

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique  
Laboratoire de Mécanique, Matériaux & Énergétique



**THÈSE DE DOCTORAT**  
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE

**DOCTEUR EN SCIENCES**

Filière : **Génie Mécanique**  
Option : **Mécanique des matériaux**

Présentée par  
**Mr KHAMCHANE Abdelkader**

**Thème**

**Contribution à la réduction des bruits sonores dans les moteurs  
à combustion interne stationnaires**

Soutenue le : 28/02/2018

Devant le jury composé de :

Mr Sadaoui Djamel	Professeur	Université A. MIRA Béjaïa	Président
Mr Khelfaoui Youcef	Professeur	Université A. MIRA Béjaïa	Président
Mr Mansouri Kacem	Professeur	Université de Boumerdès	Examineur
Mr Almansba Madjid	MC A	Université de Tizi Ouzou	Examineur
Mr Hamtache Brahim	MC B	Université A. MIRA Béjaïa	Invité

**Année Universitaire : 2017/2018**

## Remerciements

Cette étude a été entreprise à l'Université d'Abderrahmane Mira de Bejaia, sous la direction de Youcef Khelfaoui, mon directeur de thèse, que je tiens à remercier d'avoir su donner un souffle de vie à ce travail, et je remercie également Brahim Hamtache mon codirecteur de thèse, dont l'aide précieuse m'a été indispensable. Merci également pour la confiance accordée tout au long de cette période et pour les orientations et suggestions qui ont été très utiles pour mener à bien la thèse malgré les conditions pas toujours évidentes.

Des remerciements appuyés vont également à monsieur Yousfi Rachid, responsable de l'atelier de technologie du département de génie mécanique pour son aide et assistance et tout le personnel du département pour leur contribution.

Mes plus sincères remerciements vont ainsi à l'ensemble des membres du jury pour avoir accepté d'assister à la présentation et à l'évaluation de ce travail.

Finalement, et non les moindres, je tiens à remercier mes parents, ma femme et toute ma famille pour leur opiniâtreté à me voir poursuivre des études.

## Résumé

**Titre :** Contribution à la réduction acoustique des bruits des moteurs à combustion internes.

**Résumé :** L'optimisation numérique des silencieux réactifs, limités dans l'espace, a une grande importance dans la conception d'environnements moins bruyants. Dans ce travail, les performances acoustiques de trois types de silencieux, soumis à un espace limité, sont étudiées. L'optimisation de géométrie est effectuée en utilisant un algorithme d'optimisation appelé le Seuil d'Acceptation (SA). La conception optimale de la forme géométrique obtenue est analysée par la méthode des Éléments Finis (MEF). Cette approche numérique est basée sur la maximisation de la Perte de Transmission Acoustique (STL) par l'utilisation de la Méthode de Transfert de Matrices (MTM). C'est une méthode de modélisation basée sur le modèle de propagation d'ondes planes. La solution en éléments finis utilisée pour cette analyse est basée sur la théorie de puissance acoustique. Un code de calcul standard est utilisé pour analyser, en 3D, l'atténuation acoustique des silencieux par la méthode MEF. La capacité acoustique des silencieux obtenus est évaluée en comparant la solution MEF à la méthode analytique. Les résultats montrent que la valeur maximale de la STL est précisément située à la tonalité ciblée. En outre, la performance acoustique du silencieux réactif choisi avec tube prolongé à l'entrée et à la sortie de la chambre principale se trouve être supérieure aux autres types de silencieux. Par conséquent, cette approche fournit un schéma rapide pour l'optimisation de la géométrie des silencieux réactifs.

**Mots clefs :** *silencieux réactifs, algorithme d'optimisation, méthode de transfert de matrices et puissance acoustique*

# Abstract

**Title:** Contribution to the acoustic reduction of noise from internal combustion engines.

**Abstract:** The Shape optimization of reactive muffler under space constraint becomes of great importance in the design of quieter environments. In this paper, the acoustical performance of three different expansion-chamber mufflers with extended tube under space constraint is presented. A shape optimization analysis is performed using a novel scheme called Threshold Acceptance (SA). The best design obtained by the shape optimization method is analyzed by Finite Element Method (EF). This numerical approach is based on the maximization of the sound transmission loss (STL) using the Transfer Matrix Method (MTM). The Transfer Matrix Method is a modeling method based on the plane wave propagation model whereas the EF solution is based on the acoustical power method. A standard computational code is used to analyze the sound attenuation of the mufflers by the Finite Element Method in 3D. The acoustical ability of the mufflers is then assessed by comparing the Finite Element Method solution with the analytical method. Results show that the maximal sound transmission loss is precisely located at the desired targeted tone. In addition, the acoustical performance of muffler with inlet and outlet extended tube is found to be superior to the other ones. Consequently, this approach provides a quick scheme for the shape optimization of reactive mufflers.

**Keywords:** reactive muffler, threshold acceptance, transfer matrix method, sound acoustic power

# Table des matières

RÉSUMÉ .....	III
TABLE DES MATIÈRES .....	V
LISTE DES FIGURES .....	IX
LISTE DES TABLEAUX .....	XI
INTRODUCTION GÉNÉRALE .....	12
<b>1. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>16</b>
1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LE SON ET LE BRUIT .....	16
1.1.1 Définition du son .....	16
1.1.2 Définition du bruit .....	16
1.1.3 Les problèmes causés par le bruit .....	17
1.2 PRESSION ET VITESSE ACOUSTIQUES.....	18
1.2.1 Pression acoustique .....	18
1.2.2 Vitesse acoustique .....	19
1.2 GENERALITES SUR LES ECHAPPEMENTS .....	19
1.2.1 Introduction.....	19
1.2.2 Les différents types de silencieux .....	20
1.2.2.1 Silencieux à absorption .....	20
1.2.2.2 Silencieux à réflexion.....	21
1.2.2.3 Silencieux à interférence .....	21
1.3 CARACTÉRISATION DES SILENCIEUX .....	22
1.3.1 Perte par transmission .....	22
1.3.2 L'atténuation acoustique .....	22
1.3.3 La perte par insertion acoustique.....	23
1.3.4 Comparaison des paramètres de performance acoustique.....	23
1.4 CONCLUSION .....	24
<b>2 ATTÉNUATION ACOUSTIQUE DES SILENCIEUX.....</b>	<b>25</b>
INTRODUCTION .....	25
2.1 METHODE DE TRANSFERT DE MATRICE (MTM) ET MESURES EXPERIMENTALES DE LA PERTE DE TRANSMISSION (STL) .....	25

2.1.1	<i>Méthodes expérimentales</i> .....	31
2.1.1.1	Méthode des trois-points.....	31
2.1.1.2	Méthode des deux microphones.....	32
2.2	OPTIMISATION DE LA PERTE DE TRANSMISSION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	35
2.2.1	<i>Méthode des éléments finis (MEF)</i> .....	35
2.2.2	<i>Méthode des éléments finis de frontière (MEFF)</i> .....	36
2.3	MATRICES DE TRANSFERT DE DIFFERENTS MODELES DE SILENCIEUX.....	37
2.3.1	<i>Équations générales de la mécanique des fluides</i> .....	37
2.3.1.1	Principe de la conservation de masse .....	38
2.3.1.2	Principe de conservation de quantité de mouvement .....	38
2.3.1.3	Principe de conservation de l'énergie .....	38
2.3.1.4	Hypothèses prises en considération.....	38
2.3.2	<i>Équation de propagation d'onde acoustique dans les filtres réactifs</i> .....	39
2.3.2.1	Cas d'un tube.....	39
2.3.2.2	Cas d'un filtre un à seul tube perforé .....	40
2.3.2.3	Cas d'un filtre à perforation double .....	43
2.3.3	<i>Mise en équation des variables acoustiques et aéroacoustiques pour le cas d'un conduit simple</i> .....	45
2.3.4	<i>Matrice de transfert et Perte par transmission pour les filtres non perforés</i> .....	47
2.3.4.1	Impédance spécifique " $\xi(\mathbf{x})$ ".....	47
2.3.4.2	Tube uniforme.....	48
2.3.4.3	Chambre d'expansion simple .....	49
2.3.4.4	Tubes prolongés et changement de section.....	50
2.3.5	<i>Matrice de transfert et perte par transmission pour les filtres perforés</i> .....	56
2.3.6	<i>Matrice de transfert et perte par transmission pour les filtres à absorption</i> .....	62
2.3.6.1	Équations de la propagation d'onde dans le filtre.....	62
2.3.6.2	Conditions aux limites .....	66
2.3.6.3	Perte par transmission .....	66
2.4	CONCLUSION .....	67
<b>3</b>	<b>OPTIMISATION ACOUSTIQUE PAR ALGORITHME NUMÉRIQUE .....</b>	<b>68</b>
	INTRODUCTION .....	68
3.1	OPTIMISATION PAR ALGORITHME GENETIQUE .....	68
3.1.1	<i>Le codage en algorithme génétique</i> .....	71
3.1.2	<i>L'opérateur de sélection</i> .....	73
3.1.2.1	La loterie biaisée (roulette wheel).....	73
3.1.2.2	La méthode élitiste.....	75
3.1.2.3	La sélection par tournois .....	75
3.1.2.4	La sélection universelle stochastique .....	75

3.1.3	<i>L'opérateur de croisement (cross-over)</i> .....	76
3.1.4	<i>L'opérateur de mutation</i> .....	78
3.1.5	<i>L'opérateur de remplacement</i> .....	80
3.2	ALGORITHME DE RECUIT SIMULE .....	81
3.2.1	<i>Définition de l'algorithme du recuit simulé</i> .....	82
3.2.2	<i>L'algorithme de Metropolis</i> .....	83
3.2.3	<i>L'algorithme du recuit simulé</i> .....	83
3.2.3.1	États initiaux de l'algorithme.....	84
3.2.4	<i>Variation de la température</i> .....	84
3.2.4.1	Décroissance par paliers.....	84
3.2.4.2	Décroissance continue .....	84
3.2.5	<i>Exemple d'application</i> .....	85
3.2.6	<i>Domaines d'applications</i> .....	87
3.2.7	<i>Avantages et Inconvénients</i> .....	87
3.2.7.1	Avantages.....	87
3.2.7.2	Inconvénients .....	87
3.2.8	<i>Application du recuit simulé sur les silencieux</i> .....	88
3.3	ALGORITHME D'ACCEPTATION DE SEUIL (THRESHOLD ACCEPTANCE).....	90
3.4	CONCLUSION.....	93
<b>4</b>	<b>ANALYSE NUMÉRIQUE PAR ÉLÉMENTS FINIS (MEF) .....</b>	<b>94</b>
	INTRODUCTION .....	94
4.1	FORMULATION CLASSIQUE EN PRESSION .....	98
4.1.1	<i>Formulation mathématique du problème</i> .....	98
4.1.2	<i>Discretisation par éléments finis</i> .....	98
4.1.2.1	La matrice de rigidité.....	99
4.1.2.2	La matrice de masse .....	99
4.1.2.3	4.1.1.3 La matrice d'amortissement .....	100
4.1.2.4	4.1.1.4 Le vecteur source.....	100
4.2	FORMULATION MIXTE PRESSION-VITESSE .....	100
4.2.1	<i>Expression mathématique du problème</i> .....	100
4.2.1.1	Formulation locale.....	100
4.2.1.2	Formulation variationnelle mixte .....	101
4.2.2	<i>Discretisation par éléments finis</i> .....	102
4.2.2.1	La matrice de rigidité.....	103
4.2.2.2	La matrice de masse .....	104
4.2.2.3	La matrice d'amortissement.....	104
4.2.2.4	Le vecteur source .....	104

4.3	CARACTÉRISATION DU MILIEU DE PROPAGATION ET POST-TRAITEMENT .....	105
4.4	CONCLUSION .....	106
<b>5.</b>	<b>OPTIMISATION ACOUSTIQUE D'UN SILENCIEUX : RÉSULTATS ET DISCUSSION.....</b>	<b>107</b>
	INTRODUCTION .....	107
5.1	OPTIMISATION NUMÉRIQUE .....	107
5.2	ÉVALUATION NUMÉRIQUE .....	110
5.2.1	<i>Méthode d'optimisation géométrique</i> .....	110
5.2.2	<i>Formule théorique</i> .....	110
5.3	RÉSULTATS ET DISCUSSION .....	113
5.3.1	<i>Études de cas</i> .....	113
5.3.2	<i>Fonction objectif</i> .....	114
5.4	OPTIMISATION DE LA GÉOMÉTRIE DES SILENCIEUX .....	114
5.4.1	<i>Premier cas : Silencieux à chambre d'expansion avec tube étendu à l'entrée</i> .....	115
5.4.2	<i>Deuxième cas : Silencieux de chambre d'expansion avec tube étendu de sortie</i> .....	119
5.4.3	<i>Troisième cas : Silencieux de chambre d'expansion avec tube étendu d'entrée et de sortie</i> .....	123
5.4.4	<i>Comparaison</i> .....	127
5.5	CONCLUSION .....	129
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>	<b>130</b>
	<b>ANNEXE.....</b>	<b>133</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>148</b>

# Liste des figures

FIGURE 1.1 - Courbe de sensibilité de l'oreille humaine d'après Fletcher et Munson (Fletcher H. and Munson 1933)	17
FIGURE 1.2 - Silencieux à absorption (Pascal J. 2009)	20
FIGURE 1.3 - Silencieux à réflexion (Pascal J. 2009)	21
FIGURE 1.4 - Silencieux à interférence (Pascal J. 2009)	22
FIGURE 1.5 - Mesure de la perte par insertion (SIL) (Munjal M.L. 1987)	23
FIGURE 2.1 - Décomposition de l'onde plane dans un conduit (Andesen K.S. 2008)	27
FIGURE 2.2 - Paramètres utilisés pour l'extraction de la matrice de transfert (Andesen K.S. 2008)	28
FIGURE 2.3 - Les points de mesure pour la méthode des trois points (Abom M. 1991)	32
FIGURE 2.4 - Bilan matière dans un tube perforé (Munjal M.L. 1987)	41
FIGURE 2.5 - Perforation double (Munjal M.L. 1987)	43
FIGURE 2.6 - Conduit uniforme (Pascal J. 2009)	47
FIGURE 2.7 - Chambre d'expansion simple (Pascal J. 2009)	50
FIGURE 2.8 - Silencieux à tubes prolongés (Pascal J. 2009)	51
FIGURE 2.9- Changement de section dans un silencieux (Munjal M.L. 1987)	55
FIGURE 2.10- Résonateur concentrique (Beranek 1992)	56
FIGURE 2.11 - Géométrie du silencieux à absorption (Selamet A. 2003)	63
FIGURE 3.1 - Les cinq niveaux d'organisation d'un algorithme génétique (Souquet 2004)	72
FIGURE 3.2 - Illustration schématique du codage des variables réelles (Souquet 2004)	72
FIGURE 3.3- La méthode de sélection de la loterie biaisée (Souquet 2004)	74
FIGURE 3.4 - Croisement avec un point de cross-over (Souquet 2004)	77
FIGURE 3.5 - Croisement avec 2 points de cross-over (Souquet 2004)	77
FIGURE 3.6 - Croisement uniforme (Souquet 2004)	77
FIGURE 3.7 - Schéma représentatif d'une mutation (Souquet 2004)	79
FIGURE 3.8 - Comparaison entre le recuit simulé et une heuristique classique (Abecasis G. 2011)	84
FIGURE 3.9 - Un ensemble de villes (nœuds) reliées entre eux par des routes (arcs) (Abecasis G. 2011)	85
FIGURE 3.10 - Le résultat donné par l'algorithme glouton (se décaler d'un sommet vers son plus proche voisin) (Abecasis G. 2011)	85
FIGURE 3.11 - Le résultat obtenu en échangeant les sommets 2 et 3 (Abecasis G. 2011)	86
FIGURE 3.12 - Le résultat obtenu en échangeant les sommets 5 et 2 (Abecasis G. 2011)	86
FIGURE 3.13 - Les résultats obtenus dans l'exemple (Abecasis G. 2011)	86
FIGURE 3.14- L'organigramme de l'optimisation par recuit simulé (Yeh L.J. and Chang M.C. 2005)	90

FIGURE 4.1 - Configuration du problème (Durand 2009) .....	96
FIGURE 5.1 - Silencieux à chambre d'expansion et à tubes prolongés .....	108
FIGURE 5.2- Croquis de la propagation de l'onde plane unidirectionnelle du silencieux à chambre d'expansion et tube.....	109
FIGURE 5.3- Courbes de performance de STL, comparaison entre le modèle théorique (MTM) et les valeurs expérimentales du silencieux de chambre d'expansion simple avec tube étendu .....	113
FIGURE 5.4 - Courbes de performance de perte de transmission STL par rapport à ( $I_{max}$ ) par AS [ $T_0 = 0.2$ ] .....	116
FIGURE 5.5 - Perte de transmission STL par rapport aux fréquences d'une chambre d'expansion unique pour différentes tonalités pures [Fréquence ciblée: 300, 500, 700 et 800 Hz] .....	117
FIGURE 5.6 - Modèle EF optimisé du silencieux de chambre à expansion unique avec tube d'entrée étendu et distribution de pression acoustique interne à 2000 Hz.....	117
FIGURE 5.7- Perte de transmission du silencieux STL par rapport à la fréquence du silencieux de chambre à expansion unique avec tube d'entrée: solution théorique (ligne bleue) et solution simulée (ligne rouge) .....	118
FIGURE 5.8- Courbes de performance de STL par rapport à différentes ( $I_{max}$ ) par TA [ $T_0 = 0.2$ ] .....	120
FIGURE 5.9 - STL par rapport aux fréquences d'un double silencieux à chambre d'expansion pour différentes tonalités pures [Fréquence ciblée: 300, 500, 700 et 800 Hz] .....	121
FIGURE 5.10- Modèle EF optimisé du silencieux d'une chambre d'expansion et de la distribution interne de la pression acoustique à 1600Hz (pression absolue) .....	122
FIGURE 5.11 - Silencieux à chambre à expansion unique avec tube étendu de sortie, perte de transmission par rapport à la fréquence (solution théorique (ligne bleue) et solution simulée (ligne rouge)).....	123
FIGURE 5.12 - Courbes de performance de STL par rapport à différentes ( $I_{max}$ ) par AS [ $T_0 = 0.2$ ] .....	124
FIGURE 5.13 - STL en ce qui concerne les fréquences du silencieux de la chambre d'expansion avec tube étendu d'entrée et de sortie pour différentes tonalités pures [Fréquence ciblée: 300, 500, 700 et 800 Hz] .....	125
FIGURE 5.14- Modèle MEF optimisé du silencieux d'une chambre d'expansion et distribution de pression acoustique interne à 2820Hz (pression absolue) .....	126
FIGURE 5.15- Silencieux de chambre d'expansion avec perte de transmission de tube étendue d'entrée et de sortie par rapport à la fréquence: solution théorique (ligne bleue) et solution simulée (ligne rouge) .....	127
FIGURE 5.16- Comparaison du niveau STL optimal par rapport aux trois types de silencieux optimisés [bruit à large bande].....	128
FIGURE 5.17- Solution MEF des silencieux à trois géométries optimisées: Entrée (ligne bleue), sortie (ligne rouge) et entrée / sortie (ligne noire) .....	128

# Liste des tableaux

TABLEAU 2.1 - Valeurs du coefficient des pertes de charge (Munjal M.L., 1987) .....	52
TABLEAU 2.2- Différentes valeurs des constantes C1 et C3 (Munjal M.L., 1987) .....	54
TABLEAU 5.1- Paramètres des valeurs des éléments de transition (Munjal M.L. 1997) .....	111
TABLEAU 5.2- Perte de transmission acoustique du silencieux ayant une chambre à expansion et un tube étendue à l'intérieur de la chambre (Tonalité ciblée de 300 Hz).....	115
TABLEAU 5.3 - Perte de transmission acoustique d'une seule chambre d'expansion par rapport à différentes fréquences ciblées ( $CR = 0,99$ , $I_{max} = 2500$ ).....	116
TABLEAU 5.4 - La perte de transmission optimale pour un double silencieux de chambre d'expansion à divers CR et $I_{max}$ (tonalité ciblée de 300 Hz).....	119
TABLEAU 5.5 - La perte de transmission optimale pour une double chambre d'expansion par rapport à diverses fréquences ciblées ( $CR = 0,95$ , $I_{max} = 50000$ ).....	121
TABLEAU 5.6 - La perte de transmission optimale pour un double silencieux de chambre d'expansion à divers CR et $I_{max}$ (tonalité ciblée de 300 Hz) .....	123
TABLEAU 5.7 - La perte de transmission optimale pour une double chambre d'expansion par rapport à diverses fréquences ciblées ( $CR = 0,95$ , $I_{max} = 50000$ ) .....	125
TABLEAU 5.8 - Comparaison de la performance acoustique par rapport à trois types de silencieux optimisés dans le même espace limité.....	127

# Introduction générale

De nos jours, l'intérêt de la société est porté sur la pollution de l'environnement et plus spécialement vers la pollution acoustique, les études des effets des bruits indésirables sur l'homme tiennent une grande part dans les recherches scientifiques dans ce domaine.

Le bruit acoustique a des effets néfastes sur la santé de l'être humain, conformément à la Loi sur la sécurité et la santé au travail (OSHA) de 1970, les niveaux de bruit élevés peuvent nuire aux travailleurs et peuvent conduire à des troubles psychologiques et physiologiques (Cheremisinoff 1977), par conséquent, la stratégie de contrôle du bruit sur les équipements industriels devient importante.

Pour éliminer ou réduire les bruits sonores indésirables à un niveau acceptable, il est nécessaire, dans certaines applications, d'installer un filtre appelé silencieux acoustique. Le développement des filtres et silencieux acoustiques a commencé dans les années 50 par l'étude des modèles théoriques, mais c'est seulement à partir des années 80 qu'il y a eu de grands progrès dans ce domaine. Au début, l'unique condition imposée à ces systèmes était qu'ils soient capables de maintenir le niveau de bruit émis sous une certaine limite. Plus récemment, le concept de la qualité sonore est pris en considération. Il est alors nécessaire d'améliorer les éléments qui permettent le contrôle de l'émission du bruit.

Pour le cas des véhicules qui utilisent des moteurs à combustion internes, le système d'échappement constitue le principal organe générateur de bruit. La dimension des silencieux, utilisés dans ces véhicules, est souvent limitée dans un espace restreint, la maximisation de la performance acoustique de ces filtres devient importante à explorer et à améliorer. Leur volume spatial est souvent contraint par des travaux de maintenance et d'opération. La considération de la

valeur maximale des pertes de transmission du son (STL) sous contraintes d'espace devient importante et essentielle dans l'amélioration de l'acoustique des véhicules.

Beaucoup de recherches sur la conception des silencieux acoustiques ont été largement traitées, cependant, l'étude de la performance acoustique des silencieux ayant une géométrie limitée dans l'espace est rarement soulignée.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude des silencieux des moteurs à combustion internes utilisés comme filtres acoustiques du bruit émis par ces machines. On étudiera, essentiellement, l'influence de la géométrie des silencieux sur leurs performances acoustiques. Ces performances acoustiques sont caractérisées par la perte de transmission du bruit liée à chaque type de silencieux. Les différents modèles de silencieux étudiés sont composés principalement de deux tubes d'acier fixés à l'entrée et à la sortie d'une chambre acoustique de forme cylindrique. Cette dernière a une géométrie limitée dans l'espace alors que celles des petits tubes sont variables. En résumé, la géométrie d'un modèle de silencieux sera optimisée pour obtenir une meilleure atténuation du bruit acoustique émis par les moteurs à combustion internes.

La réduction du bruit acoustique dans les silencieux a fait l'objet de plusieurs recherches scientifiques (Davis D. D. 1954) (Sullivan J.W. 1979) (Thawani P.T. 1983). Les derniers travaux dans ce domaine ont permis le développement de plusieurs outils mathématiques d'optimisation acoustique du bruit. Ces outils permettent d'optimiser la forme géométrique des silencieux dans l'objectif de réduire le bruit acoustique (Becache 2006) (Bilawchuk S. 2003). Le modèle acoustique le plus utilisé s'applique à la théorie classique des filtres électriques. Cette théorie est largement connue sous le nom de méthode de transfert de matrice (MTM) (Gerges S.N.Y. and Jordan R. 2005). Cependant, elle est également appelée la méthode de paramètre à 4 pôles (Munjal M.L. 1997) (Munjal M.L. 1990) (Andesen K.S. 2008). En plus, d'autres techniques de calcul combinant l'utilisation de l'approche de la matrice de transfert et la méthode des éléments finis (MEF) sont utilisées sur l'acoustique des conduits par Craggs en 1989 (Craggs A. 1989). Étant donné que la dimension géométrique des silencieux est souvent limitée pour répondre aux exigences d'exploitation et de maintenance, il existe un intérêt croissant pour la conception de silencieux afin d'optimiser la perte de la transmission acoustique (STL) et cela en utilisant des méthodes d'optimisations géométriques (Yeh L.J. and Chiu M.C 2002). Un modèle de silencieux composé d'une chambre d'expansion est étudié par Bernhard R. J. Il utilisa une méthode d'optimi-

sation géométrique avec des conditions géométriques non limitées (Bernhard R.J. 1986). Pour obtenir une bonne performance acoustique par l'optimisation géométrique des silencieux, de nouveaux modèles mathématiques basés sur des algorithmes numériques sont apparus. Parmi ces algorithmes, on trouve l'Algorithme génétique (AG) et la Simulation de recuit (SR) (Chiu M.C. et Yeh L.J., 2009). Yeh et Chang ont optimisé la géométrie d'un silencieux à double chambre d'expansion qui est utilisé dans un espace restreint. Ils ont utilisé les algorithmes SR et AG et leur étude révèle que ces outils mathématiques sont applicables dans l'analyse du bruit acoustique par optimisation géométrique et présentent une meilleure approche que les techniques d'optimisation à gradient qui nécessitent des conditions aux limites au démarrage (Yeh L. J. et Chang M.C., 2005), (C. Y. Yeh L.J. 2004), (C. Y. Yeh L.J. 2006).

Le premier chapitre de ce travail est consacré à une présentation générale des notions de base de l'acoustique notamment des généralités sur le son et le bruit, les pression et vitesse acoustique et des notions sur les réducteurs de bruits acoustique utilisés dans l'industrie. Par la suite on introduit les différents types de silencieux utilisés pour la réduction du bruit des moteurs à combustion internes ainsi que la définition des différents paramètres acoustiques caractérisant leur performance.

Le deuxième chapitre est consacré à l'atténuation acoustique des silencieux. Nous détaillerons : les méthodes d'optimisation acoustique des silencieux et la méthode de transfert de matrices qui permet de caractériser les différents paramètres acoustiques d'un silencieux ainsi que les mesures expérimentales utilisées pour la caractérisation de l'atténuation des bruits. Par la suite nous présenterons l'analyse de l'optimisation par la méthode des éléments finis et à la fin de ce chapitre on présentera les différentes matrices des principaux modèles des silencieux les plus utilisés pour l'atténuation des bruits émis par les moteurs à combustion interne.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons une brève définition des algorithmes numérique, par la suite nous détaillerons l'optimisation acoustique par les principaux algorithmes numériques notamment l'algorithme génétique le recuit simulé et l'acceptation de seuil.

Dans le quatrième chapitre, nous détaillerons la méthode de modélisation par éléments finis utilisée en acoustique. Nous présenterons les différents types de formulations des problèmes acoustiques ainsi que le mode de fonctionnement de l'outil de modélisation acoustique nommé Comsol Multiphysics utilisé dans ce travail.

Dans le cinquième chapitre, nous présenterons la démarche d'optimisation acoustique effectuée dans ce travail suivi par les résultats de cette optimisation. En premier lieu, les matrices de transfert des silencieux étudiés sont identifiées, par la suite, c'est l'optimisation par algorithme numérique. L'analyse de la performance acoustique des silencieux optimisés, obtenue de la première étape, est performée en utilisant la méthode des éléments finis (MEF). L'outil numérique utilisé pour cette analyse nommée : COMSOL Multiphysics comprend des codes d'analyses acoustiques linéaires en 2D et en 3D.

Enfin, les résultats obtenus sont présentés suivis d'une discussion sur les géométries des silencieux présentant les meilleures réductions des bruits acoustiques.

Ainsi, nous analyserons les résultats obtenus et nous comparons entre les méthodes choisies en présentant les avantages et les limitations de chacune. Enfin, nous terminerons par une conclusion générale qui résume les objectifs de ce travail, les méthodes de travail suivies et enfin les résultats obtenus.

# Chapitre 1

## 1. Recherche bibliographique

### 1.1 Généralités sur le son et le bruit

Nous allons établir dans ce chapitre des notions de base concernant le son et le bruit acoustique, par la suite nous parlerons des paramètres acoustiques qui nous permettent d'évaluer un bruit et en fin nous parlerons des problèmes causés par bruit.

#### 1.1.1 Définition du son

Le son se définit comme étant la conséquence d'un mouvement matériel d'oscillation, une corde qui vibre ou la membrane d'un haut-parleur par exemple. Cette vibration provoque un mouvement des atomes voisins, elle se déplace de proche en proche sous forme d'onde longitudinale de pression. Dans ce mouvement, les atomes vibrent parallèlement à la direction de propagation de l'onde. Le phénomène de propagation d'ondes sonores est donc un transport d'énergie sans transport de matière.

Le son est une onde progressive longitudinale, caractérisée par une fréquence et une intensité.

Grâce à la sensation auditive, les différents sons se distinguent les uns des autres par leurs fréquences ainsi que par leur intensité.

#### 1.1.2 Définition du bruit

Le bruit est un mélange de nombreux et divers sons qui se caractérise par sa fréquence (en *Hertz*) et par son niveau sonore (en décibels, *dB*). L'oreille humaine ne perçoit pas toutes les fréquences. Notre champ auditif varie entre 20 et 20 000 *Hz*. Au-dessous de 20 *Hz*, ce sont les infrasons et au-dessus de 20 000 *Hz* nous trouvons les ultrasons. Les infrasons et les ultrasons ne sont pas perceptibles par l'oreille humaine.

### 1.1.3 Les problèmes causés par le bruit

Pour être entendu, un son nécessite une certaine puissance minimale. L'amplitude de la surpression dans l'oreille, causée par le son, doit dépasser une limite déterminée qui constitue le seuil d'audibilité. Celui-ci varie d'un individu à l'autre et il dépend surtout et essentiellement de la fréquence du son.

La limite inférieure des sons audibles est de fréquence 40 Hz et la limite supérieure se fixe aux environs de 15000 Hz (20000 Hz pour les enfants et 12000 Hz pour les personnes âgées). L'oreille perçoit mal les fréquences graves et cela d'autant plus que la fréquence est plus basse.

À un moment donné, l'audition devient désagréable, puis douloureuse, voire dangereuse : c'est le seuil de douleur qui dépend beaucoup de la fréquence. Au-delà de la limite de douleur, il peut s'ensuivre des cas de surdité plus ou moins localisée dans la gamme des fréquences audibles. Pour comprendre ces phénomènes, la Figure 1.1 donne, en fonction de la fréquence, le seuil d'audibilité et celui de la sensation douloureuse des humains. Ce sont les courbes de Fletcher et Munson qui ont été déterminées par une opération statique effectuée sur un grand nombre de sujets (Fletcher H. and Munson, 1933).

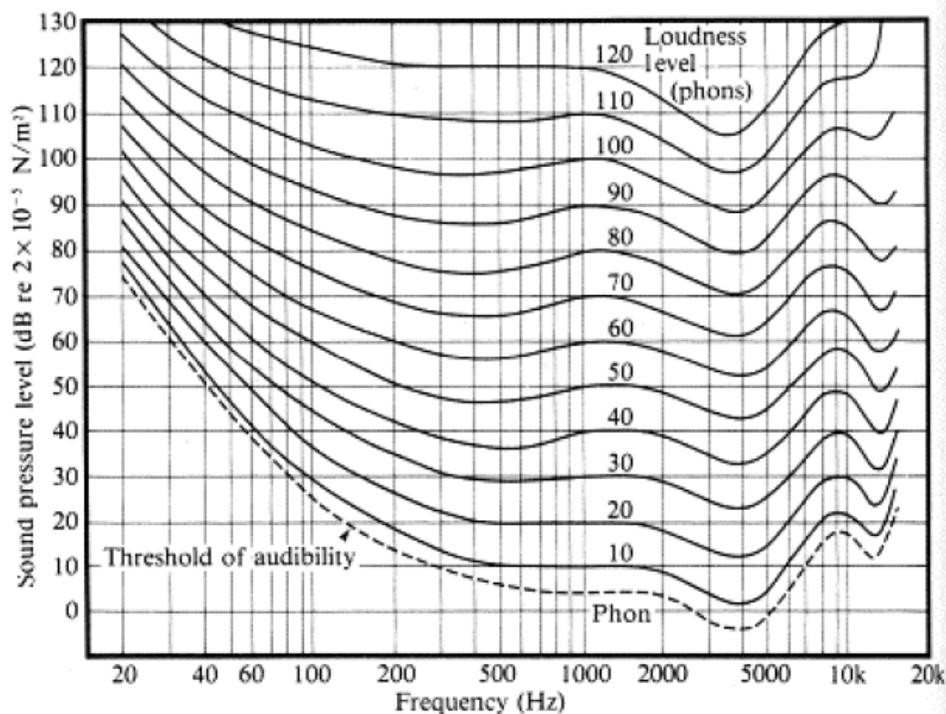


FIGURE 1.1 - Courbe de sensibilité de l'oreille humaine d'après Fletcher et Munson (Fletcher H. and Munson 1933)

## 1.2 Pression et vitesse acoustiques

La pression et la vitesse du son sont les deux principaux paramètres acoustiques qui caractérisent l'écoulement des gaz dans les lignes d'échappements de moteurs à combustion internes. Les pertes de par transmission acoustique son calculer en fonction de ces deux paramètres.

