

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Installations Energétique et Turbomachines

Par :

DAHES Abdelkrim

DJENANE Houcem

Thème

Etude mécanique d'une structure FGM

Soutenu le 25 /09/2022 devant le jury composé de:

Dr S. BOUZIDI	Président
Dr A. BENSLIMANE	Rapporteur
Dr M. METHIA	Examineur

Année Universitaire 2021-2022

Remerciements

Nous souhaitons avant tout remercier notre encadrant Mr. A. BENSLIMANE pour ses précieux conseils.

Nous remercions les membres du jury qui nous font l'honneur d'examiner ce travail.

Toute notre gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation du début jusqu'à la fin.

Enfin à tous nos ami(e)s, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A l'être le plus cher de ma vie, ma mère.

A la mémoire de celui qui à fait de moi un homme, mon père.

A ma chère sœur Romaiassa.

A mon binôme DAHES Abdelkrim et sa famille.

A tous mes amies en particulier Koussaila, Farhat et salah.

A ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceux que j'aime.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents pour leur soutien moral et leur encouragements tout le long de mon cursus universitaire ainsi que mes frères et sœurs Lila, AHCEN, Chidi, Lidia, Ghilas, ma petite Bouchra et mon binôme Houcem et sa famille.

Sans oublier mes amis en particulier Koussaila, Ferhat, Salah, sami, houssein sur tout (C4), et tous les autres.

Enfin à mon dieu qui m'a donné une force mentale pour continuer mes études universitaires.

Sommaire

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Sommaire	iii
Liste des figures	v
NOMENCLATURE	vii
Introduction Générale	1
CHAPITRE I :Généralités sur les matériaux FGM	2
I.1.Introduction.....	2
I.2.Historique.....	2
I.3.Types des matériaux FGM.....	2
I.3.1.Matériaux à gradient de composition chimique.....	2
I.3.2.Matériaux à gradient de porosité.....	2
I.3.3.Matériaux à gradient microstructural.....	2
I.4.Domainses d’application des matériaux à gradient fonctionnel.....	2
I.5.Propriétés des FGM	3
I.6.Processus et technique de fabrication des FGM	3
I.7.Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels.....	3
I.8.Avantages et inconvénients des FGM.....	3
I.8.1.Avantages des FGM.....	3
I.8.2.Inconvénients des FGM.....	3
I.9.Développements récents et défis des FGM.....	3
I.5.Conclusion	3
CHAPITRR II :Calculs analytiques et simulation numérique	4
II.1.Introduction	4
II.2.Partie analytique	4
II.2.1.Loi de puissance	4
II.2.2.Propriétés mécaniques du matériaux	4
II.2.3 Coordonnées cylindriques	5
II.3. Loi exponentielle	5
II.4. Partie numérique.....	5
II.4.1. Cas d’un cylindre	5
A) Définitions globales	6
B) Composant.....	6
C) Maillage.....	6
II.5. Conclusion	6

CHAPITRE III : Resultas et discussions	7
III.1.Loi de puissance	7
III.1.1.Cas n°1	7
III.1.2.Contraintes mécaniques.....	7
III.1.3.Cas n°2	7
III.2.Loi exponentielle.....	7
III.2.1 .Cas n°1	7
III.2.2.Contraintes mécaniques.....	7
III.2.3.Cas n°2	7
III.3. Conclusion.....	7
Conclusion Générale	8
Résumé/Abstract	9

Liste des figures

Figure (I.1) : Représentation de la hiérarchie matérielle moderne

Figure (I.2): à gauche le schéma d'un FGM à porosité graduée, à droite une image montrant la porosité graduée d'un os.

Figure(I.3) : Schéma d'une microstructure graduée.

Figure(I.4) : Domaines d'application des matériaux à gradient de propriété.

Figure(I.5) : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.

Figure(I.6): Schéma de comparaison des FGM avec les composites.

Figure(I.7) : la distribution des composantes des matériaux.

Figure (II.1): Géométrie 2D d'un demi-cylindre creux.

Figure (II.2) : Zones qui doivent présenter une symétrie représentées sur les bords.

Figure (II.3) : Zone laissée libre définie sur le rayon externe.

Figure (II.4) : Zone qui doit être sous chargement représentée sur le rayon interne.

Figure (II.5): représentation du maillage utilisé dans le cylindre.

Figure (III.1) : Distribution du module d'élasticité.

Figure (III.2) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

Figure (III.3) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.4) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.5) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure(III.5) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

Figure (III.6): Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.7) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.8) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.9) : Distribution du module d'élasticité.

Figure (III.10) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

Figure (III.11) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.12) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.13): Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.14) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

Figure (III.15) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Figure (III.16) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous Pression.

Figure (III.17) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

NOMENCLATURE

E_i : Module de Young homogène (GPa).

$E(r)$: Module de Young non homogène (GPa).

r : Rayon (m).

R_1 : Rayon intérieur (m).

R_2 : Rayon extérieur (m).

p_1 : Pression interne (MPa).

p_2 : Pression externe (MPa).

ν : Coefficient de Poisson.

σ_{rr} : Contrainte radiale (MPa).

$\sigma_{\theta\theta}$: Contrainte circonférentielle (MPa).

σ_{zz} : Contrainte axiale (MPa).

$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$: Contraintes de cisaillement (MPa).

ε_{rr} : Déformation radiale.

$\varepsilon_{\theta\theta}$: Déformation circonférentielle.

ε_{zz} : Déformation axiale.

$\varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}$: Déformation de cisaillement

u_r : Déplacement radial (m).

ξ, η, ψ : Constantes de non homogénéité

A et B : Constantes de calcul en $^\circ 1$ et $^\circ 2$ respectivement

δ_{ij} : Symbole de Kronecker

β_1, a_1, b_1 : Constantes de calcul

Introduction Générale

Introduction générale

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : FunctionallyGradedMaterial " F.G.M ").

D'autre part, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), une nouvelle génération des matériaux composites homogènes avancés d'abord proposés pour les barrières thermiques, ont été de plus appliqués pour les structures de l'ingénierie moderne dans un environnement à température élevée. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques .Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [1]. La plupart des recherches ont été confronté au problème thermique.

L'objectif de notre travail est de démontrer que la variation graduelle des propriétés d'un matériauFGM a une influence sur les comportements mécaniques des structures cylindriquescreuses à parois épaisses.

Afin de traiter le sujet, une simulation numérique est faite à l'aide d'un code de calcul par éléments finis. Les résultats obtenus devront confirmer l'approche analytique.

- ✓ Le chapitre I est un aperçu détaillé sur les matériaux fonctionnellement gradués appelés « FGMs »
- ✓ Le chapitre II est la démonstration des calculs analytiques et numériques
- ✓ Le chapitre III présente la discussion des résultats et une comparaison entre les résultatsanalytiques et numériques.

Le présent travail se termine par une conclusion générale qui résume l'essentiel des résultats.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux FGM

Généralités sur les matériaux FGM

I.1.Introduction

Dans le développement de notre société, les matériaux ont joué un rôle essentiel. L'utilisation scientifique de matériaux de base disponibles en divers composés inorganiques et organiques a ouvert la voie au développement des polymères avancés, alliages techniques, céramiques structurales, etc. Pour répondre aux exigences toujours croissantes, des matériaux de plus en plus récents tels que les polymères, les alliages techniques, les céramiques structurales et les composites ont été développés. Alors que la race humaine évoluait de l'âge de pierre à l'ère spatiale, le développement de la technologie a nécessité et a été soutenu par l'innovation de nouveaux matériaux. La hiérarchie du développement des matériaux modernes est illustrée à la **Fig. I.1.** [2]

