \langle h | O_A | i \rangle = \sum_{ih} \langle i | \rho_A | h \rangle \langle h | O_A | i \rangle \\
 &= \sum_i \langle i | \rho_A O_A | i \rangle = Tr(\rho_A O_A)
 \end{aligned}$$

2.3.0.1 Exemple : Spin 1/2

La forme générale d'un vecteur d'état décrivant le spin d'une particule de spin 1/2 est de la forme :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} |+\rangle_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi/2} |-\rangle_z \quad (2.3.5)$$

Cet état est aussi l'état propre $|+\rangle_{\vec{u}}$ de la projection du moment cinétique sur le vecteur unitaire \vec{u} de coordonnées sphériques (θ, ϕ) avec la valeur propre $+\hbar/2$. L'opérateur de spin s'écrit $\hat{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$, Ou $\vec{\sigma}$ est l'opérateur vectoriel formé des trois matrices de Pauli, Par conséquent $\langle \hat{S} \rangle = \hbar\vec{u}/2$. On calcule facilement l'expression de la matrice densité qui lui est associée :

$$\hat{\rho}(\theta, \varphi) = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

2.4 Superposition et Intrication

Superposition, intrication et hasard quantiques, autant de propriétés de la physique quantique qui demeurent insaisissables pour tout inhabitué de la matière. Pour certains, en revanche, ces notions traduisent une réalité appréhendée au quotidien.

2.4.1 Superposition

C'est la capacité d'un atome, d'une particule ou encore d'un circuit supraconducteur à se retrouver dans deux états physiques à la fois. Afin de comprendre ce qu'est un état superposé imaginons un circuit comme étant une pièce de monnaie, Les deux états du circuit, appelés 0 et 1, représentent les cotés pile et face de la pièce. Si on lui envoi un flash de lumière, le circuit change d'état comme si on avait retourné la pièce. Cependant, si on envoie la moitié d'un flash de lumière seulement, c'est à dire sa tension divisée par deux ou le temps divisé par deux, Le circuit se trouve dans un état similaire à une pièce posée sur sa tranche[3, 8, 25].

Mesurer le circuit revient à secouer la table sur laquelle est posée notre pièce de monnaie, sur la tranche : Il y aurait alors 50% de probabilité qu'elle tombe du coté pile et 50% du coté face.

Les scientifiques ont observé qu'en envoyant un premier demi-flash de lumière sur le circuit, puis un deuxième demi-flash lumineux. (dans notre exemple des demi-secousse), le circuit a changé d'état comme une pièce qui se serait retournée. Plus de hasard ici, au total, le circuit est passé de 0 à 1 ou de 1 à 0. Cette capacité à préserver l'information du premier demi-flash (la première demi-secousse pour la pièce de monnaie), place le circuit dans l'état superposé 0 et 1. au premier demi-flash, on pourra rien dire si le circuit était en 0 ou 1, Et pourtant, après le deuxième demi-flash, il sera toujours dans le même état, comme si la pièce de monnaie après deux demi secousse allait toujours tomber du même coté.

Ce hasard est troublant, mais il est nécessaire pour comprendre la suite. Revenons maintenant à ce qubit qui structure l'objet quantique. ce que tentent de construire les chercheurs, ce sont des systèmes stables. qui stockent des qubits couplés, les briques de base de l'information quantique. Pour y parvenir, il faut que les qubits traitent l'information pareillement et simultanément. C'est là qu'intervient une autre propriété quantique : l'intrication.

2.4.2 Intrication

L'intrication est un phénomène quantique dans lequel deux particules au moins partagent les mêmes propriétés. Quand on mesure l'état de l'une d'entre elles, les autres particules intriquées prennent instantanément la même valeur, indépendamment de la distance entre elles[8, 3, 26].

à l'échelle quantique, l'information ne circule pas seulement d'un émetteur à un récepteur. l'information quantique peut être stockée sur des objets éloignés qui partagent alors le même état quantique. Pour reprendre notre exemple imaginons deux pièces de monnaie situés à plusieurs kilomètres l'une de l'autre. On les prépare de façon à ce qu'elles soient posées sur le même côté. à ce stade elles (photons, circuits, particules) sont intriquées. elles seront toujours mesurés dans le même état, si on leurs fasse subir le même sort. L'intrication certifie par ailleurs que personne n'ait pu voir de quel côté allait tomber la pièce. Donc même si les deux pièces de monnaie sont séparées, elles gardent des propriétés identiques.

On dira que le système composite est dans un état intriqué si la fonction d'onde du système $|\psi\rangle \in \epsilon$ ne peut pas se mettre sous la forme d'un produit tensoriel de deux fonctions d'onde appartenant à chacun des sous espaces :

$$|\psi\rangle \neq |\psi(1)\rangle \otimes |\psi(2)\rangle \quad (2.4.1)$$

Si le système est dans un état produit tensoriel, une mesure sur sa partie (1) projettera l'ensemble du vecteur d'état sur l'état propre correspondant, et cette opération de "réduction du paquet d'onde" n'affectera pas la partie $|\psi(2)\rangle$ de l'état, donc les résultats des mesures effectuées sur la partie (2) : Les mesures sur les parties (1) et (2) sont décorréelées. En revanche, si le système est dans un état intriqué, la réduction du paquet d'onde ayant lieu lors d'une mesure sur la partie (1) modifiera aussi les résultats de mesure effectués sur l'autre partie, même si les deux parties sont physiquement complètement indépendantes au moment de la mesure. dans un

état intriqué on a de très fortes corrélations entre les mesures effectuées sur les deux parties.

Un état intriqué est toujours une superposition d'état séparables.

$$|\psi\rangle_{12} = \sum_{n,p} C_{n,p} |U_n(1)\rangle \otimes |V_p(2)\rangle \quad (2.4.2)$$

2.5 Mesure de Distance dans l'espace de Hilbert

2.5.1 Distance de la trace

Une question centrale de la théorie de l'information quantique concerne la possibilité de distinguer deux états quantiques. Quelle est la proximité de deux états quantiques dans l'espace d'état ? Dans quelle mesure est-il facile de les distinguer par une mesure quantique ? Il s'agit de tâches très importantes dans le traitement de l'information par exemple dans la communication quantique ou pour tester la qualité des portes quantiques ou de canaux quantiques. Les réponses quantitatives à ces questions sont données par les mesures de distances. quelques mesures ont été développées au fil des années, avec des significations opérationnelles différentes et des équivalents classiques. Les quantités les plus couramment utilisées sont la distance de trace.

La distance de trace entre deux états quantiques ρ_1 et ρ_2 est définie comme suit [9, 24, 14] :

$$D(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} \|\rho_1 - \rho_2\| \quad (2.5.1)$$

Où $\|A\| = \text{tr} \sqrt{A^\dagger A}$ est la norme de trace d'une matrice carrée. La matrice $\sqrt{A^\dagger A}$ est définie comme la matrice semi-définie positive B telle que $B^2 = A^\dagger A$. Etant $A^\dagger A$ une matrice semi-définie positive, sa norme carrée est bien définie. En particulier, puisque les opérateurs de densité sont hermitiens, l'équation (2.5.1) peut également s'écrire :

$$D(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} \text{tr} \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2} = \frac{1}{2} \sum_i |\lambda_i| \quad (2.5.2)$$

Où λ_i sont les valeurs propres de la matrice hermitienne, mais $(\rho_1 - \rho_2)$ n'est pas nécessairement positive. La distance de trace a les propriétés d'une distance métrique, c'est à dire qu'elle est nulle si et seulement si $\rho_1 = \rho_2$, Elle est symétrique et l'inégalité triangulaire tient : $D(\rho_1, \rho_3) \leq D(\rho_1, \rho_2) + D(\rho_2, \rho_3)$. Sa valeur maximale est atteinte pour les états qui ont des supports orthogonaux. De plus, elle est préservé sous les transformations unitaires, c'est à dire que $D(U\rho_1U^\dagger, U\rho_2U^\dagger) = D(\rho_1, \rho_2)$ pour tout opérateur unitaire U .

Pour les qubits, la distance de trace a une interprétation géométrique : C'est la moitié de la distance euclidienne dans la représentation de Bloch. C'est-à-dire que si r_1 et r_2 sont les vecteurs de Bloch de ρ_1 et ρ_2 ,

$$D(\rho_1, \rho_2) = \frac{\|r_1 - r_2\|}{2} \quad (2.5.3)$$

L'interprétation opérationnelle de la distance de la trace est liée à la probabilité de distinguer les deux états : supposons qu'Alice prépare un système quantique dans l'état ρ_1 avec la probabilité $1/2$ et dans l'état ρ_2 avec la probabilité $1/2$. Elle donne ces états à Bob, qui effectue une mesure quantique pour discriminer les deux états. Il peut être vu que Bob peut identifier l'état avec une probabilité maximale :

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{2} [1 + D(\rho_1, \rho_2)] \quad (2.5.4)$$

D'après l'équation (2.5.4), nous pouvons voir que le cas limite de la distance de trace nulle, c'est-à-dire $\rho_1 = \rho_2$, donne une probabilité maximale $\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{2}$.

2.5.2 Fidélité et distance de Bures

Une autre mesure de distance couramment utilisée est la fidélité, définie comme suit [2, 13, 19] :

$$\mathcal{F}(\rho, \sigma) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \quad (2.5.5)$$

ou ρ et σ sont deux états quantiques. La fidélité est égale à 1 lorsque $\rho = \sigma$, et elle est nulle pour les états orthogonaux. Pour les états purs, Elle coïncide avec le chevauchement entre les deux états :

$$\mathcal{F}(|\psi\rangle, |\varphi\rangle) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{|\psi\rangle\langle\psi|} |\varphi\rangle\langle\varphi| \sqrt{|\psi\rangle\langle\psi|}} = |\langle\psi|\varphi\rangle| \quad (2.5.6)$$

Contrairement a la distance de trace, la fidélité n'est pas une distance métrique, mais on peut introduire la distance de BURES qui est une fonction de la fidélité et qui est bien une distance métrique :

$$D_B(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{2(1 - \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2))} \quad (2.5.7)$$

la métrique de la distance de Bures est pertinente dans le domaine de la théorie de l'estimation quantique .