### 1.2.1 Pression acoustique

Les fluides et plus particulièrement les gaz possèdent une certaine élasticité. La condensation ou la dilatation du fluide entraîne obligatoirement une variation de pression. Sur une ligne d'échappement reliée à un moteur de combustion interne qui est installé dans un véhicule automobile, la sortie brutale des gaz ébranle la colonne gazeuse qui s'écoule vers l'air libre. Cet ébranlement répété à intervalles réguliers se traduit dans toute la section transversale de tube par une variation cyclique de la pression du gaz qu'on appelle pression acoustique  $p$  qui s'ajoute algébriquement à la pression nominale du gaz  $p_0$ , d'où l'on définit la pression totale  $p_t$  qui s'écrit comme suit:

$$p_t = p_0 + p \quad (1.1)$$

La variation temporelle de la pression acoustique pulsée par un moteur dans la tubulure d'échappement dépend de plusieurs paramètres (nombre de cylindres, cycle de moteur, volume des cylindres, nombre de tours...). Cette variation périodique est déterminée expérimentalement et présente une grandeur essentielle pour l'étude acoustique des échappements. La fréquence fondamentale associée à cette variation est facile à déterminer dans le cas du moteur à  $n$  cylindres et dont le cycle complet d'un cylindre s'étale sur  $N_c$  tours avec un nombre de tours par minute égale à  $N$ . Cette fréquence, identique à celle d'ouverture des soupapes d'échappement, s'écrit comme suit :

$$f_1 = \frac{nN}{60.N_c} \quad (1.2)$$

## 1.2.2 Vitesse acoustique

C'est la vitesse prise par la particule du gaz suite à la variation de sa pression acoustique. Cette vitesse  $u$  s'ajoute algébriquement à la vitesse moyenne  $u_0$  de la particule. La vitesse totale s'écrit comme suit:

$$u_t = u_0 + u \quad (1.3)$$

## 1.2 Généralités sur les échappements

### 1.2.1 Introduction

Les moteurs à combustion internes émettent divers bruits sonores qui sont plus aux moins nocifs à la santé de l'être humain. Les véhicules automobiles sont parmi les plus grands polluants sonores de l'environnement urbain. Parmi les bruits qu'ils rayonnent, nous citons :

- Le bruit d'entraînement provenant des systèmes d'admission et d'échappement du moteur avec boîte de vitesse et transmission, etc. ;
- Le bruit de roulement provoqué par la déformation et le frottement des lamelles des pneus sur la route. Ce facteur devient prépondérant à partir de 60 *km/h* environ ;
- Le bruit aérodynamique.

Ce qui nous intéresse dans ce travail c'est le bruit d'échappement : En premier lieu le bruit de bouche, Il est dû aux pulsations liées à l'ouverture et la fermeture des soupapes. Les gaz pulsés se retrouvent à la sortie de l'échappement, c'est-à-dire à la bouche. À bas régime, ce bruit est composé des harmoniques d'ordre pair sur les moteurs 4 cylindres. A plus haut régime, la vitesse des gaz dans les silencieux et les canules entraîne des turbulences. Le bruit devient chargé en hautes fréquences. En second lieu le bruit de ferrailage, il peut avoir plusieurs origines. Il fait penser à des chocs entre les tôles et les parois de l'échappement. En troisième lieu le sifflement en accélération, il provient de phénomènes internes de l'échappement. La présence d'interstices entre les cloisons et l'enveloppe peuvent générer des sifflements.

Le rôle du pot d'échappement est donc l'atténuation acoustique maximale du bruit, pour ce faire, le concepteur doit donc placer, sur le parcours des gaz d'échappement, un certain nombre de silencieux connectés entre eux au moyen de tubes. Cet ensemble constituera la ligne d'échappement.

Alors, pour augmenter le confort acoustique, il convient de chercher à utiliser le maximum de volume de silencieux dans l'espace imparti dans les équipements utilisant des moteurs à combustion internes tout en laissant suffisamment de place aux autres composants. Ainsi, des silencieux de différentes formes ont été mis au point dans le but de diminuer les nuances sonores. En effet, on trouve plusieurs filtres dont certains atténueront les bruits par absorption, par réflexion ou bien par interférences.

## 1.2.2 Les différents types de silencieux

Nous distinguons trois types de filtres : les silencieux à absorption, les silencieux à réflexion et enfin les silencieux à interférence. Ils peuvent être utilisés individuellement ou en association selon l'application.

### 1.2.2.1 Silencieux à absorption

Les silencieux à absorption comportent à l'intérieur du corps des produits absorbants tels que la laine de roche (ou bien laine de verre), un exemple de ce type de filtre est donné à la Figure 1.2. Le modèle le plus simple est un conduit droit dont les faces intérieures sont revêtues d'absorbant, et cela sans changement de section intérieure de conduit. L'atténuation acoustique dans ce modèle augmente quand les ondes acoustiques se propagent dans le sens opposé à l'écoulement et diminue quand la propagation est dans le même sens.

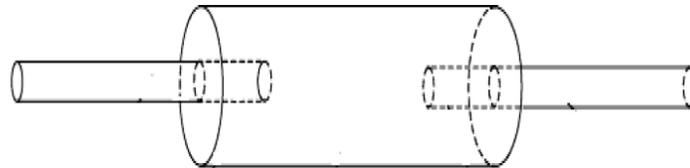


FIGURE 1.2 - Silencieux à absorption (Pascal J. 2009)

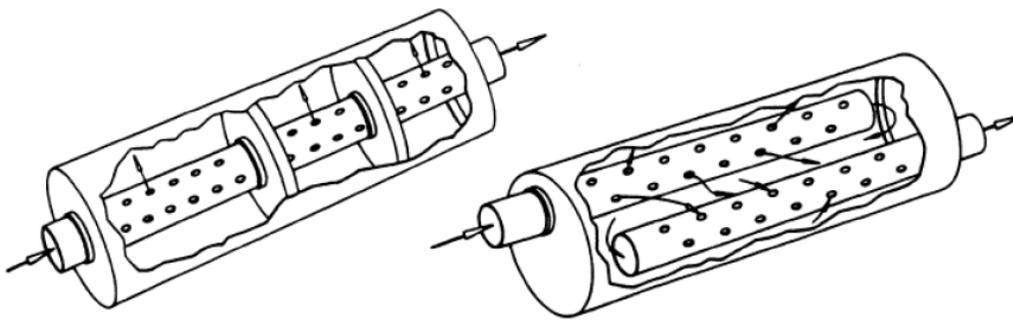
### 1.2.2.2 Silencieux à réflexion

Ce type de silencieux provoque une variation de la pression et de la vitesse de l'écoulement de gaz, et donc la création d'une perte de charge qui freine l'écoulement du bruit. Cette perte réfléchit les ondes vibroacoustiques provoquant leur amortissement et donc la réduction du bruit sonore. La Figure 1.3 présente trois différents types de silencieux à réflexion.

:



a- Chambre avec deux adjonctions



b- Perforation simple

c- Perforation double

FIGURE 1.3 - Silencieux à réflexion (Pascal J. 2009)

### 1.2.2.3 Silencieux à interférence

Le principe consiste à partager le flux de gaz en plusieurs veines porteuses des mêmes vibrations sonores, mais n'effectuant pas la même longueur de trajet. Quand ces veines se rencontrent, elles se détruisent partiellement par interférence. La Figure 1.4 présente un exemple de silencieux à interférence.

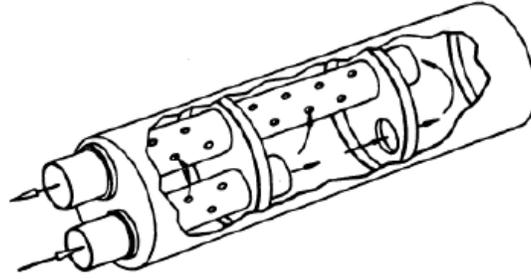


FIGURE 1.4 - Silencieux à interférence (Pascal J. 2009)

### 1.3 Caractérisation des silencieux

Pour caractériser les performances acoustiques d'un silencieux, plusieurs grandeurs sont utilisées comme la perte par transmission (Sound Transmission Loss : STL), l'atténuation acoustique et la perte par insertion. Une définition détaillée de ces grandeurs est donnée dans les paragraphes qui suivent.

#### 1.3.1 Perte par transmission

L'indice de perte de transmission acoustique se définit comme le rapport exprimé en décibel (dB) de la puissance acoustique incidente  $W_{inc}$  à l'entrée de silencieux sur la puissance acoustique transmise par le silencieux dans un conduit infini  $W_{tr}$ , alors cet indice s'écrit comme suit :

$$PTA = 10 \log \frac{W_{inc}}{W_{tr}} = 10 \log \frac{S_I |A_I|^2}{S_T |A_T|^2} \quad (1.4)$$

$A_I$ ,  $A_T$  représentent respectivement l'amplitude de l'onde plane incidente et transmise dans le conduit d'entrée de section  $S_I$  et celle de sortie de section  $S_T$  respectivement.

#### 1.3.2 L'atténuation acoustique

L'atténuation acoustique est la différence de niveaux sonores (en dB) mesurés en deux points de silencieux, en faisant l'hypothèse que l'onde se propage librement dans une seule direction.

L'atténuation est surtout utilisée pour les silencieux à absorption possédant une distribution uniforme de matériaux absorbants dans leurs longueurs.

### 1.3.3 La perte par insertion acoustique

La perte par insertion (Sound Insertion Loss : SIL) se définit par la différence de niveaux sonores (en  $dB$ ) ou de puissance acoustique mesurés en un même emplacement entre une configuration  $b$  où le silencieux est inséré dans la veine d'essai et une configuration  $a$  où il est remplacé par un conduit rectiligne. La Figure 1.5 illustre cette définition.

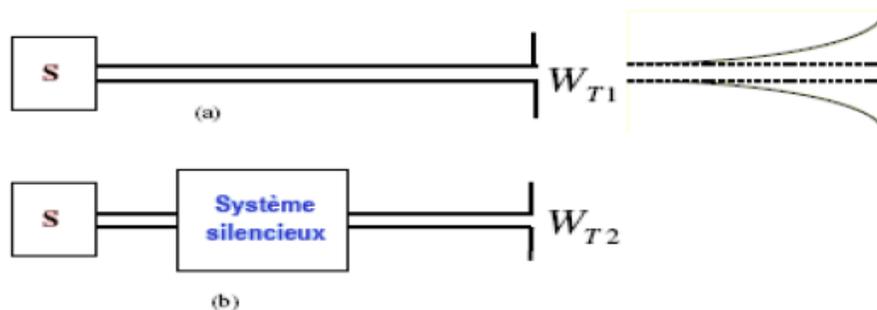


FIGURE 1.5 - Mesure de la perte par insertion (SIL) (Munjal M.L. 1987)

La perte par insertion acoustique est décrite par la formule suivante :

$$AIL = 10 \log \frac{W_{T1}}{W_{T2}} = L_{W_{SANS}} - L_{W_{AVEC}} \quad (1.5)$$

La mesure de la perte par insertion suppose que l'impédance de rayonnement et celle de la source demeurent constantes pour les deux configurations. Cette condition n'est pas strictement respectée en pratique pour l'impédance de la source.

### 1.3.4 Comparaison des paramètres de performance acoustique

Le calcul de la perte par transmission (STL) ne nécessite pas la connaissance de l'impédance de la source ou de rayonnement du système, c'est un paramètre qui est beaucoup plus utilisé dans les bureaux d'études vu la facilité de sa prédiction, par contre pour le mesurer cela impose une ter-

mination anéchoïque du système de réduction acoustique et l'onde acoustique incidente est extraite par des méthodes de mesure d'impédance.

La perte par insertion est le seul critère qui traduit la performance acoustique d'un silencieux envers l'environnement du système. C'est l'indice d'atténuation de la puissance acoustique rayonnée due à l'insertion du silencieux. La mesure de ce paramètre ne représente pas trop de difficulté, son calcul nécessite l'évaluation de l'impédance de la source et de la sortie du système de réduction acoustique.

La mesure de l'atténuation n'impose pas de conditions particulières, sauf des capteurs résistants à des hautes températures. C'est la grandeur la plus facile à mesurer et à calculer. Lorsque le capteur qui mesure ce paramètre est fixé à la sortie du conduit rayonnant, alors l'atténuation indique le comportement du silencieux et sa performance de rayonnement à l'extérieur.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions générales sur l'acoustique et sur les silencieux acoustiques utilisés dans les moteurs à combustion internes. Ainsi, nous avons présenté des définitions du bruit et du son afin de faire une différence entre ces deux notions par la suite on a défini la pression et la vitesse acoustiques qui sont des paramètres importants utilisés pour caractériser le comportement acoustique des silencieux. Par la suite, on a défini les principaux modèles de silencieux existant sur le marché industriel puis on a terminé par la caractérisation acoustique des silencieux effectuée par l'utilisation de plusieurs paramètres comme la perte de transmission, l'atténuation acoustique et la perte par insertion. Ces différentes notions de base nous permettent d'entamer le deuxième chapitre qui est consacré à la théorie de la réduction acoustique des silencieux.

# Chapitre 2

## 2 Atténuation acoustique des silencieux

### Introduction

L'augmentation de plus en plus importante de l'usage de grandes machines industrielles comme les génératrices et les turbines a augmenté l'intérêt à la réduction des bruits acoustiques émis par ces machines et au développement des performances acoustiques des filtres acoustiques notamment les silencieux acoustiques. Ajoutée à cela, la pollution sonore de l'environnement suscite de plus en plus la conscience publique, ainsi, la conception de nouveaux silencieux pour des applications spécifiques a augmenté grandement ces dernières décennies. Aujourd'hui, la plupart des silencieux nécessitent un espace géométrique restreint, cette contrainte d'espace a poussé les recherches à trouver des outils d'optimisation géométrique qui permettent de concevoir des silencieux performants et dont la géométrie est limitée dans leurs espaces de fonctionnement.

Compte tenu de la dimension et le coût de ces équipements, il serait intéressant de prédire leurs paramètres de performance (perte par transmission, perte par insertion...) au moment de la conception avant l'étape de fabrication. Pour ce faire, il faut tenir compte de plusieurs facteurs, à savoir leur géométrie, les propriétés d'absorption du matériau utilisé pour leur fabrication, l'écoulement du fluide à l'intérieur, etc.

### 2.1 Méthode de transfert de matrice (MTM) et mesures expérimentales de la perte de transmission (STL)

Pour pouvoir prédire le comportement acoustique d'un silencieux, il existe actuellement plusieurs méthodes numériques et expérimentales qui aident au développement et à l'amélioration de performance acoustique des silencieux. Dans ce qui suit, nous présentons les notions de base de la

méthode de transfert de matrice qui nous permettent d'élaborer des techniques expérimentales de mesure de la perte de transmission d'un silencieux.

La méthode de matrice de transfert est une méthode de calcul utilisée classiquement pour prédire des propriétés acoustiques des couches homogènes latéralement infinies assemblées en série pour former un empilement. Elle a été introduite par Thomson et elle est souvent utilisée pour la résolution des problèmes géophysiques unidimensionnels, de l'acoustique des océans et des problèmes de propagation d'onde (Thomson W., 1950).

L'équation qui gouverne le domaine acoustique des silencieux est l'équation de l'onde harmonique de la pression acoustique exprimée comme suit :

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.1)$$

$\omega$ ,  $c$ ,  $p$  représentent respectivement la fréquence angulaire, le nombre d'ondes, la vitesse de son, et la pression acoustique. Le système du silencieux étudié est supposé linéaire utilisant un modèle de fréquence valide pour les niveaux de pression sonores qui peuvent atteindre 150 dB et pour des systèmes d'échappements de longueur totale inférieure à 15 m. Mais, des non-linéarités peuvent exister comme dans le cas des éléments perforés à cause des vitesses de vibrations élevées. En plus, il est considéré que la température est constante dans le système et finalement le nombre de Mach est nul alors que les pertes de charge sont considérées dans les conditions aux limites. L'équation de l'onde à une dimension dans un conduit est peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.2)$$

La solution de cette équation peut s'écrire sous la forme exponentielle comme suit :

$$p(x) = p^+ e^{-jkx} + p^- e^{jkx} \quad (2.3)$$

$p(x)$  est la somme de deux ondes planes, une qui voyage dans la direction positive de l'axe  $x$  avec une amplitude égale à  $p^+$  et une onde qui voyage dans le sens négatif de l'axe  $x$  avec une amplitude égale à  $p^-$ . La composition de cette onde plane est montrée dans la Figure suivante :

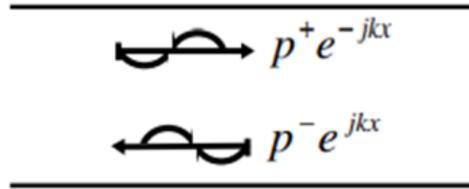


FIGURE 2.1 - Décomposition de l'onde plane dans un conduit (Andesen K.S. 2008)

Par l'utilisation de l'équation d'Euler de mouvement d'un fluide, la vitesse volumique est déterminée par la formule suivante :

$$q(x) = \frac{S}{\rho_0 c} (p^+ e^{-jkx} - p^- e^{jkx}) \quad (2.4)$$

Où  $\rho_0$  et  $S$  représentent respectivement la densité et la surface du conduit. L'équation d'onde change lorsqu'il y a présence d'un flux médian dans un conduit, elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} (1 - M^2) + k^2 p - 2jkM \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Où  $M = \mathbf{u}_0/c$  représente le nombre de Mach. La solution de cette équation est similaire à la précédente à part que le nombre d'ondes change :

$$p(x) = p^+ e^{-jk_+ x} + p^- e^{jk_- x} \quad (2.6)$$

Avec :

$$k_+ = \frac{k}{1+M}, \quad k_- = \frac{k}{1-M}$$

Le flux du fluide étire l'onde acoustique dans la direction du flux alors qu'il comprime celle-ci é dans la direction inverse du flux. Lorsqu'on reste dans la région d'ondes planes de l'entrée et de la sortie d'un silencieux, ce dernier peut être décrit par deux théories sous forme de matrice de dispersion ou une matrice de transfert. La pression acoustique  $p_i$  et la vitesse volumique  $q_i$  à l'entrée du silencieux peuvent être transféré complètement vers la sortie du silencieux ( $p_0, q_0$ ) par l'utilisation de la matrice de transfert  $T$ , qui est constituée de quatre éléments:  $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$ , on peut écrire alors :

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{q}_0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La théorie de quadripôle considère un système linéaire non variable dans le temps avec une continuité de la pression acoustique et de la vitesse volumique à travers la transition. L'avantage de l'utilisation de la matrice de transfert pour décrire un silencieux est que l'on peut connecter plusieurs silencieux pour former un silencieux global en multipliant les matrices de chaque sous-élément.

Pour extraire la matrice de transfert, l'onde plane est appliquée à l'entrée du silencieux comme illustré à la Figure 2.2 et selon les conditions de radiation une impédance acoustique est appliquée sur l'entrée et sur la sortie du silencieux. Aussi, on considère que le son, dans le conduit, est à une dimension lorsque :

$$f < \frac{1.84c}{\pi D} \quad (2.8)$$

Où  $D$  et  $f$  sont respectivement le diamètre du conduit et la fréquence.

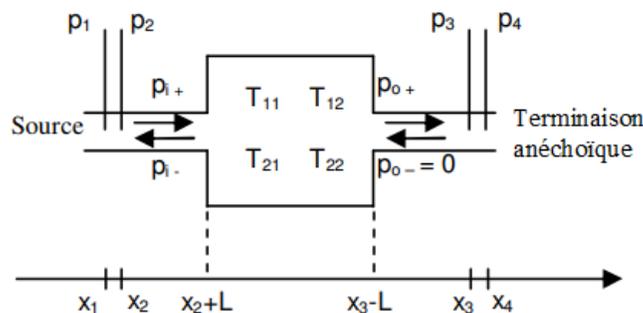


FIGURE 2.2 - Paramètres utilisés pour l'extraction de la matrice de transfert (Andesen K.S. 2008)

Lorsque l'équation du système est résolue, la pression acoustique au niveau de deux points à l'entrée ( $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ ) et à la sortie ( $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ ) du silencieux est extraite pour d'autres calculs, ou  $\mathbf{p}_2$  et  $\mathbf{p}_3$  est séparé par une distance numérique  $L$ , on a alors :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{i+} \cdot e^{-jkx_1} + p_{i-} \cdot e^{jkx_1} \\ p_2 &= p_{i+} \cdot e^{-jkx_2} + p_{i-} \cdot e^{jkx_2} \\ p_3 &= p_{0+} \cdot e^{-jkx_3} + p_{0-} \cdot e^{jkx_3} \\ p_4 &= p_{0+} \cdot e^{-jkx_4} + p_{0-} \cdot e^{jkx_4} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les pressions d'onde de gauche et de droite à l'entrée ( $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ ) et à la sortie ( $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ ) du silencieux sont décrites comme suit :

$$\begin{aligned} p_{i+} &= \frac{j(p_1 \cdot e^{jkx_2} - p_2 \cdot e^{jkx_1})}{2\text{sink}(x_1 - x_2)} \\ p_{0+} &= \frac{j(p_3 \cdot e^{jkx_4} - p_4 \cdot e^{jkx_3})}{2\text{sink}(x_3 - x_4)} \\ p_{i-} &= \frac{j(p_2 \cdot e^{-jkx_1} - p_1 \cdot e^{-jkx_2})}{2\text{sink}(x_1 - x_2)} \\ p_{0-} &= \frac{j(p_4 \cdot e^{-jkx_3} - p_3 \cdot e^{-jkx_4})}{2\text{sink}(x_3 - x_4)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les pressions acoustiques ( $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_0$ ) et vitesses volumiques ( $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_0$ ) à la surface de l'entrée et de la sortie du silencieux sont décrites comme suit :

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i+} \cdot e^{-jk(x_2+L)} + p_{i-} \cdot e^{jk(x_2+L)} \\ q_i &= S \frac{p_{i+} \cdot e^{-jk(x_2+L)} + p_{i-} \cdot e^{jk(x_2+L)}}{\rho c} \\ p_0 &= p_{0+} \cdot e^{-jk(x_3-L)} + p_{0-} \cdot e^{jk(x_3-L)} \\ q_0 &= S \frac{p_{0+} \cdot e^{-jk(x_3-L)} + p_{0-} \cdot e^{jk(x_3-L)}}{\rho c} \end{aligned} \quad (2.11)$$

La matrice de transfert est symétrique

$$T_{11} = T_{22} \quad (2.12)$$

La réciprocité exige que le déterminant de la matrice soit égal à un c.-à-d. :

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1 \quad (2.13)$$

Selon les propriétés de la matrice de transferts mentionnés ci-dessus. Les quatre éléments de la matrice de transfert deviennent :

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{p_0 q_0 + p_i q_i}{p_i q_0 + p_0 q_i} \\ T_{22} &= \frac{p_0 q_0 + p_i q_i}{p_i q_0 + p_0 q_i} \\ T_{12} &= \frac{p_i^2 - p_0^2}{p_i q_0 + p_0 q_i} \\ T_{21} &= \frac{q_i^2 - q_0^2}{p_i q_0 + p_0 q_i} \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'évaluation de la performance acoustique du silencieux peut être évaluée soit par l'utilisation de perte de transmission acoustique ou la perte par insertion acoustique, alors que pour évaluer la performance du débit de fluide on utilise la perte de pression, appelée aussi la contre-pression.

La perte de transmission dépend uniquement du silencieux et pas de la source sonore (l'entrée et la sortie et l'impédance), elle considérée comme le meilleur paramètre à utiliser comparant les différentes méthodes et techniques de conception. La perte de transmission en décibel est définie comme la différence entre la puissance acoustique incidente et la puissance acoustique transmise, considérant absence de réflexion à la sorte du silencieux la perte de transmission est décrite comme suit :

$$STL = 10 \log \left( \frac{|p_{i+}|^2}{|p_{0+}|^2} \right) \quad (2.15)$$

La perte de transmission peut être calculée on utilisant les éléments de la matrice de transfert :

$$STL = 10 \log \left( \frac{1}{4} \left| T_{11} + T_{12} \frac{S}{\rho c} + T_{21} \frac{\rho c}{S} + T_{22} \right|^2 \right) \quad (2.161)$$

La perte par insertion acoustique (SIL) dépend de la source sonore et elle est utilisée généralement pour les solutions individuelle, elle est définie comme la différence entre la puissance sonore de radiation, dans le système de réduction de bruit sans le silencieux, et la puissance sonore de radiation du silencieux. La perte par transmission représente le paramètre dynamique du gaz, elle dépend seulement du silencieux et elle est définie comme la différence entre la pression statique avant et après le silencieux.

### 2.1.1 Méthodes expérimentales

Pour valider la performance acoustique des silencieux, différentes méthodes expérimentales sont établies dans ce domaine, nous présentant dans ce qui suit les deux méthodes expérimentales les plus appliquées sur les silencieux : La première est nommée « méthode des trois points » et la deuxième méthode est nommée « la méthode des deux microphones » initiée par (Munjal M.L. 1987) et améliorée par (Abom M. 1991). La recherche expérimentale est d'une utilité primordiale pour justifier et qualifier la pertinence des modèles et les théories employées pour l'étude de la performance acoustique des silencieux. Le développement théorique ou numérique d'un modèle acoustique est à la base de plusieurs hypothèses, les conditions et les caractéristiques réelles du mécanisme mises en jeu et du milieu sont simplifiées. Il est possible de constater que les hypothèses pourraient avoir des origines différentes, telles que : les hypothèses simplificatrices, la négligence de certains paramètres due aux conditions expérimentales, aux erreurs de calcul ou aux erreurs de mesure.

#### 2.1.1.1 Méthode des trois-points

L'expression « trois points » revient au fait qu'on fixe trois points de mesure de pression sonore, deux points en amont de la structure et un point en aval. Cette méthode est purement expérimentale et nécessite un dispositif expérimental approprié. Comme montré à la Figure 2.3, la pression acoustique incidente  $p_i$  est donnée en fonction des pressions  $p_1, p_2$  mesurées en amont respectivement aux points 1 et 2 par :

$$p_i = \frac{p_1 - p_2 e^{-ikz_{12}}}{1 - e^{-ikz_{12}}} \quad (2.17)$$

Où  $z_{12} = z_2 - z_1$ ,  $k$  représentent respectivement la distance séparant les deux microphones en amont et le nombre d'ondes. Le coefficient de la perte de transmission acoustique STL est alors exprimé en fonction de la pression incidente  $p_i$  et la pression  $p_3$  par la formule suivante:

$$STL = 20 \log \left( \frac{p_i}{p_3} \right) \quad (2.18)$$

L'application de la méthode des trois points est utilisée principalement pour étudier la performance d'absorption acoustique des silencieux dans les systèmes d'échappements installés dans les moteurs à combustion internes.



FIGURE 2.3 - Les points de mesure pour la méthode des trois points (Abom M. 1991)

### 2.1.1.2 Méthode des deux microphones

On considère un silencieux inséré dans un conduit excité de part et d'autre par deux ondes acoustiques planes avec une incidence oblique comme illustrée dans la voir Figure 2.4. La réponse du silencieux à ces excitations est complètement déterminée par sa matrice de diffusion  $[D]_{2 \times 2}$  qui représente les relations linéaires entre les ondes entrantes  $\{P_1^+, P_2^-\}$ , et les ondes sortantes  $\{P_1^-, P_2^+\}$  de celui-ci (Abom M., 1991):

$$\begin{Bmatrix} P_1^- \\ P_2^+ \end{Bmatrix}_2 = [D]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} P_1^+ \\ P_2^- \end{Bmatrix}_2 \quad (2.19)$$

Avec :

$$[D]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$D_{11}$  et  $D_{21}$  représentent respectivement le coefficient de réflexion dans le côté 1 du silencieux, et le coefficient de transmission du côté 1 vers 2 dans le cas où  $\mathbf{P}_2^- = \mathbf{0}$ .

$D_{22}$  et  $D_{12}$  représentent respectivement le coefficient de réflexion dans le côté 2, et le coefficient de transmission du côté 2 vers 1 dans le cas où  $\mathbf{P}_1^+ = \mathbf{0}$ .

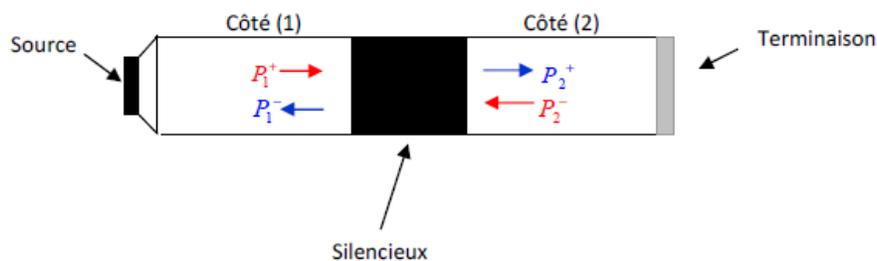


FIGURE 2.4 - Ondes acoustiques dans le silencieux (Abom M. 1991)

La technique expérimentale mise au point dans cette méthode consiste à mesurer la matrice de diffusion  $[D]_{2 \times 2}$  du silencieux et en déduire ensuite la perte de transmission acoustique STL (dB) et/ou l'absorption acoustique du silencieux  $\alpha$ . Le coefficient d'absorption acoustique du silencieux est donné par la formule suivante :

$$\alpha = 1 - |D_{11}|^2 \quad (2.20)$$

Et la perte par transmission acoustique (appelé aussi atténuation ou isolation acoustique) s'écrit comme suit :

$$PTA = 10 \cdot \log(1/|D_{11}|^2) \quad (2.21)$$

Cette méthode de mesure est basée sur la mesure des pressions incidentes et réfléchies  $\mathbf{P}^\pm$  de part et d'autre de l'équipement à caractériser. Pour avoir autant d'équations que d'inconnues on répète l'expérience deux fois et pour obtenir un système inversible on change les conditions acoustiques externes d'une mesure à l'autre, ces conditions externes sont obtenues en utilisant la méthode de

permutation de source (Abom M. 1991). Cette dernière technique consiste à mesurer la matrice de diffusion  $[D]_{2 \times 2}$  d'un élément à caractériser, elle est basée sur la mesure de la pression acoustique sur quatre positions différentes de part et d'autre du tronçon test du silencieux et cela pour deux conditions acoustiques : pour la première mesure la source du côté gauche est activée, celle du côté droit est désactivée, les pressions acoustiques donnent :

$$\begin{Bmatrix} P_1^{-}(1) \\ P_2^{+}(1) \end{Bmatrix}_2 = [D]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} P_1^{+}(1) \\ P_2^{-}(1) \end{Bmatrix}_2 \quad (2.22)$$

La deuxième mesure : la source du côté gauche est désactivée, celle du côté droit est activée, cela donne les pressions acoustiques suivantes :

$$\begin{Bmatrix} P_1^{-}(2) \\ P_2^{+}(2) \end{Bmatrix}_2 = [D]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} P_1^{+}(2) \\ P_2^{-}(2) \end{Bmatrix}_2 \quad (2.23)$$

La matrice de diffusion est donc déduite des équations (2.9) et (2.10) et elle s'écrit comme suit :

$$[D]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} P_1^{-}(1) & P_1^{-}(2) \\ P_2^{+}(1) & P_2^{+}(2) \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} P_1^{+}(1) & P_1^{+}(2) \\ P_2^{-}(1) & P_2^{-}(2) \end{bmatrix}_{2 \times 2}^{-1} \quad (2.24)$$

La mesure de la pression acoustique dans quatre positions différentes de part et d'autre du tronçon test du silencieux permet de séparer l'onde incidente  $P^+(\mathbf{z}_1^{am})$  et réfléchie  $P^-(\mathbf{z}_1^{am})$  en amont et en aval du tronçon test. L'utilisation de quatre microphones de chaque côté au lieu de deux microphones (méthode classique) permet de séparer les ondes incidentes et réfléchies dans une large bande de fréquences et avec une meilleure précision. Les pressions incidentes et réfléchies sont déterminées avec la méthode de moindre carrée basée sur l'utilisation de plus d'équations que d'inconnus pour augmenter la précision (Abom M. 1991), alors l'expression des pressions acoustiques des ondes incidentes et réfléchies s'exprime comme suit:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P^+(z_1^{am}) \\ P^-(z_1^{am}) \end{Bmatrix} &= [[ [Md^{am}]_{2 \times 4} [Md^{am}]_{2 \times 4}^T ]^{-1} \cdot [Md^{am}]_{2 \times 4}^* ]_{2 \times 4} \cdot \{P(z_i^{am})\}_4 \\ [Md^{am}]_{2 \times 4}^T &= \begin{bmatrix} 1 & e^{jkd_1} & e^{jkd_2} & e^{jkd_3} \\ 1 & e^{-jkd_1} & e^{-jkd_2} & e^{-jkd_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$P(z_i^{am})$ ,  $d_{1,2,3}$  représentent respectivement les pressions acoustiques mesurées par les microphones 1 à 4, les distances qui séparent le microphone 1 des autres microphones. Les signes  $T$  et  $*$  sont respectivement le transposé et le conjugué d'une matrice. Les pressions incidentes et réfléchies en aval du tronçon test sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P^+(z_1^{av}) \\ P^-(z_1^{av}) \end{Bmatrix} &= [[ [Md^{av}]_{2 \times 4} [Md^{av}]_{2 \times 4}^T ]^{-1} \cdot [Md^{av}]_{2 \times 4} ]_{2 \times 4} \cdot \{P(z_i^{av})\}_4 \\ [Md^{av}]_{2 \times 4}^T &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-jkd_1} & e^{-jkd_2} & e^{-jkd_3} \\ 1 & e^{jkd_1} & e^{jkd_2} & e^{jkd_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$P(z_i^{av})$  sont les pressions acoustiques mesurées par les microphones 5, 6, 7 et 8.  $d_{1,2,3}$  sont les distances qui séparent le microphone 5 et les microphones 6, 7 et 8.

## 2.2 Optimisation de la perte de transmission par la méthode des éléments finis

L'étude et l'analyse de propagation des ondes sonores dans les milieux solides ont pris au cours de ces dernières années un essor considérable en raison du développement de techniques de plus en plus numérisées (grâce à l'augmentation de possibilités de calcul et de traitement de signal) et des besoins variés dans différents domaines notamment le domaine acoustique. Parmi ces méthodes on nomme la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontières.

### 2.2.1 Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis a été initialement utilisée pour le calcul d'un champ acoustique intérieur seulement. Ceci est dû au fait qu'une étude externe ou interne exige une modélisation d'un domaine large, mais aussi une maîtrise des conditions aux limites.