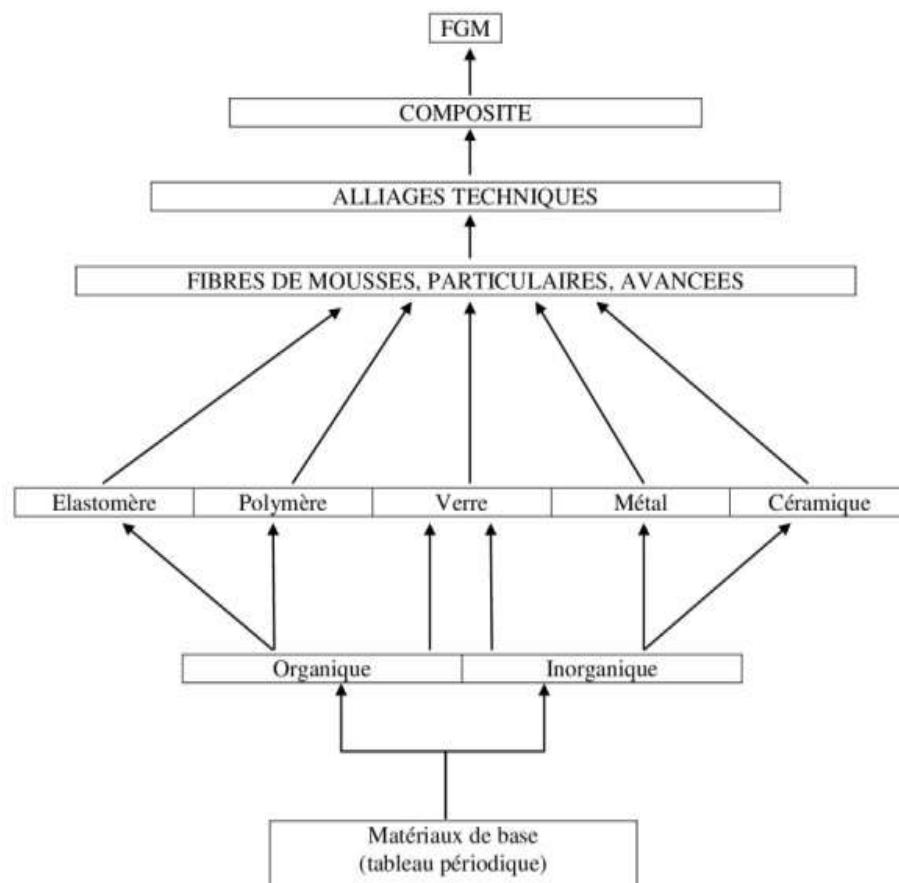


Figure (I.1) : Représentation de la hiérarchie matérielle moderne

Les matériaux composites sont, pour la plupart, d'une forme avancée des matériaux qui sont faits à partir de deux constituants ou plus avec les propriétés physiques et chimiques sensiblement différentes de chaque matériau. Les matériaux composites permettent d'avoir des combinaisons distinctes comme par exemple une surface dure et résistante à l'usure et un noyau doux selon la condition fonctionnelle d'application. L'hétérogénéité, l'anisotropie et la symétrie sont principales caractéristiques des matériaux composites présentant un intérêt particulier pour diverses applications. Le rapport « résistance/rigidité élevée », la résistance à la fatigue, l'usure et la corrosion, la haute fiabilité, etc. sont les avantages des composites par rapport aux métaux purs ou alliés. En dépit de tous ces avantages, les matériaux composites sont soumis à une forte transition des propriétés à l'interface, ce qui peut entraîner une défaillance des composants (par délamination) dans des conditions de travail extrêmes. Ces inconvénients présents dans les composites classiques peuvent être éliminés par la forme modifiée des composites appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Les matériaux FGM sont des composites non homogènes effectués à partir de différentes phases de constituants matériels (habituellement en céramique et métal) [1]. Dans les matériaux type FGM, les différentes phases microstructurales ont différentes fonctions, en variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs avec un changement doux et continu d'une surface à l'autre, ce qui élimine les problèmes d'interface et diminue les concentrations de contraintes thermiques. Par exemple, dans un FGM (métal / céramique), le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté ; doivent être élevée. En revanche, la céramique riche, avec une conductivité thermique faible peut résister aux températures plus élevées, et par conséquent il est utilisé dans les régions fortement exposées à la température. Les FGM permettent l'adaptation de la composition du matériau de manière à en retirer le maximum d'avantages de leur hétérogénéité. En outre, d'autres aspects d'exécution peuvent être améliorés en utilisant un FGM, par exemple, réduction de la température dans la phase de cuivre pour empêcher l'adoucissement thermique excessif du matériau, d'autres applications de FGM incluent des composants trouvés en aéronautique et aérospatiale.

I.2.Historique :

Le concept d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) a été développé par des chercheurs japonais en 1984. En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Le principal objectif était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale

commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de la chaleur important frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps protéger l'intérieur contre les surchauffes. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [3].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau coté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [4].

L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute température) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (10 mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc. On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

I.3.Types des matériaux FGM :

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné le développement de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types de FGM qui sont actuellement produits comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM, et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté dans les sections suivantes.

I.3.1.Matériaux à gradient de composition chimique :

Il s'agit du type de FGM qu'on va traiter en détail dans ce mémoire, où la composition chimique varie progressivement, en fonction du rayon dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multiphasé. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage [5]. Le changement progressif de la distribution des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau à gradient fonctionnel. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté serait soluble dans une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé, mais avec une composition chimique variable en raison de la solubilité.

Ce type de FGM est moins commun. Les matériaux classés de façon fonctionnelle les plus couramment utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multiphasique [6, 7]. Les phases et la composition chimique sont faites pour varier à travers le volume du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideraient à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçu. Les différentes phases qui sont produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. En métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre couche par couche la composition de poudre requise, puis le compactage de la poudre et ensuite le

frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieraient en fonction de la position dans le volume du matériau à gradient fonctionnel.

Il en existe deux autres types qui seront cités ci-dessous.

I.3.2. Matériaux à gradient de porosité :

Le matériau à gradient fonctionnel de gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer par rapport à une direction dans le matériau. La forme et la taille des pores sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnel. Ce type de matériau fonctionnel est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer consiste en une porosité graduelle fonctionnelle, et la porosité graduelle aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de cicatrisation de cet implant, et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée aide également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour qu'il corresponde à celui du tissu humain. La porosité graduée aide à réduire la densité du bio-implant. Ceci est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par le dépôt de poudre avec un mélange variable de formes et de tailles de particules différentes qui aideraient à produire la porosité variable nécessaire avec les formes et tailles de pores changeantes figure (I.2).

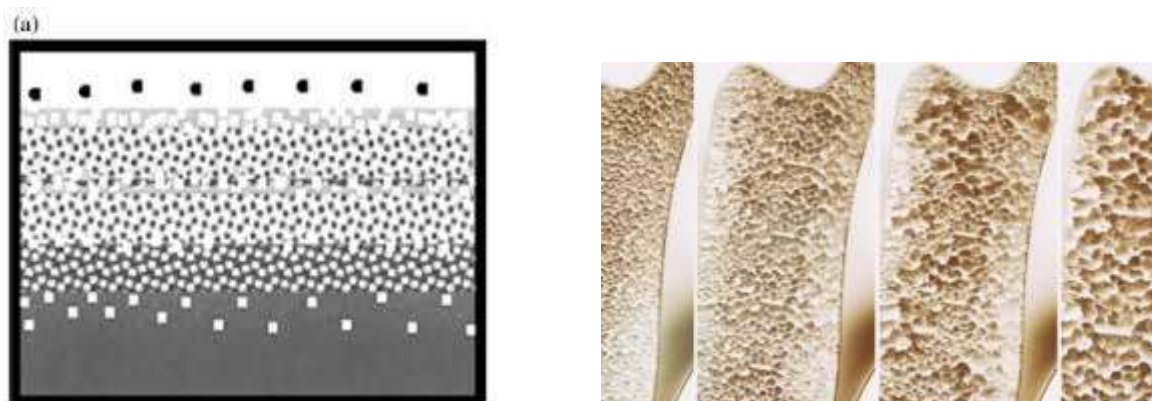


Figure (I.2) : à gauche le schéma d'un FGM à porosité graduée, à droite une imaged montrant la porosité graduelle d'un os.

I.3.3. Matériaux à gradient microstructural

Le matériau à gradient fonctionnel microstructural est un autre type de FGM, où la microstructure est adaptée de sorte que les différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer graduellement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue au cours du processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. On laisse refroidir lentement le noyau du même matériau, ce qui aiderait à produire différentes microstructures de celles situées. Un diagramme schématique d'une microstructure typiquement graduée est présenté à la Figure. (I.3).

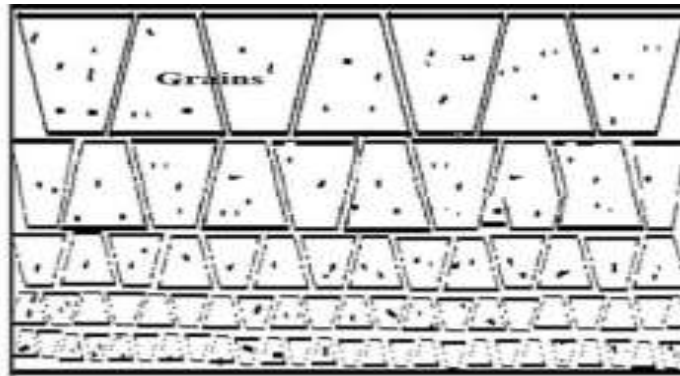


Figure (I.3) : Schéma d'une microstructure graduée.

La microstructure graduée entraînerait un changement progressif des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau.

Les FGM à gradient microstructural trouvent leur application dans des composants qui doivent avoir une surface très dure pour résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact élevé qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau fonctionnellement gradué comprend l'acier cémenté, les cames ou les couronnes, les paliers ou arbres et les applications de turbine [8, 9]. Les domaines d'application des différents types de FGM sont présentés dans la section suivante.

I.4. Domaines d'applications des matériaux à gradient fonctionnel

Grace à leurs importantes propriétés, les FGM sont devenu un choix favorable dans la plupart des domaines d'ingénierie et d'industrie. Cela inclus une application dans le domaine aérospatial, automobile, biomédical, électrique, énergétique, et maritime.



Figure (I.4) : Domaines d'application des matériaux a gradient de propriété [10].

I.5. Propriété des FGM :

Les FGM peuvent incorporer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux sans contrainte thermique interne sévère [11], souvent constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal, choisie en fonction des propriétés physiques de chaque composant [12].

➤ Les métaux :

Lorsque la majorité des éléments chimiques dans le tableau de Mendeleïev sont les métaux, ils possèdent plusieurs avantages :

- Très bons conducteurs de chaleur,
- Très bons conducteurs d'électricité,
- Plus souvent durs et rigides,
- Déformables plastiquement,
- Un nombre important possèdent une température de fusion très élevée.

Les métaux les plus souvent utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium[12].

➤ **Les céramiques :**

Les céramiques sont en général, des matériaux très durs, résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) et non métalliques dont le plus courant est l'oxygène. Ils sont largement utilisés comme abrasifs et typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.), caractérisés par leurs comportements réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées [12]. Alors qu'ils sont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques importants. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit [11]:

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion,
- Haute température de fusion ou de décomposition,
- Haut module d'élasticité et haute dureté,
- Charge à la rupture élevée,
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.

I.6. Processus et technique de fabrication des FGM :

Une variété des méthodes de production des FGM ont été créées, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des différents processus d'élaboration conventionnelles bien établis, des procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation, ou on peut citer [13] :

- La compaction sèche des poudres,
- La stratification des feuilles
- Les méthodes de dépôt chimique en phase vapeur.
- Le coulage centrifuge
- Coulage séquentiel en barbotine
- Coulage en bande
- Projection thermique (plasma)

I.7. Comparaison des matériaux FGM et les matériaux traditionnels :

Avec l'évolution technologique et les exigences de concurrence économique, les laboratoires de recherches ont poussé d'avantage leurs objectifs techniques, visant à satisfaire la demande en matière de performances et de qualité. Ces performances prescrites ne peuvent être atteintes avec des matériaux purs à cause des propriétés de ces derniers qui ne sont pas assez polyvalentes pour certaines utilisations. Pour résoudre ce problème, la combinaison d'un métal avec d'autres métaux ou non métaux en état de fusion est utilisée, c'est ce qu'on appelle alliage, ceci donne des propriétés différentes de celles des matériaux de base. L'utilisation de l'alliage est limitée par l'équilibre thermodynamique, car il y'a une limite à laquelle un matériau peut être dissous dans une solution d'un autre. Ainsi qu'il est prohibitif de combiner deux matériaux par ce procédé avec un écart de température de fusion des composants. La métallurgie des poudres (powderedmetallurgy PM) est une autre méthode de production d'une pièce qui ne peut être produite par alliage conventionnel, où l'alliage est produit sous forme de poudre à faire fritter. Malgré les excellentes caractéristiques de la métallurgie des poudres, il existe quelques limitations telles que des formes complexes qui ne peuvent être réalisées à l'aide des PM ; Les pièces sont poreuses et ont une faible résistance [14]. Bien que ces limitations sont avantageuses à certaines applications (par exemple, filtre et applications non structurelles) mais, elles sont préjudiciables à d'autres. Une autre méthode de production des matériaux avec combinaison de propriétés est celle de combinaison de matériaux à l'état solide, donnant des matériaux composites. Les matériaux composites sont des matériaux constitués généralement de deux ou plusieurs matériaux différents dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ces matériaux sont constitués d'une matrice et d'un renfort, souvent ce dernier est sous forme de fibres. Ainsi, il est possible d'améliorer les propriétés mécaniques du matériau obtenu telles que la légèreté, la rigidité, la résistance à l'usure, et bien d'autres.