2.6 Systèmes Quantiques Ouverts

Nous avons vu que l'un des postulats de la mécanique quantique stipule que l'évolution des systèmes quantiques fermés et isolés est décrite par des opérations unitaires. Les technologies ne peuvent pas être considérées comme isolées ou fermées, car elles interagissent avec l'environnement qui les entourent. Cette interaction est souvent trop importante pour être négligée, et par conséquent, la théorie ci dessus ne parvient pas a donner une description correcte de la dynamique quantique[24, 19]. La théorie des systèmes quantiques ouverts a été développée pour résoudre le problème de la description de la dynamique d'un système interagissant avec son environnement. le point de départ est de considéré le système que nous appelons S et son environnement E comme deux sous parties d'un système quantique globale $S + E$. qui peut être considéré comme fermé et isolé. nous avons donc un espace d'états $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Le système global subit une évolution unitaire, telle que prescrite par les postulats de la mécanique quantique, mais on constate que l'état

du système S subit une dynamique différente qui est décrite par une carte quantique plus générale $\epsilon : \mathcal{S}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_S)$ de sorte que, si ρ_S est l'état initiale du système alors

$$\rho'_S = \epsilon(\rho_S)$$

est l'état finale. La carte ϵ est aussi appelée Canal Quantique ou Operation Quantique, et doit avoir quelques propriétés qui garantissent que l'état final ρ'_S est toujours un opérateur de densité valide. ϵ doit être :

- convexe lineaire sur l'ensemble des opérateurs de densité : $\epsilon(\sum_i p_i \rho_i) = \sum_i p_i \epsilon(\rho_i)$, ou $\rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ et $\sum_i p_i = 1$.
- Complètement positif. $\epsilon(\rho_s)$ doit être un opérateur positif pour tout opérateur ρ_S du système S , et de plus si nous introduisant un second système R de dimension arbitraire, alors l'état $(\mathbb{I} \otimes \epsilon)(\rho)$ est positif pour tout opérateur de densité ρ du système composite $S + R$, Ou \mathbb{I} est l'operation d'identité sur le système R .
- Preservation de la trace : $Tr(\epsilon(\rho_s)) = 1$, c'est a dire que l'état final doit être une matrice de densité propre et normalisée.

Une carte quantique avec les propriétés ci dessus apparait naturellement en considérant la dynamique unitaire du système globale $S + E$, décrite par l'opérateur unitaire U , et en retraçant ensuite l'environnement E :

$$\epsilon(\rho_s) = Tr_E (U \rho_S E U^\dagger) \quad (2.6.1)$$

Habituellement , l'état initial du système global est supposé être factorisé , c'est-à-dire $\rho_{SE} = \rho_S \otimes \rho_E$. une façon de représenter les cartes quantiques qui est très pertinente pour la discussion suivante est la representation de Kraus, ou représentation opérateur-somme. Selon le théorème de Kraus, une carte ϵ possède les propriétés ci dessus si et seulement si elle peut s'écrire comme suit :

$$\epsilon(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger \quad (2.6.2)$$

Ou l'opérateur de Kraus E_i satisfait la relation de complétude.

$$\sum_i E_i^\dagger E_i = \mathbb{I} \quad (2.6.3)$$

Ce qui assure que l'état de sortie a une trace unitaire : $Tr(\epsilon(\rho)) = 1$. remarquons que l'équation (2.6.1) est équivalente a l'équation (2.6.2). En effet, supposons que l'état initial est $\rho_{SE} = \rho_S \otimes |e_0\rangle\langle e_0|$, Ou $|e_0\rangle$ est un état appartenant a une certaine base orthonormé $\{e_k\}$ de l'environnement. Nous pouvons alors écrire explicitement la trace partielle dans l'équation (2.6.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho_S) &= \sum_k \langle e_k|U(\rho_S \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger|e_k\rangle \\ &= \sum_k E_k \rho_S E_k^\dagger \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

ou l'on défini les opérateurs $E_k \equiv \langle e_k|U|e_0\rangle$, agissant sur le système principale S. Il est évident que les E_k satisfont la relation de complétude : $\sum_k E_k^\dagger E_k = \sum_k \langle e_0|U^\dagger|e_k\rangle\langle e_k|U|e_0\rangle = \langle e_0|U^\dagger U|e_0\rangle = \langle e_0|\mathbb{I}_S E|e_0\rangle = \mathbb{I}$, ou nous avons utilisé l'unitarité de U et la complétude de la base $\{e_k\}$. l'hypothèse d'un état initial pur pour l'environnement n'implique pas de perte de généralité, puisque si ρ_E était mixte nous serions autorisé à considérer un environnement plus grand ou par purification, l'état initial est pur, sans affecter la dynamique du système principale.

Nous avons introduit ci dessus une carte quantique ϵ qui ne dépend pas du temps, c'est a dire qu'elle décrit le résultat d'une opération[2, 11].

Description Quantique des Qubits

3.1 Le principe des Qubits

Les qubits sont les éléments de manipulation de base de l'information dans les ordinateurs quantiques. Ils s'opposent au bits de l'informatique traditionnelle. Avec eux, on passe d'un monde déterministe à un monde probabiliste.

Dans l'informatique traditionnelle, les bits correspondent à des charges électriques circulantes qui traduisent le passage d'un courant électrique ou son absence. Un bit est de valeur 1 si le courant passe soit de 0 si le courant ne passe pas. La lecture d'un bit donne 1 ou 0. Elle est déterministe, à savoir que si l'on répète l'opération de lecture plusieurs fois, ou préparation de lecture après une réédition du calcul, on obtiendra normalement le même résultat[18, 17].

	Bits : 0 ou 1	Qubits : 0 et 1	
états	deux états possibles exclusifs	deux états possibles	
Représentation interne	0 ou 1	vecteur à deux dimensions	
Initialisation	0 ou 1	0	
Lecture	0 ou 1, déterministe	0 ou 1 Probabiliste	

Dans un qubit, rien à voir ! Si les qubits sont généralement initialisés à 0, les opérations portant dessus vont généralement les amener à avoir un état de superposition entre 0 et 1. ces états correspondent à l'état de base et à l'état excité d'un système quantique à deux états possibles. Ces qubits peuvent donc être à la fois à la valeur 0 et 1, et dans une proportion qui est variable et qui correspond à la notion de superposition d'états. à la fin des calculs, Lorsque l'on lit la valeur d'un qubit, on retrouve 0 ou 1. La richesse des valeurs du qubit se manifeste donc uniquement pendant les calculs et non pas à leur initialisation ou lors de leur lecture à la fin des calculs.

Ici, nous allons d'abord creuser le modèle mathématique de représentation des qubits et comprendre comment on peut se le représenter physiquement et mentalement. Nous ferons alors un tour des différents types de qubits physiques. Les modèles mathématiques de représentation des qubits ne dépendent pas de leurs type physique. Seules les caractéristiques de l'ordinateur sont affectées comme le taux d'erreur et la nature des portes quantiques physiques de base dites "Universelles" agissant sur les qubits sachant que toutes les portes quantiques sont exécutables sur les ordinateurs quantiques.

3.2 La Sphère de Bloch de Représentation de l'Etat des Qubits

Dans un qubit, Le modèle de représentation mathématique de l'état d'un qubit s'appuie sur la fameuse sphère de Bloch. Ce modèle est liée à la représentation de l'état d'un qubit ou de tout quantum à deux états par un vecteur à deux dimensions dont la longueur dites "Norme" est toujours de 1. Ce vecteur a la particularité de comporter deux éléments : un nombre réel α et un nombre complexe β .

Dans la sphère de Bloch, L'état $|0\rangle$ d'un quantum à deux états est figuré par la position d'un vecteur de longueur 1 allant du centre de la sphère vers le pôle nord

sphère de Bloch

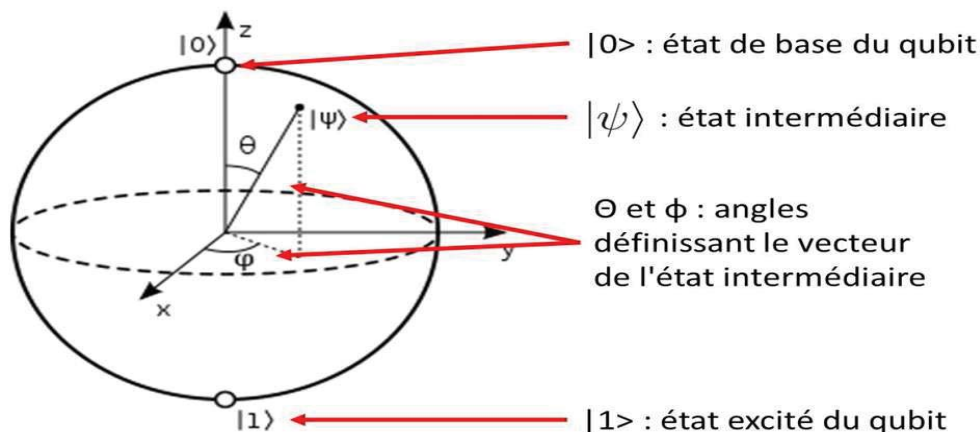


FIGURE 3.2.1 – La Sphère de Bloch

de la sphère et l'état $|1\rangle$ est un vecteur allant du centre de la sphère à son pôle sud[14, 26]

Les états intermédiaires sont représentés par des vecteurs partant du centre de la sphère qui sont toujours de longueur 1, avec un angle θ par rapport à la verticale z , et un angle ϕ par rapport à l'axe x situé allant du centre de la sphère à son équateur, et autour de l'axe z .