Pour le calcul des pertes de transmission STL, la région désirée est divisée en une grille de nœuds et d'éléments. La théorie fondamentale derrière la MEF montre que chaque élément réagit réciproquement et seulement avec l'élément directement adjacent à lui.

La méthode des éléments finis possède des avantages qui n'existent pas dans les autres méthodes numériques à savoir :

- C'est une méthode générale : pas de limitation pour le respect de la géométrie des éléments du silencieux ou du milieu ;
- Les conditions aux limites en termes de pression et de vitesse acoustiques peuvent être définies à n'importe quelle région du système étudié ;
- Selon qu'on veut une solution très proche de la solution exacte, il suffit d'affiner la subdivision du domaine.

### **2.2.2 Méthode des éléments finis de frontière (MEFF)**

La Méthode des éléments finis de frontière peut être utilisée pour effectuer des calculs à un domaine intérieur, extérieur, ou les deux simultanément, comme montrée à la Figure 2.5. Contrairement à la Méthode des éléments finis, la Méthode des éléments finis de frontière exige seulement la connaissance du périmètre du silencieux qui sera par la suite divisé en nœuds et éléments puis les calculs sont exécutés.

Aussi contrairement à la Méthode des éléments finis, chaque nœud dans le maillage par la Méthode des éléments finis de frontière est entièrement lié avec tous les autres nœuds. De ce fait, le temps de calcul est augmenté d'autant plus que le nombre de nœuds augmente. C'est pour cette raison que la Méthode des éléments finis est préférable pour les calculs du coefficient de perte de transmission STL.

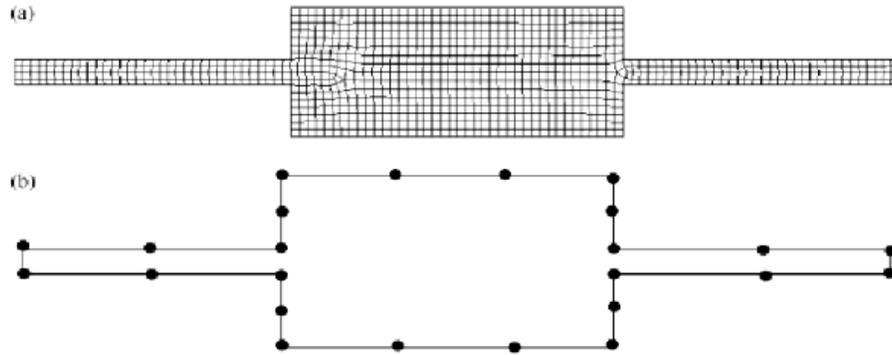


FIGURE 2.5 – Méthodes numériques : a- Méthode des éléments finis, b- méthode des éléments finis de frontière  
(Pascal J. 2009)

## 2.3 Matrices de transfert de différents modèles de silencieux

La méthode des matrices de transfert est utilisée pour l'analyse des systèmes unidimensionnels connectés en cascade, comme les filtres acoustiques ou encore les silencieux. Le fonctionnement d'un silencieux peut être déterminé facilement en déterminant les quatre pôles de la matrice de transfert du système complet. Ces quatre pôles sont obtenus par la multiplication successive des matrices qui constituent les éléments du silencieux.

La construction de ces matrices élémentaires est présentée d'une façon détaillée dans ce qui suit.

Dans la pratique, il existe une gamme d'éléments couplés dans un silencieux. Chacun de ces éléments est caractérisé par sa propre matrice qui dépend uniquement de la géométrie considérée et du flux qui la traverse. Il faut alors modéliser chaque élément et par la suite associer tous les éléments pour obtenir les caractéristiques acoustiques du silencieux étudié.

### 2.3.1 Équations générales de la mécanique des fluides

Les équations de la mécanique des fluides traduisent l'équilibre d'un fluide en mouvement, vérifiant les principes fondamentaux de la mécanique (conservation de masse, conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie).

### 2.3.1.1 Principe de la conservation de masse

Le principe de la conservation de masse traduit le fait qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière au sein d'un fluide en mouvement. Dans ce cas l'écoulement est dit conservatif et il d'écrit comme suit :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \leftrightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \oint \rho \vec{u} \vec{n} dS = 0 \quad (2.27)$$

### 2.3.1.2 Principe de conservation de quantité de mouvement

Pour un volume  $\delta\Omega$  de fluide de masse volumique  $\rho$  évoluant à la vitesse  $\vec{u}$ , la quantité de mouvement correspondante s'exprime par  $\rho\delta\Omega\vec{u}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{u} \rho d\Omega + \oint \vec{u} \cdot (\rho \vec{u} \vec{n}) dS = \oint \vec{T} ds + \oint \rho \vec{F} d\Omega \quad (2.28)$$

### 2.3.1.3 Principe de conservation de l'énergie

Le principe de conservation de l'énergie traduit le fait que la dérivée particulière de l'énergie fluide est égale à la somme de la puissance de forces extérieures et de la puissance calorifique échangée par ce fluide avec le milieu extérieur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \oint \rho \left( \frac{u^2}{2} + gz + \mu \right) d\Omega + \oint \left( \frac{u^2}{2} + gz + \mu \right) (\rho \vec{u} \vec{n}) dS \\ = \oint \vec{T} \vec{u} ds + \oint \rho \vec{F} d\Omega + \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.3.1.4 Hypothèses prises en considération

Tout au long de cette étude, nous nous plaçons dans le cas de la théorie d'onde plane. C'est-à-dire qu'à un instant  $t$  donné, la pression et la vitesse acoustiques restent inchangées en tout point d'une même section  $S$ . Nous supposons également que les parois sont rigides, ce qui implique que la section des tubes reste constante.

D'un point de vue thermique, nous considérons que le gaz qui traverse le silencieux est parfait et que son évolution est isotherme et isentropique.

## 2.3.2 Équation de propagation d'onde acoustique dans les filtres réactifs

### 2.3.2.1 Cas d'un tube

Nous considérons un tube uniforme de section  $S$  traversé par un fluide (gaz), comme illustré à la Figure 2.6. Les équations du problème s'écrivent comme suit :

#### a- Équation de la conservation de masse

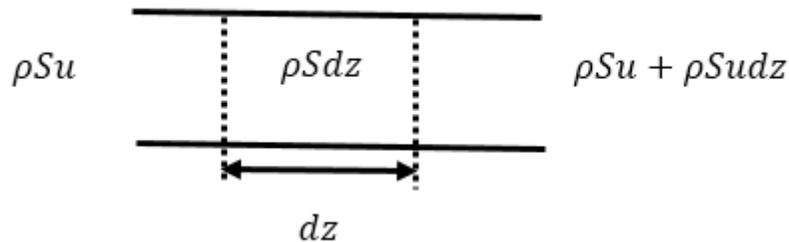


FIGURE 2.6 - Bilan de matière dans un tube (Munjal M.L. 1987)

L'équation de la conservation de masse s'écrit :

$$\rho Su - (\rho Su + \rho u S dz) = \rho S dz \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho \partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

#### b- Équation de conservation de la quantité de mouvement

Les équations de la conservation de masse s'écrivent comme suit :

$$PS - [PS + (PS)dz] + \rho Su^2 - [\rho Su^2 + (\rho Su^2)dz] = \rho S u dz \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \rho S u}{\partial t} + S \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial (\rho S u^2)}{\partial z} = 0 \quad (2.33)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} + u \rho \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.34)$$

### c- Conservation de l'entropie (Annexe)

L'équation de la conservation de l'entropie s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P_0 + P}{\rho_0 + \rho} \approx \frac{\gamma P_0}{\rho_0} = a_0^2 \quad (2.35)$$

### d- L'équation de propagation de l'onde

Les deux grandeurs caractéristiques qui définissent une onde acoustique sont la pression et la vitesse acoustiques. L'équation de propagation de l'onde sera en fonction de ces deux grandeurs. En combinant les équations précédentes (2.31), (2.34) et (2.35), nous obtenons l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 2M a_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial z} + a_0^2 (M^2 - 1) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (2.36)$$

$M = \frac{u_0}{a_0}$  est le nombre de MACH

#### 2.3.2.2 Cas d'un filtre un à seul tube perforé

La Figure 2.7 illustre le cas d'un silencieux doté d'un tube à perforation simple (Jayaraman K. 1981), (Sullivan J.W. 1979).

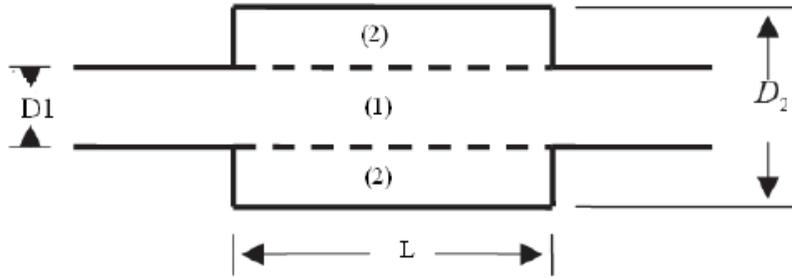


FIGURE 2.7 - Perforation simple (Sullivan J.W. 1979)]

On considère  $V_h$ ,  $n_h$ ,  $r_h$  respectivement la vitesse radiale de la particule à travers une perforation, le nombre de trous et le rayon d'une perforation

### Équation de conservation de la masse

L'équation de la conservation de la masse pour un silencieux à perforation dépend des zones 1 ou 2 illustrées dans la Figure 2.7.

#### Région 1

Le bilan de matière pour le cas d'un tube perforé est montré à la Figure 2.6.

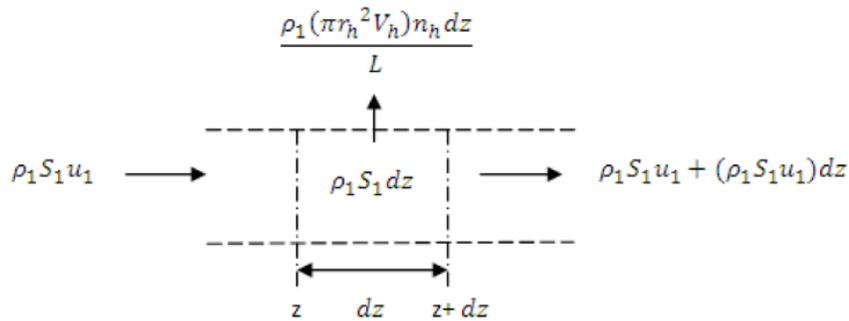


FIGURE 2.4 - Bilan matière dans un tube perforé (Munjal M.L. 1987)

Le bilan de matière s'écrit alors comme suit :

$$\rho_1 S_1 u_1 - [\rho_1 S_1 u_1 + (\rho_1 S_1 u_1) dz] - \frac{(\rho_1 (\pi r_h^2 V_h) n_h dz)}{L} = \rho_1 S_1 dz \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{(\rho_1 \pi r_h^2 V_h) n_h}{S_1 L} = 0 \quad (2.38)$$

On définit la porosité  $\zeta$  par la relation suivante :

$$\zeta = \frac{\text{surface perforée}}{\text{surface latérale totale}} = \frac{n_h r_h^2}{L d_1} \quad (2.39)$$

On a alors :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{4\zeta \rho_1 V_h}{d_1} = 0 \quad (2.40)$$

### Région 2

Le bilan de matière dans la deuxième région s'écrit en remplaçant  $V_h$  par  $-V_h$  et  $S_1$  par  $(S_2 - S_1)$ . On aura alors :

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{4d_1 \zeta \rho_2 V_h}{d_2^2 - d_1^2} = 0 \quad (2.41)$$

### Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement c'est la même que pour les éléments tubulaires.

On pourra écrire alors :

#### a- L'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + u_{j0} \frac{\partial \rho_j}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial z} + a_j V_h = 0 \quad (2.42)$$

$$a_1 = \rho_0 \frac{4\zeta}{d_1}$$

$$a_2 = -\rho_0 \frac{4d_1\zeta}{d_2^2 - d_1^2}$$

**b- L'équation de conservation de la quantité de mouvement**

L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un silencieux à perforation simple s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial P_j}{\partial z} + u_{j_0} \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial z} = 0 \tag{2.43}$$

**c- Évolution isentropique et isotherme (Annexe)**

Le système de réduction de bruit est considéré isentropique et isotherme pour un silencieux à perforation simple et son évolution est caractérisée par la formule suivant :

$$\frac{P_j}{\rho_j} = a_0^2 \tag{2.44}$$

L'équation de propagation d'onde pour un filtre à un seul tube perforé est la combinaison de (2.42), (2.43) et (2.44) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0^2} \left( \frac{\partial^2 P_j}{\partial t^2} \right) + \frac{2M_j}{a_0} \left( \frac{\partial^2 P_j}{\partial t \partial z} \right) + (M_j^2 - 1) \left( \frac{\partial^2 P_j}{\partial z^2} \right) - a_j \left( \frac{\partial V_h}{\partial t} + M_j a_0 \frac{\partial V_h}{\partial z} \right) \\ = 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.45}$$

**2.3.2.3 Cas d'un filtre à perforation double**

La Figure 2.7 illustre le cas d'un silencieux à perforation double.

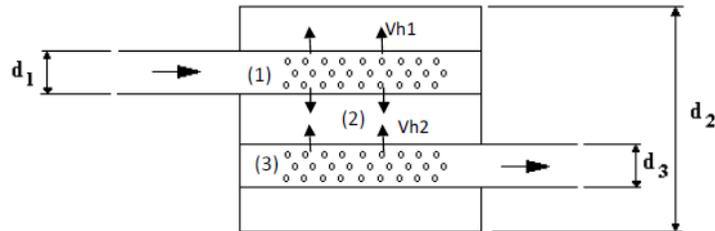


FIGURE 2.5 - Perforation double (Munjal M.L. 1987)

Nous nous basons sur la démarche de calcul établie précédemment, les équations de conservation de masse et les équations de conservation de quantité de mouvement sont calculées pour chaque partie du silencieux.

### Équation de conservation de la masse

Le silencieux à perforation double est caractérisé par trois régions distinctes, les équations de conservation de masse de chaque région sont comme suit :

#### Région 1

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_{10} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + b_1 V_{h1} = 0 \quad (2.46)$$

#### Région 2

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + u_{20} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial z} + b_2 V_{h1} + b_3 V_{h2} = 0 \quad (2.47)$$

#### Région 3

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + u_{20} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial z} + b_2 V_{h1} + b_3 V_{h2} = 0 \quad (2.48)$$

Avec :

$$\begin{aligned} b_1 &= \rho_0 \frac{4\zeta_1}{d_1} \\ b_2 &= -\rho_0 \frac{4d_1\zeta_1}{d_2^2 - d_1^2 - d_3^2} \\ b_3 &= \rho_0 \frac{4d_3\zeta_1}{d_2^2 - d_1^2 - d_3^2} \\ b_4 &= -\rho_0 \frac{4\zeta_2}{d_3} \end{aligned} \quad (2.49)$$

### Équation de conservation de la quantité de mouvement

Les équations de conservation de quantité de mouvement de chaque région sont décrites par la formule suivante :

*Région j*

$$\rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial P_j}{\partial z} + u_{j_0} \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

### 2.3.3 Mise en équation des variables acoustiques et aéroacoustiques pour le cas d'un conduit simple

Nous avons déjà établi l'équation de propagation d'ondes dans un élément tubulaire, en appliquant la méthode de séparation des variables et en admettant que la variation temporelle soit sinusoïdale, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 2Ma_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial z} + a_0^2 (M^2 - 1) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (2.50)$$

En appliquant la méthode de séparation des variables et en admettant que la variation temporelle soit sinusoïdale, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(z, t) &= \left[ C_1 \exp\left(-j \frac{k_0 z}{1+M}\right) + C_2 \exp\left(j \frac{k_0 z}{1+M}\right) \right] \exp(j\omega t) \\ &= A(z, t) + B(z, t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Avec :  $k_0 = \frac{\omega}{a_0}$  le nombre d'ondes

La vitesse acoustique satisfait aussi la même équation, c'est-à-dire que :

$$u(z, t) = \left[ C_3 \exp\left(-j \frac{k_0 z}{1+M}\right) + C_4 \exp\left(j \frac{k_0 z}{1+M}\right) \right] \exp(j\omega t) \quad (2.52)$$

Si on substitue les expressions de  $\mathbf{P}(z, t)$  et  $\mathbf{u}(z, t)$  dans l'équation de la quantité de mouvement (2.34), nous aurons :

$$C_3 = \frac{C_1}{\rho_0 a_0}, C_4 = -\frac{C_2}{\rho_0 a_0} \quad (2.53)$$

D'où :

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \frac{1}{\rho_0 a_0} \left[ C_1 \exp\left(-j \frac{k_0 z}{1+M}\right) + C_2 \exp\left(j \frac{k_0 z}{1+M}\right) \right] \exp(j\omega t) \\ &= \frac{A(z, t) - B(z, t)}{\rho_0 a_0} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Le débit massique s'écrit :

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \oint \rho_0 u(z, t) ds \\ &= \frac{s}{a_0} \left[ C_1 \exp\left(-j \frac{k_0 z}{1+M}\right) + C_2 \exp\left(j \frac{k_0 z}{1+M}\right) \right] \exp(j\omega t) \\ &= s \frac{A(z, t) - B(z, t)}{a_0} = \frac{1}{Y_0} A(z, t) - B(z, t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Avec :  $Y_0 = \frac{a_0}{s}$  est l'impédance acoustique caractéristique du tube

**Remarque**

L'indice  $\mathbf{0}$  dans les expressions de  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{k}$  indique la nature non visqueuse du milieu.

D'après (Munjaj M.L., 1987), la relation qui relie les variables acoustiques et les variables aéroacoustiques est :

$$\begin{bmatrix} P_c \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & MY_0 \\ \frac{M}{Y_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Ou

$$\begin{cases} P_c = A_c + B_c \\ v_c = \frac{1}{Y_0} (A_c - B_c) \end{cases} \quad (2.57)$$

Avec :

$$\begin{cases} Ac = A(1 + M) \\ Bc = \frac{1}{Y_0}(1 - M) \end{cases} \quad (2.58)$$

### 2.3.4 Matrice de transfert et Perte par transmission pour les filtres non perforés

#### 2.3.4.1 Impédance spécifique " $\xi(x)$ "

L'impédance spécifique est définie comme étant le rapport de la pression au débit massique acoustique. En reprenant les expressions (2.51) et (2.54), on aura :

$$\xi(z) = \frac{p(z)}{v(z)} = Y_0 \frac{C_1 \exp\left(-j \frac{k_0 z}{1+M}\right) + C_2 \exp\left(j \frac{k_0 z}{1+M}\right)}{C_1 \exp\left(-j \frac{k_0 z}{1+M}\right) - C_2 \exp\left(j \frac{k_0 z}{1-M}\right)} \quad (2.59)$$

Cette expression représente l'impédance équivalente de tout le système situé en aval de chaque point de silencieux comme illustrée à la Figure 2.8 (a).

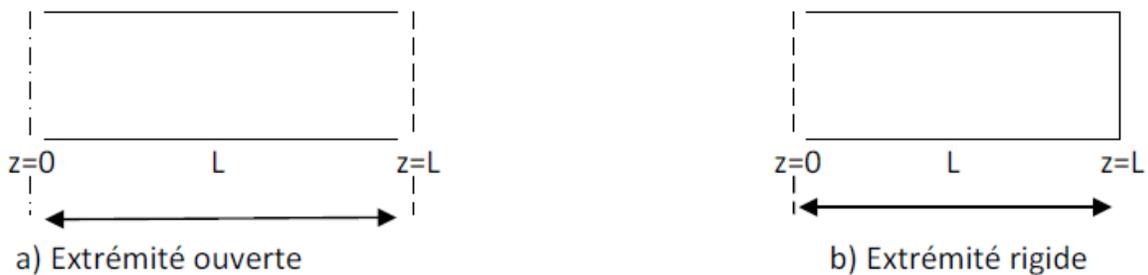


FIGURE 2.6 - Conduit uniforme (Pascal J. 2009)

À partir de la relation (2.59), on définit les impédances pour  $z=0$  et  $z=L$ . On aura les relations suivantes :

$$\xi(0) = \frac{\xi(l)\cos(k_{c0}L) + j.Y_0\sin(k_{c0}L)}{J.\xi(l)\sin\frac{(k_{c0}L)}{Y_0} + j.\cos(k_{c0}L)} \quad (2.60)$$

$$\xi(L) = \frac{\xi(0)\cos(k_{c0}L) + j.Y_0\sin(k_{c0}L)}{-J.\xi(0)\sin\frac{(k_{c0}L)}{Y_0} + j.\cos(k_{c0}L)} \quad (2.61)$$

Avec :

$$k_{c0} = \frac{K_0}{1 - M^2} \quad (2.62)$$

Si l'extrémité  $z=L$  est rigide, comme illustré à la Figure 2.8 (b), alors le débit massique en ce point tend vers 0, l'impédance de sortie tend vers l'infinie et l'équation de  $\xi(L)$  donne :

$$\xi(0)_{ext.rigide} = -J.Y_0.cot(k_{c0}L) \quad (2.63)$$

### 2.3.4.2 Tube uniforme

Les expressions de la pression et du débit massique acoustique pour un tube uniforme sur l'entrée et sortie sont :

$$\begin{cases} P(0) = (C_1 + C_2)ext(jwt) \\ u(0) = \frac{1}{Y_0}(C_1 - C_2)ext(jwt) \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\begin{cases} P(L) = \exp(j.L.K_{c0}.M)[C_1\exp(-j.L.K_{c0}) + C_2\exp(j.L.K_{c0})]ext(jwt) \\ u(L) = \exp(j.L.K_{c0}.M)[C_1\exp(-j.L.K_{c0}) - C_2\exp(j.L.K_{c0})]ext(jwt) \end{cases} \quad (2.65)$$

En combinant les systèmes (2.52) et (2.53), avec l'élimination des termes  $C_1ext(jwt)$  et  $C_2ext(jwt)$ , on aura le système suivant :

$$\begin{cases} P(0) = \exp(-j.L.K_{C0}.M)[P(L)\cos(L.K_{C0}) + j.Y_0.u(L)\sin(K_{C0}L)] \\ u(0) = \exp(-j.L.K_{C0}.M)\left[j.\frac{P(L)}{Y_0}\sin(K_{C0}L) + u(L)\cos(L.K_{C0})\right] \end{cases} \quad (2.66)$$

On obtient le système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = \exp(-j.L.K_{C0}.M) \begin{bmatrix} \cos(L.K_{C0}) & j.Y_0\sin(K_{C0}L) \\ j.\frac{\sin(K_{C0}L)}{Y_0} & \cos(L.K_{C0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(L) \\ u(L) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

En utilisant les notions des variables aéroacoustiques, on obtient :

$$\begin{bmatrix} P_C(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} = \exp(-j.L.K_{C0}.M) \begin{bmatrix} \cos(L.K_{C0}) & j.Y_0\sin(K_{C0}L) \\ j.\frac{\sin(K_{C0}L)}{Y_0} & \cos(L.K_{C0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_C(L) \\ u_C(L) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

### 2.3.4.3 Chambre d'expansion simple

Pour calculer la matrice de transfert d'une chambre d'expansion simple, illustré à la Figure 2.9, on peut passer par la matrice de transfert d'un tube uniforme :

$$\begin{bmatrix} \cos(L.K_{C0}) & j.Y_0\sin(K_{C0}L) \\ j.\frac{\sin(K_{C0}L)}{Y_0} & \cos(L.K_{C0}) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Ou bien :

$$\begin{bmatrix} \cos(L.K_{C0}) & j.\frac{a_0}{S}\sin(K_{C0}L) \\ j.S.\frac{\sin(K_{C0}L)}{a_0} & \cos(L.K_{C0}) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

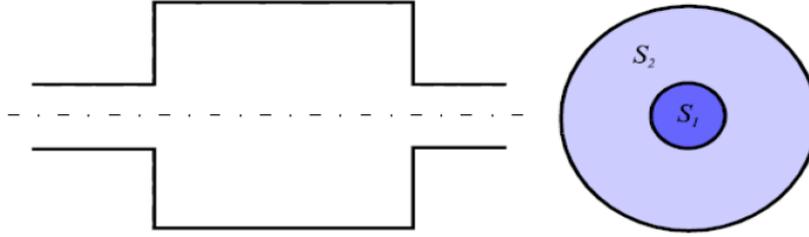


FIGURE 2.7 - Chambre d'expansion simple (Pascal J. 2009)

La perte de transmission apportée par la chambre d'expansion de section  $S_2$  raccordée à des sections d'entrée et de sortie identique  $S_e=S_s=S_I$ , s'obtient en appliquant l'expression suivante de la perte de transmission (Pascal J., 2009):

$$PTA = 10 \log \left( \frac{S_e \left| T_{11} + \frac{S_s}{a_0} T_{12} + \frac{a_0}{S_e} T_{21} + \frac{S_s}{S_e} T_{22} \right|^2}{4S_s} \right) \quad (2.71)$$

Avec :

$$T = \begin{bmatrix} \cos(L \cdot K_{c0}) & j \cdot \frac{a_0}{S_2} \sin(K_{c0}L) \\ j \cdot S_2 \cdot \frac{\sin(K_{c0}L)}{a_0} & \cos(L \cdot K_{c0}) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

D'où :

$$PTA = 10 \log \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} \right) \sin^2(K_{c0}L) \right] \quad (2.73)$$

Ou bien :

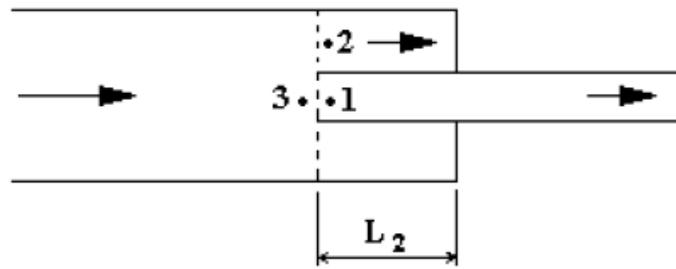
$$PTA = 10 \log \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( m - \frac{1}{m} \right) \sin^2(K_{c0}L) \right] \quad (2.74)$$

Avec :  $m = \frac{S_2}{S_1}$

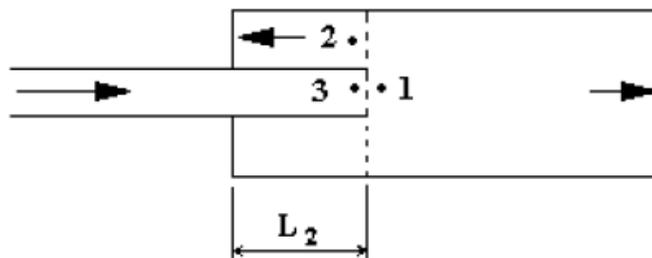
### 2.3.4.4 Tubes prolongés et changement de section

#### a- Discontinuité et tubes prolongés

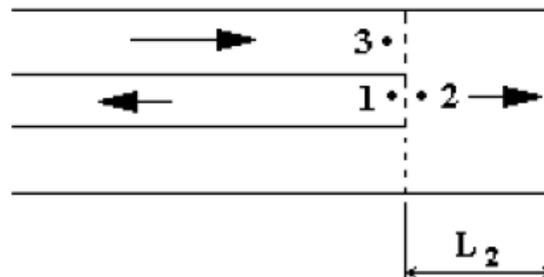
Les Figures 2.10 (a), (b) et (c) montrent tous les cas possibles des silencieux à tubes prolongés :



a- Adjonction à droite d'un silencieux



b- Adjonction à gauche dans un silencieux .



c- Contraction dans un silencieux

FIGURE 2.8 - Silencieux à tubes prolongés (Pascal J. 2009)

Contrairement au cas statique, dans le cas dynamique une discontinuité entraîne une variation de pression. En effet, en passant par une discontinuité, une partie de l'énergie acoustique est dissipée sous forme de chaleur, ce qui se manifeste par une augmentation d'entropie évaluée à l'aide d'un coefficient de perte de charge  $K$ . Munjal M. a mesuré le coefficient de perte de charge pour quelques discontinuités, comme illustré au Tableau 2.1 (Munjal M.L., 1987).

TABEAU 2.1 - Valeurs du coefficient des pertes de charge (Munjal M.L., 1987)

Élément	K
Adjonction à droite	$(1 - S_1 / S_3) / 2$
Adjonction à gauche	$[(S_1 / S_3) - 1] / 2$
Contraction	0,5

$S_1, S_3$  sont les sections aux points 1 et 3 ( $m^2$ ) respectivement. Les équations de perte de charge sans et avec perturbation acoustique sont :

$$\begin{cases} P_3 + \frac{1}{2}\rho_0 \cdot u_{3_0}^2 = P_{1_0} + \frac{1}{2}\rho_0 \cdot u_{1_0}^2 + K \cdot \left(\frac{1}{2}\rho_0 \cdot u_{1_0}^2\right) \\ (P_3 + P_{3_0}) + \frac{1}{2}\rho_0 \cdot (u_{3_0} + u_3)^2 = P_{1_0} + \frac{1}{2}\rho_0 \cdot (u_{1_0} + u_1)^2 + \frac{K}{2}\rho_0 \cdot (u_{1_0} + u_1)^2 \end{cases} \quad (2.75)$$

On effectue la différence entre les deux équations précédentes en négligeant les termes de second ordre :

$$P_3 + Y_3 M_3 u_3 = P_1 + (1 + K) \cdot Y_1 M_1 u_1 \quad (2.76)$$

En termes de variables aéroacoustiques cela donne:

$$P_{C_3} = \left(1 - \frac{K \cdot M_1^2}{1 - M_1^2}\right) \cdot P_{C_1} + \frac{Y_1 K \cdot M_1}{1 - M_1^2} \cdot u_{C_1} \quad (2.77)$$

De même, la condition de conservation de masse en régime permanent et en régime perturbé (Avec :  $\mathbf{u}_{2_0} = \mathbf{0}$ ) est la suivante:

$$\begin{cases} \rho_0 S_3 u_{3_0} = \rho_0 S_1 u_{1_0} \\ (\rho_0 + \rho_{3_0}) S_3 (u_{3_0} + u_3) = (\rho_0 + \rho_{1_0}) S_1 (u_{1_0} + u_1) + \rho_0 S_2 u_2 \end{cases} \quad (2.78)$$

On aura :

$$\rho_0 S_3 u_3 + \rho_0 S_3 u_{3_0} = \rho_0 S_1 u_1 + \rho_1 S_1 u_{1_0} + \rho_0 S_2 u_2 \quad (2.79)$$

D'autre part, selon les deux premiers principes de la thermodynamique nous donnent (Annexe) :

$$\begin{cases} s_1 = \frac{Y_3 K M_1}{\rho_0 T} \cdot \frac{u_{C_3} - M_1 \frac{P_{C_1}}{Y_1}}{1 - M_1^2} \\ \rho_3 = \frac{P_3}{a_0^2} \\ \rho_1 = \frac{P_1 - s_1(\gamma - 1)T\rho_0}{a_0^2} \end{cases} \quad (2.80)$$

Où  $T$  est la température du silencieux supposée constante. En introduisant le système de (2.80) dans (2.31), on obtient :

$$u_{C_3} = \left(1 - \frac{(\gamma - 1)M_1^2}{1 - M_1^2}\right) \cdot u_{C_1} + \frac{(\gamma - 1)KM_1^3}{(1 - M_1^2)Y_1} P_{C_1} + u_2 \quad (2.81)$$

La détermination de la matrice de transfert entre les points 1 et 3 nécessite l'élimination du terme  $u_2$ . Pour ceci, on écrit l'équation de la quantité de mouvement dans les deux régimes permanents et en présence de perturbation, on aura :

$$\begin{cases} P_{3_0}s_3 + \rho_0 s_3 u_{3_0}^2 + C_3(P_{1_0}s_1 + \rho_0 s_1 u_{1_0}^2) + C_1 P_{2_0} s_2 = 0 \\ (\rho_0 + \rho_3)s_3(u_{3_0} + u_3)^2 + C_3 \left[ (P_{1_0} + P_1)s_1 + (\rho_0 + \rho_1)s_1(u_{1_0} + u_1)^2 \right] + \\ C_1(P_{2_0} + P_2)s_2 + (P_{3_0} + P_3)s_3 = 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

En faisant la différence de ces deux équations et en utilisant la relation qui relie les variables aéroacoustiques aux variables acoustiques et (2.82), on a :

$$\begin{aligned} C_3 s_1 \left[ P_{C_1} + M_1 Y_1 u_{C_1} - (\gamma - 1) K M_1^3 \frac{Y_1 u_{C_1} - M_1 P_{C_1}}{1 - M_1^2} \right] s_3 (P_{C_3} + M_3 Y_3 u_{C_3}) \\ + C_1 P_2 s_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Où  $C_1$  et  $C_3$  sont des constantes données par le Tableau 2.2 suivant :

TABEAU 2.2- Différentes valeurs des constantes C1 et C3 (Munjal M.L., 1987)

Élément	C <sub>1</sub>	C <sub>3</sub>
Adjonction à droite	-1	-1
Adjonction à gauche	-1	+1
Contraction	+1	-1

D'autre part d'après le paragraphe de l'impédance spécifique on peut écrire :

$$Z_2 = \frac{P_2}{u_2} \quad (2.84)$$

Z<sub>2</sub> qui représente l'impédance d'entrée de la conduite 2. Dans le cas d'une extrémité rigide, on a:

$$Z_3 = -j.Y_2.cot(K_{C0}L_2) \quad (2.85)$$

Nous introduisons dans (2.83) les équations (2.81), (2.77) et (2.84), on obtient :

$$u_{C_3} = \frac{-1}{C_1 S_2 Z_2 + S_3 M_3 Y_3} \left\{ \left[ S_3 \left( 1 - \frac{K M_1^2}{1 - M_1^2} \right) + C_3 S_1 \left( 1 - \frac{(1 - \gamma) M_1^4}{1 - M_1^2} \right) - \frac{C_1 S_2 Z_2 (1 - \gamma) K M_1^4}{(1 - M_1^2) Y_1} \right] P_{C_1} + \left[ \frac{S_3 M_1 K Y_1}{1 - M_2^2} + C_3 S_1 M_1 Y_1 \left( 1 - \frac{(1 - \gamma) M_1^2}{1 - M_1^2} \right) - \frac{C_1 S_2 Z_2 (\gamma - 1) M_1^3}{(1 - M_1^2) Y_1} \right] \right\} \quad (2.86)$$

Enfin, les équations précédentes permettent d'établir la forme de la matrice de transfert pour les quatre cas de discontinuité :

$$\begin{bmatrix} P_{C_3} \\ u_{C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{C_3} \\ u_{C_3} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Avec :

$$A_{11} = 1 - \frac{K M_1^2}{1 - M_1^2} \quad (2.88)$$

$$A_{12} = \frac{M_1 K Y_1}{1 - M_2^2}$$

$$A_{21} = \frac{\left[ -S_3 \left( 1 - \frac{KM_1^2}{1 - M_1^2} \right) - C_3 S_1 \left( 1 - \frac{(\gamma - 1)M_1^4}{1 - M_1^2} \right) + \frac{C_1 S_2 Z_2 (\gamma - 1) K M_1^4}{(1 - M_1^2) Y_1} \right]}{C_1 S_2 Z_2 + S_3 M_3 Y_3}$$

$$A_{22} = \frac{\left[ \frac{-S_3 M_1 K Y_1}{1 - M_2^2} - C_3 S_1 M_1 Y_1 \left( 1 - \frac{(\gamma - 1)M_1^2}{1 - M_1^2} \right) + C_1 S_2 Z_2 \left( 1 - \frac{K(\gamma - 1)M_1^2}{1 - M_1^2} \right) \right]}{C_1 S_2 Z_2 + S_3 M_3 Y_3}$$

$S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  sont les sections respectives au point 1, 2 et 3 ;  $K$  est le coefficient de perte de charge ;  $\gamma = C_p / C_v$  est le coefficient polytropique = 1,402 ;  $M_1$  et  $M_3$  sont les nombres de Mach respectifs aux points 1 et 3.