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue ..., etc. [15]. En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures : lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface (**Figure I.5.a**), elle ne traverse généralement pas

cette dernière et les renforts ne sont donc pas endommagés. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface (**Figure I.5.b**). En d'autres termes, au lieu d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. Les matériaux composites donc sont échoués dans des conditions extrêmes à travers le processus de délamination (séparation des fibres de la matrice) dû à la transition brutale de composition. Cela peut se produire par exemple, dans une application à haute température, où deux matériaux avec différents coefficients de dilatation thermique sont utilisés.

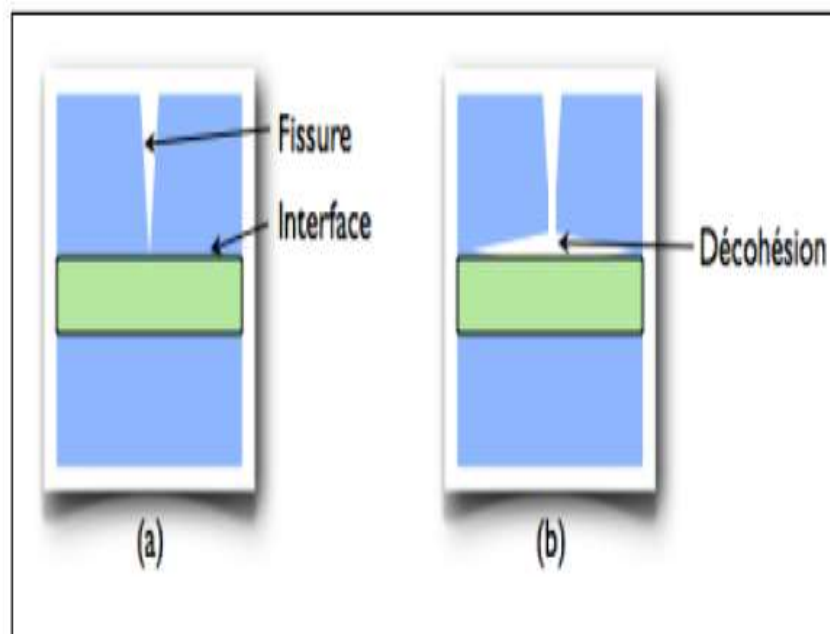


Figure (I.5) :Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Au lieu d'une rupture brutale, on observe donc une décohésion progressive des constituants.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue, les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la **Figure (I.6)**[16]. Il en résulte un

gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [17].

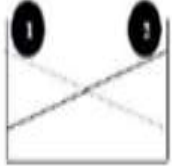
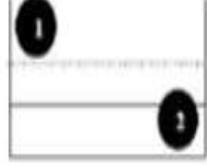
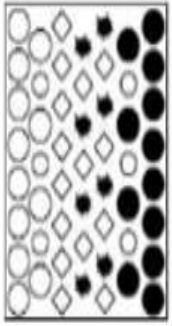
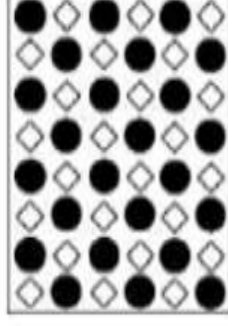
Propriétés	1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique		
Structure	Eléments constitutants : Céramique ○ Métal ● Microporosité ◌ Fibre ◇		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure (I.6) : Comparaisons des matériaux FGM avec les matériaux composites [27].

Le modèle le plus simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est représenté dans la figure (I.7). Le matériau plan (**figure I.7.a**) composé à une caractéristique plane, et le matériau relié (**figure I.7.b**) a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

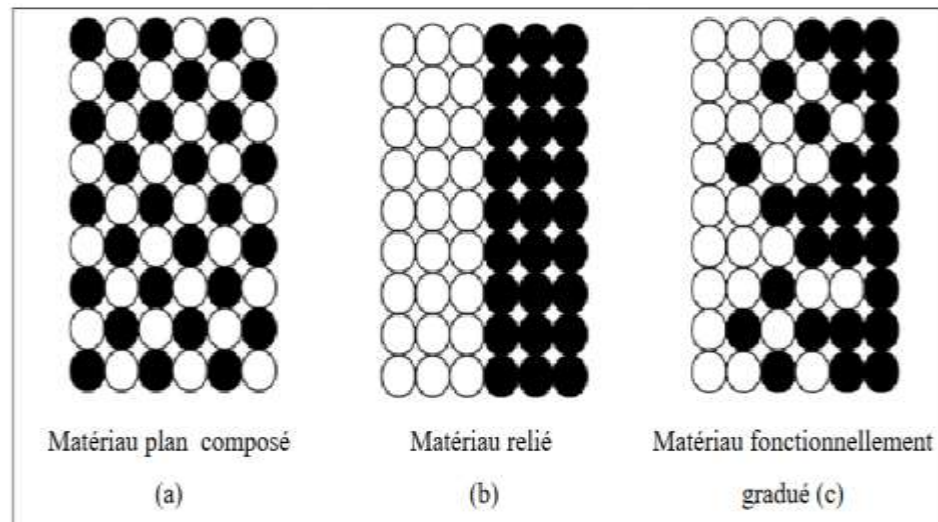


Figure (I.7) : la distribution des composantes des matériaux

I.8. Avantages et inconvénients des FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

I.8.1. Avantages des FGM :

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement[18], et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- ✓ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- ✓ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux de contraintes
- ✓ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- ✓ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.

- ✓ Suppression de délaminage (insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines).
- ✓ Augmentation de la ténacité à la rupture.
- ✓ Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.8.2. Inconvénients des FGM :

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour de (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [18].

I.9. Développements récents et défis des FGM :

Dans le cas de la plupart des MGF, une propriété matérielle varie dans le sens de l'épaisseur [19]. Cependant, les applications modernes peuvent exiger des matériaux FG dans lesquels les propriétés matérielles dans l'épaisseur et les directions axiales [20]. Récemment, un matériau de gradient dans le quelles propriétés varient dans les deux directions sont également développés étudiés en profondeur [21,22]. Ces matériaux intelligents sont connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel bidirectionnel (BDFGM). La technique AM basée sur le dépôt de métaux au laser est la plus appropriée pour produire de tels BDFGM [23]. Bien que d'importants progrès technologiques aient été réalisés dans le

domaine des FGM, quelques problèmes critiques doivent encore être résolus. Une base de données correcte des FGM en termes de paramètres et de tests n'est toujours pas disponible. La méthode d'essai et de mesure conventionnelle peut ne pas convenir pour évaluer les performances des MGF modernes, de sorte que des développements de méthodes d'essai avancées sont nécessaires [23]. La plupart des techniques de traitement des FGM sont très coûteuses, de sorte qu'une technique de traitement à faible coût qui peut produire en masse des MGF de grande taille et complexes reste encore un défi. Le choix du matériau approprié pour l'application prévue est le défi immédiat et direct pour le développement futur de la technologie dans le domaine de la recherche sur les FGM.

I.10. Conclusion :

Les FGM, pour la plupart, sont des matériaux constitués des composants différents le plus connu étant les céramiques et les métaux.

Dans ce chapitre, nous avons présenté des généralités sur les FGM, leurs différents types, familles, propriétés, méthodes de fabrication, leur domaine d'application, les développements récents de ces matériaux ainsi qu'une brève comparaison avec les composites conventionnels.

Dans le chapitre qui suit, nous allons étudier le comportement mécanique d'un cylindre creux composé d'un matériau à gradient de propriétés avec deux méthodes, la méthode analytique et la méthode numérique.

Chapitre II

Calculs analytiques et simulation numérique

Calculs analytiques et simulation numérique

I. Introduction :

Les formes creuses à paroi épaisse sont des éléments structuraux communs à de nombreuses applications d'ingénierie, notamment les réservoirs sous pression, les coques de navires, les ailes et les fuselages d'avions, les structures de confinement des centrales nucléaires, les tuyaux, les roquettes, les missiles, les toits en béton, les cheminées, les tours de refroidissement, les réservoirs de stockage de liquide et de nombreuses autres structures. La coquille sphérique et le cylindre à paroi épaisse soumis à la pression sont des problèmes classiques du génie mécanique étudiés par plusieurs chercheurs dans le passé.

Une classe de nouveaux matériaux composites avancés comprend des matériaux fonctionnels (FGM) avec des propriétés de matériau variant en continu. Ces matériaux ont reçu une attention considérable dans de nombreuses applications d'ingénierie depuis leur apparition en 1984 au Japon [24, 25].

Dans ce travail, on a utilisé une méthode analytique et la méthode des éléments finis pour analyser le déplacement et les déformations du cylindre sous pression soumis à un gradient de température. Le cylindre est composé d'un matériau élastique, linéaire à gradient de propriété fonctionnelle.

Le module d'Young est représenté par une loi de puissance et le coefficient de Poisson est constant. L'équation d'équilibre se transforme en une équation différentielle non linéaire que nous avons résolue analytiquement.

Une étude numérique par méthode des éléments finis a été présentée, les résultats sont présentés sous forme d'évolution des différentes contraintes dans la direction radiale. Les résultats analytiques sont ensuite comparés au numérique pour trouver un bon accord entre les deux [26].