3.3 Un Quantum Bit

L'espace d'état d'un système quantique peut avoir n'importe quelle dimension finie ou infinie D . Le qubit a une dimension $D=2$. L'état générale d'un qubit est donné par une superposition : état pur.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (3.3.1)$$

Où α , β sont des coefficients complexes satisfaisant $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Ce principe de superposition affirme que si deux états $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ sont des états possibles d'un système physique, alors chaque combinaison linéaire $|\chi\rangle = a|\psi\rangle + b|\phi\rangle$, telle que $\langle\chi|\chi\rangle = 1$,

est encore un état possible du système. Grâce à cette dernière relation, il est possible de réécrire l'état (3.3.1) de la manière suivante :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\beta|1\rangle \quad (3.3.2)$$

Les nombres θ et ϕ définissent un point sur la sphère de Bloch.

Il y a de nombreuses réalisations physiques possibles d'un qubit. Tout système quantique à deux niveaux, tel que l'état de polarisation d'un photon, le spin $\frac{1}{2}$ d'un électron ou d'un noyau, sont des moyens naturelles pour l'implémentation d'un qubit. Une particule de Spin 1/2 peut en effet être une représentation physique d'un qubit. Nous introduisons les matrices de Pauli, qui sont les générateurs du groupe $SU(2)$.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

Ces matrices sont des matrices sans trace qui satisfont la relation de commutation suivante :

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.3.4)$$

Avec ϵ_{ijk} est le tenseur totalement antisymétrique. De plus, elles satisfont la relation $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$.

Lorsqu'un système de qubits est dans un état mixte, c'est à dire qu'il est décrit par une matrice de densité générale ρ , Il est représenté par un vecteur non-unitaire n dans la sphère de Bloch, appelé vecteur de Bloch. Les composantes du vecteur sont données par la projection sur chaque axe :

$$n_i = \text{tr}[\sigma_i \rho] \quad \text{avec } i = x, y, z \quad (3.3.5)$$

L'opérateur de densité peut donc s'écrire sous la forme :

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.3.6)$$

Où $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ est le vecteur des matrices de Pauli définies dans l'équation (3.3.3).

Certaines propriétés de l'état du qubit ont une interprétation intéressante dans la représentation de Bloch. Par exemple, la pureté de l'état est proportionnelle au carré de la norme Euclidienne de la représentation de Bloch.

Norme Euclidienne du vecteur de Bloch[24] :

$$U = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|n\|^2 \quad (3.3.7)$$

à titre d'exemple, nous allons introduire l'opérateur qui correspond à l'opérateur NOT sur un qubit. Dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, la matrice correspondante à cet opérateur s'écrit :

$$U_{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

Il est simple de vérifier que, appliqué sur l'état $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, donne :

$$\begin{aligned} U_{NOT}|\psi\rangle &= U_{NOT}(a|0\rangle) + U_{NOT}(b|1\rangle) \\ &= aU_{NOT}|0\rangle + bU_{NOT}|1\rangle \\ &= a|1\rangle + b|0\rangle \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

3.4 Système à Deux Qubits

Un espace de Hilbert à deux qubits est de dimension 4, avec une base ortho-normée données par les quatre vecteurs $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Comme pour le cas d'un seul qubit, on peut se trouver dans un état qui est une combinaison linéaire arbitraire :

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \quad (3.4.1)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. On remarque que cette définition correspond au produit tensoriel de deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 de

dimension 2, correspondant aux deux qubits séparés. En effet, on peut interpréter le vecteur $|00\rangle$ comme le produit tensoriel $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$, de même pour les trois autres vecteurs de base. On peut généraliser cette définition de la manière suivante :

Un système composé de plus d'un qubit est représenté comme le produit tensoriel des espaces de Hilbert à un seul qubit.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n \quad (3.4.2)$$

La base de calcul d'un système multi-qubit est donnée par le produit des états [24, 4] :

$$|a_0 a_1 \dots a_n\rangle = |a_0\rangle \otimes |a_1\rangle \dots \otimes |a_n\rangle \quad \text{Ou } a_i \in \{0, 1\} \quad (3.4.3)$$

Exemple : si $|\psi\rangle = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$ et $|\phi\rangle = c|0\rangle_2 + d|1\rangle_2$, alors l'état :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle &= (a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1) \otimes (c|0\rangle_2 + d|1\rangle_2) \\ &= ac|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + ad|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 + bc|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + bd|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \\ &= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle \end{aligned}$$

est un état de l'espace $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Une paramétrisation possible d'un état à deux qubits est basée sur les matrices de Pauli.

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} \sigma_i^{(1)} \otimes \sigma_j^{(2)} \quad (3.4.4)$$

Où $\sigma_0 \equiv \mathbb{I}$, et le coefficient $a_{00} = \text{tr}(\rho) = 1$. Les coefficients réels a_{ij} forment une matrice 4×4 qui généralise le vecteur de Bloch pour le qubit unique et qui est parfois appelée la matrice de Bloch. elle est écrite comme suit :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b^T & R \end{pmatrix}$$

Ou $a = (a_{10}, a_{20}, a_{30})$ et $b = (a_{01}, a_{02}, a_{03})$ sont les vecteurs de Bloch des opérateurs de densité réduite $\rho_{1(2)} = \text{tr}_{1(2)}[\rho]$, comme on peut le vérifier facilement. La matrice $\mathcal{R}_{3 \times 3}$, représente les corrélations entre les deux qubits.

Ici les quatre état de Bell ou l'inégalité des théories réalistes locales est violée au maximum :

$$\begin{cases} |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \\ |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \\ |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \\ |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Ces états sont pertinents dans l'étude du traitement de l'information quantique.

A titre d'exemple, nous allons introduire l'opérateur qui correspond à l'opération "CNOT" sur deux qubits. Dans la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, la matrice correspondante à cet opérateur s'écrit :

$$U_{cnot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

La porte CNOT retourne le deuxième qubit (le qubit cible) si et seulement si le premier qubit (le qubit de contrôle) est $|1\rangle$

Avant		Après	
Contrôle	Cible	Contrôle	Cible
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$

Exemple l'état :

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \quad (3.4.7)$$

$$U_{CNOT}|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|11\rangle + d|10\rangle \quad (3.4.8)$$

3.5 Superposition

Le principe de superposition prévoit qu'un objet quantique puisse naturellement être dans plusieurs états à la fois en même temps, un électron peut tourner sur lui même dans un sens (spin up) et dans un autre (spin down), un atome peut être à la fois dans un état fondamental et excité, et un photon peut être à un endroit, ou ailleurs[24, 18].

La physique quantique offre une infinité de possibilités grâce à l'ensemble des combinaisons données par la superposition cohérence de deux états de base $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Par exemple, considérons un photon de polarisation horizontale après avoir traversé un polariseur (3.2.1). Si l'on ajoute une lame demi-onde qu'on fait tourner d'un angle θ (indiqué en rouge sur la figure 3.5.1), On obtient une superposition $\sin\theta|H\rangle + \cos\theta|V\rangle$ des états de polarisations horizontale $|H\rangle$ et verticale $|V\rangle$. Ceci se traduit par l'obtention d'un qubit sous la forme $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, les poids relatifs α et β variant avec l'angle θ tout en respectant la règle de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

SPU dans la figure représente une source de photon uniques. située ici chez Alice. La flèche bleue représente la direction de propagation des photons depuis Alice jusqu'à Bob. Les flèches à 90 l'une de l'autre sur le photon envoyé vers Bob représentent les deux états de polarisations horizontale et verticale. Les qubits sont codés sur l'observable polarisation par le biais d'un polariseur (pol) et d'une lame de $\lambda/2$. Les qubits photoniques codés sur l'observable polarisation sont couramment utilisés pour la cryptographie quantique, au même titre que les observables temps et fréquence.

Des qubits peuvent être constitués à partir de tout système quantique, particule

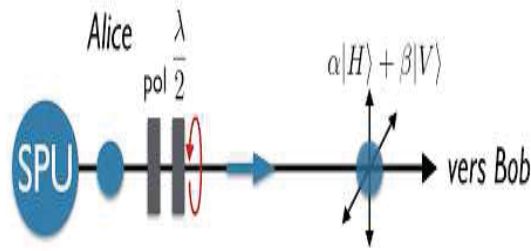


FIGURE 3.5.1 – La superposition

naturelle ou artificielle, présentant deux états distincts qu'on peut produire dans un état de superposition.

3.6 Intrication

L'intrication représente la généralisation à deux ou plusieurs systèmes quantiques de la superposition cohérente d'états définis pour la constitution d'un qubit. Le principe d'intrication stipule que deux particules ayant interagies à un moment de leur existence peuvent former à jamais un système intriqué même lorsque les particules sont séparées. Ce qui signifie qu'en effectuant une mesure sur l'une, on peut connaître à distance l'état de l'autre et ce même à des milliers de Km.

On considère une source (SPPI) qui émet des paires de photons intriqués. La paire de photons intriqués doit être considérée comme un tout, c'est à dire un système quantique unique composé de deux sous-systèmes ; depuis son instant de création jusqu'aux instants où les photons sont détectés, même s'ils sont à grande distance l'un de l'autre. Lorsqu'une mesure est effectuée sur l'un des deux photons, le résultat de la mesure sur l'autre est immédiatement déterminé [25, 10].