### b- Changement de section

Les changements de section dans les silencieux étudiés sont illustrés à la Figure 2.11.

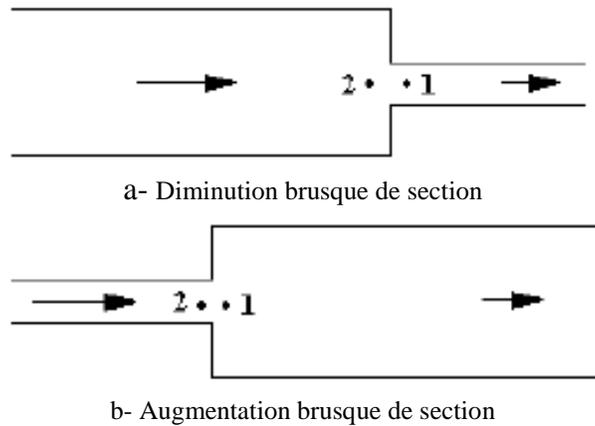


FIGURE 2.9- Changement de section dans un silencieux (Munjal M.L. 1987)

La Figure 2.11 est un cas particulier d'une adjonction à droite à gauche d'un silencieux. La matrice de transfert qui relie le point 1 à 2 est déduite de la relation (2.86) en faisant tendre  $Z_2$  vers l'infini. soit :

$$\begin{bmatrix} P_{C_2} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{KM_1^2}{1 - M_1^2} & \frac{M_1KY_1}{1 - M_2^2} \\ \frac{(\gamma - 1)KM_1^3}{(1 - M_1^2)Y_1} & 1 - \frac{K(\gamma - 1)M_1^2}{1 - M_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{C_1} \\ u_{C_1} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Si la cavité du silencieux (le tube à l'intérieur de la chambre) a une autre forme géométrique (Ellipse par exemple), l'approximation du diamètre peut être exprimée par la formule suivante (Munjaj M.L., 1987) :

$$D = \sqrt{(4 \cdot \text{Section de la surface})/\pi} \quad (2.90)$$

### 2.3.5 Matrice de transfert et perte par transmission pour les filtres perforés

Dans cette partie, nous allons déterminer la matrice de transfert et la perte par transmission d'un résonateur concentrique (silencieux à un seul tube perforé), comme le montre la Figure 2.12 suivante:

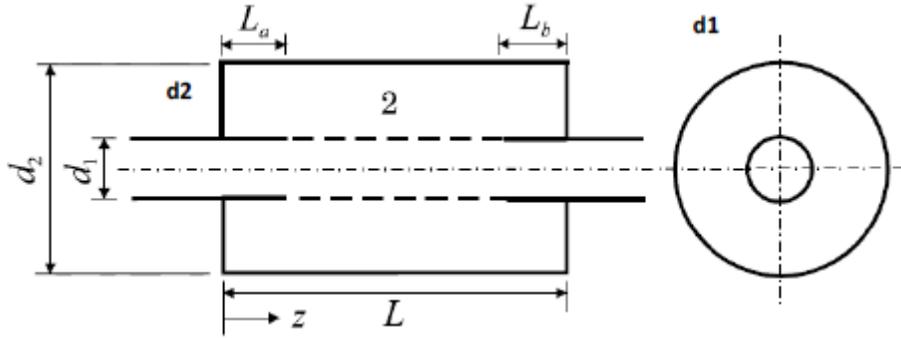


FIGURE 2.10- Résonateur concentrique (Beranek 1992)

L'équation de propagation d'onde acoustique dans les filtres réactifs pour un silencieux à un seul tube perforé s'écrit:

$$\frac{1}{a_0^2} \left( \frac{\partial P_j^2}{\partial t^2} \right) + \frac{2M_j}{a_0} \left( \frac{\partial^2 P_j}{\partial t \partial z} \right) + (M_j^2 - 1) \left( \frac{\partial^2 P_j}{\partial z^2} \right) - a_j \left( \frac{\partial V_h}{\partial t} + M_j a_0 \frac{\partial V_h}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.91)$$

$$j = 1, 2$$

$$a_1 = \rho_0 \frac{4\zeta}{d_1} \quad , \quad a_2 = -\rho_0 \frac{4d_1\zeta}{d_2^2 - d_1^2} \quad (2.92)$$

Si on tient compte de l'équation de flux radial développé par (Munjal M.L., 1987) :

$$P_1 - P_2 = (r_a + j \cdot w \cdot m_a) \cdot V_h = Z_h \cdot V_h \quad (2.93)$$

Avec :

$$r_a = 0.514 \cdot \frac{\rho_0 \cdot a_0 \cdot d_1 \cdot M_1}{L \cdot \zeta} \quad (2.94)$$

$$m_a = \rho_0 (l_h + 0.75 \cdot r_h)$$

$r_h$  ,  $l_h$  ,  $Z_h$  représentent respectivement le rayon de perforation, l'épaisseur de tube perforé et l'impédance des trous de perforation.

Si la dépendance temporelle est de la forme  $e^{-i\omega t}$ , alors nous aurons :

$$(M_j^2 - 1) \left( \frac{\partial P_j^2}{\partial t^2} \right) + 2 \cdot j \cdot M_j \cdot k_0 \cdot \left( \frac{\partial P_j}{\partial z} \right) - k_0^2 \cdot P_j \quad (2.95)$$

$$-a_j \left( j \cdot w + M_j \cdot a_0 \frac{\partial P_j}{\partial z} \right) \left( \frac{P_1 - P_2}{Z_h} \right) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.96)$$

Après simplification :

$$\frac{\partial P_1^2}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} + \alpha_2 P_1 + \alpha_3 \frac{\partial P_2}{\partial z} + \alpha_4 P_2 = 0 \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial P_1^2}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} + \alpha_2 P_1 + \alpha_3 \frac{\partial P_2}{\partial z} + \alpha_4 P_2 = 0 \quad (2.98)$$

Avec :

$$\alpha_1 = \frac{-j \cdot M_1}{1 - M_1^2} \left( \frac{k_a^2 + k_0^2}{k_0} \right), \quad \alpha_2 = \frac{k_a^2}{1 - M_1^2}, \quad \alpha_3 = \frac{j \cdot M_1}{1 - M_1^2} \left( \frac{k_a^2 - k_0^2}{k_0} \right)$$

$$\alpha_5 = \frac{j \cdot M_2}{1 - M_2^2} \left( \frac{k_b^2 + k_0^2}{k_0} \right), \alpha_6 = \frac{k_0^2 - k_b^2}{1 - M_2^2}$$

$$\alpha_7 = \frac{-j \cdot M_2}{1 - M_2^2} \left( \frac{k_b^2 - k_0^2}{k_0} \right), \alpha_4 = \frac{k_a^2 - k_0^2}{1 - M_1^2}, \alpha_8 = \frac{k_b^2}{1 - M_2^2}$$

Où :

$$k_a^2 = k_0^2 - j \cdot \frac{4 \cdot k_0 \cdot \zeta \cdot a_0 \cdot \rho_0}{d_1 \cdot Z_h}$$

$$k_b^2 = k_0^2 - j \cdot \frac{4 \cdot k_0 \cdot \zeta \cdot a_0 \cdot \rho_0 \cdot d_1}{(d_2^2 - d_1^2) \cdot Z_h}$$

Les équations (97) et (98) peuvent être écrites sous les deux formes matricielles suivantes:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & D & 0 \\ 0 & -1 & 0 & D \\ D & 0 & \alpha_1 D + \alpha_2 & \alpha_3 D + \alpha_4 \\ 0 & D & \alpha_5 D + \alpha_6 & \alpha_7 D + \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = [\Delta(D)]\{y\} = \{0\} \quad (2.99)$$

Avec :

$$D = \frac{\partial}{\partial z}, \quad y_1 = \frac{\partial P_1}{\partial z}, \quad y_2 = \frac{\partial P_2}{\partial z}, \quad y_3 = P_1, \quad y_4 = P_2 \quad (2.100)$$

La relation (2.99) représente un système de quatre équations différentielles du premier ordre à coefficients constants couplés entre elles. La méthode que nous allons développer consiste à rechercher un nouvel ensemble de coordonnées généralisées  $\Gamma_p$  ( $p=1, \dots, 4$ ), de manière que le système soit décrit par quatre équations différentielles découplées. Soit :

$$\begin{bmatrix} D - \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D - \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D - \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D - \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Où  $\beta_1$  est la racine du polynôme caractéristique de  $[\Delta(D)]$ .

Ces nouvelles coordonnées seront des combinaisons linéaires des coordonnées initiales  $y_i$ .

soit :

$$\{y\} = [\psi] \cdot \{\Gamma\} \quad (2.102)$$

En portant (2.102) dans (2.101) :

$$[\Delta(D)] \cdot [\psi] \cdot \{\Gamma\} = \{0\} \quad (2.103)$$

D'autre part la relation (2.101) nous donne :

$$D\Gamma_i = \beta_i \cdot \Gamma_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.104)$$

Compte tenu de cette relation, l'équation (2.103) nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \psi_{3i} \cdot \beta_i - \psi_{1i} = 0 \\ \psi_{4i} \cdot \beta_i - \psi_{2i} = 0 \\ \psi_{1i} \cdot \beta_i + (\alpha_1 \cdot \beta_i + \alpha_2) \cdot \psi_{3i} + (\alpha_3 \cdot \beta_i + \alpha_4) \cdot \psi_{4i} = 0 \\ \psi_{2i} \cdot \beta_i + (\alpha_5 \cdot \beta_i + \alpha_5) \cdot \psi_{3i} + (\alpha_7 \cdot \beta_i + \alpha_8) \cdot \psi_{4i} = 0 \end{cases} \quad (2.105)$$

Or le déterminant de ce système est nul (polynôme caractéristique de  $[\Delta(D)]$ ), donc il se ramène à un système de trois équations. En prenant  $\psi_{2i} = 1$ , ce dernier admet comme solution :

$$\begin{cases} \psi_{1i} = 1 \\ \psi_{2i} = -\frac{\beta_i^2 + \alpha_1 \beta_i + \alpha_2}{\alpha_3 \cdot \beta_i + \alpha_4} \\ \psi_{3i} = \frac{1}{\beta_i} \\ \psi_{4i} = \frac{\psi_{2i}}{\beta_i} \end{cases} \quad (2.106)$$

Ce sont les termes de la matrice  $\psi$  dans la relation (2.102), avec  $i=1, 2, 3, 4$ . Les équations de la relation (2.103) admettent les solutions générales :

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z) &= C_1 \cdot e^{(\beta_1 \cdot z)} \\ \Gamma_2(z) &= C_2 \cdot e^{(\beta_2 \cdot z)} \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\Gamma_3(z) = C_3 \cdot e^{(\beta_3 \cdot z)}$$

$$\Gamma_4(z) = C_4 \cdot e^{(\beta_4 \cdot z)}$$

Compte tenu de l'équation (2.31) établie dans le premier paragraphe, relative à la région 1 :

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial z} + a_0 \cdot \rho_0 \cdot M_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \quad (2.108)$$

Et les relations suivantes :

$$P(z, t) = P_1(z) \cdot \exp(j\omega t)$$

$$u(z, t) = u_1(z) \cdot \exp(j\omega t)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.109)$$

Nous obtenons alors :

$$a_0 \cdot \rho_0 \cdot (j \cdot k_0 + M_1 \cdot a_0 \cdot D) u_1 = - \frac{dP_1}{dz} \quad (2.110)$$

Compte tenu de la relation (2.102), cette équation devient :

$$a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_1 = - \sum_{i=1}^4 \frac{\psi_{1i} \cdot \Gamma_i}{j \cdot k_0 + M_1 \cdot a_0 \cdot \beta_i} \quad (2.111)$$

En suivant les mêmes étapes de calcul pour le cas des variables acoustiques de la région 2, nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_1(z) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_2(z) \end{bmatrix} = [A(z)] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

Pour  $i = 1, 2, 3, 4$  :

$$A_{1i} = \psi_{3i} \cdot e^{(\beta_i \cdot z)}, A_{2i} = \psi_{4i} \cdot e^{(\beta_i \cdot z)} \quad (2.113)$$

$$A_{3i} = -\frac{e^{(\beta_i \cdot z)}}{j \cdot k_0 - M_1 \cdot \beta_i}, A_{4i} = -\frac{\psi_{2i} \cdot e^{(\beta_i \cdot z)}}{j \cdot k_0 - M_2 \cdot \beta_i}$$

Finalement, on peut écrire la matrice de transfert  $[T]$  qui relie les variables acoustiques en  $z=0$  à celle en  $z=L$  :

$$\begin{bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_1(0) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_2(0) \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_1(L) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_2(L) \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

Avec :

$$[T] = [A(0)] \cdot [A(L)]^{-1}$$

La matrice  $[M]$  qui relie un couple de variables aéroacoustiques d'entrée et de sortie, pour un silencieux à un seul tube perforé, est obtenue à partir de la relation (2.114) et les deux conditions aux limites suivantes (Munjal M.L., 1990), (Munjal M.L., Rao K.N. , Sahasrabudhe A.D. 1987) et (K. K. Munjal M.L. 1993) :

$$\begin{aligned} z_2(0) &= -\frac{p_2(0)}{u_2(0)} = -j \cdot a_0 \cdot \rho_0 \cdot \cot(K_{C_0} \cdot L_a) \\ z_2(L) &= -\frac{p_2(L)}{u_2(L)} = -j \cdot a_0 \cdot \rho_0 \cdot \cot(K_{C_0} \cdot L_b) \end{aligned} \quad (2.115)$$

La matrice de transfert s'écrit

$$\begin{bmatrix} P_{C_1}(0) \\ u_{C_1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{C_1}(L) \\ u_{C_1}(L) \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \frac{1}{1 - M_1^2} \left[ T_a + M_1 Y_1 T_c - (T_b + M_1 Y_1 T_d) \frac{M_1}{Y_1} \right] \\
 m_{12} &= \frac{1}{1 - M_1^2} [T_b + M_1 Y_1 (T_d - T_a + M_1 Y_1 T_c)] \\
 m_{21} &= \frac{1}{1 - M_1^2} \left[ T_a \cdot \frac{M_1}{Y_1} + T_c - \left( T_d + T_b \cdot \frac{M_1}{Y_1} \right) \frac{M_1}{Y_1} \right] \\
 m_{22} &= \frac{1}{1 - M_1^2} \left[ T_b \cdot \frac{M_1}{Y_1} + T_d - \left( T_c + T_a \cdot \frac{M_1}{Y_1} \right) M_1 Y_1 \right]
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 T_a &= T_{11} + A_1 \cdot A_2 \\
 T_b &= Y_1 (T_{13} + B_1 \cdot A_2) \\
 T_c &= (T_{31} + B_2 \cdot A_1) / Y_1 \\
 T_d &= T_{33} + B_1 \cdot B_2 \\
 X_1 &= -j \cdot \tan(K_{C_0} \cdot L_a) \\
 F_1 &= X_2 \cdot T_{44} + T_{42} - X_1 (T_{22} + X_2 \cdot T_{24}) \\
 A_1 &= (X_1 T_{21} - T_{41}) / F_1 \\
 A_2 &= X_2 T_{14} - T_{12} \\
 B_1 &= (X_1 T_{23} - T_{43}) / F_1 \\
 B_2 &= X_2 T_{34} - T_{32} \\
 X_2 &= j \cdot \tan(K_{C_0} \cdot L_b)
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

### 2.3.6 Matrice de transfert et perte par transmission pour les filtres à absorption

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'atténuation acoustique des silencieux perforés à absorption. En fait, ce type de phénomène de frottement d'une garniture de matériaux absorbant, généralement une laine de verre (ou de Roche).

#### 2.3.6.1 Équations de la propagation d'onde dans le filtre

La géométrie du silencieux est décrite dans Figure 2.13 (a). Soit  $V$  la vitesse du fluide dans le tube perforé ( $V = 0$  dans la chambre d'expansion où le matériau absorbant est placé). En effet, la modélisation de la propagation d'onde dans le matériau absorbant est très compliquée. Pour ce

faire, nous allons le considérer comme étant un fluide avec une densité dynamique complexe  $\tilde{\rho}(\omega)$  et une vitesse du son  $\tilde{a}_0(\omega)$

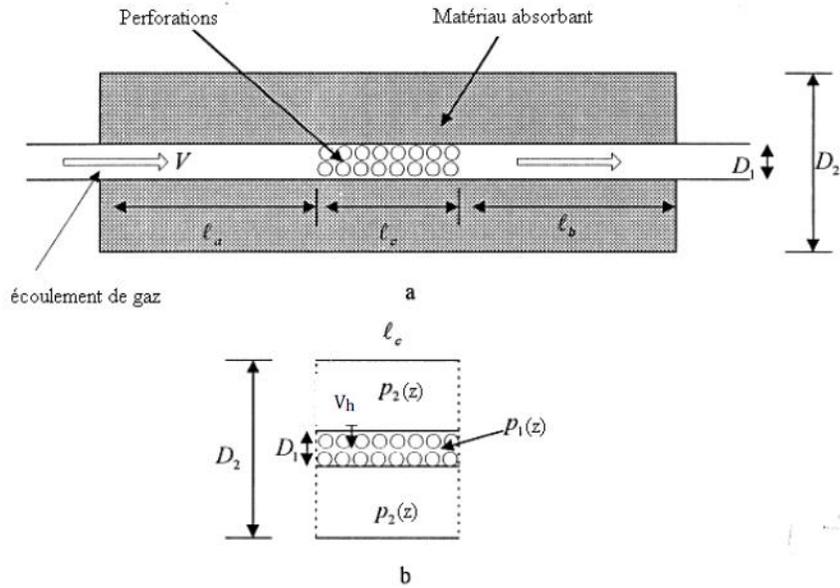


FIGURE 2.11 - Géométrie du silencieux à absorption (Selamet A. 2003)

Dans ce qui suit, nous allons adopter la même démarche de calcul que celle déjà établie précédemment pour les silencieux à un seul tube percé. Les équations de la continuité dans la partie présentée par la Figure 2.13 (b) sont les suivantes (Selamet A. 2003)

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + V \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{4}{D_1} \rho_0 \cdot V_h + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \quad (2.119)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z} \right) u_1 + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \quad (2.120)$$

$$\tilde{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{4D_1}{D_2^2 - D_1^2} \tilde{\rho} \cdot V_h + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \quad (2.121)$$

$$\tilde{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \quad (2.122)$$

Les paramètres  $\rho_0, V, u_1, u_2, \rho_1, \rho_2, p_1, p_2$  représentent respectivement la densité moyenne, la vitesse de fluide dans le tube central, la fluctuation acoustique, les densités et pressions acoustiques

Soit l'impédance acoustique des perforations :

$$\rho_0 \cdot a_0 \cdot \xi = \frac{\Delta p}{V_h} \quad (2.123)$$

D'autre part on a :

$$P = \rho \cdot a_0^2 \quad (2.124)$$

En éliminant  $\rho_1, \rho_2, u_1, u_2$  nous obtenons les équations couplées suivantes:

$$\frac{\partial P_1^2}{\partial z^2} + \alpha_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} + \alpha_2 \cdot P_1 + \alpha_3 \frac{\partial P_2}{\partial z} + \alpha_4 \cdot P_2 = 0 \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial P_2^2}{\partial z^2} + \alpha_5 \cdot P_2 + \alpha_6 \cdot P_1 = 0 \quad (2.126)$$

Avec :

$$\alpha_1 = \frac{-2 \cdot K \cdot j \cdot M + \frac{4M}{\xi \cdot D_1}}{1 - M^2}, \alpha_2 = \frac{K^2 - \frac{4 \cdot j \cdot K}{\xi \cdot D_1}}{1 - M^2}, \alpha_3 = \frac{\frac{4M}{\xi \cdot D_1}}{1 - M^2} \quad (2.127)$$

$$\alpha_4 = \frac{\frac{4 \cdot j \cdot K}{\xi \cdot D_1}}{1 - M^2}, \alpha_5 = \tilde{K}^2 - \frac{4D_1 \cdot \tilde{\rho} \cdot j \cdot K}{(D_2^2 - D_1^2) \rho_0 \xi} \quad (2.128)$$

$$\alpha_6 = \frac{4D_1 \cdot \tilde{\rho} \cdot j \cdot K}{(D_2^2 - D_1^2) \rho_0 \xi}$$

$$M = \frac{v}{a_0}, K = \frac{w}{a_0}, \tilde{K} = \frac{w}{\tilde{a}_0} \quad (2.129)$$

Les équations (2.128) et (2.129) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_3 & & & \\ -\alpha_6 - \alpha_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

Ou bien :

$$\{y'\} = [A]\{y\} \quad (2.131)$$

Avec :

$$y_1 = p_1, y_2 = p_2, y_3 = p'_1, y_4 = p'_2 \quad (2.132)$$

Soit :

$$\{y\} = [\phi]\{\mathfrak{R}\} \quad (2.133)$$

$[\phi]_{4 \times 4}$  est la matrice nodale de laquelle chaque colonne formée par le vecteur propre  $[\phi]_{4 \times 1}$  de  $[A]$ .

En introduisant (2.133) dans (2.130), nous aurons :

$$\{\mathfrak{R}'\} = [\Lambda]\{\mathfrak{R}\} \quad (2.134)$$

$[\Lambda]$  est une matrice diagonale formée par les racines de polynôme caractéristique  $\lambda_i$  de  $[A]$ .

Après l'équation découlée peut-être facilement résolu et nous aurons :

$$\mathfrak{R}_i = C_i e^{\lambda_i z} \quad (2.135)$$

$C_i$  sont des constantes arbitraires. Selon les relations (2.120), (2.122), (133) et (135) nous, obtenons la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ a_0 \cdot \rho_0 u_1(z) \\ a_0 \cdot \rho_0 u_2(z) \end{bmatrix} = [\psi] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \psi_{1i} &= \phi_{1i} \cdot e^{\lambda_i z} \\ \psi_{2i} &= \phi_{2i} \cdot e^{\lambda_i z} \\ \psi_{4i} &= -\frac{\phi_{4i} \cdot e^{\lambda_i z}}{j \cdot \tilde{K}} \end{aligned} \quad (2.137)$$

Finalement, nous obtenons la matrice de transfert qui relie les variables acoustiques dans la partie perforée commune illustré dans la Figure 2.13 (b) :

$$\begin{bmatrix} P_1(l_c) \\ P_2(l_c) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_1(l_c) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_2(l_c) \end{bmatrix} = [\mathfrak{N}] \cdot \begin{bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_1(0) \\ a_0 \cdot \rho_0 \cdot u_2(0) \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Avec :

$$[\mathfrak{N}] = [\psi(l_c)][\psi(0)]^{-1} \quad (2.139)$$

### 2.3.6.2 Conditions aux limites

Nous avons à établir les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{z}(0) &= -j \cdot \tilde{\rho} \cdot \tilde{a}_0 \cdot \cot(\tilde{K} \cdot L_a) \\ \tilde{z}(l_c) &= -j \cdot \tilde{\rho} \cdot \tilde{a}_0 \cdot \cot(\tilde{K} \cdot L_a) \end{aligned} \quad (2.140)$$

### 2.3.6.3 Perte par transmission

En éliminant  $P_2(0)$ ,  $u_2(0)$ ,  $P_2(l_c)$  et  $u_2(l_c)$ , dans les équations (2.138), (2.139) et (2.140), nous aurons la matrice de transfert final pour ce type de silencieux :

$$\begin{bmatrix} P_1(0) \\ \rho_0 \cdot a_0 \cdot u_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(l_c) \\ \rho_0 \cdot a_0 \cdot u_1(l_c) \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Avec :

$$\begin{aligned} m_{11} &= \aleph_{11} + \aleph_{12} \cdot \tilde{A} + \aleph_{14} \cdot X_1 \cdot \tilde{A}, & m_{12} &= \aleph_{13} + \aleph_{12} \cdot \tilde{B} + \aleph_{14} \cdot X_1 \cdot \tilde{B} \\ m_{21} &= \aleph_{31} + \aleph_{32} \cdot \tilde{A} + \aleph_{34} \cdot X_1 \cdot \tilde{A}, & m_{22} &= \aleph_{33} + \aleph_{32} \cdot \tilde{B} + \aleph_{34} \cdot X_1 \cdot \tilde{B} \\ X_1 &= -j \cdot \tan(\tilde{K} \cdot L_a), & \tilde{A} &= \frac{X_2 \aleph_{21} - \aleph_{41}}{F} \\ \tilde{B} &= \frac{X_2 \aleph_{23} - \aleph_{43}}{F}, & X_2 &= -j \cdot \tan(\tilde{K} \cdot L_a) \\ F &= \aleph_{42} + X_1 \aleph_{44} - X_1 (\aleph_{22} + X_1 \aleph_{24}) \end{aligned} \quad (2.142)$$

L'expression de la perte par transmission est la suivante (Selamet A., 2003) :

$$TL = 20 \log_{10} \left( \frac{|m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22}|}{2} \right) \quad (2.143)$$

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'atténuation acoustique des silencieux. La perte de transmission acoustique des silencieux est mesurée expérimentalement soit par la méthode des trois points ou par la méthode des deux microphones. L'optimisation géométrique passe soit par l'analyse numérique par élément fini, par les éléments finis de frontière ou par éléments finis avec homogénéisation. La méthode des matrices de transfert qui caractérise le comportement acoustique des silencieux est présentée dans cette partie pour différent type de silencieux notamment : les silencieux réactifs, perforés et non perforés et les silencieux à absorption. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les algorithmes d'optimisation géométriques qui sont l'algorithme génétique, le recuit simulé et l'algorithme d'acceptation de seuil. Ces outils sont utilisés pour optimiser la géométrie des silencieux afin d'avoir le maximum de perte de transmission acoustique.

# Chapitre 3

## 3 Optimisation acoustique par algorithme numérique

### Introduction

Dans le but de résoudre les problèmes difficiles d'optimisation acoustique, des méthodes dénommées métaheuristiques sont apparues à partir des années 1970, et elles sont désormais d'un emploi courant dans tous les domaines de l'ingénierie, car elles s'adaptent très aisément à différents types de problèmes d'optimisation.

On distingue deux types de problèmes d'optimisation :

- Problème discret (combinatoire) : pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme exact rapide ;
- Problème à variables continues : pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme permettant de repérer un optimum global à coup sûr et en un temps fini de calculs.

Parmi les métaheuristiques les plus répondues, on trouve : la méthode du recuit simulé (Simulated annealing), Acceptation avec seuil, la recherche avec tabous, les algorithmes de colonies de fourmis et les algorithmes génétiques.

### 3.1 Optimisation par algorithme génétique

Les algorithmes génétiques (AG), initialement développés par John Holland, sont des techniques de recherche stochastique (Brassard 1995), (Chang Y.C. 2005), (Fogel D.B. 1995), (Kendall G. 2017), (Knight 2009). Elles sont basées sur la théorie de révolution de Darwin. Par analogie avec le monde biologique, l'algorithme fait évoluer une population d'individus (solution

potentielle), à l'aide de deux mécanismes : la sélection et la reproduction. La sélection assure la survie des individus les plus adaptés. Quant à la reproduction, elle assure la recombinaison des caractéristiques parentales créant ainsi des descendants aux potentialités nouvelles. Ainsi, de génération en génération, nous allons obtenir les individus les mieux adaptés à leur environnement.

Les algorithmes génétiques fournissent des solutions aux problèmes n'ayant pas de solutions calculables en temps raisonnable de façon analytique ou algorithmique. Selon cette méthode, des milliers de solutions (génotypes) plus ou moins bonnes sont créés au hasard puis sont soumises à un procédé d'évaluation de la pertinence de la solution mimant l'évolution des espèces : les plus "adaptés", c'est-à-dire les solutions au problème qui sont les plus optimales survivent davantage que celles qui le sont moins et la population évolue par générations successives en croisant les meilleures solutions entre elles et en les faisant muter, puis en relançant ce procédé un certain nombre de fois afin d'essayer de tendre vers la solution optimale.

Le mécanisme d'évolution et de sélection est indépendant du problème à résoudre : seules changent trois fonctions :

- La fonction qui s'occupe de représenter le problème en codant chaque information caractérisant une solution possible selon un codage bien particulier, chaque information représente alors un gène et toutes les valeurs que peut prendre cette caractéristique représentent les allèles (les variations) possibles pour ce gène, et en concaténant tous ces gènes pour obtenir un chromosome qui lui représente une solution dans son intégralité ;
- La fonction inverse qui à partir d'un chromosome permet d'obtenir une solution par décodage du génome ;
- La fonction qui évalue l'adaptation d'une solution à un problème, sa pertinence. Cette technique est d'application générale.

Quand on utilise les algorithmes génétiques, aucune connaissance de la méthode de résolution du problème n'est requise, il est seulement nécessaire de fournir une fonction permettant de coder une solution sous forme de gènes (et donc de faire le travail inverse) ainsi que de fournir une fonction permettant d'évaluer la pertinence d'une solution au problème donné.

Cela en fait donc un modèle minimal et canonique pour n'importe quel système évolutionnaire et pour n'importe quel problème pouvant être abordé sous cet angle, sous ce paradigme.

Cette représentation nous permet donc d'étudier des propriétés quasiment impossibles à étudier dans leur milieu naturel, ainsi que de résoudre des problèmes n'ayant pas de solutions calculables en temps raisonnables si on les aborde sous d'autres paradigmes, avec des performances quantifiables, facilement mesurables et qu'on peut confronter aux autres stratégies de résolution.

Les algorithmes génétiques peuvent être particulièrement utiles dans les domaines suivants :

- Optimisation : optimisation de fonctions (Acoustique, mécanique, etc.), planification, etc.
- Apprentissage : classification, prédiction, robotique, etc.
- Programmation automatique : programmes LISP, automates cellulaires, etc.
- Étude du vivant, du monde réel : marchés économiques, comportements sociaux, systèmes immunitaires, etc. ...

Les principales différences des algorithmes génétiques par rapport aux autres paradigmes sont les suivantes :

- On utilise un codage des informations : on représente toutes les caractéristiques d'une solution par un ensemble de gènes, c'est-à-dire un chromosome, sous un certain codage (binaire, réel, code de Gray, etc.), valeurs qu'on concatène pour obtenir une chaîne de caractères qui est spécifique à une solution bien particulière (il y a une bijection entre la solution et sa représentation codée)
- On traite une population "d'individus", de solutions : cela introduit donc du parallélisme.
- L'évaluation de l'optimisation du système n'est pas dépendante vis-à-vis du domaine.
- On utilise des règles probabilistes : il n'y a pas d'énumération de l'espace de recherche, on en explore une certaine partie en étant guidé par un semi-hasard.

En effet des opérateurs comme la fonction d'évaluation permet de choisir de s'intéresser à une solution qui semble représenter un optimum local, on fait donc un choix délibéré, puis de la croiser avec une autre solution optimale localement, en général la solution obtenue par croisement est meilleure ou du même niveau que ses parents, mais ce n'est pas assuré, cela dépend des aléas du hasard, et cela est d'autant plus vrai pour l'opérateur de mutation qui ne s'applique qu'avec une certaine probabilité et dans le cas où il s'applique choisit aléatoirement sur quel(s) locus (loci) introduire des modifications (Davis. L. 1989.).

Un algorithme génétique générique à la forme suivante :

*Initialiser la population initiale P.*

*Evaluer P.*

*TantQue (Pas Convergence) faire :*

*a) P ' = Sélection des Parents dans P*

*b) P ' = Appliquer Opérateur de Croisement sur P '*

*c) P ' = Appliquer Opérateur de Mutation sur P '*

*d) P = Remplacer les Anciens de P par leurs Descendants de P '*

*e) Évaluer P*

*FinTantQue*

Le critère de convergence peut être de nature diverse, par exemple :

- Un taux minimum qu'on désire atteindre d'adaptation de la population au problème,
- un certain temps de calcul à ne pas dépasser,
- une combinaison de ces deux points.

### **3.1.1 Le codage en algorithme génétique**

Chaque paramètre d'une solution est assimilé à un gène, toutes les valeurs qu'il peut prendre sont les allèles de ce gène, on doit trouver une manière de coder chaque allèle différent de façon unique (établir une bijection entre l'allèle "réel" et sa représentation codée).

Un chromosome est une suite de gène, on peut par exemple choisir de regrouper les paramètres similaires dans un même chromosome (chromosome à un seul brin) et chaque gène sera repérable par sa position : son locus sur le chromosome en question.

Chaque individu est représenté par un ensemble de chromosomes, et une population est un ensemble d'individus. Les différents niveaux d'organisation d'un AG sont représentés à la Figure 3.1.

Il y a trois principaux types de codage utilisables, et on peut passer de l'un à l'autre relativement facilement : Le codage binaire, réel et de Gray.