II.1.Partie analytique :

II.1.1.Loi de puissance :

Considérons un cylindre creux infiniment long constitué d'un matériau à gradient de propriété, avec le rayon interne R_1 et le rayon externe R_2 . Le module de Young, des matériaux FGM ont été définis pour obéir à une loi de puissance comme suit :

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \quad (\text{II.1})$$

avec : r , E et α sont respectivement, la distance radiale, le module de Young, indices de la loi de puissance du matériau.

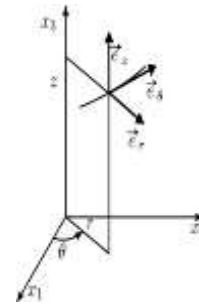
II.1.2.Propriétés mécaniques du Matériau :

La principale propriété varie de manière fonctionnelle, le module de Young, qui obéit à une loi de puissance (II.1).

II.1.3.Coordonnées cylindriques :

Repère local: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Gradient et Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{II.3})$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{II.4})$$

Equation d'équilibre:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{rz}}{r} = 0$$

L'équation d'équilibre en coordonnées cylindriques (r, θ, z) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Équations de Lamé dans un solide à gradient de propriétés soit :

- \vec{u} le vecteur des déplacements en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations, Il représente toutes les déformations homogènes.

Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.7})$$

- λ et μ sont les paramètres de Lamé et ν le coefficient de poisson en fonction de r , avec :

$$\mu(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda(r) = \frac{\nu E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{II.8})$$

Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\text{avec } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\text{grad} \vec{u} + \text{grad}^T \vec{u} \right]$$

Définition des déformations :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\} \quad (\text{II.9})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\}$$

• **Élasticité linéaire** : les effets non-linéaires ne sont pas pris en compte. Le comportement du matériau est alors représenté par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = 2\mu(r)\varepsilon_{ij} + \lambda(r)\varepsilon_{ii}\delta_{ij} \quad (\text{II.10})$$

Les composantes du tenseur des contraintes sont les suivantes :

$$\sigma_{rr} = 2\mu(r)\varepsilon_{rr} + \lambda(r)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu(r)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(r)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (\text{II.11})$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(r)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\text{On pose } \lambda(r) = \Psi(\nu)E(r) \quad \text{avec } : \Psi = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\text{et } 2\mu(r) + \lambda(r) = \xi(\nu)E(r) \quad \text{avec } : \xi = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{II.12})$$

Les composantes du tenseur de contraintes deviennent :

$$\sigma_{rr} = (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda(r) \frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{u_r}{r} + \lambda(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{II.13})$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(r) \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right]$$

En remplaçant (II.13) dans (II.6) nous aurons :

$$(2\mu(r) + \lambda(r)) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{\partial(2\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{II.14})$$

En remplaçant (II.12) et les paramètres de Lamé dans l'équation (II.14) on obtient :

$$\xi(\nu) E(r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \xi(\nu) E(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \xi(\nu) E(r) \frac{u_r}{r^2} + \xi(\nu) \frac{\partial E(r)}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \Psi(\nu) \frac{\partial E(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{II.15})$$

On dérive (II.1) on obtient :

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \alpha E_i \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \frac{1}{r} \quad (\text{II.16})$$

Ce qui nous permet d'obtenir les calculs suivant :

$$\frac{1}{E(r)} \frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} \quad (\text{II.17})$$

En divisant l'équation (II.15) par " $\xi(\nu) E(r)$ " on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{E(r)} \frac{\partial E(r)}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)} \frac{1}{E(r)} \frac{\partial E(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{II.18})$$

En simplifiant cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + (1 + \alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(1 - \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)} \alpha \right) \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (\text{II.19})$$

On procède au changement de variable suivant :

$$\ln r = t \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial r^2} + \alpha \frac{\partial u_t}{\partial r} - \left(1 - \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)} \alpha \right) u_t = 0 \quad (\text{II.21})$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire peut s'écrire comme suit :

$$u_t = Ae^{t^{m_1}} + Be^{t^{m_2}} \quad (\text{II.22})$$

Avec comme solution de l'équation caractéristique :

$$m_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4 \left(1 - \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)}\right) \alpha}}{2}, \quad m_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4 \left(1 - \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)}\right) \alpha}}{2} \quad (\text{II.23})$$

En remplaçant (II.23) et (II.20), on obtient dans (II.22) :

$$u_r = Ar \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4 \left(1 - \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)}\right) \alpha}}{2} + Br \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4 \left(1 - \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)}\right) \alpha}}{2} \quad (\text{II.24})$$

A et B sont des constantes à déterminer. En remplaçant u_r dans (II.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{AE_i(m_1 \xi(\nu) + \Psi(\nu)) r^{m_1 + \alpha - 1} + BE_i(m_2 \xi(\nu) + \Psi(\nu)) r^{m_2 + \alpha - 1}}{R_1^\alpha} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{AE_i(\xi(\nu) + m_1 \Psi(\nu)) r^{m_1 + \alpha - 1} + BE_i(\xi(\nu) + m_2 \Psi(\nu)) r^{m_2 + \alpha - 1}}{R_1^\alpha} \\ \sigma_{zz} &= \frac{A\Psi(\nu) E_i(m_1 + 1) r^{m_1 + \alpha - 1} + B\Psi(\nu) E_i(m_2 + 1) r^{m_2 + \alpha - 1}}{R_1^\alpha} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Le cylindre est soumis à une pression interne, les constantes A et B peuvent être obtenues à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_{rr}|_{r=R_1} = -P_1 \quad (\text{II.26})$$

$$\sigma_{rr}|_{r=R_2} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{AE_i(m_1 \xi(\nu) + \Psi(\nu)) R_2^{m_1 + \alpha - 1} + BE_i(m_2 \xi(\nu) + \Psi(\nu)) R_2^{m_2 + \alpha - 1}}{R_1^\alpha} = -P_1 \\ \sigma_{rr} &= \frac{AE_i(m_1 \xi(\nu) + \Psi(\nu)) R_2^{m_1 + \alpha - 1} + BE_i(m_2 \xi(\nu) + \Psi(\nu)) R_2^{m_2 + \alpha - 1}}{R_1^\alpha} = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{AE_i(m_1\xi(\nu) + \Psi(\nu))R_2^{m_1+\alpha-1} + BE_i(m_2\xi(\nu) + \Psi(\nu))R_2^{m_2+\alpha-1}}{R_1^\alpha} = 0$$

$$A = -\frac{P_1R_2^{m_2+\alpha-1}}{\left(m_1 + \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)}\right)E_i\xi(\nu)R_1^{-\alpha(R_1^{m_2+\alpha-1}R_2^{m_2+\alpha-1} - R_1^{m_2+\alpha-1}R_2^{m_2+\alpha-1})}}$$

$$B = \frac{P_1R_2^{m_1+\alpha-1}}{\left(m_2 + \frac{\Psi(\nu)}{\xi(\nu)}\right)E_i\xi(\nu)R_1^{-\alpha(R_1^{m_2+\alpha-1}R_2^{m_2+\alpha-1} - R_1^{m_2+\alpha-1}R_2^{m_2+\alpha-1})}}$$

II.1.2.Loi exponentielle :

$$E(r) = E_i e^{\left(\frac{\alpha(r-R_1)}{(R_2-R_1)}\right)} \quad (\text{II.27})$$

On dérive (II.27) on obtient :

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{\alpha}{(R_2 - R_1)} E_i e^{\alpha\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\right)} \quad (\text{II.28})$$

Ce qui nous permet d'obtenir le calcul suivant :

$$\frac{1}{E(r)} \frac{\partial E(r)}{\partial r} = \left(\frac{\alpha}{R_2 - R_1}\right) \quad (\text{II.29})$$

En remplaçant (II.13) dans (II.6) nous aurons :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \left(\frac{\alpha}{R_2 - R_1}\right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \left(\frac{\alpha}{R_2 - R_1}\right) \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{II.30})$$

On multiplie l'équation (II.30) par r^2 , pour avoir :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r + \left(\frac{\alpha}{R_2 - R_1} r \right) r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \right) \left(\frac{\alpha}{R_2 - R_1} \right) r u_r = 0 \quad (\text{II.31})$$

En simplifiant l'équation (II.31) on obtient :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{R_2 - R_1} r \right) r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(1 - \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \right) \left(\frac{\alpha}{R_2 - R_1} \right) r \right) u_r = 0 \quad (\text{II.32})$$

A l'aide d'un logiciel de calcul MAPLE on a aboutit à la solution suivante :

$$u_r = Ar \cdot \beta_1 e^{\left(\frac{\alpha r}{2(R_1 - R_2)} \right)} M \left(a_1, b_1, \frac{\alpha r}{R_1 - R_2} \right) + Br \cdot \beta_1 e^{\left(\frac{\alpha r}{2(R_1 - R_2)} \right)} M \left(a_1, b_1, \frac{\alpha r}{R_1 - R_2} \right) \quad (\text{II.33})$$

$$\text{Avec : } \beta_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{3\nu - 1}{2\nu - 2}, \quad b_1 = 1$$

$$M \left(a_1, b_1, \frac{ar}{R_1 - R_2} \right) = 1 + \frac{a_1 \left(\frac{ar}{R_1 - R_2} \right)}{b_1} + \frac{a_1(1 + a_1) \left(\frac{ar}{R_1 - R_2} \right)^2}{b_1(1 + b_1)2!} + \dots + \frac{(a_1)_n \left(\frac{ar}{R_1 - R_2} \right)^n}{(b_1)_n n!} + \dots$$

$$\text{Avec : } (a_1)_k = a_1(a_1 + 1) \dots (a_1 + k - 1)$$

II.2.Partie numérique :

Une méthode de résolution numérique à base d'éléments finis est utilisée pour étudier le comportement mécanique et la distribution des contraintes d'une sphère et d'un cylindre FGM, soumis à des pressions internes et externes, ce qui nous mène à des résultats qu'on compare avec la méthode analytique.

II.2.1.Cas d'un cylindre:

Les étapes de l'étude numérique se font comme suit :

A) Définitions globales :

Dans cette section on définit les variables.