Ici une source (SPPI) émet une paire de photons (a et b) intriqués, sur laquelle l'information quantique est codée sur l'observable polarisation. La paire de photons est alors préparée dans un état bien défini $|\psi_{a,b}\rangle$, alors que les états de photons individuels ne le sont pas. En autres termes, l'information quantique est codée sur l'objet quantique composé des deux photons, depuis la création de la paire jusqu'à

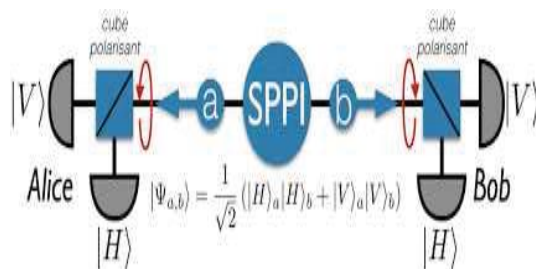


FIGURE 3.6.1 – Intrication

sa detection : on parle de qubits intriqués. Expérimentalement, les photons sont envoyés à deux utilisateurs distants, Alice et Bob, qui possèdent chacun un cube séparateur de polarisation suivi de deux détecteurs à 90 l'un de l'autre. Ceci leur permet de projeter l'état du photon reçu dans une base d'analyse, ici la base des polarisations horizontale et verticale.

En tournant la lame demi-onde (flèche rouge), ils peuvent changer de base d'analyse. le point crucial est que tant que Bob n'a pas fait de mesure, le photon d'Alice ne possède aucune polarisation définie, puisque seul l'état de la paire compte du point de vue de l'information.

Ces propriétés peuvent être exploitées par les deux interlocuteurs pour établir des clés secretes utiles aux opérations de cryptographie.

3.7 Le paradoxe EPR

En 1935, le phénomène d'intrication a amené Einstein, Podolski et Rosen, à proposer une expérience de pensée qui violerait les lois de la relativité générale. La résolution de ce paradoxe, appelé EPR, est un résultat fondamental validant les concepts de mécanique quantique, et s'avère très utile pour comprendre les phénomènes impliqués en informatique quantique[1, 20, 24].

L'expérience de pensée se réduit en essence à une paire de particules intriquées (appelée à juste titre "paire EPR", par exemple $\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$), émise par une source, et dont chacune des particules est envoyée séparément à deux destinataires éloignés Alice et Bob. Supposons qu'Alice mesure la particule qu'elle reçoit et trouve l'état

$|0\rangle$. Alors la fonction d'onde de l'état intriqué se réduit instantanément à $|00\rangle$, et si Bob mesure l'état de sa particule, il mesurera à coup sûr $|0\rangle$. De même, si Alice mesure $|1\rangle$, Bob mesurera également $|1\rangle$ avec une probabilité de 100%. Il apparaît que si Alice et Bob sont suffisamment éloignés, ceci permettrait de communiquer à des vitesses supérieures à celle de la lumière. C'est le paradoxe EPR.

Pour résoudre ce paradoxe, Einstein, Podolski et Rosen ont suggéré que chacune des particules dispose de degrés de libertés internes qui permettraient de décrire complètement le résultat des mesures, mais qui seraient cachés aux observateurs à cause de notre connaissance imparfaite des lois de la physique. La théorie de "ces variables cachées" résoudrait le paradoxe, mais porterait un coup à la mécanique quantique, qui ne serait plus qu'une théorie incomplète utilisant des probabilités pour masquer notre incompréhension du monde.

L'argument a été étudié par le physicien Bell, qui a révélé une surprise. Supposons que les particules intriquées soient deux photons dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$ où $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ correspondent respectivement aux états de spin "up" et "down". Supposons maintenant qu'Alice et Bob fassent leurs mesures le long de deux axes inclinés d'un angle respectivement ϕ_a et ϕ_b par rapport à la verticale. Selon la mécanique quantique, et en accord avec l'expérience, la probabilité de mesurer la même polarisation pour Alice et Bob est $\sin^2((\phi_a - \phi_b)/2)$. Mathématiquement, il n'y a cependant aucun moyen d'affecter aux deux photons des propriétés locales (c'est-à-dire à chacun des deux photons indépendamment), qui permette de retrouver ce résultat. Il faudrait par exemple que Alice et Bob puissent être certains de mesurer des polarisations opposées (up et down) pour $\phi_a = \phi_b$, et que la probabilité de mesurer le même spin soit de $\sin^2(60^\circ) = 3/4$ pour $\phi_a - \phi_b = 120^\circ$. Or Feynman a montré que ceci est impossible avec une théorie de variables cachées, au grand maximum cette dernière atteignant la valeur $2/3$. De manière plus générale, Bell montra que toute théorie de variables cachées prédisait que certaines mesures devaient satisfaire des

inégalités, appelées inégalités de Bell.

Il restait à démontrer expérimentalement la violation de ces inégalités de Bell, ce qui fut fait en 1982 par le groupe d'Alain Aspect à l'université d'Orsay. Certains groupes allèrent même au-delà, en considérant des systèmes plus complexes qui apportaient des arguments de plus en plus démonstratifs de cette violation. En particulier, Greenberger, Horne et Zeilinger préparèrent un système de trois spins dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$ et montrèrent qu'une mesure le long d'un axe horizontal pour deux particules, et le long d'un axe vertical pour la troisième, donnera avec certitude un résultat exactement opposé de celui que donnerait une théorie de variables cachées.

La violation des inégalités de Bell permet d'imaginer des processus physiques qui sont possibles grâce à la mécanique quantique, mais qu'aucun ordinateur classique ne pourrait résoudre. Par exemple, en reprenant l'argument de Feynman, avec plusieurs paires de photons intriqués A et B, et des axes de mesure orientés à 120° Alice et Bob sont capables de mesurer des états corrélés dans plus de 70% des cas, ce qui serait impossible en physique classique.

3.8 La Téléportation Quantique

La téléportation quantique montre qu'il est possible de communiquer des qubits en ne transmettant que des bits classiques. Ceci est loin d'être facile. Supposons en effet qu'Alice désire envoyer un qubit $|\phi\rangle$ à Bob. Si elle connaît son état (par exemple $|0\rangle$), elle peut dire à Bob par un canal classique : le qubit est dans l'état $|0\rangle$. En revanche, si l'état de $|\phi\rangle$ est inconnu, ceci est impossible : Alice ne peut pas savoir sur quelle base mesurer $|\phi\rangle$, chaque mesure le modifie irrémédiablement, et elle ne peut pas le cloner. La seule manière simple de communiquer $|\phi\rangle$ est de l'envoyer physiquement[24].

La technique de téléportation, imaginée par Bennett des laboratoires IBM, permet de s'affranchir de l'envoi physique du qubit, et de communiquer son état à

l'aide de bits classiques. Elle utilise, comme pour le codage super-dense, une paire EPR $\psi = |00\rangle + |11\rangle$, dont Alice et Bob disposent chacun d'un qubit (Alice le premier et Bob le dernier). Le qubit à transmettre peut s'écrire $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. Alice possède initialement les deux premiers qubits de l'état à 3 qubits : $\phi \otimes \psi = a|000\rangle + b|100\rangle + a|011\rangle + b|111\rangle$ dont elle mesure ses deux premiers qubits dans la base de Bell. Pour ce faire elle opère comme Bob dans le cas du codage super-dense, en appliquant successivement $C_{not} \otimes \mathbb{I}$ puis $H \otimes \mathcal{I} \otimes \mathcal{I}$, après quoi l'état s'écrit : $|00\rangle (a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle (a|1\rangle + b|0\rangle) + |10\rangle (a|0\rangle - b|1\rangle) + |11\rangle (a|1\rangle - b|0\rangle)$. Alice mesure ensuite les deux premiers qubits, ce qui lui donne $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ ou $|11\rangle$ avec égale probabilité. Ce résultat est communiqué à Bob sous forme de deux bits classiques. La mesure a également pour effet de projeter le qubit de Bob dans l'un des états $a|0\rangle + b|1\rangle$, $a|1\rangle + b|0\rangle$, $a|0\rangle - b|1\rangle$ ou $a|1\rangle - b|0\rangle$. Bob peut enfin retrouver le qubit initial $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ en appliquant à son qubit ainsi modifié l'une des opérations $\{\mathbb{I}, X, Y, Z\}$, qu'il sait choisir pertinemment grâce à l'information classique des deux bits envoyés par Alice.

Les premières démonstrations expérimentales de la téléportation quantique datent de 1997. Elles utilisaient des photons comme qubits, plus faciles à manipuler que des atomes, mais beaucoup plus difficiles à faire interagir entre eux. Pour pallier ce problème, l'équipe de Francesco Martini à l'université La Sapienza de Rome, utilisait un seul photon comme qubit à téléporter et comme photon EPR (en codant sur deux variables indépendantes comme par exemple l'impulsion et la polarisation), ce qui évitait toute interaction à deux photons lors de la projection d'Alice sur les états de Bell. Une démonstration plus propre est due au groupe d'Anton Zeilinger à l'époque à l'université d'Innsbruck, utilisant des photons UV polarisés, et en distinguant bien photon à téléporter et photon EPR. L'intrication était réalisée grâce à la conversion paramétrique d'un crystal non-linéaire, et l'analyse à l'aide de l'interférométrie à deux photons. Par la suite, en 2004, ce même groupe a réalisé la téléportation quantique à travers le Danube. Les photons intriqués étaient envoyés sous le fleuve à l'aide d'une fibre optique, et le signal classique était envoyé par les airs. Du fait de