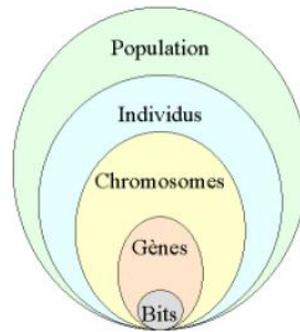


FIGURE 3.1 - Les cinq niveaux d'organisation d'un algorithme génétique (Souquet 2004)

### a- Le codage binaire

C'est le plus utilisé. Chaque gène dispose du même alphabet binaire  $\{0, 1\}$

Un gène est alors représenté par un entier long (32 bits), les chromosomes qui sont des suites de gènes sont représentés par des tableaux de gènes et les individus de notre espace de recherche sont représentés par des tableaux de chromosomes.

Ce cas peut être généralisé à tout alphabet allylique **n-aire** permettant un codage plus intuitif, par exemple pour le problème du voyageur de commerce on peut préférer utiliser l'alphabet allylique  $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$  où  $c_i$  représente la ville de numéro  $i$ .

### b- Le codage réel

Cela peut-être utile notamment dans le cas où l'on recherche le maximum d'une fonction réelle comme illustré à la Figure 3.2.

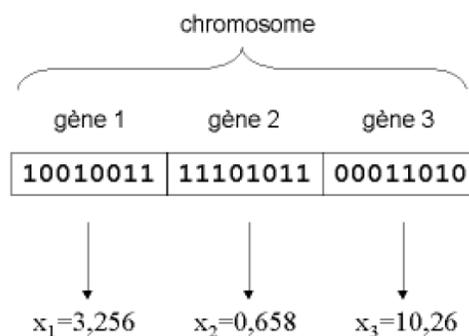


FIGURE 3.2 - Illustration schématique du codage des variables réelles (Souquet 2004)

### c- Le codage de Gray

Dans le cas d'un codage binaire, on utilise souvent la "distance de Hamming" comme mesure de la dissimilarité entre deux éléments de population, cette mesure compte les différences de bits de même rang de ces deux séquences. Et c'est là que le codage binaire commence à montrer ses limites. En effet, deux éléments voisins en termes de distance de Hamming ne codent pas nécessairement deux éléments proches dans l'espace de recherche. Cet inconvénient peut être évité en utilisant un "codage de Gray" : le codage de Gray est un codage qui a comme propriété qu'entre un élément  $n$  et un élément  $n+1$ , donc voisin dans l'espace de recherche, un seul bit diffère.

### 3.1.2 L'opérateur de sélection

Cet opérateur est chargé de définir quels seront les individus de  $P$  qui vont être dupliqués dans la nouvelle population  $P'$  et vont servir de parents (application de l'opérateur de croisement) (Bramlette. M.F. 1991).

Soit  $n$  le nombre d'individus de  $P$ , on doit en sélectionner  $n/2$  (l'opérateur de croisement nous permet de repasser à  $n$  individus).

Cet opérateur est peut-être le plus important puisqu'il permet aux individus d'une population de survivre, de se reproduire ou de mourir. En règle générale, la probabilité de survie d'un individu sera directement reliée à son efficacité relative au sein de la population.

On trouve essentiellement quatre types de méthodes de sélection différentes :

- La méthode de la "loterie biaisée" (roulette wheel) ;
- La méthode "élitiste" ;
- La sélection par tournois;
- La sélection universelle stochastique.

#### 3.1.2.1 La loterie biaisée (roulette wheel)

Cette méthode est la plus connue et la plus utilisée (Goldberg D.E. and J.Richardson 1987), (Goldberg. D.E. 1989). Avec cette méthode chaque individu a une chance d'être sélectionné proportionnellement à sa performance, donc plus les individus sont adaptés au problème, plus ils ont de chances d'être sélectionnés. Pour utiliser l'image de la "roue du forain", comme illustré à la Figure 3.3, chaque individu se voit attribuer un secteur dont l'angle est proportionnel à son adap-

tation, sa "fitness". On fait tourner la roue et quand elle cesse de tourner on sélectionne l'individu correspondant au secteur désigné par une sorte de "curseur", curseur qui pointe sur un secteur particulier de celle-ci après qu'elle se soit arrêtée de tourner.

Cette méthode, bien que largement répandue, a des inconvénients. En effet, elle a une forte variance. Il n'est pas impossible que sur  $n$  sélections successives destinées à désigner les parents de la nouvelle génération  $P$ , la quasi-totalité, voire pire la totalité des  $n$  individus sélectionnés soient des individus ayant une fitness vraiment mauvaise et donc pratiquement aucun individu à forte fitness ne fasse partie des parents de la nouvelle génération. Ce phénomène est bien sûr très dommageable, car cela va complètement à l'encontre du principe des algorithmes génétiques qui veut que les meilleurs individus soient sélectionnés de manière à converger vers une solution la plus optimale possible.

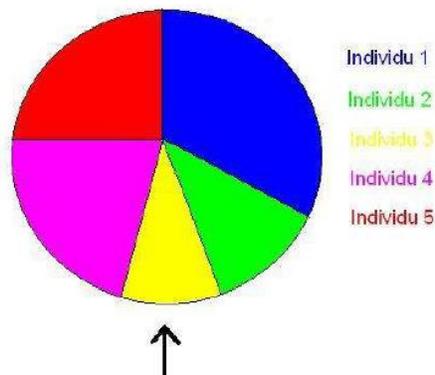


FIGURE 3.3- La méthode de sélection de la loterie biaisée (Souquet 2004)

A l'inverse, on peut arriver à une domination écrasante d'un individu "localement supérieur" entraînant une grave perte de diversité. Imaginons par exemple qu'on ait un individu ayant une fitness très élevée par rapport au reste de la population, disons dix fois supérieure, il n'est pas impossible qu'après quelques générations successives on se retrouve avec une population ne contenant que des copies de cet individu. Le problème est que cet individu avait une fitness très élevée, mais que cette fitness était toute relative, elle était très élevée, mais seulement en comparaison avec d'autres individus. On se retrouve donc face à un problème connu sous le nom de "convergence prématurée"; l'évolution se met donc à stagner et on atteindra alors jamais l'optimum, on restera bloqué sur un optimum local. Il existe certaines techniques pour essayer de limiter ce phé-

nomène, par exemple le "scaling", qui consiste à effectuer un changement d'échelle de manière à augmenter ou diminuer de manière forcée la fitness d'un individu par rapport à un autre selon leur écart de fitness. Malgré tout, il est conseillé d'opter plutôt pour une autre méthode de sélection.

### 3.1.2.2 La méthode élitiste

Cette méthode consiste à sélectionner les  $n$  individus dont on a besoin pour la nouvelle génération  $P'$  en prenant les  $n$  meilleurs individus de la population  $P$  après l'avoir triée de manière décroissante selon la fitness de ses individus.

Il est inutile de préciser que cette méthode est encore pire que celle de la loterie biaisée dans le sens où elle amènera à une convergence prématurée encore plus rapidement et surtout de manière encore plus sûre que la méthode de sélection de la loterie biaisée ; en effet, la pression de la sélection est trop forte, la variance nulle et la diversité inexistante, du moins le peu de diversité qu'il pourrait y avoir ne résultera pas de la sélection, mais plutôt du croisement et des mutations.

Là aussi il faut opter pour une autre méthode de sélection.

### 3.1.2.3 La sélection par tournois

Cette méthode est celle avec laquelle on obtient les résultats les plus satisfaisants. Le principe de cette méthode est le suivant : on effectue un tirage avec remise de deux individus de  $P$ , et on fait "combattre" ces individus. Celui qui a la fitness la plus élevée l'emporte avec une probabilité  $p$  comprise entre 0.5 et 1. On répète ce processus  $n$  fois de manière à obtenir les  $n$  individus de  $P'$  qui serviront de parents.

La variance de cette méthode est élevée et le fait d'augmenter ou de diminuer la valeur de  $p$  permet respectivement de diminuer ou d'augmenter la pression de la sélection.

### 3.1.2.4 La sélection universelle stochastique

Cette méthode semble être très peu utilisée et qui possède une variance faible, donc introduit peu de diversité, nous n'entrerons donc pas dans les détails, on se contentera d'exposer sa mise en œuvre : On prend l'image d'un segment découpé en autant de sous-segments qu'il y a d'individus. Les individus sélectionnés sont désignés par un ensemble de points équidistants.

### 3.1.3 L'opérateur de croisement (cross-over)

Le cross-over utilisé par les algorithmes génétiques est la transposition informatique du mécanisme qui permet, dans la nature, la production de chromosomes qui héritent partiellement des caractéristiques des parents. Son rôle fondamental est de permettre la recombinaison des informations présentes dans le patrimoine génétique de la population (De Jong K.A. and W.M. Spears 1992) (De Jong K.A and W. Spears 1991.).

Cet opérateur est appliqué après avoir utilisé l'opérateur de sélection sur la population  $P$ , on se retrouve donc avec une population  $P'$  de  $n/2$  individus et on doit doubler ce nombre pour que notre nouvelle génération soit complète. On va donc créer de manière aléatoire  $n/4$  couples et on les fait "reproduire". Les chromosomes (ensembles de paramètres) des parents sont alors copiés et recombinaison de façon à former deux descendants possédant des caractéristiques issues des deux parents. Détaillons ce qui se passe pour chaque couple au niveau de chacun de leurs chromosomes :

Un, deux, voir jusqu'à  $lg - 1$  (où  $lg$  est la longueur du chromosome) point de croisements (*loci*) sont tirés au hasard, chaque chromosome se retrouve donc séparé en "segments". Puis chaque segment du parent 1 est échangé avec son "homologue" du parent 2 selon une probabilité de croisement  $pc$ . De ce processus résulte 2 fils pour chaque couple et notre population  $P'$  contient donc bien maintenant  $n$  individus. On peut noter que le nombre de points de croisements ainsi que la probabilité de croisement  $pc$  permettent d'introduire plus ou moins de diversité.

En effet, plus le nombre de points de croisements sera grand et plus la probabilité de croisement sera élevée plus il y aura d'échange de segments, donc d'échange de paramètres, d'information, et plus le nombre de points de croisements sera petit et plus la probabilité de croisement sera faible, moins le croisement apportera de diversité. Les Figures 3.4, 3.5 et 3.6 représentent les schémas illustrant un croisement en un point, un autre pour un croisement en deux points, et enfin un schéma représentant un croisement avec  $lg - 1$  point de croisements (on notera d'ailleurs sur ce schéma que l'échange d'un segment avec son homologue ne se fait pas toujours) :

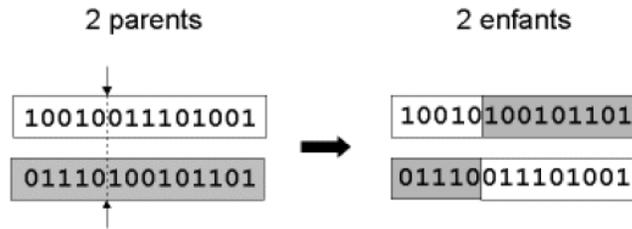


FIGURE 3.4 - Croisement avec un point de cross-over (Souquet 2004)

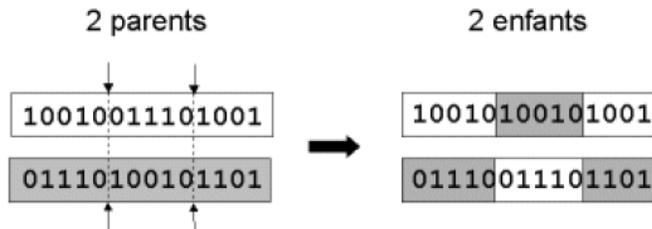


FIGURE 3.5 - Croisement avec 2 points de cross-over (Souquet 2004)

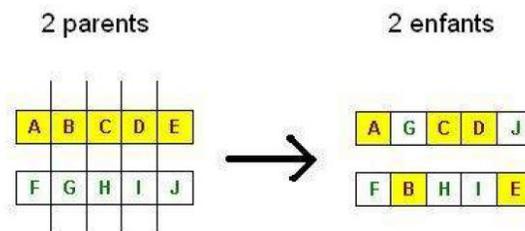


FIGURE 3.6 - Croisement uniforme (Souquet 2004)

On peut citer aussi une autre méthode très utilisée dans le cas des problèmes modélisés par un codage binaire, il s'agit du : *croisement uniforme*. La mise en œuvre de ce procédé est fort simple, elle consiste à définir de manière aléatoire un "masque", c'est-à-dire une chaîne de bits de même longueur que les chromosomes des parents sur lesquels il sera appliqué. Ce masque est destiné à savoir, pour chaque locus, de quel parent le premier fils devra hériter du gène s'y trouvant; si face à un locus le masque présente un 0, le fils héritera le gène s'y trouvant du parent n° 1, s'il présente un 1 il en héritera du parent n° 2. La création du fils n° 2 se fait de manière symétrique : si pour un gène donné le masque indique que le fils n° 1 devra recevoir celui-ci du parent n° 1 alors le fils n° 2 le recevra du parent n°2, et si le fils n° 1 le reçoit du parent n° 2 alors le fils 2 le recevra du parent n° 1.

L'opérateur de croisement favorise l'exploration de l'espace de recherche. En effet, considérons deux gènes  $A$  et  $B$  pouvant être améliorés par mutation. Il est peu probable que les deux gènes améliorés  $A'$  et  $B'$  apparaissent par mutation dans un même individu. Mais si un parent porte le gène mutant  $A'$  et l'autre le gène mutant  $B'$ , l'opérateur de croisement permettra de combiner rapidement  $A'$  et  $B'$  et donc de créer un nouvel individu possédant cette combinaison, combinaison grâce à laquelle il est possible qu'il soit encore plus adapté que ses parents.

L'opérateur de croisement assure donc le brassage du matériel génétique et l'accumulation des mutations favorables. En termes plus concrets, cet opérateur permet de créer de nouvelles combinaisons des paramètres des composants. Malgré tout, il est possible que l'action conjointe de la sélection et du croisement ne permette pas de converger vers la solution optimale du problème. En effet, imaginons que nous avons une population d'individus possédant un seul chromosome. Considérons un gène particulier de ce chromosome, on l'appellera  $G$ , gène ayant 2 allèles possibles : 0 et 1; si aucun individu de la population initiale ne possède l'allèle 1 pour ce gène, aucun croisement possible ne permettra d'introduire cet allèle pour notre gène  $G$ . Si la solution optimale au problème est telle que notre gène  $G$  possède l'allèle 1, il nous sera impossible d'atteindre cette solution optimale simplement par sélection et croisement. C'est pour remédier entre autres à ce problème que l'opérateur de mutation est utilisé.

### 3.1.4 L'opérateur de mutation

Cet opérateur consiste à changer la valeur allélique d'un gène avec une probabilité  $pm$  très faible, généralement comprise entre 0.01 et 0.001. On peut aussi prendre  $pm = 1/lg$  où  $lg$  est la longueur de la chaîne de bits codant notre chromosome.

Une mutation consiste simplement en l'inversion d'un bit (ou de plusieurs bits, mais vu la probabilité de mutation c'est extrêmement rare) se trouvant en un locus bien particulier et lui aussi déterminé de manière aléatoire; on peut donc résumer la mutation de la façon suivante :

*Pour chaque locus faire*

*Faire appel à la fonction*

*Si cette fonction nous renvoie true, alors*

*on inverse le bit se trouvant à ce locus*

*FinSi*

*FinPour*

On utilise une fonction censée nous retourner *true* avec une probabilité *pm*.

L'opérateur de mutation, comme illustré à la Figure 3.7, modifie donc de manière complètement aléatoire les caractéristiques d'une solution, ce qui permet d'introduire et de maintenir la diversité.

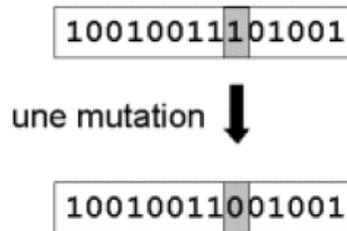


FIGURE 3.7 - Schéma représentatif d'une mutation (Souquet 2004)

au sein de notre population de solutions. Cet opérateur joue le rôle d'un "élément perturbateur", il introduit du "bruit" au sein de la population. Cet opérateur dispose de 4 grands avantages:

- Il garantit la diversité de la population, ce qui est primordial pour les algorithmes génétiques.
- Il permet d'éviter un phénomène connu sous le nom de : *dérive génétique*. On parle de dérive génétique quand certains gènes favorisés par le hasard se répandent au détriment des autres et sont ainsi présents au même endroit sur tous les chromosomes. Le fait que l'opérateur de mutation puisse entraîner de manière aléatoire des changements, au niveau de n'importe quel locus, permet d'éviter l'installation de cette situation défavorable.
- La mutation permet d'atteindre la propriété d'ergodicité.
- Il permet de limiter les risques d'une convergence prématurée causée par exemple par une méthode de sélection élitiste imposant à la population une pression sélective trop forte.

En effet, dans le cas d'une convergence prématurée on se retrouve avec une population dont tous les individus sont identiques, mais ne sont que des optimums locaux. Tous les individus étant identiques, le croisement ne changera rien à la situation. En effet, l'échange d'informations par cross-over entre des individus strictement identiques est bien sûr totalement sans conséquence on aura beau choisir la méthode de croisement qu'on veut on se retrouvera toujours à échanger des portions de chromosomes identiques et la population n'évoluera pas. L'évolution se retrouvant bloquée on n'attendra jamais l'optimum global. La mutation entraînant des inversions de bits de manière aléatoire permet de réintroduire des différences entre les individus et donc de nous extir-

per de cette situation. Il est quand même utile de garder à l'esprit que ceci n'est pas une solution "miracle" et qu'il est bien entendu plus intelligent de ne pas utiliser de méthodes de sélection connues pour entraîner ce type de problème.

L'ergodicité est une propriété garantissant que chaque point de l'espace de recherche puisse être atteint. En effet, une mutation pouvant intervenir de manière aléatoire au niveau de n'importe quel locus, on a la certitude mathématique que n'importe quelle permutation de notre chaîne de bits peut apparaître au sein de la population et donc que tout point de l'espace de recherche peut être atteint. Grâce à cette propriété, on est donc sûr de pouvoir atteindre l'optimum global. On notera que la mutation règle donc le problème exposé à la fin de la Section sur le croisement.

### 3.1.5 L'opérateur de remplacement

Cet opérateur est le plus simple, son travail consiste à réintroduire les descendants obtenus par application successive des opérateurs de sélection, de croisement et de mutation (la population  $P'$ ) dans la population de leurs parents (la population  $P$ ).

Ce faisant il vont remplacer une certaine proportion de ceux-ci, proportion pouvant bien sûr être choisie. Le rapport entre le nombre d'individus nouveaux allant être introduits dans la population  $P$  et le nombre d'individus de cette population est connu sous le nom de *génération Gap*.

On trouve essentiellement 2 méthodes de remplacement différentes :

#### - *Le remplacement stationnaire*

Dans le cas de remplacement stationnaire, les enfants remplacent automatiquement les parents sans tenir compte de leurs performances respectives, et le nombre d'individus de la population ne varie pas tout au long du cycle d'évolution simulé, ce qui implique donc d'initialiser la population initiale avec un nombre suffisant d'individus. Cette méthode peut être mise en œuvre de 2 façons différentes :

La première se contente de remplacer la totalité de la population  $P$  par la population  $P'$ , cette méthode est connue sous le nom de *remplacement générationnel* et on a donc une génération Gap qui vaut **1**.

La deuxième méthode consiste à choisir une certaine proportion d'individus de  $P'$  qui remplaceront leurs parents dans  $P$  (proportion égale à 100 % dans le cas du remplacement générationnel). Ce type de remplacement engendre une population ayant une grande variation et de se fait favo-

rise la dérive génétique qui se manifeste d'autant plus que la population est de petite taille. De plus dans bien des cas, étant donné que même un enfant ayant une faible performance remplace forcément un parent, on n'atteint pas la meilleure solution, mais on s'en approche seulement.

### ***Le remplacement élitiste***

Dans le cas de remplacement élitiste, on garde au moins l'individu possédant les meilleures performances d'une génération à la suivante. En général, on peut partir du principe qu'un nouvel individu (enfant) prend place au sein de la population que s'il remplit le critère d'être plus performant que le moins performant des individus de la population précédente. Donc les enfants d'une génération ne remplaceront pas nécessairement leurs parents comme dans le remplacement stationnaire et par la même la taille de la population n'est pas figée au cours du temps.

Ce type de stratégie améliore les performances des algorithmes évolutionnaires dans certains cas. Mais présente aussi un désavantage en augmentant le taux de convergence prématuré. Néanmoins, des implémentations plus fines procèdent de manière différente. Dans ce cas-là, le taux de remplacement n'est pas de 100 %, la taille de la population augmente donc au cours des générations successives, on dit qu'il y a : *overcrowding*. Il faut donc trouver un moyen pour sélectionner les parents qui seront supprimés, qui vont mourir. De Jong a proposé la solution suivante : imaginons qu'on veuille remplacer 30 % des parents, soit  $np$  le nombre de parents correspondants à ce pourcentage, on remplacera les  $np$  parents les plus proches de leurs descendants de  $P'$ . Cette méthode permet donc premièrement de maintenir la diversité et deuxièmement d'améliorer la : globale de la population.

## **3.2 Algorithme de recuit simulé**

La méthode du recuit simulé est une généralisation de la méthode Monte-Carlo ; son but est de trouver une solution optimale pour un problème donné. Elle a été mise au point par trois chercheurs de la société IBM : S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt et M.P. Vecchi (Kirkpatrick S. 1983) (Kirkpatrick 1988), et indépendamment par (Cěrný V 1985) à partir de l'algorithme de Metropolis (Metropolis A. and Rosenbluth 1953), qui permet de décrire l'évolution d'un système thermodynamique (Liacs 2009), (Nolle L. 2002).

La méthode du recuit simulé est basée sur un processus très utilisé en métallurgie pour obtenir un alliage sans défaut, ce processus est appelé « le recuit » (Autin B. 2006).

On commence par chauffer le métal jusqu'à une certaine température où il devient liquide (les atomes peuvent donc circuler librement). Après avoir atteint ce stade, on abaisse la température très lentement de sorte à obtenir un solide (Olivier D. 2001). Si cette baisse de température est brusque, on obtient alors du verre ; si au contraire cette baisse de température est très lente (laisant aux atomes le temps d'atteindre l'équilibre statistique), nous obtiendrons des structures de plus en plus régulières, jusqu'à atteindre un état d'énergie minimale correspondant à la structure parfaite d'un Crystal, on dit alors que le système est « gelé ».

Au cas où cet abaissement de température ne se ferait pas assez lentement, il pourrait apparaître des défauts. Il faudrait alors les corriger en réchauffant de nouveau légèrement la matière de façon à permettre aux atomes de retrouver la liberté de mouvement, leur facilitant ainsi un éventuel réarrangement conduisant à une structure plus stable (Olivier D. 2001).

### 3.2.1 Définition de l'algorithme du recuit simulé

L'idée principale du recuit simulé tel qu'il a été proposé par Metropolis en 1953 est de simuler le comportement de la matière dans le processus du recuit très largement utilisé dans la métallurgie. Le but est d'atteindre un état d'équilibre thermodynamique, cet état d'équilibre (où l'énergie est minimale) représente dans la méthode du recuit simulé la solution optimale d'un problème. L'énergie du système sera calculée par une fonction objectif spécifique à chaque problème (Kendall G. 2017), (Chang Y.C., Chiu M.C. 2005). La méthode va donc essayer de trouver la solution optimale en optimisant une fonction objective, pour cela, un paramètre fictif de température a été ajouté par (Kirkpatrick 1988). En gros le principe consiste à générer successivement des configurations à partir d'une solution initiale  $S_0$  et d'une température initiale  $T_0$  qui diminuera tout au long du processus jusqu'à atteindre une température finale ou un état d'équilibre (optimum global).

### 3.2.2 L'algorithme de Metropolis

Dans l'algorithme de Metropolis, on part d'une configuration donnée, et on lui fait subir une modification aléatoire. Si cette modification fait diminuer la fonction objectif (ou énergie du système), elle est directement acceptée ; sinon, elle n'est acceptée qu'avec une probabilité égale à  $(\Delta E/T)$ .  $E$  et  $T$  sont respectivement l'énergie et la température), cette règle est appelée critère de Metropolis. (Autin, 2006)

### 3.2.3 L'algorithme du recuit simulé

Le recuit simulé applique itérativement l'algorithme de Metropolis, pour engendrer une séquence de configurations qui tendent vers l'équilibre thermodynamique, les étapes du processus sont les suivantes :

- Choisir une température de départ  $T=T_0$  et une solution initiale  $S=S_0$  ;
- générer une solution aléatoire dans le voisinage de la solution actuelle ;
- comparer les deux solutions selon le critère de Metropolis ;
- répéter 2 et 3 jusqu'à ce que l'équilibre statistique soit atteint ;
- décroître la température et répéter jusqu'à ce que le système soit gelé (Abecasis G. 2011).

Dans un premier temps,  $T$  étant généralement choisi très grand, beaucoup de solutions - même celles dégradant la valeur de  $f$  sont acceptées, et l'algorithme équivaut à une visite aléatoire de l'espace des solutions. Mais à mesure que la température baisse, la plupart des solutions augmentant l'énergie sont refusées, et l'algorithme se ramène à une amélioration itérative classique.

À température intermédiaire, l'algorithme autorise de temps en temps des transformations qui dégradent la fonction objective. Il laisse ainsi une chance au système de s'extraire d'un minima local (Autin B. 2006). Notons aussi que si la température est égale à 0, seules les solutions optimisant  $f$  sont acceptées. L'algorithme se comportera donc comme la méthode de la descente du gradient. La Figure 3.8 montre une comparaison entre le recuit simulé et une heuristique classique.

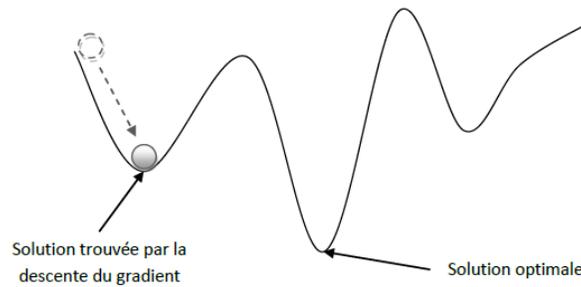


FIGURE 3.8 - Comparaison entre le recuit simulé et une heuristique classique (Abecasis G. 2011)

### 3.2.3.1 États initiaux de l'algorithme

La solution initiale peut être prise au hasard dans l'espace des solutions possibles, elle peut aussi être générée par une heuristique classique, telle que la descente du gradient ou l'algorithme glouton (dans le cas du voyageur du commerce) (Kendall G. 2017). La température initiale doit être assez élevée, car c'est elle qui fixe la probabilité d'accepter ou de refuser les solutions défavorables à l'optimisation de la fonction  $f$ .

## 3.2.4 Variation de la température

Deux approches sont possibles pour décroître la température : la décroissance par paliers et la décroissance continue.

### 3.2.4.1 Décroissance par paliers

Pour chaque valeur de la température, on itère l'algorithme de Metropolis jusqu'à atteindre un équilibre statistique, puis on diminue la température.

### 3.2.4.2 Décroissance continue

On fait baisser la température d'une façon continue, le plus courant est d'utiliser la loi suivante :

$$T_{i+1} = \alpha \cdot T_i / \alpha < 1 \text{ (en général } \alpha = 0.9 \text{ à } 0.99) \quad (3.1)$$

Le paramètre  $\alpha$  est à choisir avec précaution, en effet, s'il est choisi trop grand, la température baisse très rapidement et l'algorithme peut être bloqué dans un minima local, si au contraire il est choisi trop petit, la température baissera très lentement et le temps de calcul sera très grand (Kendall G. 2017).

Cet algorithme est parfois amélioré en ajoutant une variable qui mémorise la meilleure valeur rencontrée jusqu'à présent ; sans cela, l'algorithme pourrait converger vers une certaine solution, alors qu'on avait visité auparavant une solution meilleure (Autin B. 2006).

### 3.2.5 Exemple d'application

Le problème du voyageur de commerce : Le recuit simulé peut être appliqué au problème du voyageur de commerce. Le but est alors de trouver le circuit hamiltonien de coût minimal dans un graphe. L'énergie représentera la distance totale à parcourir, et un état du système représentera le chemin entre les villes. L'algorithme va donc tenter de minimiser la longueur totale du chemin, en modifiant l'ordre des villes à parcourir. Soit le graphe suivant, illustré à la Figure 3.9 représentant un ensemble de villes :

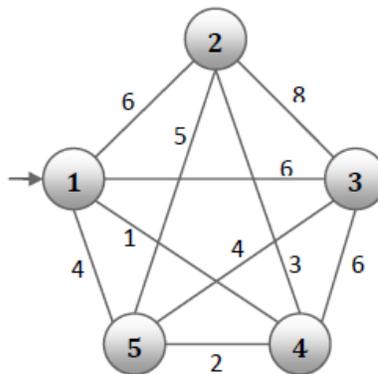


FIGURE 3.9 - Un ensemble de villes (nœuds) reliées entre eux par des routes (arcs) (Abecasis G. 2011)

La solution la plus simple est de parcourir les villes dans l'ordre est représenté à la Figure 3.10.

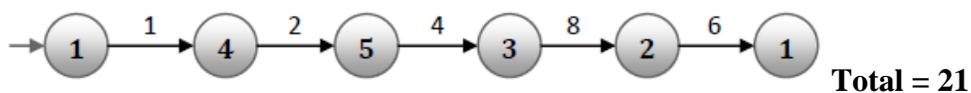


FIGURE 3.10 - Le résultat donné par l'algorithme glouton (se déplacer d'un sommet vers son plus proche voisin) (Abecasis G. 2011)

La Figure 3.11 montre le résultat obtenu en échangeant les sommets 2 et 3, on note que la distance totale a augmenté.

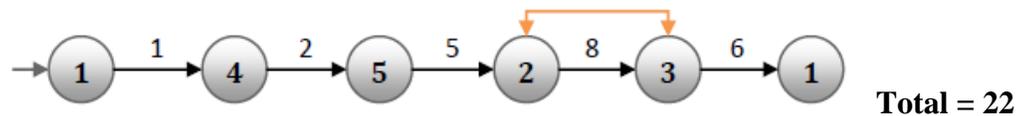


FIGURE 3.11 - Le résultat obtenu en échangeant les sommets 2 et 3 (Abecasis G. 2011)

Pour une heuristique classique, cette solution est rejetée, car la distance doit être minimisée, mais le recuit simulé pourra l'accepter si la température est encore élevée, et cette solution qui est « mauvaise » par rapport à la première va lui permettre de trouver une solution meilleure comme illustrée à la Figure 3.12.

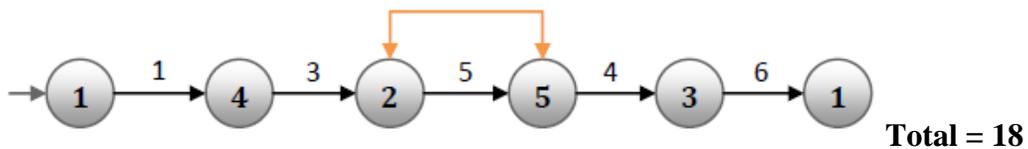


FIGURE 3.12 - Le résultat obtenu en échangeant les sommets 5 et 2 (Abecasis G. 2011)

Le graphique de la Figure 3.13 résume les résultats trouvés :

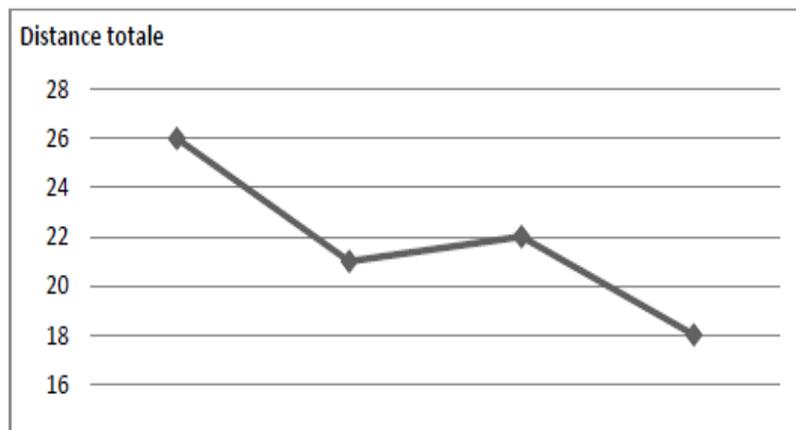


FIGURE 3.13 - Les résultats obtenus dans l'exemple (Abecasis G. 2011)

En résumé : Le recuit simulé, en acceptant une mauvaise solution, a réussi à échapper au minima local et à obtenir une solution meilleure.

### **3.2.6 Domaines d'applications**

Comme pour toute métaheuristique, la méthode du recuit simulé peut être appliquée dans de nombreux problèmes d'optimisation, les chercheurs l'ont utilisée essentiellement dans :

- La conception des circuits intégrés (Kirkpatrick 1988) (problème de placement et de répartition) ;
- le routage des paquets dans les réseaux ;
- la segmentation d'images ;
- le problème du voyageur de commerce ;
- et, le problème du sac à dos.

### **3.2.7 Avantages et Inconvénients**

#### **3.2.7.1 Avantages**

Les avantages de la méthode de recuit simulé sont principalement les suivants :

- Facile à implémenter;
- donne généralement de bonnes solutions par rapport aux algorithmes de recherche classiques;
- peut être utilisé dans la plupart des problèmes d'optimisation;
- il converge vers un optimum global (lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini (Autin B. 2006). Cela fait de lui une option attrayante pour les problèmes d'optimisation difficiles.

#### **3.2.7.2 Inconvénients**

Le principal inconvénient du recuit simulé est qu'une fois l'algorithme piégé à basse température dans un minimum local, il lui est impossible de s'en sortir. Plusieurs solutions ont été proposées pour tenter de résoudre ce problème, par exemple en acceptant une brusque remontée de la température de temps en temps, pour relancer la recherche sur d'autres régions plus éloignées (Autin B. 2006). Appart cela on peut citer quelques autres inconvénients comme :

- La difficulté de déterminer la température initiale ;
- si elle est trop basse, la qualité de recherche sera mauvaise ;
- si elle est trop haute, le temps de calcul sera élevé ;
- l'impossibilité de savoir si la solution trouvée est optimale ;
- dégradation des performances pour les problèmes où il y a peu de minima locaux (comparé avec les heuristiques classiques comme la descente du gradient par exemple).