La seule variable à définir dans ce cas est $r = (x^2 + y^2)^{0,5}$ [m]

B) Composant :

Dans cette section on doit donner la géométrie, implémenter un matériau à la géométrie, définir les conditions aux limites et lui donner un maillage

- **Géométrie :**

On travaille sur un model 2D, dans lequel on trace 2 cercles pleins. Le premier aura un rayon $r=0.2$ m dans lequel on va soustraire un autre cercle plein de rayon $r=0.1$ m pour arriver à la forme qui suit dans la figure (II.3) :

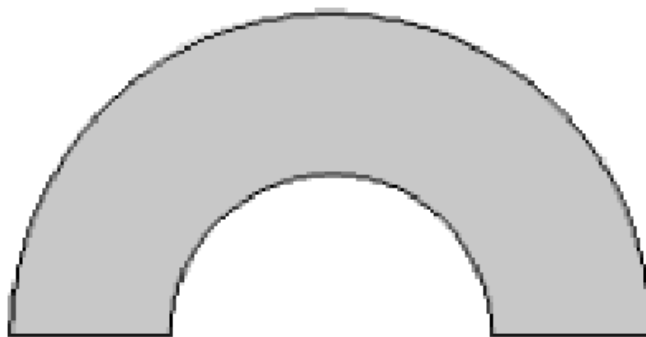


Figure (III.1):Géométrie 2D d'un demi-cylindre creux

- **Matériau :**

On travaille dans le domaine de la mécanique du solide. Le matériau utilisé est de type élastique linéaire, avec :

– Module d'Young une fonction en loi de puissance : $E(r) = E_i \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha$

– Coefficient de Poisson constant $\nu = 0.3$

- **Conditions aux limites :**

Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

1. Nous supposons un demi-cylindre pour des raisons de symétrie. Pour cela nous imposons sur les deux bords du cylindre la condition de symétrie figure (II.2)

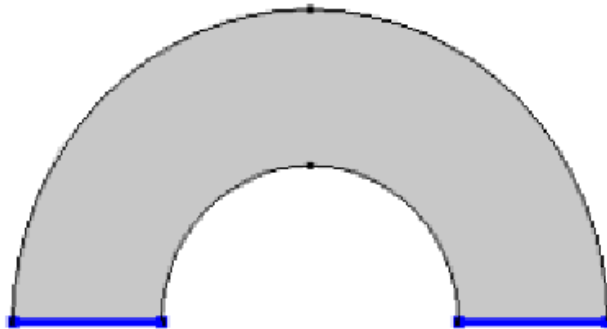


Figure (II.2) : Zones qui doivent présenter une symétrie représentées sur les bords

2. Le cylindre a un chargement $P_2 = 0$ MPa pour $R_2 = 0.2$ m ce qui correspond à une frontière non chargée (libre sur sa partie extérieure) voir figure (II.3)

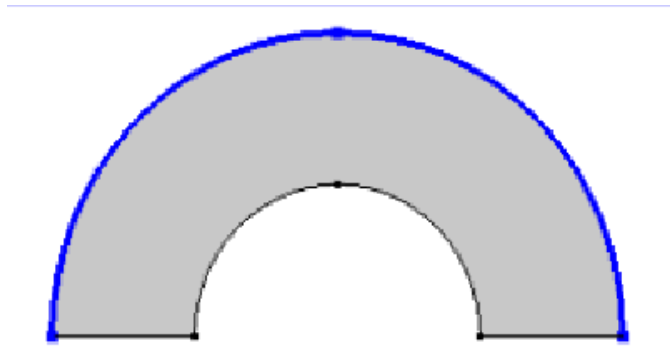


Figure (III.3) : Zone laissée libre définie sur le rayon externe.

3. Et enfin, Un chargement $P_i=500\text{MPa}$ est imposé au niveau de la frontière interne $R_1=0.1\text{m}$, Figure (II.4)

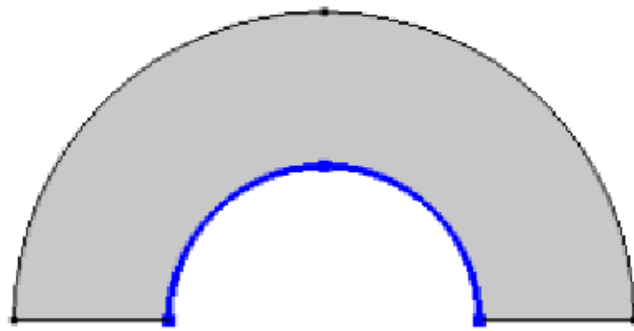


Figure (II.4): Zone qui doit être sous chargement représentée sur le rayon interne.

C) Maillage :

Un maillage est la discrétisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés fins et bien définis. L'objet d'un maillage est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système et, éventuellement, son environnement (le milieu), dans l'optique de simulations de calculs ou de représentations graphiques. Pour ce cas on utilisera un maillage quadrilatère structuré, Sachant que plus le maillage est fin, plus les résultats obtenus seront précis. Figure (II.5) :

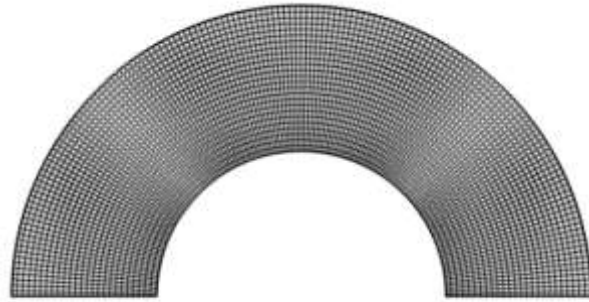


Figure II.5:représentation du maillage utilisé dans le cylindre.

II.3.Conclusion :

Le but de ce chapitre est d'utiliser des gradients de propriétés pour tracer des modèles mécaniques. A cet effet, des équations élastiques (équations de Lamé) ont été publiées pour deux méthodes (analytique et numérique). Les résultats obtenus sont présentés au chapitre III sous forme de progression des contraintes et des déplacements.

Chapitre III

Résultats et discussions

Chapitre III : Résultats et discussions

III.1.Loi de puissance :

III.1.1.Cas n°1 :

Considérons un cylindre à gradient fonctionnel creux de rayon intérieur $R_1 = 0,1$ m et le rayon extérieur $R_2 = 0,2$ m. Le module d'élasticité à la paroi interne est $E_i = 200$ GPa. On suppose également que le coefficient de Poisson a une valeur constante $\nu = 0,3$. Les pressions internes et externes appliquées sont de $P_1 = 500$ MPa et $P_2 = 0$ MPa respectivement.

Dans un premier temps, pour différentes valeurs de α , le module d'élasticité est tracé en fonction du rayon à travers la paroi du cylindre.

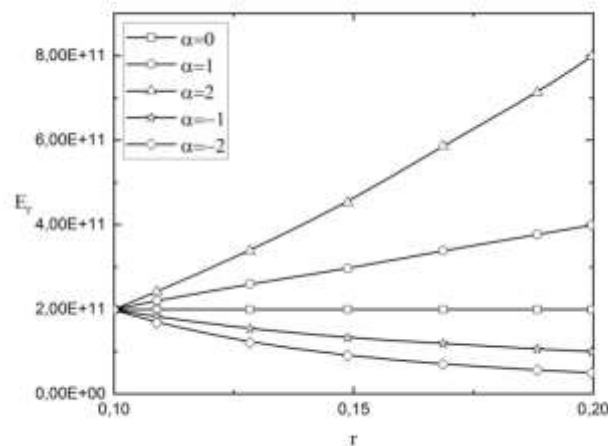


Figure (III.1) : Distribution du module d'élasticité.

La figure (III.1) représente la Variation du module de Young à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs de $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs de α positives, le module d'élasticité du matériau est croissant en fonction du rayon du cylindre, tandis que pour des valeurs négatives il est décroissant.

Une augmentation positive de α signifie une rigidité croissante alors qu'une valeur négative de α entraîne une diminution de la rigidité du matériau.

III.1.2. Contraintes mécaniques :

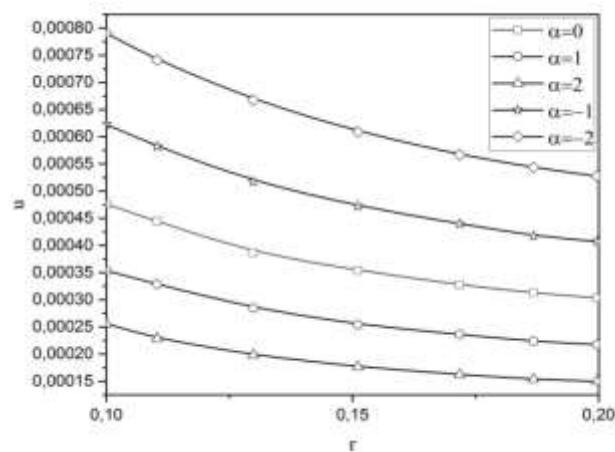


Figure (III.2) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

La figure (III.2) illustre l'évolution du déplacement $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi du cylindre et cela pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Il est à observer dans la figure (III.2) que les déplacements sont maximums sur la paroi interne $r=R1$ et sont minimum sur la paroi externe du cylindre $r=R2$. L'intensité des déplacements diminue de la paroi interne à la paroi externe du cylindre. Cette observation est faite pour toutes les valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs négatives de α , le déplacement radial est plus important, tandis que pour des valeurs positives de α , le déplacement est plus faible. C'est-à-dire qu'en augmentant la valeur du paramètre de non homogénéité, qui n'est autre qu'une augmentation dans la rigidité du matériau, il en résulte une diminution des déplacements à travers la paroi du cylindre.