la propagation plus lente des photons dans la fibre, ceci permettait au signal classique d'arriver à temps pour réaliser le décodage des qubits. Toutefois, bien que plus proches du schéma théorique de la téléportation quantique que l'expérience initiale de Martini, ces démonstrations étaient imparfaites car probabilistes, demandant une post-sélection des photons mesurés. C'était le prix à payer pour travailler avec des particules qui interagissent très peu entre elles. Seul le recours à des atomes devait permettre de résoudre ce problème. La première téléportation quantique à l'aide d'atomes devait attendre 2004, avec deux publications dans le même numéro de la revue *Nature*, en provenance des groupes de David Wineland au NIST (Boulder, Colorado)²⁰¹, et de Rainer Blatt à l'université d'Innsbruck. Les deux groupes utilisaient des techniques assez similaires, avec des pièges de Paul linéaires où des ions étaient piégés. Le groupe d'Innsbruck utilisait trois ions (Ca^+) séparés de $5\mu m$, manipulés individuellement à l'aide de faisceaux lasers focalisés très précisément. Les manipulations impliquant plus d'un ion (intrication, mesures de Bell) se faisaient au travers des modes de vibration du centre de masse des ions. Le groupe du NIST utilisait des ions Be^+ confinés dans un piège linéaire segmenté, ce qui permettait de les manipuler plus facilement et de ne pas avoir recours aux vibrations des centres de masse. Des potentiels électriques permettaient de faire passer les ions d'un segment à l'autre, et deux lasers étaient utilisés pour implémenter les rotations des qubits. Les deux groupes atteignirent ainsi des fidélités supérieures à 70% dans le protocole de téléportation (78% dans l'expérience de Wineland). On rappelle ici qu'une fidélité supérieure à $2/3$ est la preuve que l'intrication est nécessaire au processus de téléportation, et que ce dernier ne peut pas s'expliquer à l'aide de variables locales.

Ces deux expériences de téléportation utilisant des ions sont d'une importance fondamentale. D'une part elles prouvent expérimentalement la validité du protocole de téléportation sans avoir recours à un traitement post-sélection comme c'est le cas avec les photons. Elles montrent également que la téléportation fonctionne avec de la matière, ce qui permet de préparer à l'avance des paires intriquées et de les conserver. La téléportation peut alors se faire par envoi d'information classique, ty-

piquement à la vitesse de la lumière, et sans envoi de matière, ce qui correspond assez bien à l'image intuitive que l'on se fait d'un processus de téléportation. Enfin, ces expériences sont parmi les premières à mettre en oeuvre les techniques efficaces de piégeage d'ions qui sont parmi les plus prometteuses dans la construction des futurs ordinateurs quantiques.

Dans le présent chapitre nous nous intéresserons aux Réalisations Expérimentales des Qubits, mais avant, nous allons présenter les critères de Di Vincenzo nécessaires pour la construction d'un ordinateur quantique

4.1 Les critères de Di Vincenzo

Les critères de Di Vincenzo sont des conditions nécessaires pour la réalisation expérimentale d'un ordinateur quantique. Elles ont été proposées en 2000 par le physicien théoricien David P. Di Vincenzo. On peut les énoncer comme suit [24, 16, 2] :

1. Évolutivité : Un système physique évolutif composé de qubits bien caractérisés.
2. Initialisation : La possibilité d'initialiser l'état des qubits dans un état de référence simple.

3. Contrôle : La capacité de contrôler l'état de l'ordinateur à l'aide de séquences de portes quantiques universelles élémentaires.
4. Stabilité : temps de décohérence beaucoup plus longs que les temps d'exécution des portes logiques, ainsi que la possibilité de supprimer la décohérence grâce à la correction d'erreurs et au calcul tolérant aux fautes (Fault-tolerant computations).
5. Mesure : Une capacité de mesure spécifique au qubit permettant de lire l'état de l'ordinateur dans une base adéquate.

4.2 Introduction a la RMN

La découverte fondatrice de la résonance magnétique nucléaire RMN est due au physicien américain I.Rabi. Ce dernier a obtenu le prix Nobel de physique en 1944 pour ses études concernant le moment magnétique du noyau.

Le phénomène physique sur lequel repose la résonance magnétique nucléaire (RMN) a été étudié en 1946 par des groupes de physiciens dirigés par M. Purcell et F. Bloch : depuis cette date, la technique a connu un développement spectaculaire dans différents domaines. La RMN apporte des renseignements extrêmement intéressants sur la structure des molécules aussi bien en phase liquide qu'en phase solide[18, 21, 22].

4.2.1 Modèle Physique

La résonance magnétique nucléaire est une technique de spectroscopie appliquée aux particules de spin nucléaire non nul. La RMN est un phénomène par lequel un noyau d'atome absorbe les rayonnements électromagnétiques d'une fréquence spécifique en présence d'un champ magnétique.

La RMN est un phénomène idéal pour réaliser un ordinateur quantique parce que les spins à deux états se comportent de façon naturelle comme un système de

qubits. Il y a cependant deux problèmes importants à résoudre en utilisant la RMN :

- Le moment magnétique nucléaire est très petit et on a donc besoin d'un grand nombre de molécules 10^8 pour obtenir un signal mesurable. Une seule molécule peut être un bon ordinateur quantique, mais est-ce que ceci est aussi vrai pour un ensemble de molécules ?
- La RMN s'applique en général à des systèmes physiques à haute température 300 K ou les états initiaux des spins sont complètement arbitraires. Comment peut-on faire des calculs quantiques avec des systèmes tellement mélangés ?

Des solutions pour ces deux problèmes ont permis à la RMN de devenir la technique la plus populaire actuellement pour faire des réalisations physiques de qubits. Les réalisations physiques d'ordinateurs quantiques ont réussi au mieux à intriquer deux qubits, à l'exception de la RMN qui est allée jusqu'à 7 qubits. La RMN est un phénomène qui apparaît pour certains atomes possédant un spin nucléaire, propriétés purement quantiques de certaines particules.

Dans la vision classique, où un électron tourne autour du noyau sur une orbite circulaire ou elliptique, le spin correspond au moment cinétique de l'électron dû à sa rotation propre (d'où le terme spin : tourner en anglais). Dans la vision moderne du spin, on considère le moment cinétique de spin $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ comme un opérateur qui a les mêmes propriétés que les autres moments cinétiques quantiques, comme le moment cinétique orbital. Ses composantes vérifient des relations de commutations analogues au moment cinétique orbital qui sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} [S_x, S_y] = i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] = i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] = i\hbar S_y \\ [S^2, S_k] = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Il existe une base propre $\{|S, m\rangle\}$ associée aux opérateurs S^2 et S_z , où S est entier ou demi entier et $S \leq m \leq S$. Dans cette base, l'opérateur de spin vérifie :

$$\begin{cases} S^2|S, m\rangle = S(S+1)\hbar^2|S, m\rangle & S_z|S, m\rangle = m\hbar|S, m\rangle \end{cases} \quad (4.2.2)$$

4.2.2 Qubit et RMN

RMN, Cette technique sur laquelle est basée l'imagerie par résonance magnétique (IRM), a été l'une des premières utilisée pour le calcul quantique (7 qubits). Le qubit est un noyau atomique de spin 1/2 et le registre est constitué (jusqu'à 7) de noyaux atomiques de spin 1/2 d'une même molécule. Par exemple dans la molécule de Trichloréthylène enrichi il y a deux atomes de carbone 13 et un d'hydrogène dont le noyau a spin 1/2. En fait, à la différence des autres systèmes listé ci-dessus, le qubit n'est pas constitué d'un noyau unique mais de l'ensemble des noyaux des molécules en phase liquide qui réagissent comme un ensemble statistique ce qui a pour effet de rendre les signaux détectables. Mais on peut raisonner comme si chaque noyau était unique.

L'observable sera donc ici représenté par l'opérateur $\vec{\sigma} = (\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}Z)$: les états propres de Z constitueront les états de base de calcul $|0\rangle$ et $|1\rangle$. L'évolution d'un qubit se fait en plaçant le système dans un champ magnétique.

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_z + B_1(\cos(\omega t)\vec{e}_x - \sin(\omega t)\vec{e}_y) \quad (4.2.3)$$

avec lequel le spin interagit selon l'opérateur Hamiltonien.

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar}{2}\gamma\vec{\sigma}\vec{B} \quad (4.2.4)$$

où γ est une constante mesurable qui dépend de l'atome. La pulsation ω est un paramètre ajustable.

Si on note $\omega_0 = \gamma B_0$ et $\omega_1 = \gamma B_1$ l'opérateur Hamiltonien se met sous la forme :

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

L'évolution d'un système quantique se fait selon l'équation de Schrodinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\psi(t)\rangle \quad (4.2.6)$$

qui est équivalente à $|\psi(t)\rangle = U(t, 0) |\psi(0)\rangle$ avec $U(t, 0) = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$.

Si $|\psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ alors :

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle$$

où $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ satisfont les équations différentielles :

$$\begin{cases} i \frac{d\alpha(t)}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} \alpha(t) - \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t} \beta(t) \\ i \frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} \alpha(t) + \frac{\omega_0}{2} \beta(t) \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Ces équations se résolvent facilement, par exemple en posant $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t) e^{i\omega_0 t/2}$ et $\beta(t) = \tilde{\beta}(t) e^{-i\omega_0 t/2}$ si on prend comme condition initiale $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, C'est à dire $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. On obtient :

$$|\beta(t)|^2 = \mathcal{P}_{0 \rightarrow 1} = \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) \quad (4.2.8)$$

avec $\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}$. Si la fréquence ω du champ \vec{B}_1 est ajustée à $\omega \sim \omega_0$ (résonance) alors l'état $|\psi(t)\rangle$ oscillera entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$ au cours du temps avec une période $2\pi/\omega_1$. La pulsation ω_0 dépend de l'intensité du champ magnétique statique B_0 . Pour une intensité typique en RMN de 15 Tesla cette fréquence est de l'ordre de $500 MHz$, c'est le domaine des radio-fréquence (RF). La durée d'application du champ B_1 (du pulse RF) permettra de manipuler l'état du spin, c'est à dire de

réaliser des opérations à un qubit.