### 3.2.8 Application du recuit simulé sur les silencieux

Pour une méthode du recuit simulé appliqué aux silencieux, chaque point  $X$  de l'espace de recherche est comparé à un état de système physique et la fonction  $F(X)$  à minimiser, qui représente la perte de transmission du silencieux, est interprétée comme l'énergie interne du système dans cet état. Par conséquent, l'objectif de l'algorithme est de ramener le système d'un état initial arbitraire à un état avec l'énergie minimale possible. Comme défini, le recuit est le processus de chauffage et de maintien d'un métal à une température stabilisée tout en le refroidissant lentement. Le refroidissement lent permet aux particules de garder leur état proche de l'état d'énergie minimal. L'algorithme commence par générer une solution initiale aléatoire. Le schéma de cet algorithme est une variante de l'algorithme d'escalade. Tous les mouvements de descente pour l'amélioration de la perte de transmission (fonction objective) sont acceptés pour le décrétement de l'énergie du système. Afin d'échapper à l'optimum localisé, l'algorithme permet également un mouvement entraînant des mauvaises solutions (mouvements en montée) que la solution actuelle. Pour imiter l'évolution de l'algorithme, une nouvelle solution aléatoire  $X'$  est choisie dans le voisinage de la solution actuelle  $X$ . Si la modification de la fonction objective (ou de l'énergie) est négative ( $\Delta F \leq 0$ ), la nouvelle solution sera reconnue comme la nouvelle solution actuelle avec la propriété de transition  $pb(X')$  de 1. Si la modification n'est pas négative ( $\Delta F > 0$ ), la probabilité de faire la transition vers le nouvel état  $X'$  sera une fonction  $pb(\Delta F/CT)$  de la différence d'énergie  $\Delta F = F(X') - F(X)$  entre les deux états et une fonction du paramètre global dépendant du temps  $T$ . La nouvelle propriété de transition ( $pb(X')$ ) variant de 0 ~ 1 sera calculé par le facteur de Boltzmann  $pb(X') = \exp(-\Delta F / CT)$  comme indiqué dans l'équation 3.2 et 3.3 :

$$pb(X') = \begin{cases} 1, \Delta F \leq 0 \\ \exp\left(\frac{-\Delta F}{CT}\right), \Delta f > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Delta F = F(X') - F(X) \quad (3.3)$$

Où  $C$  et  $T$  sont la constante de Boltzmann et la température actuelle. De plus, par rapport à la nouvelle probabilité aléatoire de  $\mathit{rand}(0,1)$ , si la propriété de transition  $pb(X')$  est supérieure à un nombre aléatoire de  $\mathit{rand}(0,1)$ , la nouvelle solution (pire solution) qui résulte dans un état d'énergie plus élevé sera alors acceptée; sinon, il est rejeté. Chaque substitution réussie de la nouvelle solution actuelle conduira à la désintégration de la température actuelle comme :

$$T_{nouvelle} = kk * T_{ancienne} \quad (3.4)$$

Où  $kk$  est la vitesse de refroidissement.

Le schéma de l'optimisation par recuit simulé est décrit et représenté sur la Figure 3.14. Le processus est répété jusqu'à ce que le nombre prédéterminé ( $\mathit{iter}$ ) de la boucle externe soit atteint. Évidemment, l'effet des énergies de l'état sur l'évolution du système dépend de la température. L'évolution est sensible uniquement aux grandes variations d'énergie lorsque  $T$  est grand et à des variations plus fines lorsque  $T$  est petit.

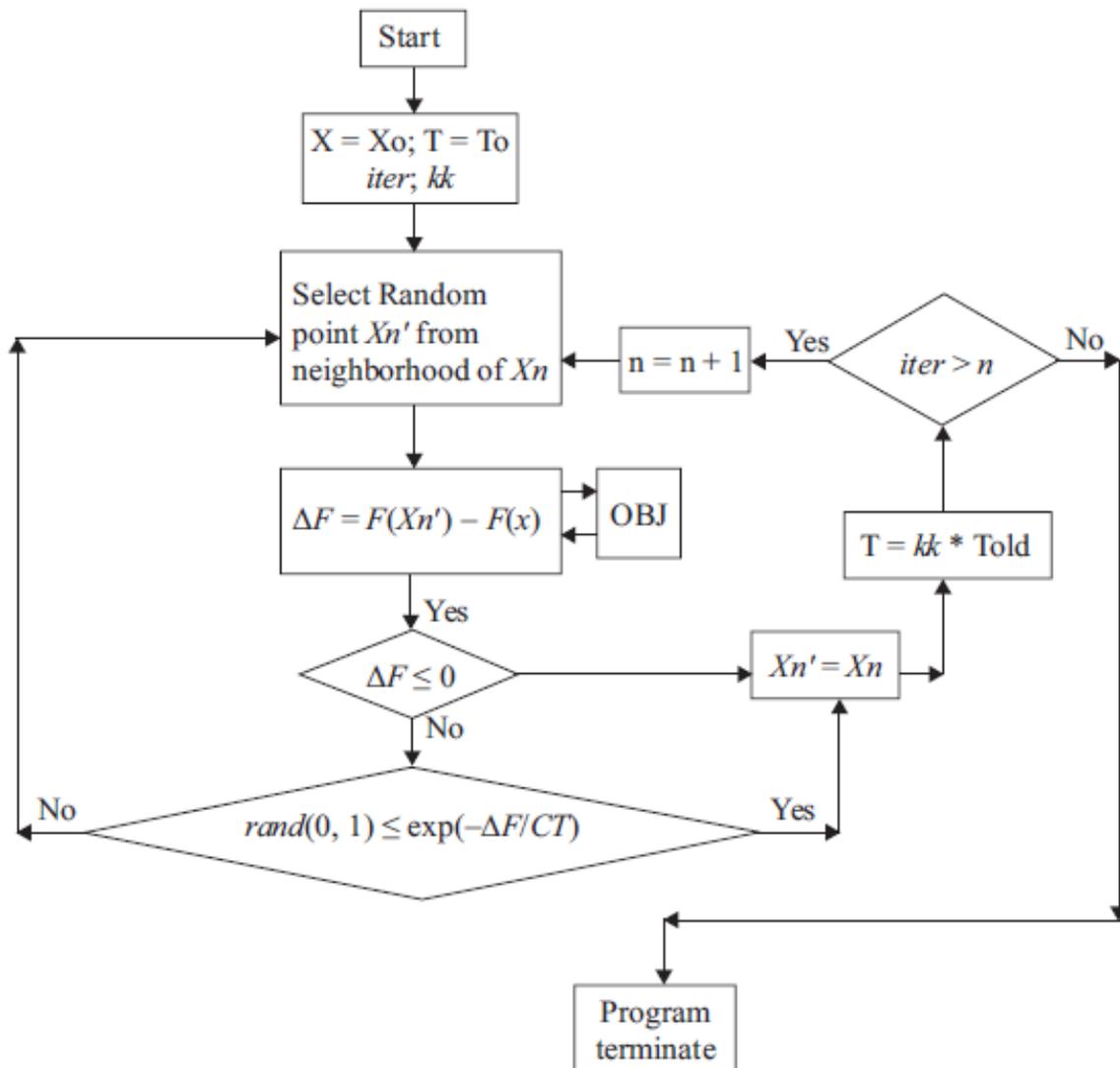


FIGURE 3.14- L'organigramme de l'optimisation par recuit simulé (Yeh L.J. and Chang M.C. 2005)

### 3.3 Algorithme d'acceptation de seuil (Threshold Acceptance)

La méthode d'acceptation par seuil (AS) est un algorithme métaheuristique. C'est une modification de l'algorithme Simulation de recuit (Bräysyeau O. and Berger J., 2003). Cette dernière méthode SR tire son analogie du processus de recuit des solides. Le solide est chauffé à haute température et refroidi progressivement pour cristalliser. Il doit être refroidi lentement de sorte que les atomes aient suffisamment de temps pour s'aligner afin d'atteindre un état d'énergie minimum. Cette analogie peut être utilisée dans les optimisations combinatoires avec les états du solide correspondant à la solution réalisable.

L'énergie dans chaque état correspond à la valeur de la fonction objective et l'énergie minimale représente la solution optimale (Metropolis A. and Rosenbluth, 1953). SR accepte toujours les mouvements vers des solutions voisines qui améliorent la valeur de la fonction objective. Plus précisément, la solution ( $S$ ) dans le voisinage  $N(S)$  est acceptée comme nouvelle solution actuelle si  $\Delta \leq 0$ , où  $\Delta = C(S') - C(S)$  dans laquelle  $C$  désigne la fonction objectif. Pour permettre à la recherche d'échapper à un optimum local, une approche stochastique est utilisée pour diriger la recherche.

Un mouvement qui aggrave la valeur de la fonction objective est accepté avec une probabilité  $e^{-\Delta/T}$  si  $\Delta > 0$ . Ou  $T$  est un paramètre appelé « Température ». La valeur de  $T$  varie d'une valeur relativement grande à une valeur faible proche de zéro. Une température initiale et une température d'optimisation sont choisies dans cet intervalle à chaque étape d'optimisation de l'algorithme. Cette méthode de sélection de température est identique à celle du processus de refroidissement du métal.

L'algorithme (AS) utilise une séquence déterministe prédéterminée pour décider si un nouveau point est sélectionné ou non (si plus mauvais que le point actuel), alors que la méthode Simulation de Recuit détermine de manière probabiliste une nouvelle sélection de points à chaque itération. Dueck et Scheurer (Dueck G. and Scheurer T., 1990) ont simplifié la procédure de Simulation de Recuit en excluant l'élément probabiliste et en acceptant des solutions plus mauvaises. Au lieu de cela, ils ont introduit un seuil déterministe ( $\tau$ ) et une mauvaise solution est acceptée si sa différence par rapport la solution en place est inférieure ou égale au seuil. La nouvelle procédure est appelée Acceptation par Seuil. Les composants clés de cette méthode sont la fonction  $g(t)$  qui détermine l'abaissement du seuil au cours de la procédure, les critères d'arrêt ainsi que les méthodes utilisées pour créer des solutions initiales et voisines. Les principaux avantages d'AS sont sa simplicité conceptuelle et ses excellentes performances sur différents problèmes d'optimisation combinatoire (Yagiura M. et Ibaraki T. , 2001).

L'algorithme d'acceptation de seuil (AS) est un algorithme de recherche locale. Il a été décrit par (Dueck G. and Scheurer T. 1990). La recherche locale classique commence par une solution acceptable aléatoire, puis elle explore son voisinage dans l'espace de solution en se déplaçant (habituellement aléatoirement) de sa position actuelle, en acceptant une nouvelle solution si seulement

cette dernière améliore la fonction objective. L'algorithme AS évite le problème de l'arrêt de la recherche dans les points minimums locaux en permettant des mouvements ascendants cela permet d'accepter de nouvelles solutions qui conduisent à des valeurs de fonctions objectives plus élevées. Cette méthode utilise une séquence déterministe prédéterminée pour décider si un nouveau point est sélectionné ou non (si pire que le point actuel), alors que la méthode de recuit simulé détermine de manière probabiliste une nouvelle sélection de points à chaque itération.

Pour mettre en œuvre l'AS, trois points doivent être spécifiés:

- La fonction objective  $F$ : Dans le cas des silencieux, elle correspond à la perte de transmission.
- La définition du voisinage (la fonction  $N$ ): Étant donné une solution candidate  $X^c$ , il faut définir comment passer de cette solution à une solution alternative plus proche  $X^n$ .
- Les seuils: Compte tenu du voisinage, il faut déterminer l'ampleur de la détérioration dans la fonction objective que l'algorithme devrait toujours accepter pour une nouvelle solution.

Le pseudo-code de l'AS peut être donné comme suit:

```

Initialiser  $\eta$ Rounds et  $\eta$ Steps
  Calcule la séquence seuil  $Tr$ 
  Générer de manière aléatoire la solution actuelle  $X^c \in X$ 
pour  $r = 1: \eta$ Rounds do
  pour  $i = 1: \eta$ Steps do
    Générer  $X^n \in N(X^c)$  et calculer  $\Delta = f(X^n) - f(X^c)$ 
    si  $\Delta < Tr$  alors  $X^c = X^n$ 
  fin de
fin de
1  $X^{sol} = X^c$ 

```

Ici,  $F$  est la fonction objective à minimiser.  $X^c$  désigne la solution actuelle,  $X^n$  est la solution «nouveau voisin», et  $X$  est l'ensemble des solutions acceptables. L'AS commence par une solution (aléatoire) acceptable. Compte tenu d'une séquence de seuil  $T$  de longueur  $\eta$ Rounds, on peut voir que l'algorithme accepte toujours une solution qui améliore la fonction objective  $F$ , les détériorations des objectifs ne sont acceptées que si elles ne sont pas pires qu'un seuil donné,  $Tr$ . Au fil du temps, le seuil diminue vers zéro, donc l'AS se transforme en une recherche locale classique.

### ***3.4 Conclusion***

Les algorithmes numériques sont des outils informatiques qui sont utilisés pour résoudre les problèmes mathématiques complexes. Dans ce chapitre, on a présenté les algorithmes d'optimisation géométriques des silencieux les plus utilisés dans ce domaine et qui sont l'algorithme génétique, le recuit simulé et l'algorithme d'acceptation de seuil. Ces outils sont utilisés pour optimiser la géométrie des silencieux afin d'avoir le maximum de perte de transmission acoustique. Ces différentes notions nous permettent d'entamer le quatrième chapitre qui est consacré à l'analyse numérique par éléments finis, qui nous permet d'analyser la performance acoustique des silencieux optimisés par algorithme numérique.

# Chapitre 4

## 4 Analyse numérique par éléments finis (MEF)

### Introduction

Dans ce chapitre on détaille la méthode d'analyse numérique appelée des éléments finis (MEF) utilisée dans l'acoustique des silencieux. L'objectif de l'utilisation de cette méthode est l'analyse de la performance acoustique des silencieux dont la géométrie est optimisée par algorithme numérique. L'outil numérique utilisé pour cette analyse, nommé COMSOL Multiphysics, comprend des codes d'analyse acoustique linéaire en 2D et en 3D avec et sans flux moyen. On détaillera aussi deux différentes formulations mathématiques et leurs caractérisations numériques. Ces formulations sont : la formulation classique en pression et la formulation mixte pression-vitesse. Nous développerons aussi les caractéristiques du milieu de propagation acoustique adopté avec la méthode des éléments finis ainsi que les conditions aux limites et le post-traitement. Enfin, nous terminerons ce chapitre par la méthode de calcul par éléments finis de la perte de transmission acoustique des silencieux.

La méthode des éléments finis consiste à chercher une solution approchée du problème dans des sous-espaces discrets de type éléments finis : mailles, en tenant compte des conditions aux limites du problème étudié. La solution acoustique est obtenue en résolvant un système algébrique d'équations linéaires correspondant au problème acoustique. C'est une méthode qui est d'autant plus précise que le nombre d'éléments est élevé. Il existe des critères de discrétisation qui permettent la convergence des résultats : le critère de six éléments linéaires par longueur d'onde est utilisé pour s'assurer de la convergence des résultats, ceci implique de choisir des éléments

dont la longueur est inférieure à la longueur d'onde divisée par six. Dans le cas des problèmes silencieux, c'est le fluide, généralement l'air, qui est discrétisé. Dans ce cas, les ondes qui s'y propagent sont des ondes acoustiques, le critère choisi est celui de l'utilisation de six éléments linéaires par longueur d'onde acoustique. En pratique, ce critère est formulé en termes de fréquence :

$$d \leq \frac{\lambda_{acoustique}}{6} = \frac{c}{6f} \quad (4.1)$$

Avec  $d$  taille élémentaire,  $c$  vitesse de l'onde et  $f$  la fréquence. D'après (4.1), on constate que plus on monte en fréquence, plus on augmente le nombre de nœuds (la taille élémentaire diminue), ce qui conduit à des temps de calcul énormes pour les grands problèmes. C'est pourquoi cette méthode est plus utilisée pour les basses et moyennes fréquences.

En acoustique, la méthode des éléments finis consiste à résoudre l'équation de Helmholtz dans des conditions spécifiques. La résolution par éléments finis de cette équation peut être réalisée suivant deux méthodes :

Une première méthode consiste à se fixer comme inconnues du problème, uniquement les pressions acoustiques complexes nodales, soit 1 degré de liberté par nœud; c'est celle que l'on qualifie de formulation aux éléments finis "classiques";

La deuxième méthode, dite aux éléments finis "mixtes", on se fixe comme inconnues à la fois les pressions acoustiques nodales et les 3 composantes de la vitesse vibratoire nodale, soit au total 4 degrés de liberté par nœud.

Pour connaître les chemins de propagation de l'énergie dans le fluide, on dispose de 2 grandeurs : l'intensité acoustique active  $I$  et l'intensité acoustique réactive  $J$  ; ces deux grandeurs sont définies comme :

$$I = \frac{1}{2}Re[pv^*] \text{ et } J = \frac{1}{2}Im[pv^*] \quad (4.2)$$

où  $v^*$  désigne le conjugué complexe de la vitesse vibratoire. Dans le cas de problème de réduction de bruit acoustique dans les silencieux. Le calcul de l'intensité acoustique par la méthode des éléments finis mixtes fournis des valeurs plus précises que la méthode classique. Ainsi, dans le cas mixte on assure la continuité des dérivées premières de la pression et non pas simplement la continuité de cette dernière. Cependant si elle est plus précise, la formulation mixte consomme en revanche plus de taille mémoire et de temps calcul, tout en gardant

l'avantage d'avoir, à nombre de degrés de liberté par longueur d'onde égale, une erreur relative toujours plus faible sur le calcul de l'intensité acoustique.

L'équation à résoudre est l'équation de Helmholtz:

$$(\Delta + k^2)p = s \quad (4.3)$$

$k$  désigne le nombre d'ondes; il peut être complexe ou réel, suivant que la propagation s'effectue ou non dans un domaine poreux :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (4.4)$$

$c$  désigne la célérité du son, qui peut être complexe dans le cas d'une propagation en milieu poreux.  $p$  est une grandeur complexe désignant la pression acoustique et  $s$ , également complexe, représente les termes sources du problème.  $\omega$  est un réel dans tous les cas, qui désignent la pulsation :

$$\omega = 2\pi f \quad (4.5)$$

$f$  est la fréquence de travail du problème harmonique. La Figure 4.1 représente le domaine confiné quelconque où s'applique l'équation de Helmholtz et les conditions aux frontières.

$\Omega$  est un domaine ouvert borné de  $\mathbf{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$  régulière, partitionnée en  $\partial\Omega_v$  et  $\partial\Omega_z$  :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_v \cup \partial\Omega_z \quad (4.6)$$

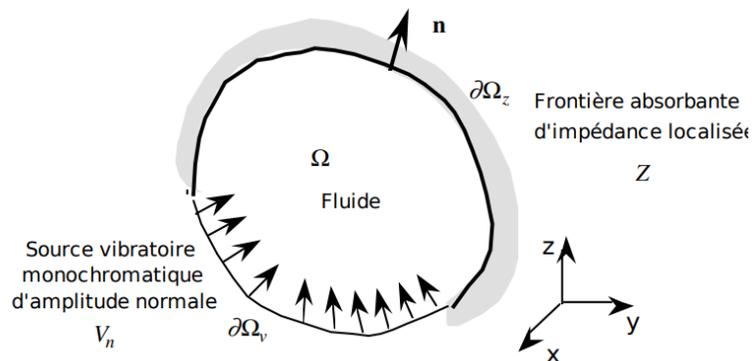


FIGURE 4.1 - Configuration du problème (Durand 2009)

L'équation de l'Helmholtz (4.3) est à résoudre dans un domaine clos  $\Omega$ . Les conditions aux limites à prendre en compte sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  s'expriment sous leur forme la plus générale comme :

$$\alpha p + \beta \frac{\partial p}{\partial n} = \gamma \quad (4.7)$$

$\partial/\partial n$  désigne l'opérateur de dérivée normale.  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des opérateurs complexes, qui peuvent être des scalaires, ou des opérateurs intégraux suivant que la frontière d'application de la condition à la limite est à réaction locale ou à réaction non locale (cas de l'interaction fluide-structure).

Les développements réalisés dans Comsol Multiphysics concernent uniquement des conditions à la limite à réaction locale, pour lesquelles les  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des scalaires ; les cas spécifiés sont les suivants :

-  $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$  qui désigne une frontière du domaine à vitesse vibratoire imposée. En effet, il existe une relation reliant le gradient de pression acoustique complexe à la vitesse vibratoire particulière complexe :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\omega\rho_0 V_n \quad (4.8)$$

$\rho_0$  désigne la masse volumique du fluide considéré, et on impose  $V_n$ , la vitesse vibratoire normale à la paroi ( $V_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à la frontière  $\partial\Omega$ ).

-  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$  concerne une frontière à impédance acoustique  $Z$  imposée. L'impédance acoustique  $Z$  est définie comme le rapport de la pression à la vitesse vibratoire particulière au voisinage de la paroi à impédance imposée :

$$Z = \frac{p}{V_n} \quad (4.9)$$

-  $\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma \neq 0$  représente le cas où l'on impose la pression acoustique  $p$  à une frontière (le plus souvent  $\gamma = 0$ , correspondant à  $p = 0$ ).

## 4.1 Formulation classique en pression

### 4.1.1 Formulation mathématique du problème

La procédure standard visant à poser le problème aux éléments finis classiques est la suivante : on suppose la solution du problème suffisamment régulière,  $p \in H^2(\Omega)$ . On multiplie l'équation :

$$(\Delta + k^2)p = 0 \quad (4.10)$$

par une fonction test  $\phi$ . On intègre sur  $\Omega$  et on utilise la formule de Green. La frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ , se subdivise en 2 zones, une zone à vitesse vibratoire imposée,  $\partial\Omega_v$ , et une zone à impédance acoustique imposée,  $\partial\Omega_z$ . L'équation obtenue peut être réécrite sous la forme :

$$\int_{\Omega} \left( \text{grad}(p) \cdot \text{grad}(\phi) - \frac{\omega^2}{c^2} p \cdot \phi \right) dV + j \int_{\partial\Omega_z} \frac{\rho_0 \omega}{Z} p \cdot \phi dS + j \int_{\partial\Omega_v} \rho_0 \omega V_n \cdot \phi dS = 0 \quad (4.11)$$

$dV$  représente un élément de volume différentiel dans  $\Omega$  et  $dS$  représente un élément de surface sur  $\partial\Omega$ . La vitesse vibratoire particulière est ensuite déterminée par :

$$v = \frac{j}{\rho_0 \omega} \text{grad}(p) \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Discrétisation par éléments finis

Dans le cas des éléments finis classiques, les intégrales élémentaires sont au nombre de quatre  $K^e, M^e, C^e, U^e$  suivant la décomposition indiquée en (4.15) ( $K^e$  est la matrice de rigidité,  $M^e$  la matrice de masse,  $C^e$  la matrice d'amortissement et  $U^e$  le vecteur source). Deux d'entre elles proviennent d'intégrales volumiques, les deux autres sont le résultat d'intégrales respectivement sur une surface vibrante et sur une surface à impédance imposée. On supposera que les coordonnées globales d'un élément peuvent s'écrire grâce à la donnée de  $m$  fonctions de forme élémentaire  $H_i$  :

$$OM = \sum_{i=1}^m H_i OM_i \quad (4.13)$$

On se donne en outre, des fonctions de base  $N_i$ , pour décrire la pression élémentaire. La pression à l'intérieur d'un élément pourra s'écrire :

$$p^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) P_i^e \quad (4.14)$$

Où  $P_i^e$  est la pression au nœud  $i$  de l'élément  $e$ . Dans le cas des éléments finis isoparamétriques, les fonctions de base  $N_i$  sont égales aux fonctions de forme  $H_i$ . Sur chaque élément du domaine, le problème aux éléments finis en pression s'écrit :

$$(K^e - \omega^2 M^e + j\omega C^e)_q (P^e)_1^q = -j\omega (U^e)_1^q \quad (4.15)$$

où  $(P^e)_1^q$  est la matrice colonne des valeurs nodales de la pression sur l'élément.

#### 4.1.2.1 La matrice de rigidité

La matrice de rigidité  $K^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\Omega^e} grad(p) \cdot grad(\phi) dV$

Elle admet comme terme général :

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \nabla N_i \nabla N_j dV \quad (4.16)$$

#### 4.1.2.2 La matrice de masse

La matrice de masse  $M^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} p \cdot \phi dV$

Elle admet comme terme général :

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} N_i N_j dV \quad (4.17)$$

### 4.1.2.3 4.1.1.3 La matrice d'amortissement

$C^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\partial\Omega_z^e} \frac{\rho_0}{Z} p \cdot \phi dS$

Elle admet comme terme général :

$$C_{ij}^e = \int_{\partial\Omega_z^e} \frac{\rho_0}{Z} N_i N_j dS \quad (4.18)$$

### 4.1.2.4 4.1.1.4 Le vecteur source

Le vecteur source  $U^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\partial\Omega_v^e} \rho_0 V_n p \cdot \phi dS$

Il admet comme terme général :

$$U^e = \int_{\partial\Omega_v^e} \rho_0 V_n N_i dS \quad (4.19)$$

## 4.2 Formulation mixte pression-vitesse

### 4.2.1 Expression mathématique du problème.

#### 4.2.1.1 Formulation locale

L'équation de Helmholtz (4.3) avec les conditions aux limites (4.5) se déduit en fait des équations locales ci-dessous :

$$\begin{aligned} i\omega\chi p + \operatorname{div} v &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ i\omega\rho_0 v + \operatorname{grad} p &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ v \cdot n &= \frac{1}{Z} p \quad \text{sur } \partial\Omega_z \\ v \cdot n &= V_n \quad \text{sur } \partial\Omega_v \end{aligned} \quad (4.20)$$

où  $\chi = 1/\rho_0 c^2$  est le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide. Le problème mathématique est le suivant: étant donné des fonctions  $Z \in L^\infty(\partial\Omega_z)$  et  $V_n \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_v)$ , trouver des fonctions  $p$  et  $v$  définies dans  $\Omega$  et à valeurs dans  $C$  vérifiant ces équations. Elles décrivent, en régime harmonique de pulsation, les petites fluctuations de pression  $p$  et de vitesse  $v$  à partir de l'état de repos (c.à.d. la pression acoustique et la vitesse particulière acoustique) d'un fluide

compressible homogène, isotrope, non visqueux, confiné dans  $\Omega$  et soumis à une distribution de vitesse normale  $V_n$  sur  $\partial\Omega_v$ .

$\rho_0$ ,  $\chi$  et  $c$  représentent respectivement la masse volumique, le coefficient de compressibilité adiabatique et la célérité du son relatif au fluide, en absence de perturbation acoustique ; le coefficient  $\alpha = 1/Z$  est l'admittance localisée du matériau constituant  $\partial\Omega_v$  à la pulsation considérée. Pour construire une méthode d'approximation par éléments finis de ce problème, il est nécessaire de le mettre sous une forme variationnelle.

#### 4.2.1.2 Formulation variationnelle mixte

On prend le premier produit scalaire de l'équation (4.20) dans  $L^2(\Omega)$  avec une fonction quelconque  $q$  dans  $H^1(\Omega)$  (c'est la fonction-test).

La formule de Green et le fait que  $v$  vérifie les conditions aux limites de (4.20) nous permettent d'aboutir à :

$$\int_{\Omega} i\omega\chi p q^* + \int_{\partial\Omega_z} \alpha p q^* - \int_{\Omega} v \cdot \text{grad} q^* = - \int_{\partial\Omega_v} V_n q^* \quad (4.21)$$

On procède de même avec l'équation (4.20) en prenant son produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  avec une fonction-test  $u$  quelconque dans  $(L^2(\Omega))^3$  on obtient :

$$\int_{\Omega} i\omega\rho_0 v \cdot u^* + \int_{\Omega} \text{grad} p \cdot u^* = 0 \quad (4.22)$$

A présent nous multiplions (4.20) par  $j\omega\rho_0$  et (4.21) par  $-j\omega\rho_0$ , puis nous faisons le changement de fonction :

$$j\omega v \ddot{\bar{v}} \quad (4.23)$$

Ainsi nous obtenons la formulation variationnelle mixte (4.24) ou  $(p, \bar{v}) \in X \times M$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} -\rho_0 v \cdot \text{grad } q^* - \omega^2 \int_{\Omega} 1/c^2 p q^* + j\omega \int_{\partial\Omega_Z} \rho_0 \alpha p q^* = -j\omega \int_{\partial\Omega_V} \rho_0 V_n q^* \quad \forall q \in X \\ \int_{\Omega} \rho_0^2 v \cdot u^* + \int_{\Omega} \rho_0 \cdot \text{grad } p \cdot \bar{u}^* = 0 \quad \forall \bar{u} \in M \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Où :  $X = H^1(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) ; \partial p / \partial x_i \in L^2(\Omega) \ i = 1,2,3\}$

et :  $M = (L^2(\Omega))^3 = \{\bar{v} = (\bar{v}_i) \ i = 1,2,3 ; \bar{v}_i \in L^2(\Omega)\}$

## 4.2.2 Discrétisation par éléments finis

Le domaine  $\Omega$  et ses frontières  $\partial\Omega_V$  et  $\partial\Omega_Z$  sont découpés en domaines et frontières élémentaires  $\Omega^e$ ,  $\partial\Omega_V^e$ ,  $\partial\Omega_Z^e$  sur lesquels sont calculées des intégrales élémentaires.

Pour représenter les champs de  $p^e$  et de  $v^e$  à l'intérieur de l'élément on utilise les mêmes fonctions de base  $N_i$ . A l'intérieur de chaque élément (comportant  $m$  nœuds) on écrit :

$$OM^e = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) OM_i^e \quad (4.25)$$

$$p^e = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) p_i^e \quad (4.26)$$

$$\bar{v}^e = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) \bar{v}_i^e \quad (4.27)$$

$\varepsilon, \eta, \xi$  sont les coordonnées curvilignes d'un élément tridimensionnel ;

$OM_i^e$  est le vecteur position du nœud  $M_i$  de l'élément  $e$  à  $m$  nœuds ;

$N_i$  ,  $i = 1 \ m$  sont les fonctions de base sur l'élément  $e$  ;

$\bar{v}_i^e$  est le vecteur 'accélération' au nœud  $M_i$  de l'élément  $e$  .

Dans ce cas le système d'équations (4.24) s'écrit matriciellement pour chaque élément  $e$  :

$$p^e \bar{v}^e K^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{u}^{e*} \end{bmatrix} - \omega^2 p^e \bar{v}^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{u}^{e*} \end{bmatrix} + j\omega p^e \bar{v}^e C^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{u}^{e*} \end{bmatrix} = -j\omega S^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{u}^{e*} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

où :

$$p^e \bar{v}^e = \begin{bmatrix} p^e \\ \bar{v}^e \end{bmatrix} = \{p_1^e, \bar{v}_{1x}^e, \bar{v}_{1y}^e, \bar{v}_{1z}^e, \dots, p_m^e, \bar{v}_{mx}^e, \bar{v}_{my}^e, \bar{v}_{mz}^e\}$$

$p^e \bar{v}^e$  est le vecteur solution dans l'élément  $e$ .

#### 4.2.2.1 La matrice de rigidité

$K^e$  est la matrice de 'rigidité' élémentaire, correspondant au calcul de la partie suivante de (4.24) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega^2} -\rho_0 \bar{v} \cdot \text{grad } q^* \\ \int_{\Omega^2} \rho_0^2 \bar{v} \cdot \bar{u}^* + \int_{\Omega^2} -\rho_0 \text{grad } p \cdot \bar{u}^* \end{cases} \quad (4.29)$$

On peut l'écrire en la décomposant en  $m \times m$  sous matrices  $K_{ij}^e$  de dimensions 4 x 4 comme ci-dessous :

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{11}^e & K_{11}^e \\ K_{i1}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{m1}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix} \text{ pour } i, j = 1, \dots, m \quad (4.30)$$

avec les termes suivants pour  $K_{ij}^e$ :

$$K_{ij}^e = \begin{pmatrix} 0 & -\int_{\Omega^2} \rho_0 \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j & -\int_{\Omega^2} \rho_0 \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j & -\int_{\Omega^2} \rho_0 \frac{\partial N_i}{\partial z} N_j \\ -\int_{\Omega^2} \rho_0 \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i & \int_{\Omega^2} \rho_0^2 N_i N_j & 0 & 0 \\ -\int_{\Omega^2} \rho_0 \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i & 0 & \int_{\Omega^2} \rho_0^2 N_i N_j & 0 \\ -\int_{\Omega^2} \rho_0 \frac{\partial N_j}{\partial z} N_i & 0 & 0 & \int_{\Omega^2} \rho_0^2 N_i N_j \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

### 4.2.2.2 La matrice de masse

$M^e$  est la matrice de 'masse' élémentaire, correspondant au calcul de :

$$\int_{\Omega} 1/c^2 pq^* \quad (4.32)$$

Ses coefficients sont les suivants :

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega} 1/c^2 N_i N_j \quad (4.33)$$

pour  $i, j=1, \dots, 4r-3, \dots, 4m-3$ , avec  $r=1, \dots, m$ . Les autres termes sont nuls

### 4.2.2.3 La matrice d'amortissement

$C^e$  est la matrice d'amortissement élémentaire, provenant du calcul de :

$$\int_{\partial\Omega_V^e} \rho_0 \alpha pq^* \quad (4.34)$$

Ses coefficients sont les suivants :

$$C_{ij}^e = \int_{\partial\Omega_V^e} \rho_0 \alpha N_i N_j \quad (4.35)$$

pour  $i, j=1, \dots, 4r-3, \dots, 4m-3$ , avec  $r=1, \dots, m$ . Les autres termes sont nuls.