Dans la même figure, le déplacement dans le cas d'un cylindre homogène ($\alpha = 0$) est présenté pour comparaison

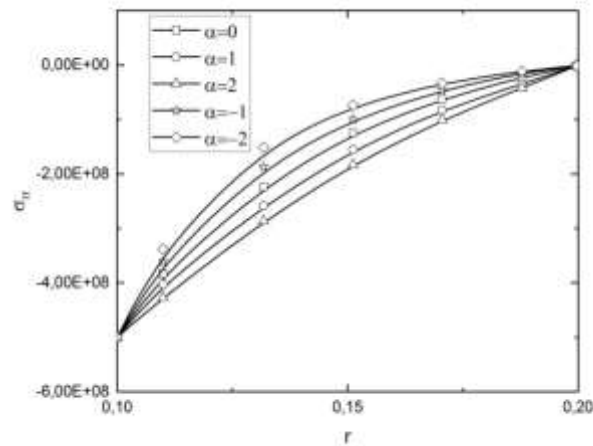


Figure (III.3) :Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression

La figure (III.3) représente la répartition de la contrainte radiale σ_{rr} , suivant le rayon à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs négatives de α , la contrainte radiale est plus importante, tandis que pour des valeurs positives de α , la contrainte est plus faible.

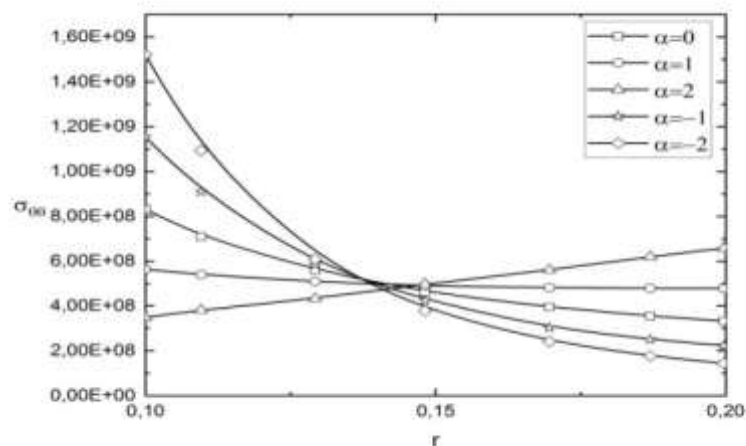


Figure (III.4) :Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression.

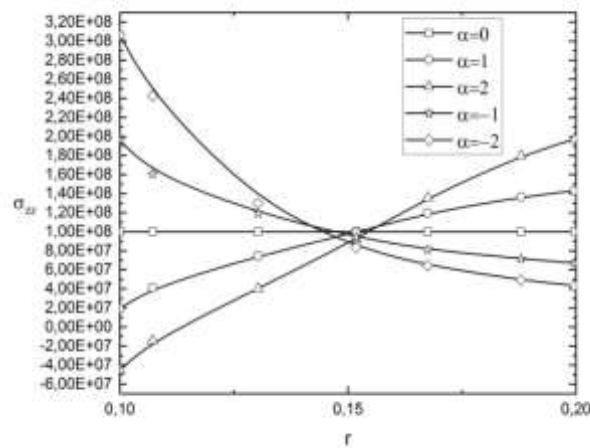


Figure (III.5) :Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

Les figures (III.4 et III.5) représentent, respectivement, la répartition des contraintes circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et axiale σ_{zz} , suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre pour différentes valeurs des paramètres de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Les lignes solides Représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique.

Pour des valeurs positives de α les contraintes circonférentielles et axiales ont des valeurs moins importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives de α la contrainte circonférentielle et axiale ont des valeurs plus importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe. A noter que dans l'intervalle $r = [0.1, 0.2]$, les courbes de contraintes pour chaque valeurs de α se croisent.

III.1.3.Cas n°2 :

Considérons un cylindre à gradient fonctionnel creux de rayon intérieur $R_1 = 0,1$ m et le rayon extérieur $R_2 = 0,2$ m. Le module d'élasticité à la paroi interne est $E_i = 200$ GPa. On suppose également que le coefficient de Poisson a une valeur constante $\nu = 0,3$. Les pressions internes et externes appliquées sont de $P_1 = 0$ MPa et $P_2 = -500$ MPa respectivement.

Dans un premier temps, pour différentes valeurs de α , le module d'élasticité est tracé en fonction du rayon à travers la paroi du cylindre.

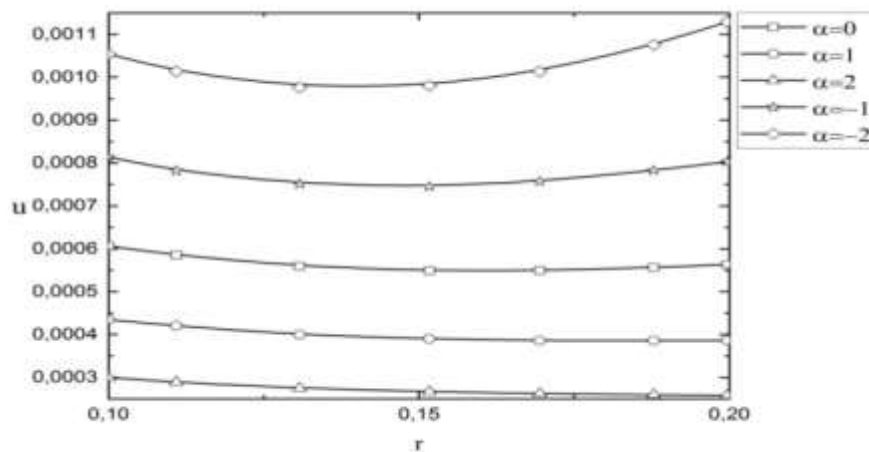


Figure (III.5) :L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

La figure (III.5) illustre l'évolution du déplacement $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi du cylindre et cela pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéités $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Il est à observer dans la **figure (III.5)** que les déplacements sont maximum sur la paroi externe $r=R_2$ et sont minimum sur la paroi interne du cylindre $r=R_1$ cela pour les valeurs du paramètre non homogénéités $\alpha = [-2]$, tandis que les déplacements sont minimum sur la paroi externe $r=R_2$ et sont maximum sur la paroi interne du cylindre $r=R_1$ cela pour les valeurs du paramètre de non homogénéités $\alpha = [-1, 0, 1, 2]$.

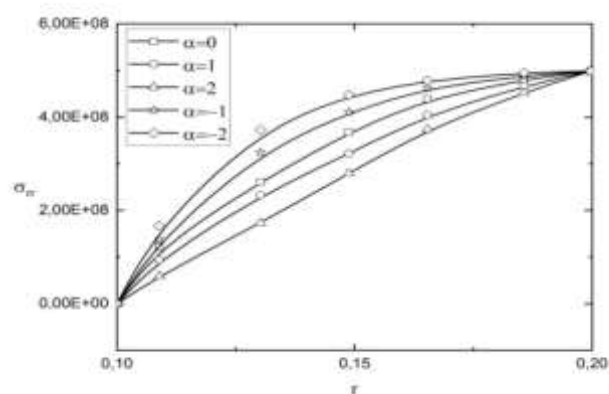
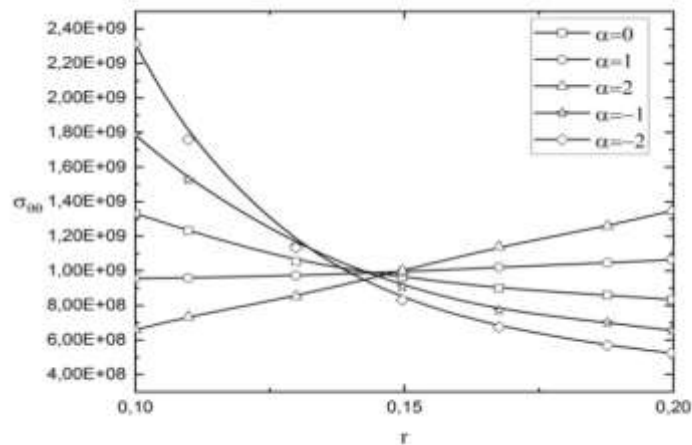
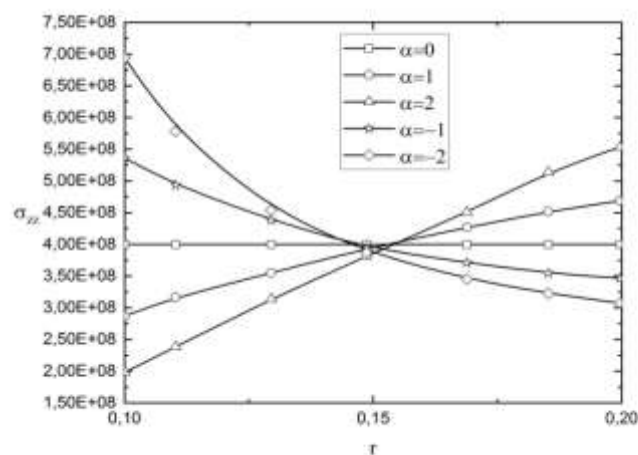


Figure (III.6) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression

La figure (III.6) représente la répartition de la contrainte radiale σ_{rr} , suivant le rayon à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

**Figure (III.7)**: Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression.**Figure (III.8)** : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression

Les figures (III.7 et III.8) représentent, respectivement, la répartition des contraintes circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et axiale σ_{zz} , suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre pour différentes valeurs des paramètres de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Les lignes solides Représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique.

Pour des valeurs positives de α les contraintes circonférentielles et axiales ont des valeurs moins importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives de α la contrainte circonférentielle et axiale ont des valeurs plus importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe. A noter que dans l'intervalle $r = [0.1, 0.2]$, les courbes de contraintes pour chaque valeurs de α se croisent.

III.2.Loi exponentielle :

III.2.1.Cas n° 1 :

Considérons un cylindre à gradient fonctionnel creux de rayon intérieur $R_1 = 0,1$ m et le rayon extérieur $R_2 = 0,2$ m. Le module d'élasticité à la paroi interne est $E_i = 200$ GPa. On suppose également que le coefficient de Poisson a une valeur constante $\nu = 0,3$. Les pressions internes et externes appliquées sont de $P_1 = 500$ MPa et $P_2 = 0$ MPa respectivement.

Dans un premier temps, pour différentes valeurs de α , le module d'élasticité est tracé en fonction du rayon à travers la paroi du cylindre.