Une fois la phase d'évolution terminée l'état de spin final induit dans l'échantillon une aimantation qui est mesuré : c'est la phase de lecture.

4.2.3 Mesure d'un signal RMN :

La réalisation de portes à deux qubits se fait au moyen de l'interaction entre le spin de deux noyaux voisins. l'Hamiltonien de cette interaction est de la forme :

$$\mathcal{H}_1 = J\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 \quad (4.2.9)$$

ou les indices 1 et 2 réfèrent aux noyaux. Le facteur de couplage J/\hbar représente une fréquence de quelques centaines de Hertz si bien que ce terme de couplage n'a d'effet qu'en l'absence de champ RF (évolution libre), ou si l'intensité B_1 est faible de telle sorte que $J/\hbar \leq \omega_1$; il induit donc un opérateur unitaire d'évolution $U_1 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}tJ\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\right)$. La réalisation d'une porte C-NOT peut s'obtenir par la sequence d'impulsions associée aux opérateurs suivants :

$$\mathcal{M}_{CNOT} = e^{i\pi/4}\mathcal{R}_z^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{R}_x^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\mathcal{Z}^{(1)}\mathcal{Z}^{(2)}\right)\mathcal{R}_y^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{R}_z^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (4.2.10)$$

L'opérateur d'interaction est ici appliqué pendant un temp $\Delta t = \frac{\pi\hbar}{4J}$ qui est donc de l'ordre du milli-seconde compte tenu de la valeur J.

L'échantillon est placé dans un champ magnétique statique intense (B_0). Les molécules de cet échantillon sont soumises à un champ magnétique appliqué B_1 qui provoque une perturbation des atomes considérés. L'application de ce champ de radiofréquence (RF) choisie (impulsion ou "pulse") est de courte durée, quelques microsecondes. Les noyaux génèrent à leur tour un micro- champ magnétique qui sera capté par une bobine réceptrice, c'est le signal R.M.N. (Données). Ces données sont envoyées à un ordinateur où elles sont analysées et transformées en signal.

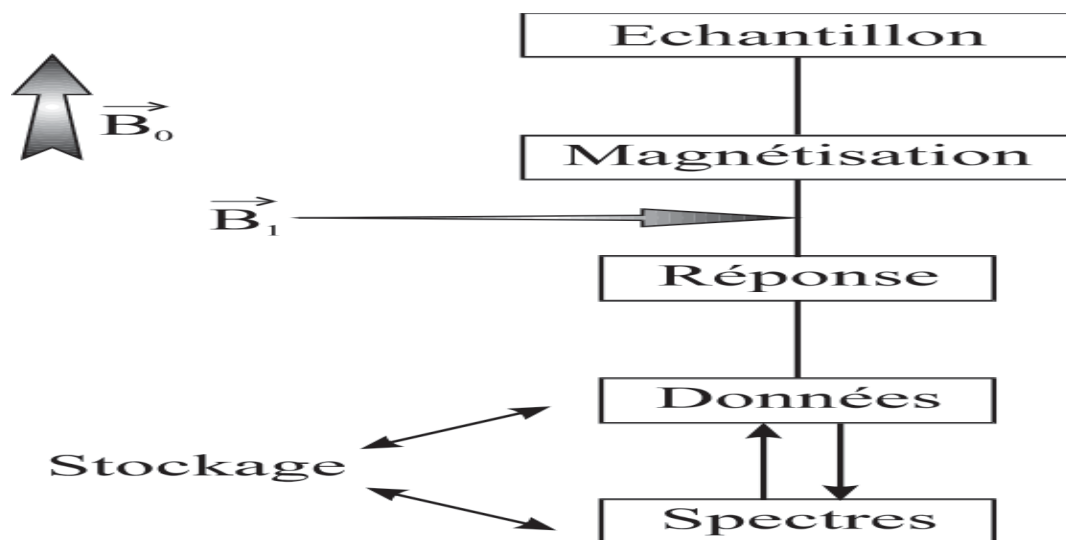


FIGURE 4.2.1 – Représentation Schématique d’une expérience RMN

Le traitement mathématique, ou transformée de Fourier, permet de transformer le signal en spectre R.M.N. voir figure (4.2.1).

4.3 Ions Piégés

Les ions piégés sont un système physique étudié depuis les années 1950 pour leurs caractéristique exceptionnelles en terme de faible interaction avec l’environnement. Il s’agit d’ions d’atomes qui peuvent être du calcium et qui sont maintenus sous vide et suspendus par suspension électrostatique. Un pompage optique est réalisé par leur initialisations. un laser sert à la mesure et exploite le phénomène de fluorescence des ions excités par le laser. le magnétisme est utilisé pour l’activation des portes quantiques[9, 28, 25].

4.3.1 Manipulation d’ions

L’utilisation des ions piégés pourrait se reveler particulièrement avantageuse. Du fait de leur charge, les ions sont facilement manipulables par des pièges électromagnétiques, et on sait actuellement construire par exemple des portes logiques ou produire des états intriqués en les utilisant.

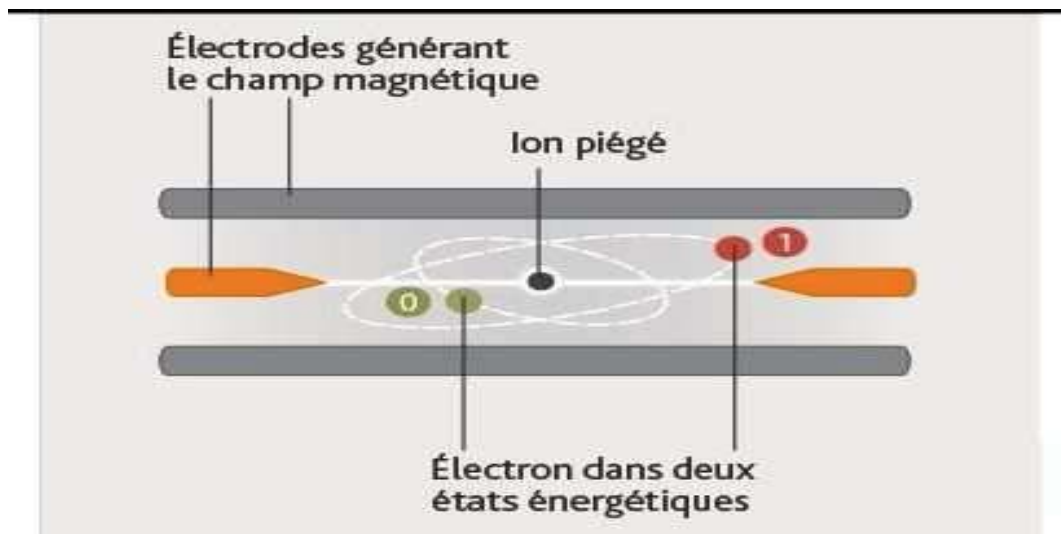


FIGURE 4.3.1 –

On utilise des alcalino-terreux (deuxième colonne du tableau périodique : Be, Mg, Ca, Sr, Ba), qui n'ont donc plus qu'un électron de valence une fois ionisés, donc une structure de niveaux d'énergie simple.

4.3.2 Piégeage d'Ions

Le piège utilisé est appelé piège de Paul d'après le nom de son inventeur, il est obtenu en combinant l'action de champ électrique continu et alternatif. En plaçant les ions dans un potentiel harmonique :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}M (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

M : Masse de l'ion, $\vec{r} = (x, y, z)$ position de l'ion dans le piège.

Le piège de Paul apporte une solution pratique à un problème de physique élémentaire : il est impossible de confiner de manière stable une particule chargée en utilisant uniquement des champs électriques statiques. Le principe du piège est d'utiliser des champs électriques oscillants à des fréquences RF, permettant de stabiliser en moyenne les ions piégés. Le piège de Paul présente deux géométries principales, une tridimensionnelle utilisant des électrodes hyperboliques, et une li-

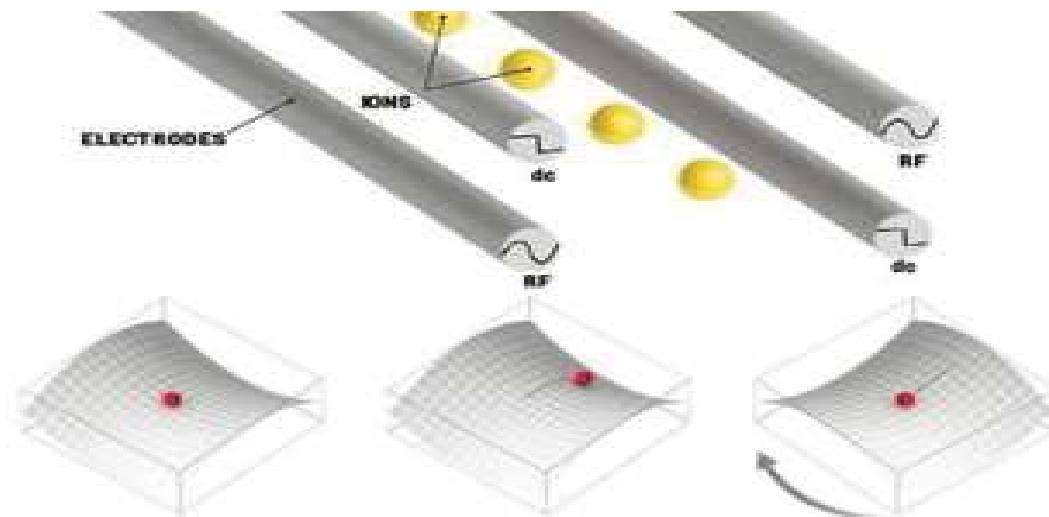


FIGURE 4.3.2 – Principe de fonctionnement d'un piège de Paul linéaire. Les ions sont confinés sur une ligne par des champs électromagnétiques générés par quatre électrodes, dont deux produisent un champ électrique continu, et deux produisent un champ alternatif RF. Le potentiel crée a la forme d'une selle de cheval tournant à la fréquence RF, au centre de laquelle les ions sont piégés

néaire qui est celle qui nous intéresse dans le cas présent, et qui est représentée schématiquement sur la figure (4.3.2).