### 4.2.2.4 Le vecteur source

$S^e$  est le vecteur 'source' élémentaire, représentant le calcul des termes :

$$\int_{\partial\Omega_Z^e} \rho_0 V_n q^* \quad (4.36)$$

Ses composantes sont les suivantes :

$$S_i^e = \int_{\partial\Omega_Z^e} \rho_0 V_n N_i \quad (4.37)$$

pour  $i, j = 1, \dots, 4r-3, \dots, 4m-3$ , avec  $r = 1, \dots, m$ . Les autres termes sont nuls

Après avoir obtenu le champ  $p, \bar{v}$  sur le domaine  $\Omega$  par résolution de l'équation (4.10) assemblée, on revient au champ  $p, v$  par le changement de fonction inverse; on peut calculer les intensités acoustiques définies par (4.2) qui sont dans ce cas continues dans tout le domaine  $\Omega$ .

### 4.3 Caractérisation du milieu de propagation et post-traitement

Avant la discrétisation par élément finis dans Comsol Multiphysics, on doit imposer des conditions aux limites aux domaines acoustiques étudiés. Il est nécessaire de donner la masse volumique (valeur réelle), les chargements imposés et la célérité de propagation (valeur complexe), on doit affecter des valeurs de vitesse vibratoire normale par face (ou arête en bidimensionnel) aux mailles définissant les frontières sources, et aussi des valeurs d'impédance acoustique par face (arête en bidimensionnel) aux mailles définissant les frontières à impédance imposée.

Le programme numérique commence à calculer les différentes matrices élémentaires (rigidité, masse et amortissement) ainsi que le vecteur élémentaire. Par la suite, les matrices globales assemblées sont calculées ainsi que le vecteur global du système. Comsol calcul de la solution et cela après assemblage des matrices et vecteur élémentaire, la solution harmonique peut se calculer directement après cette dernière étape.

A partir du résultat de la résolution de la transcription matricielle des équations (4.10) ou (4.23), les calculs éléments finis en post-traitement permettent d'obtenir les champs nodaux de la perte de transmission du silencieux étudié.

Dans COMSOL Multiphysics Chaque silencieux est simulé à l'aide d'un modèle tridimensionnel et est maillé à l'aide des éléments quadratiques de Lagrange. Une pression harmonique de **1Pa** est spécifiée à l'entrée du silencieux ainsi qu'une condition aux limites à rayonnement acoustique est appliquée à l'entrée et à la sortie. L'air circulant à l'intérieur du silencieux a une densité de **1,2 kg/m<sup>3</sup>** et une vitesse acoustique de **340 m/s**. L'amortissement acoustique n'est pas pris en compte dans cette simulation.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode des éléments finis utilisée en acoustique des silencieux. Nous avons détaillé la formulation classique en pression et la formulation mixte pression-vitesse ainsi que la caractérisation par éléments finis pour chacune de ces deux formulations. Par la suite, nous avons décrit les caractéristiques du milieu de propagation acoustique adopté avec cette méthode ainsi que les conditions aux limites associées. Enfin, nous avons expliqué comment l'outil numérique mesure la perte de transmission acoustique par la méthode des éléments finis.

Après avoir présenté, dans les chapitres précédents, la méthode de transfert de matrice, les algorithmes numériques d'optimisation de la perte de transmission acoustique des silencieux ainsi que la méthode d'analyse numérique par éléments finis nous terminons ces étapes par la présentation dans le chapitre qui suit les résultats de l'optimisation numérique ainsi qu'une analyse critique de ces résultats.

# Chapitre 5

## 5. Optimisation acoustique d'un silencieux : Résultats et discussion

### Introduction

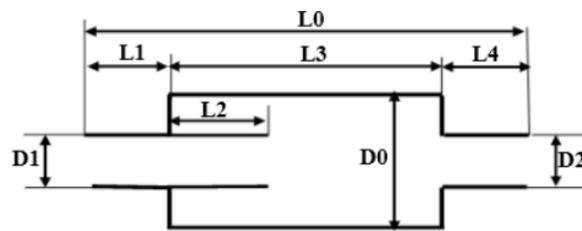
Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats d'optimisation acoustique de trois types de silencieux réactifs, avec des tubes étendus, sous contraintes géométriques. Un nouvel algorithme numérique appelé Acceptation de seuil est couplé à l'analyse par éléments finis en 3D pour effectuer cette étude, l'optimisation géométrique est réalisée dans le but de réduire le maximum le bruit dans les silencieux et cela en respectant une géométrie optimale sous des conditions spatiales limitées. L'algorithme numérique utilisé est basé sur la méthode de la matrice de transfert. Cette dernière permet de caractériser les différents paramètres acoustiques du silencieux étudié. Par la suite une analyse de la performance de l'optimisation géométrique est effectuée avec la méthode des éléments finis (MEF), l'analyse est effectuée sur les silencieux optimisés géométriquement et obtenus préalablement par l'algorithme d'acceptation de seuil.

### 5.1 Optimisation numérique

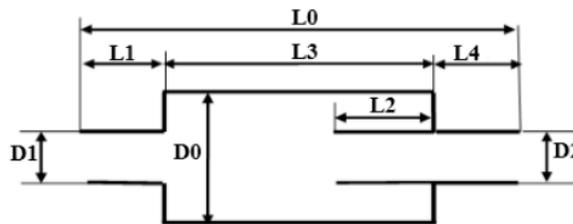
Ce travail est basé sur l'étude de la performance acoustique de trois types de silencieux à chambre d'expansion dotés de tubes prolongés à l'intérieur de ces chambres. Les silencieux étudiés ont une géométrie limitée dans l'espace. L'amélioration de la performance acoustique d'un silencieux est reliée à sa géométrie. Des algorithmes numériques pour l'optimisation de la géométrie sont utilisés afin d'obtenir une atténuation maximale du bruit. Une méthode d'optimisation de critère

d'acceptation déterministe nommé Acceptation par seuil (AS) combiné avec une analyse par EF est utilisée pour cette fin.

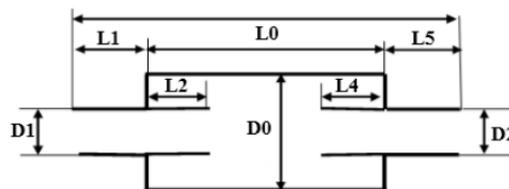
Les silencieux réactifs, adoptés pour la réduction du bruit, sont composés de trois types de silencieux à chambre d'expansion de grand diamètre dotée de tubes étendus soit à l'entrée et/ou à la sortie de la chambre ayant un diamètre plus petit comme illustré sur les Figures 5.1 (a), (b) et (c). Le premier type de silencieux a une chambre d'expansion dotée de deux tubes fixés à ses deux extrémités; le tube d'entrée du silencieux est prolongé à l'intérieur de la chambre. Le deuxième silencieux à un tube prolongé à la sortie de la chambre d'expansion. Le troisième silencieux est doté de tubes prolongés à l'entrée et à la sortie de la chambre d'expansion. Les différents éléments acoustiques caractérisant les silencieux (Pression acoustique  $p$  et vitesse acoustique de la particule  $u$ ) sont illustrés aux Figures 5.2 (a), (b) et (c). Ces éléments acoustiques sont représentés par sept nœuds pour les deux premiers silencieux et par huit nœuds pour le troisième type.



a- tube prolongé à l'entrée.



b- tube prolongé à la sortie



c- sur l'entrée et la sortie.

FIGURE 5.1 - Silencieux à chambre d'expansion et à tubes prolongés

Deux approches théoriques sont utilisées pour analyser la performance acoustique des trois silencieux à géométries limitées ( $L = 1,5 \text{ m}$ ,  $D_0 = 0,3$ ). Ces approches sont la puissance acoustique et la méthode de transfert de matrice. La performance acoustique la plus utilisée pour caractériser l'atténuation acoustique des silencieux est la perte de transmission acoustique (STL) qui est une valeur dépendant uniquement du silencieux et non de la source acoustique et elle est considérée comme le meilleur paramètre à utiliser lors de la comparaison entre les différentes méthodes et modèles numériques (Jones P.W. and Kessissoglou N.J., 2010). La méthode d'optimisation est développée dans ce travail à l'aide de l'outil de modélisation mathématique Matlab. Pour l'analyse par éléments finis (MEF) et la simulation numérique, un code de calcul standard appelé COMSOL Multiphysics Tools est utilisé pour cet effet.

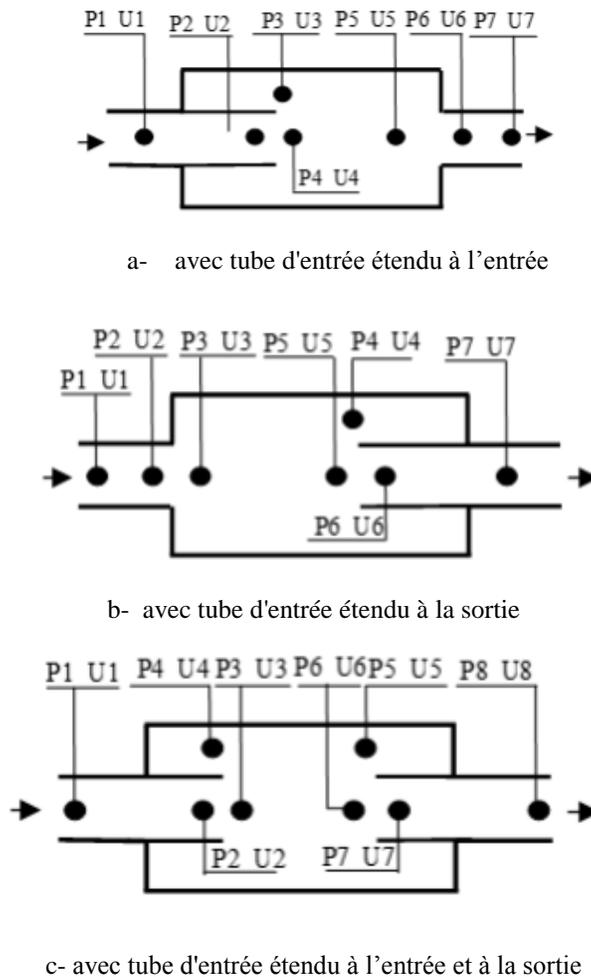


FIGURE 5.2- Croquis de la propagation de l'onde plane unidirectionnelle du silencieux à chambre d'expansion et tube

## 5.2 Évaluation numérique

### 5.2.1 Méthode d'optimisation géométrique

Un système de matrice à quatre pôles évaluant la performance acoustique (perte de transmission acoustique) est utilisé et dérivé en utilisant une méthode numérique découplée appelée méthode de transfert de matrice. Cette méthode utilise des matrices carrées pour relier deux variables aux plans de chaque côté d'une composante acoustique. Les matrices pour les composants individuels peuvent être facilement combinées pour former une matrice unique et globale qui décrit le comportement d'un système de silencieux multicomposants (Munjal M.L., 1997), (Munjal M.L. and Galitis A.G., 2005). Une méthode d'acceptation de seuil (AS), un algorithme d'optimisation de critères d'acceptation déterministe similaire au recuit simulé, est appliquée à l'optimisation des silencieux.

### 5.2.2 Formule théorique

La matrice carrée du système acoustique a deux variables (pression acoustique  $p$  et vitesse volumique  $u$ ) de chaque côté d'une composante acoustique (Davies, 1993), (Beranek, 1992). Pour décrire la propriété acoustique globale du silencieux, on doit relier toutes les matrices individuelles dans une matrice de transfert totale du système comme suit:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \quad (5.1)$$

La matrice de transfert générale suivante peut être écrite pour relier les variables d'état acoustiques des conduites droites pour les trois silencieux.

$$T_i = e^{-i \frac{M_i k L_i}{(1-M_i^2)}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{k L_i}{1-M_i^2}\right) & j \sin\left(\frac{k L_i}{1-M_i^2}\right) \\ j \sin\left(\frac{k L_i}{1-M_i^2}\right) & \cos\left(\frac{k L_i}{1-M_i^2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Pour les zones de contraction et d'expansion entre les tubes et la chambre d'expansion la matrice générale s'écrit :

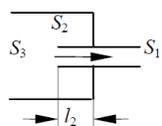
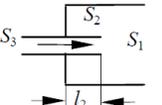
$$T'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{S_i}{S_i - 1} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Où  $T_i$ ,  $T'_i$ ,  $M$ ,  $k$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $j$  et  $i$  sont respectivement la matrice de transfert des conduits droits, la matrice de transfert des conduites de contraction / expansion, le nombre de Mach, le nombre d'ondes, la longueur de l'élément, Section de l'élément, l'imaginaire et  $i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  nœud. Pour le cas de discontinuité en coupe transversale, les éléments de transition utilisés sont représentés dans la première colonne du Tableau 5.1. En utilisant des valeurs d'indice d'élément décroissant à distance de la source de bruit, les zones transversales en amont et en aval de la transition ( $S_3$ ,  $S_2$  et  $S_1$ ) sont liées par:

$$C_1 S_1 + C_2 S_2 + S_3 = 0 \quad (5.4)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont sélectionnées pour satisfaire la compatibilité des zones transversales pendant la transition.

TABLEAU 5.1- Paramètres des valeurs des éléments de transition (Munjal M.L. 1997)

Element Type	$C_1$	$C_2$	$K$
	-1	-1	$1 - \frac{S_1}{S_3}$
	-1	1	$\left(\frac{S_1}{S_3} - 1\right)^2$

Le Tableau 5.1 montre également le coefficient de perte de pression  $K$  pour chaque configuration qui explique la conversion de l'énergie de flux moyen et de l'énergie acoustique en chaleur aux discontinuités. Comme indiqué, pour les zones à section contractée  $K \leq 0,5$ , alors que pour les zones à expansion de section  $K \rightarrow (S_1 / S_3)^2$  pour des valeurs élevées du ratio ( $S_1 / S_3$ ).

La matrice à quatre pôles des tubes droits avec changement de forme (discontinuités) (avec le nombre de Mach  $M = 0$ ) (Beranek, 1992) est donnée par :

$$T_{discontinue} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} & 0 \\ C_1 \left( -j \frac{C_0}{S_2} \cot kl \right) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Le calcul de la matrice de transfert pour le silencieux entier est réalisé sur la base des matrices individuelles qui relient la pression  $P$  et la vitesse acoustique  $V$  à l'entrée et à la sortie. Les matrices individuelles sont calculées séparément pour chaque secteur comme suit:

$$\begin{pmatrix} p_i \\ \rho_0 c_0 u_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_o \\ \rho_0 c_0 u_o \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  et  $T_{22}$  sont appelés les quatre pôles du système acoustique.

La perte de transmission acoustique STL d'un silencieux est calculée comme suit (Munjal M.L., 1987):

$$PTA(f, Q, R_1, R_2, R_3, R_4) = 20 \log \left[ \left[ \frac{Y_n}{Y_1} \right]^{1/2} \left| \frac{T_{11} + T_{12} Y_n + T_{21} Y_1 + T_{22} (Y_1 / Y_n)}{2} \right| \right] \quad (5.7)$$

Où  $Y_1$  est calculé pour le tuyau d'entrée et  $Y_n$  pour le tuyau de sortie.

$R_1 = D_1 / D_0$ ,  $R_2 = D_2 / D_0$ ,  $R_3 = L_3 / L_0$ ,  $R_4 = L_2 / L_0$ ,  $L_1 = 1/2 (L_0 - L_3)$ ,  $L_4 = 1/2 (L_0 - L_3)$ ,  $L_0 = L_1 + L_3 + L_5$

Et pour le silencieux d'entrée et de sortie:

$R_1 = D_1 / D_0$ ,  $R_2 = D_2 / D_0$ ,  $R_3 = L_3 / L_0$ ,  $R_4 = L_6 / L_0$ ,  $L_1 = 1/2 (L_0 - L_3)$ ,  $L_5 = 1/2 (L_0 - L_3)$ ,  $L_2 = 1/2 (L_3 - L_6)$ ,  $L_0 = L_1 + L_3 + L_5$

En raison de l'effet de tonalité remarquablement pur à 300 Hz, l'élimination du bruit à cette fréquence par l'optimisation géométrique est appliquée (Yeh L.J. and Chang M.C., 2005).

## 5.3 Résultats et discussion

### 5.3.1 Études de cas

Pour vérifier le modèle acoustique de perte de transmission basé sur la méthode de transfert de matrice, une comparaison est réalisée entre les données théoriques et expérimentales obtenues sur un modèle de silencieux ayant un tube étendu à l'entrée de la chambre d'expansion. Comme le montre la Figure 5.3 existe une cohérence entre les données théoriques et les données expérimentales. Par conséquent, le modèle de perte de transmission est acceptable et peut être appliqué sur les trois types de silencieux choisis. L'espace disponible sélectionné pour les silencieux choisis mesure 0,5 m de largeur, 0,5 m de hauteur et 1,5 m de longueur.

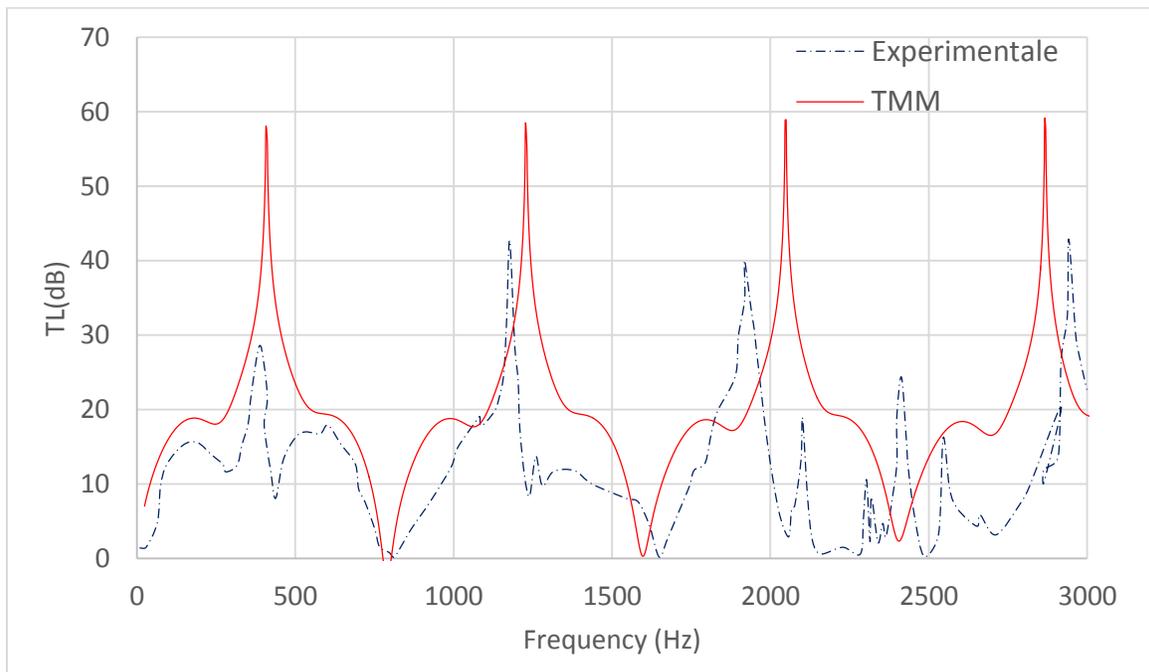


FIGURE 5.3- Courbes de performance de STL, comparaison entre le modèle théorique (MTM) et les valeurs expérimentales du silencieux de chambre d'expansion simple avec tube étendu

Pour obtenir les meilleures performances acoustiques dans un espace fixe, un bruit d'une tonalité pure à 300 Hz est appliqué aux silencieux. De plus, pour atteindre une probabilité de transition initiale de 0,5 de la méthode Acceptation par Seuil, la température initiale est choisie à  $T_i=0.2^\circ c$  et le débit ( $Q = 0,01m^3/s$ ) est préétabli à l'avance pour simplifier l'optimisation des silencieux (Chiu M.C. and Yeh L.J., 2009). Les limites géométriques sélectionnées pour les trois types de

silencieux sont les suivantes:  $R_1$ : [0.1, 0.5],  $R_2$ : [0.1, 0.5],  $R_3$ : [0.2, 0.8] et  $R_4$ : [0.2, 0.8]. Après l'optimisation de la géométrie, une analyse numérique par MEF en 3D est présentée pour chaque modèle pour évaluer la performance acoustique. Le solveur paramétrique utilisé fournit des résultats pour une gamme de fréquences données. Le code numérique calcule des intégrales dans les expressions mathématiques de la puissance à l'aide des conditions aux limites caractérisées par des variables intégrales d'accouplement. Par la suite, le code trace l'atténuation résultante par rapport à la fréquence.

### 5.3.2 Fonction objectif

La précision de l'optimisation par acceptation de seuil AS dépend de deux paramètres: le taux de refroidissement  $CR$  et le nombre d'itérations (Imax). Le processus d'optimisation par rapport aux fonctions objectives ( $Obj_1$ ,  $Obj_2$  et  $Obj_3$ ) s'effectue en modifiant ces paramètres. À partir des formules (6), (8) et (10), les fonctions d'objectifs et leurs plages sont réduites et réglées respectivement pour les trois silencieux :

$$Obj_1(X_1, X_2, X_3) = PTA(D_1, D_2, L_2) \quad (5.8)$$

$$Obj_2(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) = PTA(D_1, D_2, D_3, L_1, L_2, L_3, L_5) \quad (5.9)$$

$$Obj_2(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9) = PTA(D_1, D_2, D_3, D_4, L_1, L_2, L_3, L_5) \quad (5.10)$$

3)

## 5.4 Optimisation de la géométrie des silencieux

Pour les trois silencieux étudiés, l'optimisation géométrique est réalisée en testant différents ensembles de paramètres par rapport à la tonalité pure de 300 Hz. Après cette étape, le STL est calculée en fonction de différents tons purs (300Hz, 500Hz, 700Hz et 800Hz) en utilisant la conception optimale obtenue par méthode d'optimisation afin de voir l'influence de la variation de la tonalité sur l'efficacité acoustique des silencieux étudiés. Suite au processus d'optimisation, une analyse par la méthode des éléments finis est abordée. L'analyse de simulation commence par l'application des conditions aux limites requises, puis le maillage avec une maille grossière prédéfinie de 0,25 mm sur l'échelle de la direction  $x$ .

### 5.4.1 Premier cas : Silencieux à chambre d'expansion avec tube étendu à l'entrée

La première étape du processus d'optimisation du premier modèle de silencieux est réalisée par l'algorithme AS. Le résultat d'optimisation est présenté dans le Tableau 5.2. La conception optimale est obtenue à la vitesse de refroidissement  $CR = 0,99$  et à une itération maximale de 2500.

TABLEAU 5.2- Perte de transmission acoustique du silencieux ayant une chambre à expansion et un tube étendue à l'intérieur de la chambre (Tonalité ciblée de 300 Hz)

Cas	Paramètres AS	Résultats				
		R1	R2	R3	R4	STL (dB)
1	CR = 0.90 Imax = 250	0,213580756	0,202902009	0,795782821	0,781371602	20,56
2	CR = 0.93 Imax = 250	0,202115091	0,201711434	0,754368947	0,784125799	20,84
3	CR = 0.96 Imax = 250	0,201675088	0,201648677	0,759723156	0,799370566	20,96
4	CR = 0.99 Imax = 250	0,200000412	0,200000004	0,799999932	0,799993991	21,39
5	CR = 0.99 Imax = 400	0,200000297	0,20000003	0,799999879	0,798941011	21,38
6	CR = 0.99 Imax = 800	0,200002602	0,200875503	0,730584904	0,759254063	20,70
7	CR = 0.99 Imax = 1500	0,200090707	0,200030674	0,798613086	0,799459378	21,37
8	CR = 0.99 Imax = 2500	0,2	0,2	0,799999989	0,8	21,39
9	CR = 0.99 Imax = 6000	0,200000024	0,200000003	0,799999982	0,799999802	21,38
10	CR = 0.99 Imax = 10000	0,20010711	0,200000046	0,799996472	0,799834974	21,38

Ce résultat révèle que l'état minimal est atteint à la vitesse maximale de refroidissement la Figure 5.4 illustre le spectre de la STL par rapport à la fréquence pour différents cas de conception optimisée. Le graphe montre que les valeurs STL sont approximativement maximisées aux fréquences souhaitées et que les valeurs les plus élevées des paramètres  $CR$  et  $I_{max}$  ont donné la STL la plus élevée. Par conséquent, la méthode de variation de ces deux paramètres joue un rôle essentiel dans l'optimisation avec AS et l'utilisation de cette méthode pour trouver la meilleure solution de conception est fiable.

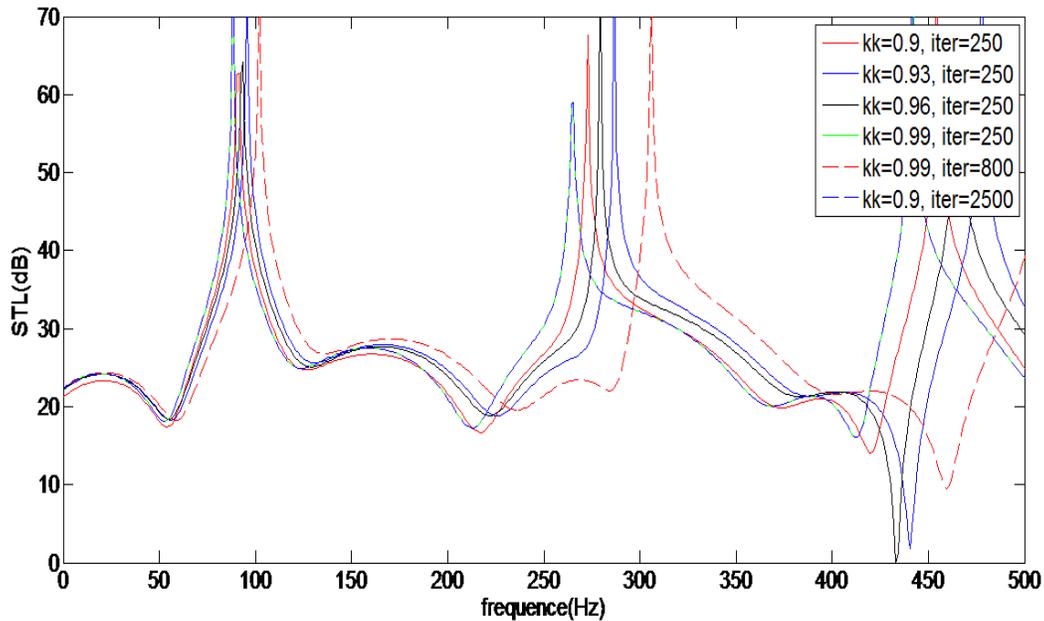


FIGURE 5.4 - Courbes de performance de perte de transmission STL par rapport à  $(I_{max})$  par AS [ $T_0 = 0.2$ ]

La deuxième étape consiste à mesurer la STL du silencieux optimisé par rapport à diverses tonalités de fréquences pures. Le Tableau 5.3 détaille les résultats obtenus de la STL en fonction des fréquences croissantes, ces résultats sont illustrés par un graphe représentant la perte de transmission acoustique en fonction des fréquences à la Figure 5.5.

TABLEAU 5.3 - Perte de transmission acoustique d'une seule chambre d'expansion par rapport à différentes fréquences ciblées ( $CR = 0,99$ ,  $I_{max} = 2500$ )

Cas	Fréquence	Résultats				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	300 Hz	0,20010935	0,20002373	0,79999829	0,79634202	22,11
2	500 Hz	0,2	0,2	0,8	0,8	25,68
3	700 Hz	0,23791322	0,46730982	0,78741544	0,64434888	115,50
4	800 Hz	0,240834641	0,200736224	0,798729653	0,555818811	119,69

Ce résultat d'optimisation révèle que l'augmentation de la tonalité augmente la largeur des bandes de fréquences. Les STL augmentent avec l'accroissement des fréquences et elles sont maximisées aux fréquences souhaitées.

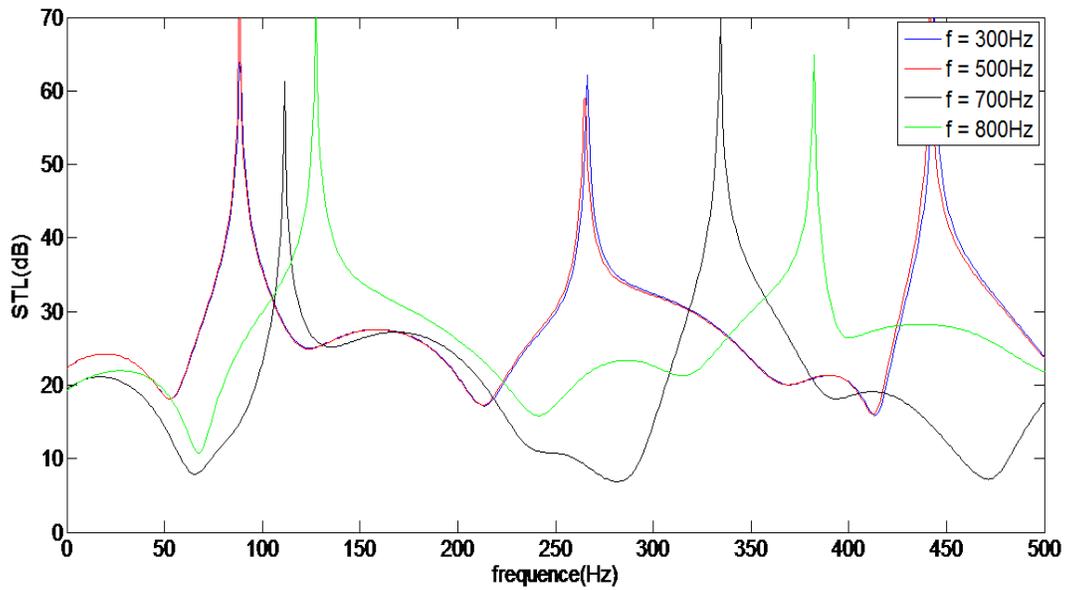


FIGURE 5.5 - Perte de transmission STL par rapport aux fréquences d'une chambre d'expansion unique pour différentes tonalités pures [Fréquence ciblée: 300, 500, 700 et 800 Hz]

L'analyse en 3D des modes de propagation acoustiques est effectuée sur le silencieux à géométrie optimisée par rapport à la tonalité de 2000 Hz. La Figure 5.6 affiche la distribution de la pression acoustique à l'intérieur du silencieux à une tonalité de 2000 Hz.

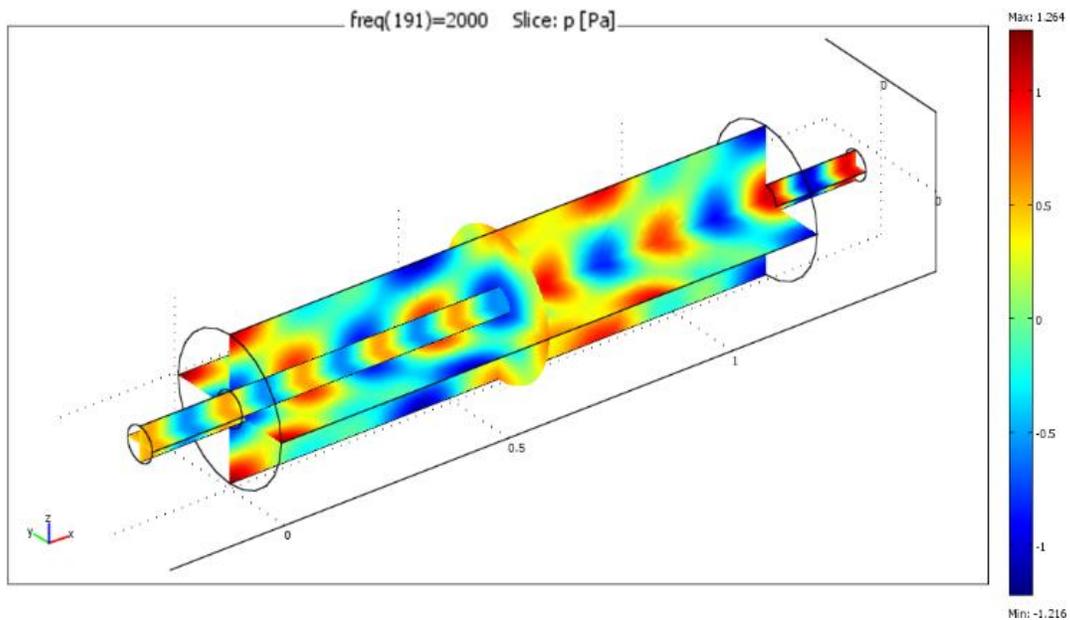


FIGURE 5.6 - Modèle EF optimisé du silencieux de chambre à expansion unique avec tube d'entrée étendu et distribution de pression acoustique interne à 2000 Hz

On note que le champ de pression varie principalement avec la direction  $y$  tandis qu'il est presque constant dans la direction  $z$ . La raison en est que la tonalité de 2000 Hz est juste supérieure à la fréquence de coupure pour le premier mode de propagation symétrique excité par l'onde entrante dans le silencieux.

On observe également que les fréquences sélectionnées sont importantes dans la répartition des niveaux de pression acoustique près de l'entrée et de la sortie du silencieux. La Figure 5.7 trace la perte de transmission théorique STL calculée par la méthode de matrice de transfert et la solution EF basée sur la méthode de puissance acoustique. Il est remarquable que la solution EF ait une limite supérieure de fréquence pour sa validité, cette limite est la fréquence de découpage qui définit la plage de fréquences où seules les ondes planes peuvent se propager, au-dessus de cette fréquence, des modes plus élevés peuvent se propager.