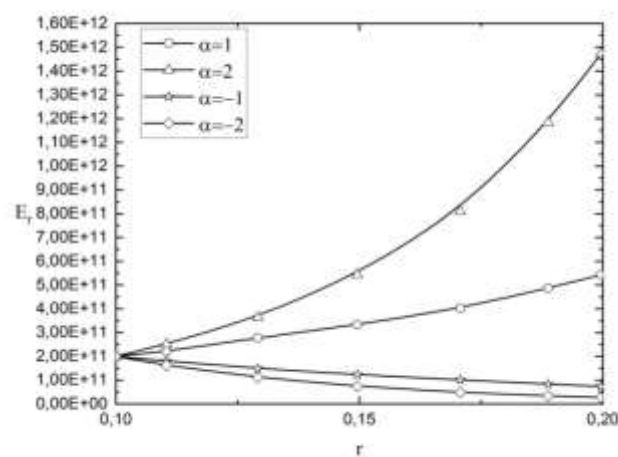


Figure (III.9) : Distribution du module d'élasticité.

La figure (III.9) représente la Variation du module de Young à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs de $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs de α positives, le module d'élasticité du matériau est croissant en fonction du rayon du cylindre, tandis que pour des valeurs négatives il est décroissant.

Une augmentation positive de α signifie une rigidité croissante alors qu'une valeur négative de α entraîne une diminution de la rigidité du matériau.

III.2.2 Contraintes mécaniques :

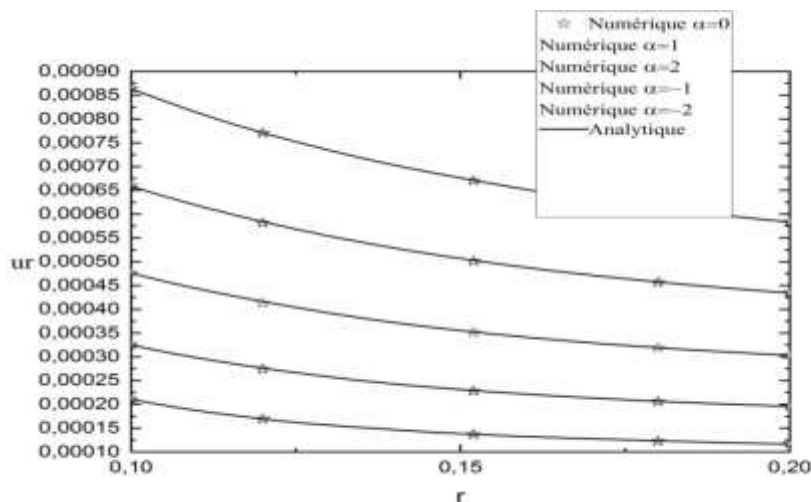


Figure (III.10) : L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

La figure (III.10) illustre l'évolution du déplacement $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi du cylindre et cela pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Il est à observer dans la figure (III.10) que les déplacements sont minimum sur la paroi externe $r=R_2$ et sont maximum sur la paroi interne du cylindre $r=R_1$ cela pour les valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1]$, tandis que les déplacements sont maximum sur la paroi externe $r=R_2$ et sont minimum sur la paroi interne du cylindre $r=R_1$ cela pour la valeur du paramètre de non homogénéité $\alpha = [2]$.

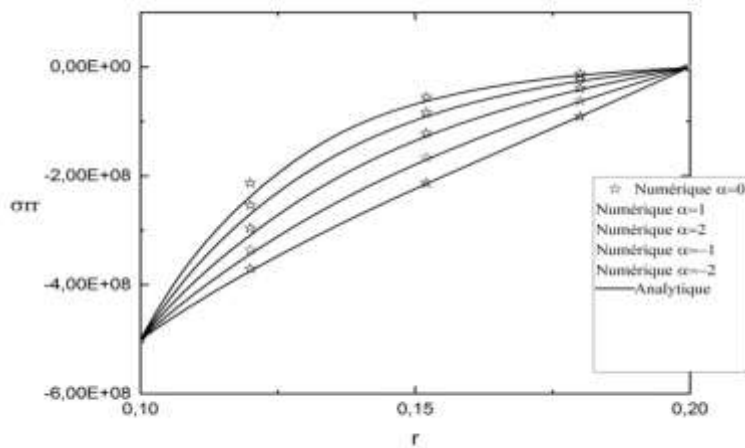


Figure (III.11) : Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression.

La figure (III.11) représente la répartition de la contrainte radiale σ_{rr} , suivant le rayon à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

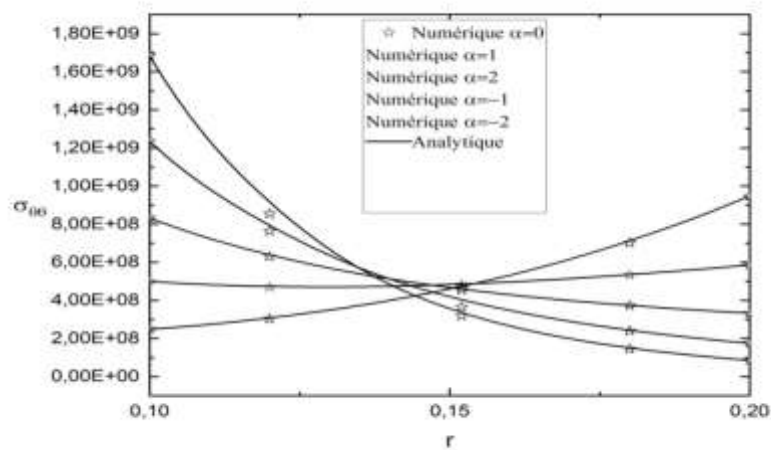


Figure (III.12) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression.

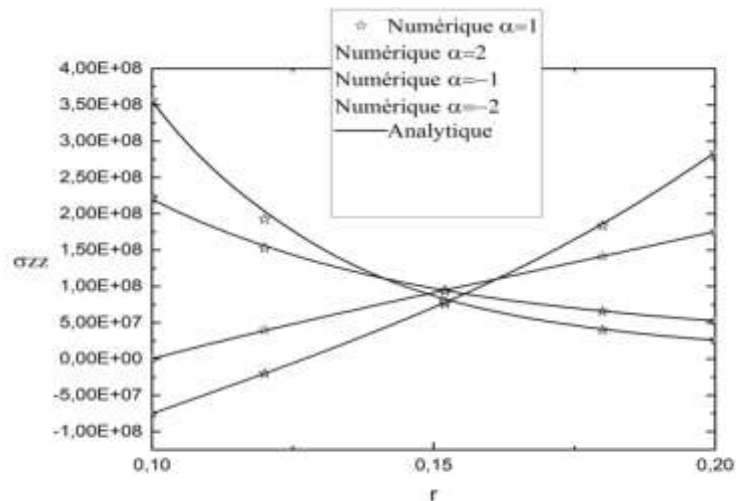


Figure (III.13):Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression

Les figures (III.12 et III.13) représentent, respectivement, la répartition des contraintes circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et axiale σ_{zz} , suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre pour différentes valeurs des paramètres de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Les lignes solides Représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique.

Pour des valeurs positives de α les contraintes circonférentielles et axiales ont des valeurs moins importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives de α la contrainte circonférentielle et axiale ont des valeurs plus importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe. A noter que dans l'intervalle $r = [0,1, 0,2]$, les courbes de contraintes pour chaque valeurs de α se croisent.

III.2.3.Cas n° 2 :

Considérons un cylindre à gradient fonctionnel creux de rayon intérieur $R_1 = 0,1$ m et le rayon extérieur $R_2 = 0,2$ m. Le module d'élasticité à la paroi interne est $E_i = 200$ GPa. On suppose également que le coefficient de Poisson a une valeur constante $\nu = 0,3$. Les pressions internes et externes appliquées sont de $P_1 = 0$ MPa et $P_2 = -500$ MPa respectivement.

Dans un premier temps, pour différentes valeurs de α , le module d'élasticité est tracé en fonction du rayon à travers la paroi du cylindre.

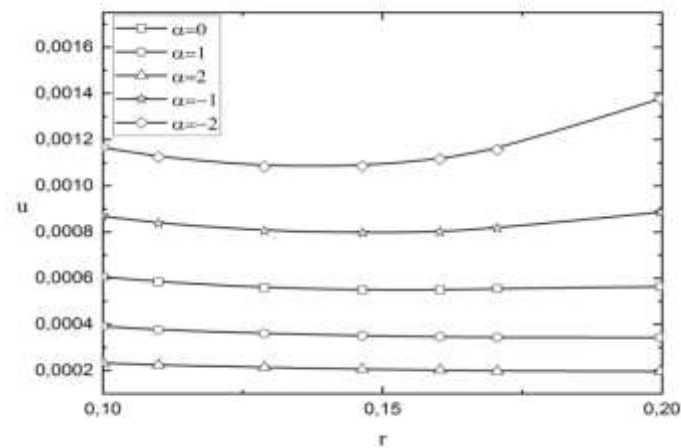


Figure (III.14) :L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre.

La **figure (III.14)** illustre l'évolution du déplacement $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi du cylindre et cela pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéités $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Il est à observer dans la **figure (III.14)** que les déplacements sont maximum sur la paroi externe $r=R_2$ et sont minimum sur la paroi interne du cylindre $r=R_1$ cela pour les valeurs du paramètre non homogénéités $\alpha = [-2, -1]$, tandis que les déplacements sont minimum sur la paroi externe $r=R_2$ et sont maximum sur la paroi interne du cylindre $r=R_1$ cela pour les valeurs du paramètre de non homogénéités $\alpha = [0, 1, 2]$.