Dans une enceinte à vide, quatre longues électrodes sont disposées de manière à former les coins d'une boîte rectangulaire. Un champ électrique statique (dc) est appliqué sur deux des électrodes opposées diagonalement, et un champ électrique oscillant à une fréquence RF sur les deux autres. La combinaison de ces champs force les ions à rester confinés le long de la ligne centrale équidistante des 4 électrodes. La raison est la suivante. Si on ne considère que l'action des électrodes RF, les forces électriques agissant sur un ion dérivent à chaque instant d'un potentiel qui a la forme d'une selle de cheval. Cette selle confine dans une direction seulement, celle qui correspond à une montée de potentiel. L'autre direction est anti-confinante car elle correspond à une chute de potentiel (une particule aurait tendance à tomber). L'astuce du piège provient de l'oscillation du champ RF, qui provoque une rotation permanente du potentiel. Pendant un demi cycle, un ion légèrement décalé par rapport à la ligne centrale se trouve sur la pente montante de la selle, et est poussé vers

le centre. En revanche, pendant le deuxième demi-cycle, ce même ion se trouve sur la pente descendante de la selle, et subit une force l'éloignant du centre. Le signal RF est conçu de telle sorte à ce que l'intensité de la première force (vers le centre) soit plus importante que celle de la deuxième, si bien qu'en moyenne, l'ion subit une force de confinement vers la ligne centrale. En réalité, ce confinement se limite au plan médian, équidistant des électrodes RF. C'est là qu'interviennent les deux électrodes dc, qui apportent un confinement supplémentaire dans ce plan médian, ramenant les ions le long de la ligne centrale en les poussant des deux côtés.

Le résultat du piège de Paul est d'aligner les ions le long de la ligne centrale équidistante des quatre électrodes. Comme les ions ont la même charge, ils se repoussent naturellement, phénomène qui peut être utilisé à des fins de codage quantique. En effet, dans ce système, lorsqu'un ion n'est pas figé à l'intersection de plusieurs lasers, il est libre de se déplacer le long de la ligne centrale. Interagissant avec les autres ions, comme dans une chaîne de billes reliées par des ressorts, il peut donner à l'ensemble des ions un mouvement de vibration collectif, appelé "état de vibration". Cet état est alors susceptible d'agir comme un bus quantique, transférant les uns aux autres, les états quantiques des différents ions.

4.3.3 Principe du calcul quantique utilisant des ions piégés

Le piège de Paul et les techniques de refroidissement d'atomes par laser constituent les premiers outils permettant d'envisager l'utilisation des ions piégés pour des opérations élémentaires de calcul quantique. Dans sa configuration de base, le système consiste en un piège de Paul linéaire à vide poussé $10^{-8} Pa$ dans lequel sont confinés plusieurs ions. Chaque ion comporte deux niveaux à longue durée de vie, faisant office d'états orthogonaux du qubit $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Il s'agit principalement :

- de deux niveaux hyperfins de l'état fondamental. Ces états sont extrêmement stables, leur durée de vie étant de l'ordre de mille millions d'années. L'état

$|0\rangle$ correspond à un ion où l'électron de valence et le noyau ont des spins opposés, dans l'état $|1\rangle$ les spins sont alignés.

— du niveau fondamental (état $|0\rangle$) et d'un niveau excité de l'ion (état $|1\rangle$), on parle alors de "qubit optique".

Ces ions sont refroidis et manipulés par des lasers accordés sur les fréquences de transition entre les deux niveaux internes (transitions Raman). Typiquement, un même faisceau laser est divisé en plusieurs faisceaux parallèles, qui illuminent chacun un ion différent. Ces faisceaux permettent de manipuler les ions individuellement, et donc de leur appliquer des portes quantiques à un qubit, mais pas plus. Pour obtenir des portes quantiques à deux qubits, il est nécessaire d'avoir une intrication entre plusieurs qubits. C'est là qu'intervient l'idée fondamentale de Cirac et Zoller, d'utiliser le mouvement d'ensemble de la chaîne d'ions.

Comme on le sait, les photons de lumière transportent de l'énergie mais aussi une quantité de mouvement, si bien qu'un faisceau laser interagit avec un ion en lui transférant une certaine impulsion. En outre, les ions se repoussent mutuellement car ils ont la même charge électrique. Par cette interaction, l'impulsion d'un ion est transmise à ses voisins, et de proche en proche, à toute la chaîne. Cette dernière se déplace alors "en masse", selon certains modes de vibration qui sont quantifiés à cause du confinement du potentiel apporté par le piège de Paul. Ces modes de vibration, ou phonons, correspondent à des états quantiques qui peuvent alors être mis à profit pour réaliser des opérations de calcul quantique.

Pour illustrer cette idée, prenons l'exemple de la réalisation d'une porte quantique C_{NOT} à l'aide de deux ions. Un faisceau laser dont la fréquence est bien ajustée peut appliquer une force aux ions, qui dépend de leur état interne. Le faisceau peut ainsi pousser l'ion vers la droite uniquement s'il est dans l'état $|1\rangle$, et n'avoir aucun effet s'il est dans l'état $|0\rangle$. La figure (4.3.4) représente schématiquement ce qui se passe dans quatre configurations.

— Si les deux ions sont dans l'état $|0\rangle$, le laser n'a aucun effet sur eux.

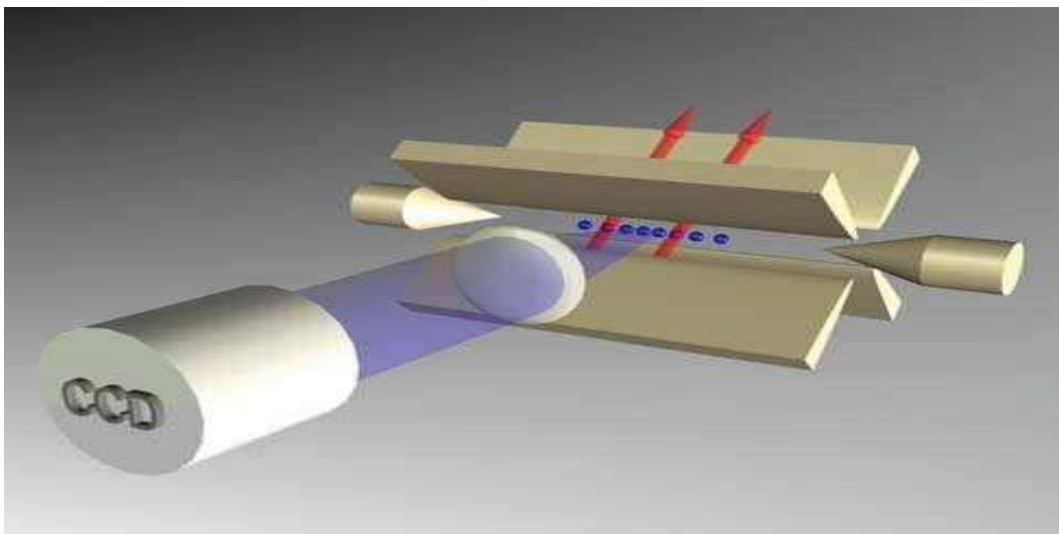


FIGURE 4.3.3 – Representation Schématique du dispositif de piégeage d'ions utilisé dans les manipulations de calcul quantique

- Si les deux ions sont dans l'état $|1\rangle$, ils se déplacent tous les deux vers la droite, mais la distance les séparant n'est pas modifiée. L'état de vibration de l'ensemble des deux ions ne gagne pas d'énergie.
- Si l'ion de gauche est dans l'état $|0\rangle$ et l'ion de droite dans l'état $|1\rangle$, seul l'ion de droite est déplacé, ce qui a pour effet d'éloigner les deux ions. L'état de vibration gagne en énergie.
- Si l'ion de gauche est dans l'état $|1\rangle$ et l'ion de droite dans l'état $|0\rangle$, seul l'ion de gauche est déplacé, ce qui a pour effet de rapprocher les deux ions, et l'état de vibration gagne en énergie. Ce gain est légèrement supérieur que dans le cas précédent, car le couplage électrostatique dû à la configuration du piège n'est pas symétrique : il est plus facile d'éloigner les ions que de les rapprocher.