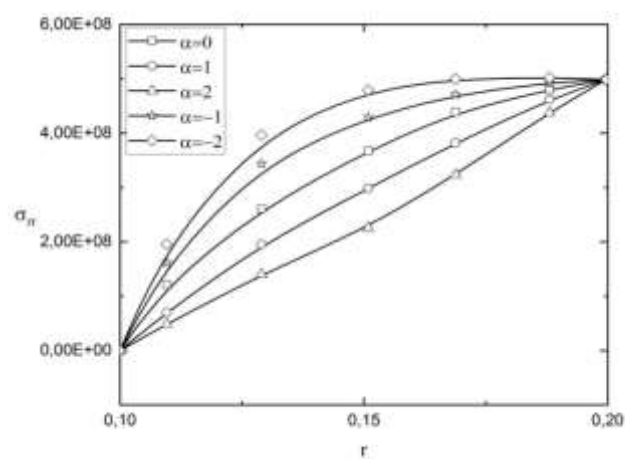


Figure (III.15) :Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression

La figure (III.15) représente la répartition de la contrainte radiale σ_{rr} , suivant le rayon à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

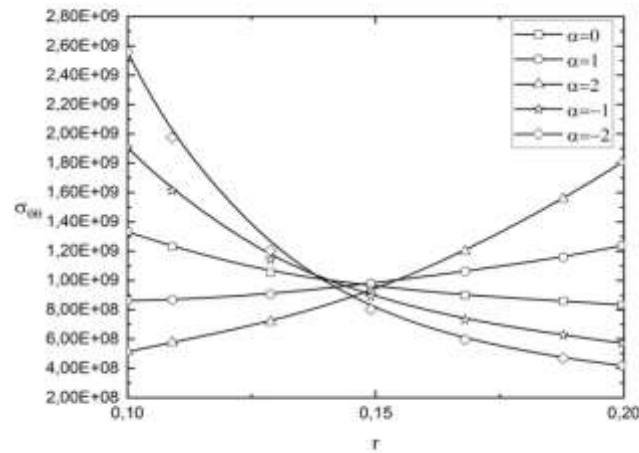


Figure (III.16) : Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression.

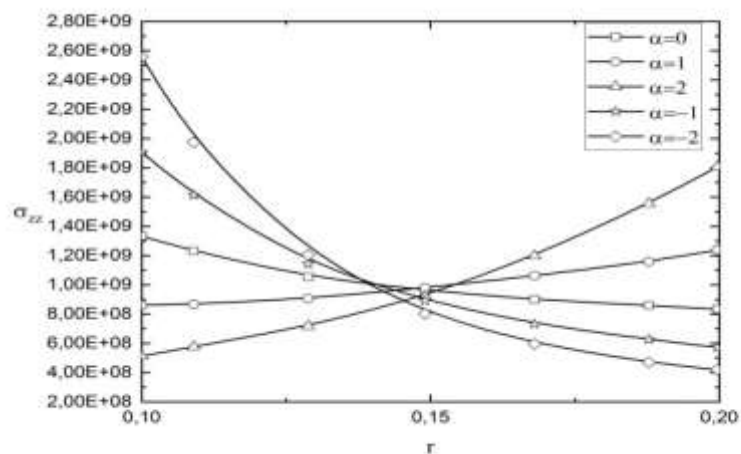


Figure (III.17) : Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression

Les figures (III.16 et III.17) représentent, respectivement, la répartition des contraintes circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et axiale σ_{zz} , suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre pour différentes valeurs des paramètres de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Les lignes solides Représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique.

Pour des valeurs positives de α les contraintes circonférentielles et axiales ont des valeurs moins importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives de α la contrainte circonférentielle et axiale ont des valeurs plus importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe. A noter que dans l'intervalle $r = [0.1, 0.2]$, les courbes de contraintes pour chaque valeurs de α se croisent.

III. Conclusion :

Dans ce chapitre, Nous avons étudié les distributions du déplacement et des contraintes obtenus analytiquement et numériquement pour différentes valeurs des coefficients de non-homogénéités et cela été fait avec deux lois (loi de puissance et exponentielle), les résultats sont en parfaits accords.

Les résultats montrent que l'inhomogénéité des matériaux avec des gradients caractéristiques affecte le comportement mécanique des structures cylindriques creuses.

Conclusion générale

Nous introduisons les matériaux FGM en tant que matériaux composites pour répondre aux besoins des structures en conditions extrêmes. Leur importance et leurs domaines d'application se sont élargis au fil des décennies, Cependant, leur fabrication reste un défi. Pour pouvoir concevoir et généraliser ce matériau, il faut d'abord le faire par des études analytiques et numériques, c'est ce que nous proposons dans cet article.

Une solution analytique et un modèle numérique ont été développés permettant d'obtenir les déplacements et les contraintes mécaniques dans un cylindre creux constitués d'un matériau fonctionnellement gradué sous la charge de pressions. Les propriétés du matériau sont supposées être graduées le long de la direction radiale selon une fonction de loi de puissance et exponentielle.

Pour montrer l'effet de l'inhomogénéité du matériau, il est nécessaire de se concentrer sur les distributions des déplacements et des contraintes dans des cylindres creux avec des gradients de propriétés. Les propriétés du matériau varient radialement selon une fonction de loi de puissance. Il a fallu dans un premier temps de développer une solution analytique et à la comparer avec les résultats du modèle basé sur la méthode des éléments finis.

Les résultats présentés montrent que l'inhomogénéité du matériau affecte le comportement mécanique des structures creuses épaisses, telles que les cylindres et sphères en matériaux à gradients exponentiels. Ainsi, en utilisant ces données et en choisissant une bonne valeur, les ingénieurs peuvent concevoir des structures FGM spécifiques qui répondent à certaines exigences particulières.

Références Bibliographiques

Références Bibliographique

- [1] ValmikBhavar et al IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 229 page 2 (2017) 012021.
- [2] Shahistha A, Varghese B, Baby A 2014 A review on functionally graded materials *The International Journal Of Engineering And Science (IJES)*, Volum e 3, Issue 6, Pages 90-101, ISSN (e): 2319 – 1813 ISSN (p): 2319 – 1805.
- [3] Koizumi M. the concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally graded materials* (1992) 34, 3-10.
- [4] ABDIZADEH, H., *Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex, «Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'alumine »*, Thèse Docteur D'état, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon Et L'université Claude Bernard Lyon IFrance, 1997, 212p.
- [5] Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M.: Novel applications of functionally graded nano, opto-electronic and thermo-electric materials. *Int. J. Mater. Mech. Manuf.* 1, 221–224 (2013).
- [6] Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T.: Laser-metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC. *Mater.Des.*84, 402–410 (2015).
- [7]Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana, S.: Functionally graded material: An overview. In: *Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012*, vol. 3, pp. 1593– 1597 (2012).
- [8] Schneider, M.J.: The Timken Company, and Madhu S. Chatterjee, bodycote introduction to surface hardening of steels. In: *Dossett, J., Totten, G.E. (eds) ASM Handbook, Steel Heat-Treating Fundamentals and Processes*, vol. 4 (2013).
- [9] Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V., Villain, G.: Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT and E Int.* 44(2), 169–177 (2011).
- [10] Belabed Z. Thèse de doctorat en sciences. Étude du comportement statique et dynamiquedes plaques épaisses non homogènes. Université DjillaliLiabes. Sidi Bel Abbes. Faculté deTechnologie. Département de Génie Civil. 2016 : 9-12 ; 20-21 ; 28-29.

- [11] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. Functionally graded materials design, processing and applications, materials technology series. Springer science+ business media, llc. Ta418.9. F85f86 1999 :2-3.
- [12] Ait Sidhoum I. Thèse de doctorat en sciences. Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradué. Universités Mohamed-Boudiaf. Oran. Faculté des sciences et de la technologie. 2019 :19-21
- [13] Mahmoudi A. Thèse de doctorat en sciences. Étude de l'influence des modèles Micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM. Université Djillali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil et Travaux Publics. 2019 :7-8 ; 10-11.
- [14] Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi Member, IAENG, Mukul Shukla and Sisa Pityana, "Functionally Graded Material: An Overview". dans Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III WCE 2012, July 4 - 6, 2012, London, U.K.).
- [15] Lionel Gendre, "MATÉRIAUX COMPOSITES ET STRUCTURES COMPOSITES" publiée le 17-03-2011.
- [16] Koizumi, M. (1996), FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- [17] Boch. P Chartier .Huttepain. M Tapa (1986) casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites.
- [18] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi, "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons; page 110, 4 août ,(2011).
- [19] Hao D, Wei C 2016 Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams Composite structures (Scimedirect), 141, (2016), 253- 263.
- [20] Simsek M 2015 Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions Composite structures (Scimedirect), 133, (2015), 968-978.

- [21] Qian LF, Batra RC 2005 Design of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies. *J Sound Vib* 2005;280:415–24.
- [22] Enab T Performance improvement of total knee replacement joint through bidirectional functionally graded material *International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering IJMME-IJENS* Vol:14 No:02.
- [23] Udupa G, Rao S, Gangadharan K 2014 Functionally graded composite materials: An overview”, *International conference on advances in manufacturing and material engineering, AMME 2014*.
- [24] Marur, P.R., Tippur, H.V.: Evaluation of mechanical properties of functionally graded materials. *J. Test. Eval.* 26, 539–545 (1998)
- [25] Mohammadi, M., Dryden, J.R.: Influence of the spatial variation of Poisson’s ratio upon the elastic field in nonhomogeneous axisymmetric bodies. *Int. J. Solids Struct.*46, 788–795 (2009).
- [26] Li, X.F., Peng, X.L.: A pressurized functionally graded hollow cylinder with arbitrarily varying material properties. *J. Elast.* 96, 81–95 (2009).
- [27] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics* ; 70 (10), 1227–1243. (2003).

Abstract

The objective of this work is to analyze the mechanical behavior of a hollow cylinder made of a material with a property gradient. The properties of the material obey a power law with the inhomogeneity coefficient α varies from nonlinearly in the radial direction. The displacement and stress distributions are a function of the radius.

An analytical solution is developed and compared to the results of the models based on the finite element method. The comparison shows that the results are in perfect agreement. Displacement and stress distributions can be controlled by inhomogeneity coefficients in order to be adapted to specific applications.

Keywords: Mechanical stress, Material with property gradient, Non-homogeneity coefficients.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'analyser le comportement mécanique d'un cylindre creux constitué d'un matériau à gradient de propriétés. Les propriétés du matériau obéissent à une loi de puissance avec un coefficient de non-homogénéité α qui varie de façon non-linéaire dans la direction radiale. Les distributions du déplacement et des contraintes sont en fonction du rayon.

Une solution analytique est développée et comparée aux résultats du modèle basé sur la méthode des éléments finis. La comparaison montre que les résultats sont en parfait accord. Les distributions du déplacement et des contraintes peuvent être contrôlées par les coefficients de non-homogénéité afin d'être adaptés à des applications spécifiques.

Mots-clés : Contrainte mécanique, Matériau à gradient de propriétés, Coefficients de non-homogénéité