Le résultat de cette opération est d'appliquer une porte C_{NOT} aux deux qubits constitués par l'ion et le mode de vibration : l'état interne de l'ion est inversé uniquement si les ions vibrent. Ceci correspond bien à la table de vérité de la porte C_{NOT} :

$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle, |10\rangle \rightarrow |11\rangle, |11\rangle \rightarrow |10\rangle$ le premier qubit étant le

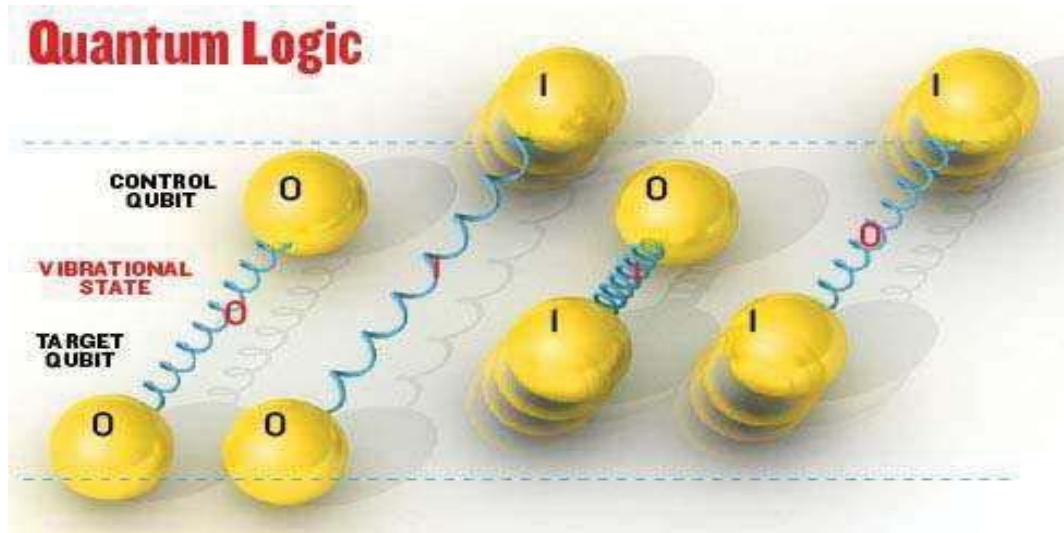


FIGURE 4.3.4 – Représentation schématique montrant comment le couplage électrostatique entre deux ions (illustrer par des ressorts) peut être mis à profit pour réaliser une porte quantique C_{NOT}

mode de vibration et le deuxième l'état interne de l'ion.

Il ne s'agit ici que d'un exemple de manipulation à deux qubits utilisant les modes quantiques de vibration. La première démonstration expérimentale de la porte C_{NOT} par le groupe de Wineland utilisait un seul ion Be^+ dont les deux états hyperfins de l'état fondamental constituaient le qubit cible, et dont les deux premiers états d'oscillation de l'ion dans le piège constituaient le qubit de contrôle.

Conclusion

— Les qubits à ions piégés disposent de temps de cohérence exceptionnels, et sont particulièrement faciles à initialiser. Des techniques efficaces d'intrication et de manipulation ont été mises au point, permettant d'obtenir un nombre record de qubits intriqués (8 à ce jour), de démontrer les principales portes quantiques, quelques algorithmes quantiques simples, et les premiers codes correcteurs d'erreurs. Des microcircuits ont vu le jour,

permettant d'espérer la réalisation prochaine de dispositifs encore plus complexes et comportant un nombre toujours supérieur de qubits. Sur le moyen terme, il s'agira d'améliorer les principales sources de décohérence : émission spontanée, bruit laser, fluctuation des champs électriques dans les électrodes.

- L'approche utilisant la résonance magnétique nucléaire en solution utilise des macro-molécules comportant un petit nombre (7, voire 10 au maximum) de spins nucléaires, qui forment les différents qubits que l'on manipule à l'aide de la RMN. Cette approche a connu son heure de gloire en 2001, avec la factorisation du nombre 15 grâce à l'algorithme de Shor. Une avancée majeure mais sans suite, principalement à cause du problème de perte de signal lié à l'augmentation du nombre de spins. Ainsi, cette approche ne sera certainement pas à l'origine du futur QC. Elle aura toutefois permis de nombreuses percées théoriques et expérimentales.

Dans le présent mémoire, nous nous sommes intéressées au concept du qubit partant de la description théorique à la réalisation expérimentale. Dans un premier lieu, nous avons revisité les idées fondamentales de la mécanique quantique, en mettant l'accent sur les postulats de la physique quantique la notion d'états mixtes et d'opérateur densité en reformulant adéquatement les postulats de la mécanique quantique, les systèmes quantiques composés et le concept de la trace partielle, les notions de superposition et d'intrication quantique et les différentes mesures de distance dans l'espace de Hilbert et les systèmes quantiques ouverts. Par la suite, nous nous sommes focalisés sur le concept du qubit qui est un système de mécanique quantique à deux états présentant la particularité de la mécanique quantique. Il est à noter que l'invention du terme qubit est attribuée au physicien américain Benjamin Schumacher. Nous nous sommes intéressés à la construction de l'espace de Hilbert du qubit ainsi qu'à sa représentation via le concept de la sphère de Bloch. Puis, nous avons introduit la notion des portes logiques quantiques suivie de la généralisation à des systèmes quantiques à deux qubits. Cela nous a permis de donner par la suite un aperçu assez succinct de la téléportation quantique et du paradoxe EPR. La dernière partie de ce mémoire est consacrée à la réalisations expérimentales du qubit, à savoir, moyennant la résonance magnétique nucléaire (RMN) et les Ions piégés. Mais avant cela, nous avons rappelé les

critères de DiVincenzo qui sont des conditions nécessaires à la construction d'un ordinateur quantique. L'une des nombreuses approches proposées pour la construction d'un ordinateur quantique est la résonance magnétique nucléaire. Cette dernière utilise les états de spin des noyaux dans les molécules en tant que qubits. Il est à noter que Les états quantiques sont sondés à travers les résonances magnétiques nucléaires, permettant au système d'être mis en uvre comme une variation de la spectroscopie de résonance magnétique nucléaire. Une autre une approche proposée pour la conception dun ordinateur quantique à grande échelle est lordinateur quantique à ions piégés. Les qubits y sont réalisés dans des états électroniques stables de chaque ion, et les informations quantiques peuvent être transférées moyennant le mouvement quantifié collectif des ions dans un piège partagé (interagissant via la force Coulombienne). A la fin, nous tenons à préciser que le déficit majeur auquel font face toute ces tentatives de construction dun ordinateur quantique est de vaincre la décohérence et par conséquence maintenir les superpositions quantiques nécessaires dans tous les algorithmes quantiques. Cela peut se faire grâce à une prouesse technologique qui va permettre de réduite suffisamment le temps dexécution devant le temps moyens de décohérence ou par des programmes quantiques de corrections derreurs.

Bibliographie

- [1] A. Pittenger An introduction to quantum computing algorithms, Birkhauser : 2000.
- [2] M Le Bellac, Introduction a L'Information Quantique (Editions Belin, Paris, 2005).
- [3] M Rossi, Dynamics and Characterization of Quantum Systems Interacting with Classical Noise, air.unimi.it, 2017.
- [4] L. Sansoni. Integrated Devices for Quantum Information with Polarization Encoded Qubits. Springer, 2014.
- [5] E Rousseau, Evaluation expérimentale d'éléments de calcul quantique (qubit) formés d'électrons piégés sur l'hélium liquide ,2006 .tel.archives-ouvertes.fr .
- [6] Xavier Lacour. Information Quantique par Passage Adiabatique : Portes Quantiques et Décohérence. PhD thesis, Université de Bourgogne, 2007.
- [7] A Minneci. Information quantique : optique quantique en variables continues - 2018 - tel.archives-ouvertes.fr.
- [8] O. Landon-Cardinal. Evolution des systèmes quantiques ouverts : décohérence et informatique quantique. Rapp. tech. Mémoire. 2009. url : <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/3447>.
- [9] R. Dubessy. Réalisation, étude et exploitation d'ensembles d'ions refroidis par laser stockés dans des pièges micro-fabriqués pour l'information quantique. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010.

- [10] T Said. Modélisation des systèmes de traitement de l'information quantique - 2016 - hal.archives-ouvertes.fr.
- [11] H Ollivier. Eléments de théorie de l'information quantique, décohérence et codes correcteurs quantiques. - 2004 - pastel.archives-ouvertes.fr.
- [12] P Degiovanni, N Portier, C Cabart, A Feller, B Roussel, information et calcul, 2021 - degruyter.com.
- [13] Kaye, P., Laflamme, R. & Mosca, M. An Introduction to Quantum Computing (Oxford University press, Oxford, 2007).
- [14] G. Senizergues Y. Leroyer. ?Introduction?a l'information quantique?. In : ENSEIRBMATMECA (2017).
- [15] David Poulin. Classicalité du calcul quantique. PhD thesis, Université de Montréal, 2002.
- [16] G. Jaeger, Quantum Information An Overview, (Springer, Berlin, 2007).
- [17] K Magali, CC Inès, MM Cyril Les ordinateurs quantiques - 2021 - researchgate.net.
- [18] L Van Damme. Contrôle optimal de la dynamique des spins : Applications en Résonance Magnétique Nucléaire et en Information Quantique - 2016 - tel.archives-ouvertes.fr.
- [19] Robert S. Sutor , Dancing with Qubits , Packt Publishing Ltd. , Birmingham B3 2PB, UK.
- [20] Vincenzo Savona, traitement quantique de l'information, notes de cours.
- [21] D. Canet, J.C. Boubel, E. Soulas, La RMN, concepts, méthodes et applications Paris (2002).
- [22] C Negrevergne. Contrôle quantique grâce aux méthodes de RMN. Application à la simulation de systèmes quantiques - 2002 - tel.archives-ouvertes.fr.
- [23] O. EZRATTY, Comprendre l'informatique quantique, 3ème éd., sept. (2020). Ce document vous est fourni à titre gracieux et

est sous licence, Creative Commons, dans la variante ,Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de Modification 2.0 France. <https://www.oezratty.net/wordpress/2020/comprendre-informatique-quantiqueedition-2020>.

- [24] M Le Bellac. Physique quantique-Fondements Tome 1 : Fondements, 2013, EDP sciences.
- [25] Paul BAIRD, Information Quantique-cours.
- [26] Arnaud Bodin, Quantum : Un Peu de Mathématiques pour l'Informatique Quantique.
- [27] A. Blais, Algorithmes et architectures pour ordinateurs quantiques supraconducteurs, in Annales de Physique (EDP Sciences), 2003.
- [28] D Crottet. L'ordinateur quantique, arXiv preprint quant-ph/0003132, 2000 - arxiv.org.