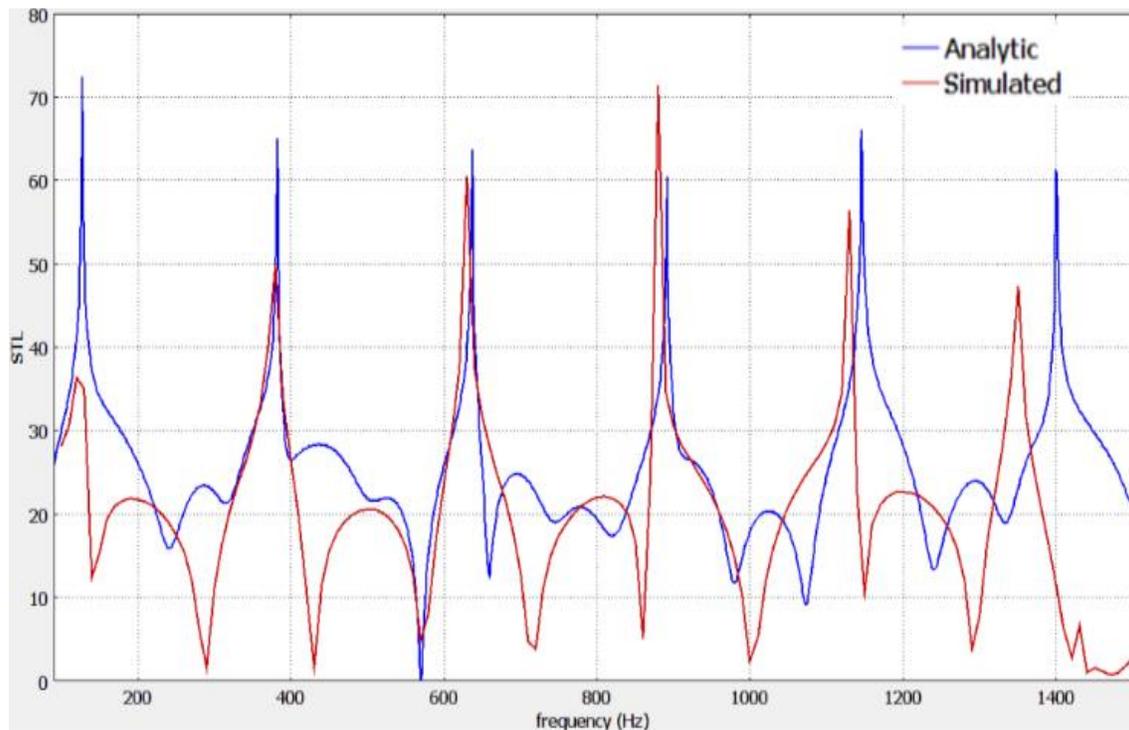


FIGURE 5.7- Perte de transmission du silencieux STL par rapport à la fréquence du silencieux de chambre à expansion unique avec tube d'entrée: solution théorique (ligne bleue) et solution simulée (ligne rouge)

À des fréquences supérieures à environ 1400 Hz, le comportement des courbes est plus compliqué et il y a généralement moins d'amortissement. Pour de telles fréquences, le tube supporte non seulement les résonances longitudinales, mais aussi les modes de propagation transversale. On constate aussi qu'il existe une divergence entre la solution théorique et la

solution EF même en dessous de la fréquence de coupure, cet écart est dû aux matrices de transfert élémentaires qui dépendent de la géométrie de l'élément modélisé. La perte de transmission acoustique est indépendante de la source et nécessite une terminaison anéchoïque à l'extrémité aval du silencieux. La méthode de matrice de transfert n'implique ni la source ni l'impédance de radiation de la terminaison, alors que la méthode de la puissance acoustique dépend uniquement de la source sonore et ne permet pas d'obtenir les matrices de transfert du système acoustique. Les différences obtenues dans les résultats peuvent également être attribuées à la formulation d'éléments finis utilisée dans la méthode de simulation (éléments de Lagrange) et la méthode de calcul de densité et du raffinement du maillage.

### 5.4.2 Deuxième cas : Silencieux de chambre d'expansion avec tube étendu de sortie

L'optimisation géométrique du deuxième modèle de silencieux, caractérisé par une chambre d'expansion est un tube étendu du côté sortie, est réalisée par l'algorithme acceptation par seuil AS avec différents paramètres pour une tonalité pure de 300 Hz. Le résultat d'optimisation est indiqué dans le Tableau 5.4.

TABLEAU 5.4 - La perte de transmission optimale pour un double silencieux de chambre d'expansion à divers CR et  $I_{max}$  (tonalité ciblée de 300 Hz)

Cas	Paramètres AS	Résultats				
		R1	R2	R3	R4	STL (dB)
1	$CR = 0.90$ $I_{max} = 250$	0,203970327	0,201331047	0,558524911	0,543257189	45,88
2	$CR = 0.93$ $I_{max} = 250$	0,200021583	0,200056361	0,799954532	0,792637646	49,31
3	$CR = 0.96$ $I_{max} = 250$	0,202802328	0,201578411	0,743689134	0,582243506	47,86
4	$CR = 0.99$ $I_{max} = 250$	0,200001586	0,200065207	0,799935022	0,799861406	49,34
5	$CR = 0.99$ $I_{max} = 400$	0,200181749	0,200032438	0,774090819	0,710186438	48,81
6	$CR = 0.99$ $I_{max} = 800$	0,200259589	0,200027709	0,725326708	0,798266388	48,77
7	$CR = 0.99$ $I_{max} = 1500$	0,200000723	0,200001383	0,794550818	0,79040532	49,27
8	$CR = 0.99$ $I_{max} = 2500$	0,20000004	0,200366626	0,799441375	0,799332283	49,31
9	$CR = 0.99$ $I_{max} = 6000$	0,200014056	0,20000011	0,799806204	0,798318742	49,33
10	$CR = 0.99$ $I_{max} = 10000$	0,200001007	0,200000002	0,799986738	0,799974136	49,34

La géométrie optimale est obtenue à la vitesse de refroidissement  $CR = 0,99$  correspondant à une itération  $I_{max}=10000$ . Ce résultat indique que l'état minimal est atteint à une vitesse de refroidissement la plus élevée. La performance acoustique mesurée par la STL en fonction de la fréquence est présentée et tracée dans la Figure 5.8.

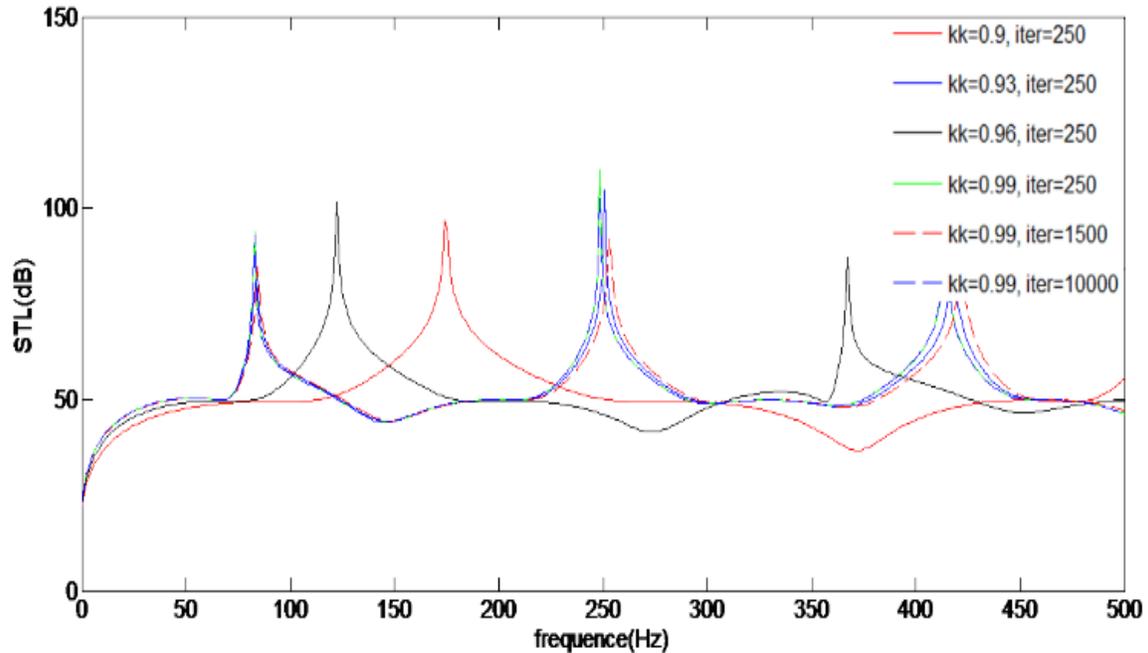


FIGURE 5.8- Courbes de performance de STL par rapport à différentes ( $I_{max}$ ) par TA [ $T_0 = 0.2$ ]

De toute évidence, les résultats ont révélé que les valeurs les plus élevées de  $CR$  et  $I_{max}$  donnaient la STL la plus élevée, ainsi la STL est maximisée par rapport aux fréquences souhaitées. À des fréquences plus élevées, le comportement des courbes est plus complexe.

Après cette étape d'optimisation, la conception optimale, selon différentes tonalités, est mesurée. Le résultat obtenu est résumé dans le Tableau 5.5 et les courbes STL optimales par rapport aux fréquences ciblées sont tracées et représentées sur la Figure 5.9.

TABLEAU 5.5 - La perte de transmission optimale pour une double chambre d'expansion par rapport à diverses fréquences ciblées ( $CR = 0,95$ ,  $I_{max} = 50000$ )

Cas	Fréquence	Résultats				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	300 Hz	0,200006541	0,200000986	0,799564675	0,799695519	50,09
2	500 Hz	0,2	0,2	0,8	0,8	53,64
3	700 Hz	0,236345991	0,20385864	0,653122383	0,776829314	141,22
4	800 Hz	0,212167477	0,271589061	0,797512162	0,55666418	167,92

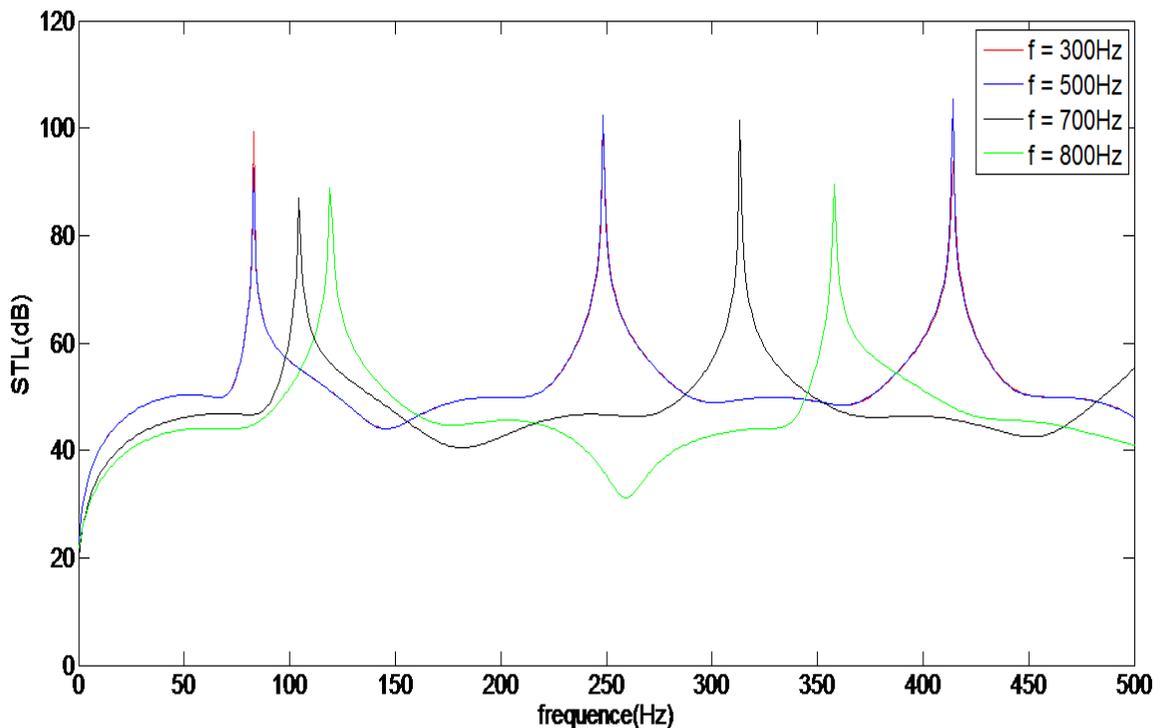


FIGURE 5.9 - STL par rapport aux fréquences d'un double silencieux à chambre d'expansion pour différentes tonalités pures [Fréquence ciblée: 300, 500, 700 et 800 Hz]

On constate que les niveaux de STL augmentent dans les basses fréquences alors qu'ils diminuent en hautes fréquences. Il montre que les STL sont précisément maximisées aux fréquences sélectionnées. L'analyse 3D des modes de propagation est effectuée sur le silencieux géométriquement optimisé par rapport à la tonalité pure de 1600 Hz. Le résultat de cette simulation est illustré à la Figure 5.10. On remarque que, pour les fréquences sélectionnées, la répartition du niveau de pression acoustique près de la sortie du silencieux est importante.

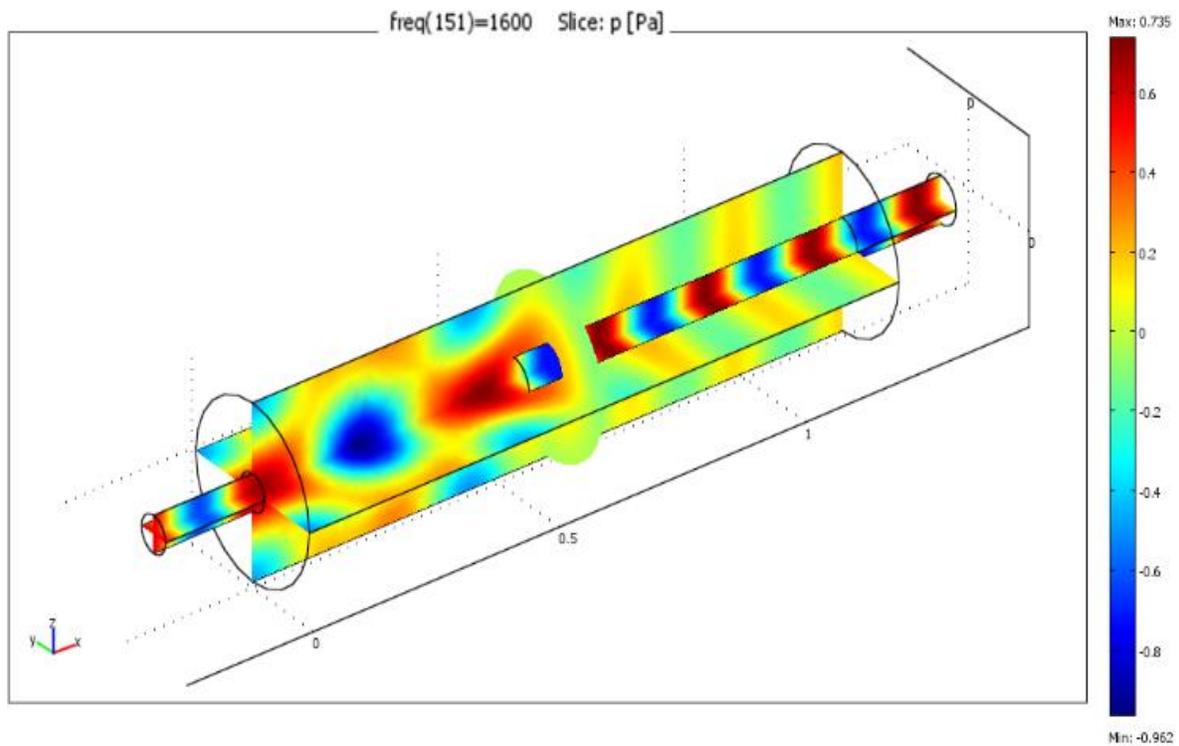


FIGURE 5.10- Modèle EF optimisé du silencieux d'une chambre d'expansion et de la distribution interne de la pression acoustique à 1600Hz (pression absolue)

La Figure 5.11 trace la perte de transmission théorique STL et la solution numérique, résolue par éléments finis (MEF), en fonction de la fréquence. On observe un écart entre les courbes analytiques et simulées est plus élevé que celles du premier modèle de silencieux étudié caractérisé par un tube étendu à l'entrée de la chambre d'expansion. On note également que la solution EF présente une limite de fréquence supérieure pour sa validité, qui est d'environ 1500 Hz. Cette limite est la fréquence de coupure définie précédemment.

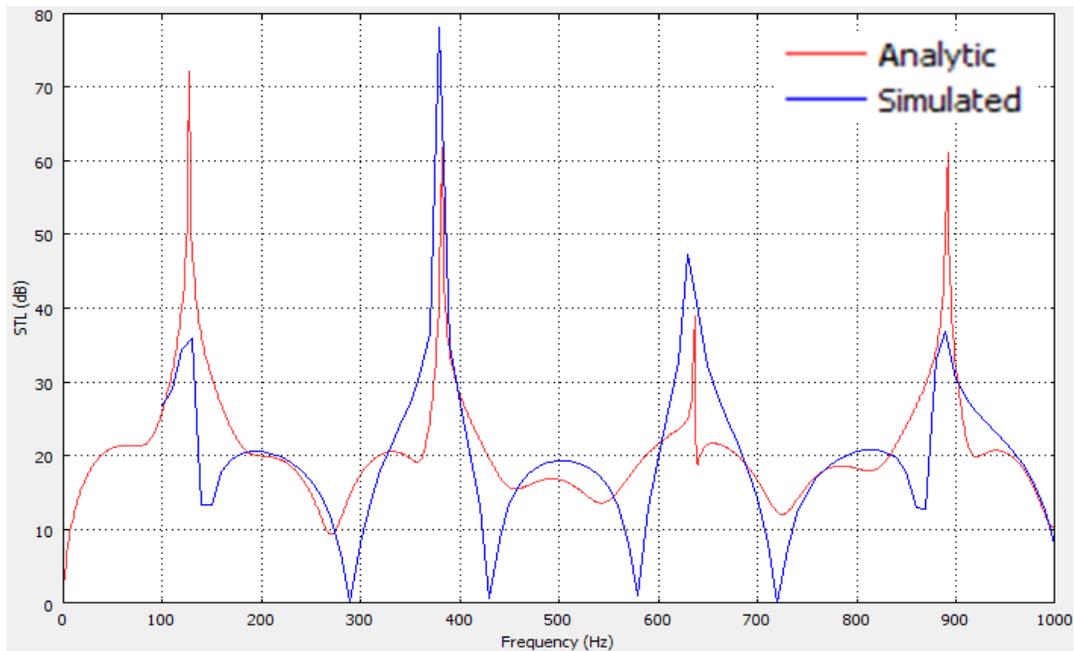


FIGURE 5.11 - Silencieux à chambre à expansion unique avec tube étendu de sortie, perte de transmission par rapport à la fréquence (solution théorique (ligne bleue) et solution simulée (ligne rouge))

### 5.4.3 Troisième cas : Silencieux de chambre d'expansion avec tube étendu d'entrée et de sortie

Le Tableau 5.6 présente le résultat de l'optimisation géométrique par AS du troisième type de silencieux étudié caractérisé par une chambre d'expansion avec deux tubes étendus un à l'entrée et l'autre à la sortie de la chambre pour une pure tonalité de 300 Hz.

TABLEAU 5.6 - La perte de transmission optimale pour un double silencieux de chambre d'expansion à divers  $CR$  et  $I_{max}$  (tonalité ciblée de 300 Hz)

Cas	Paramètres AS	Résultats				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	$CR = 0.90, I_{max} = 250$	0,493648572	0,200000002	0,7995986	0,318039144	21,31
2	$CR = 0.93, I_{max} = 250$	0,20040704	0,200000006	0,799314016	0,380509568	21,38
3	$CR = 0.96, I_{max} = 250$	0,49057417	0,200938109	0,796665887	0,358804594	21,11
4	$CR = 0.99, I_{max} = 250$	0,203700732	0,200000011	0,793509973	0,302309052	21,62
5	$CR = 0.99, I_{max} = 400$	0,202774242	0,200670458	0,779143091	0,355654907	21,29
6	$CR = 0.99, I_{max} = 800$	0,200927913	0,200172399	0,799162089	0,30012868	21,65
7	$CR = 0.99, I_{max} = 1500$	0,200775342	0,2	0,79999581	0,301296387	21,67
8	$CR = 0.99, I_{max} = 2500$	0,200003813	0,2	0,799782514	0,300023475	21,67
9	$CR = 0.99, I_{max} = 6000$	0,200037701	0,200000069	0,799983124	0,30018866	21,67
10	$CR = 0.99, I_{max} = 10000$	0,2	0,2	0,799999999	0,3	21,68

Comme indiqué, les données de la géométrie optimale est obtenues à la vitesse de refroidissement  $CR = 0,99$  et une itération maximale de 10000. Cela montre que l'état minimal est atteint à la vitesse de refroidissement plus élevée. La performance acoustique de STL (par rapport à la fréquence dans différents cas de conception) est présentée et tracée dans la Figure 5.12.

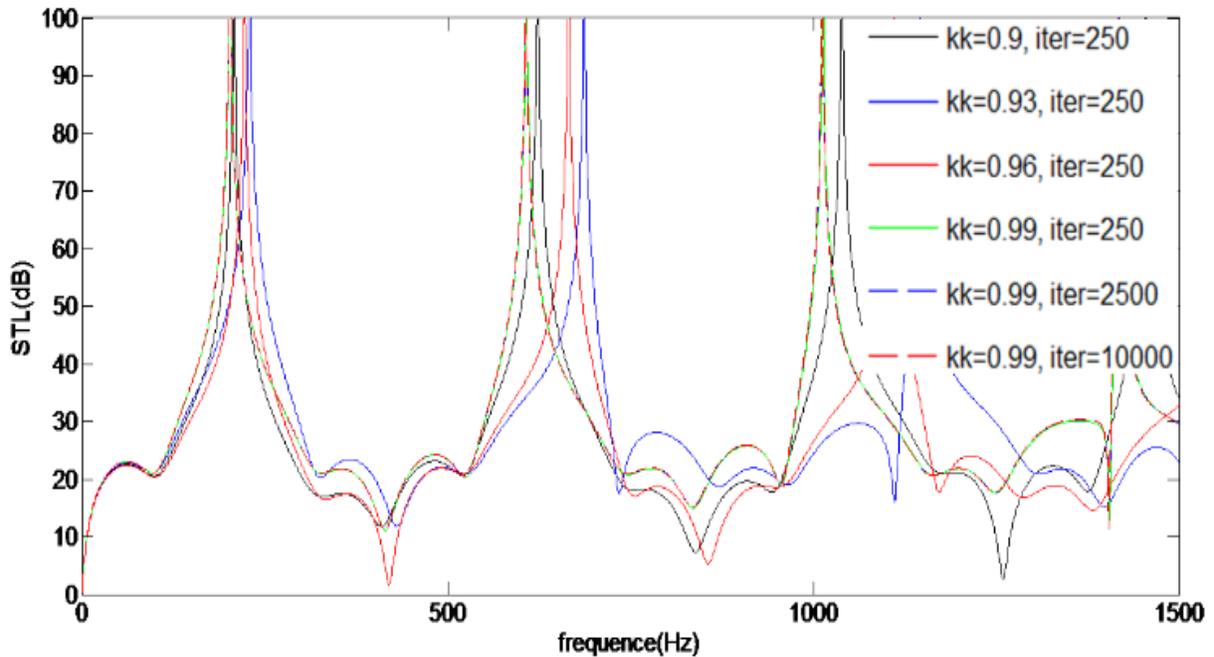


FIGURE 5.12 - Courbes de performance de STL par rapport à différentes ( $I_{max}$ ) par AS [ $T_o = 0.2$ ]

De toute évidence, les résultats révèlent que les valeurs maximales les plus élevées ( $CR$  et  $I_{max}$ ) donnent les STL les plus élevées et elles sont approximativement maximisées aux fréquences souhaitées. À une fréquence supérieure, le comportement des courbes est plus compliqué. La STL du silencieux à géométrie optimisée en fonction de différentes tonalités est résumée dans le Tableau 5.7. Les courbes STL par rapport aux fréquences ciblées sont tracées et représentées dans la Figure 5.13.

TABLEAU 5.7 - La perte de transmission optimale pour une double chambre d'expansion par rapport à diverses fréquences ciblées ( $CR = 0,95$ ,  $I_{max} = 50000$ )

Cas	Fréquence	Résultats				
		R1	R2	R3	R4	STL (dB)
1	300 Hz	0,200378869	0,200005517	0,799887167	0,300417339	22,49
2	500 Hz	0,200004147	0,200002545	0,61423464	0,300032686	23,14
3	700 Hz	0,200428366	0,200205034	0,799994563	0,300055346	23,25
4	800 Hz	0,20000481	0,20001244	0,799999553	0,300006166	28,62

On constate que les niveaux de perte de transmission augmentent dans les basses fréquences et elles sont précisément maximisées aux fréquences sélectionnées, alors que ces niveaux diminuent pour les hautes fréquences. Après cela, l'analyse 3D des modes de propagation est effectuée sur le silencieux à géométrie optimisée correspondante par rapport à la tonalité pure de 2820 Hz.

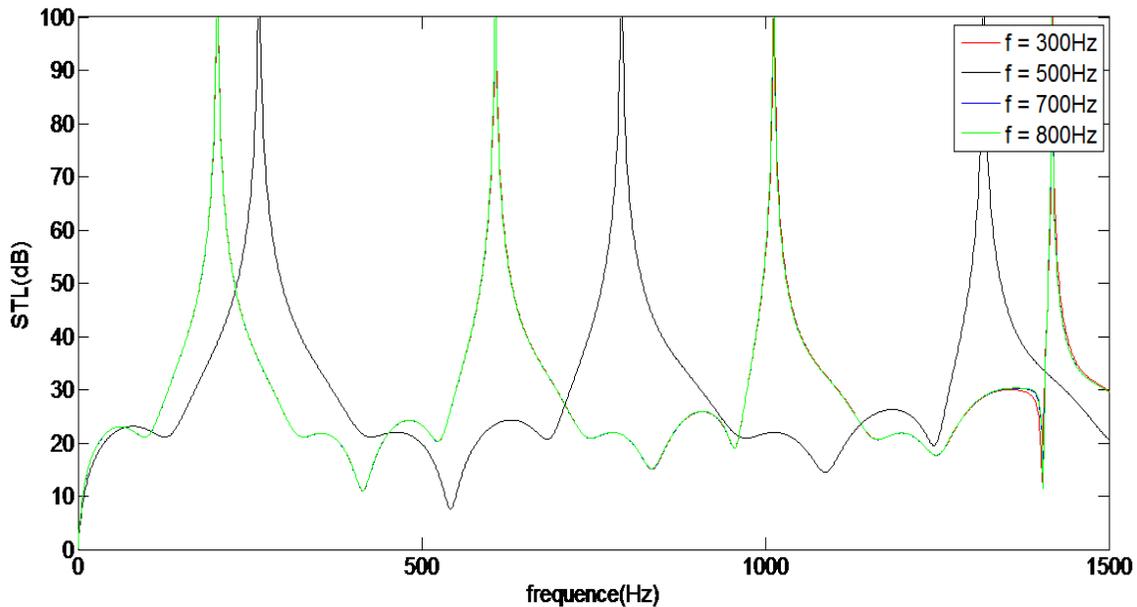


FIGURE 5.13 - STL en ce qui concerne les fréquences du silencieux de la chambre d'expansion avec tube étendu d'entrée et de sortie pour différentes tonalités pures [Fréquence ciblée: 300, 500, 700 et 800 Hz]

La Figure 5.14 montre la distribution interne de la pression acoustique à 2820 Hz du silencieux, on observe comment le niveau de pression acoustique est supérieur à celui des deux premiers modèles étudiés. On peut également observer que les distributions du niveau de pression acoustique près de la sortie du silencieux sont importantes.

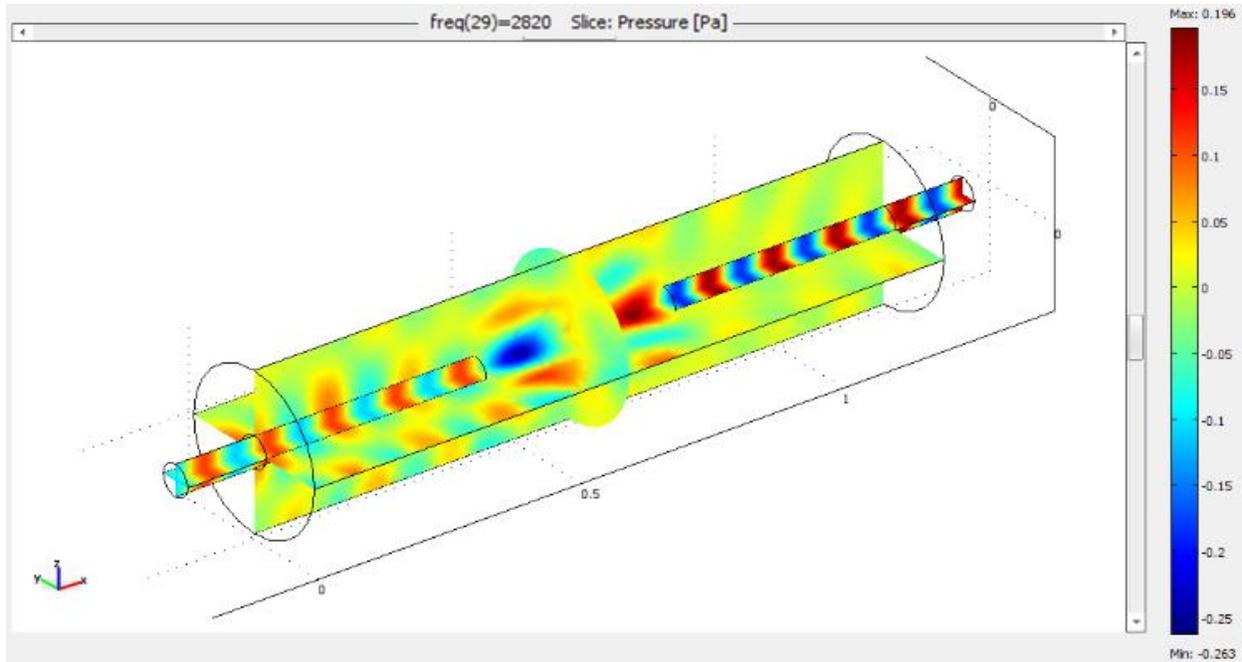


FIGURE 5.14- Modèle MEF optimisé du silencieux d'une chambre d'expansion et distribution de pression acoustique interne à 2820Hz (pression absolue)

La Figure 5.15 trace la perte de transmission théorique et la solution de simulation par MEF en fonction de la fréquence. La solution MEF a une limite de fréquence supérieure pour sa validité. Cette limite est la fréquence de coupure définie précédemment, on observe un écart entre les courbes analytiques et simulées cela est dû aux résultats théoriques basés sur la méthode de transfert de matrice qui dépendent de l'élément géométrique modélisé et non de la source acoustique alors que la solution MEF repose sur la méthode de puissance acoustique et ne dépendent que de la source acoustique et ne permettent pas d'obtenir les matrices de transfert du système acoustique. L'écart obtenu dans le diagramme des résultats peut également être attribué à la formulation utilisée dans la méthode des éléments finis utilisée.

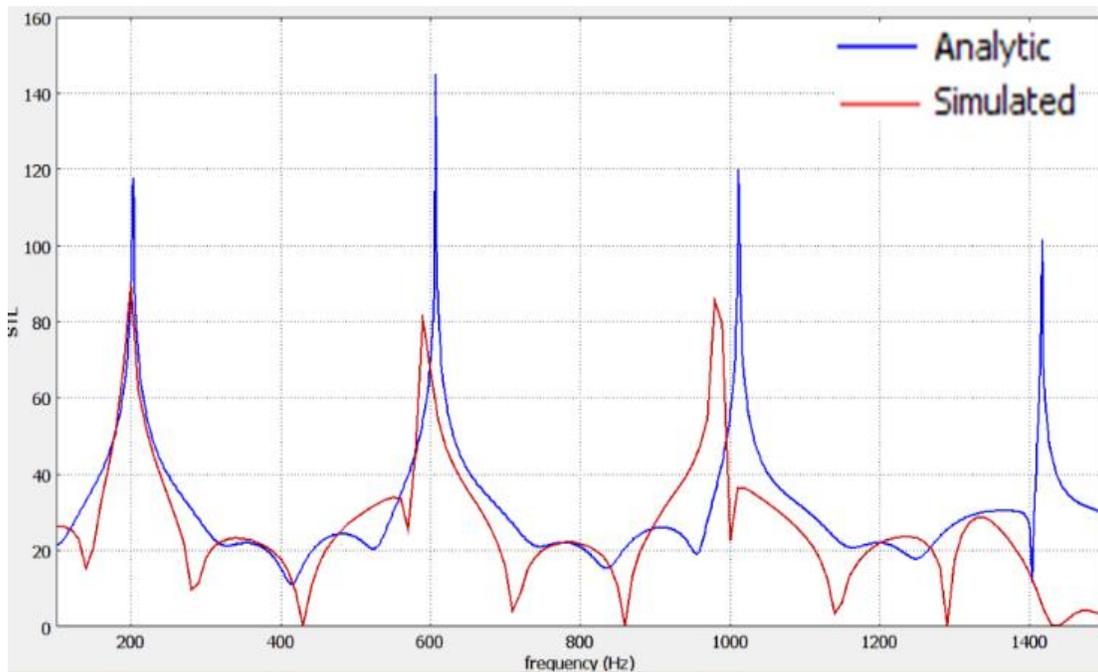


FIGURE 5.15- Silencieux de chambre d'expansion avec perte de transmission de tube étendue d'entrée et de sortie par rapport à la fréquence: solution théorique (ligne bleue) et solution simulée (ligne rouge)

### 5.4.4 Comparaison

Les données de l'optimisation géométrique des trois modèles de silencieux étudiés ayant un espace de conception limité sont résumées dans le Tableau 5.8 et tracées dans la Figure 5.16. Comme on l'a vu, il est évident que l'atténuation du silencieux, à chambre d'expansion ayant un tube étendu dans la chambre à son entrée et à sa sortie, est un peu supérieure aux autres silencieux par conséquent, ce modèle donne les meilleures performances acoustiques en terme de perte de transmission acoustique.

TABLEAU 5.8 - Comparaison de la performance acoustique par rapport à trois types de silencieux optimisés dans le même espace limité

Cas	Type de silencieux	Résultats				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	Tube étendu à l'entrée	0,24	0,2	0,79	0,55	119,69
2	Tube étendu à la sortie	0,21	0,27	0,79	0,55	167,92
3	Tube étendu à l'entrée et à la sortie	0,2	0,2	0,79	0,3	28,62

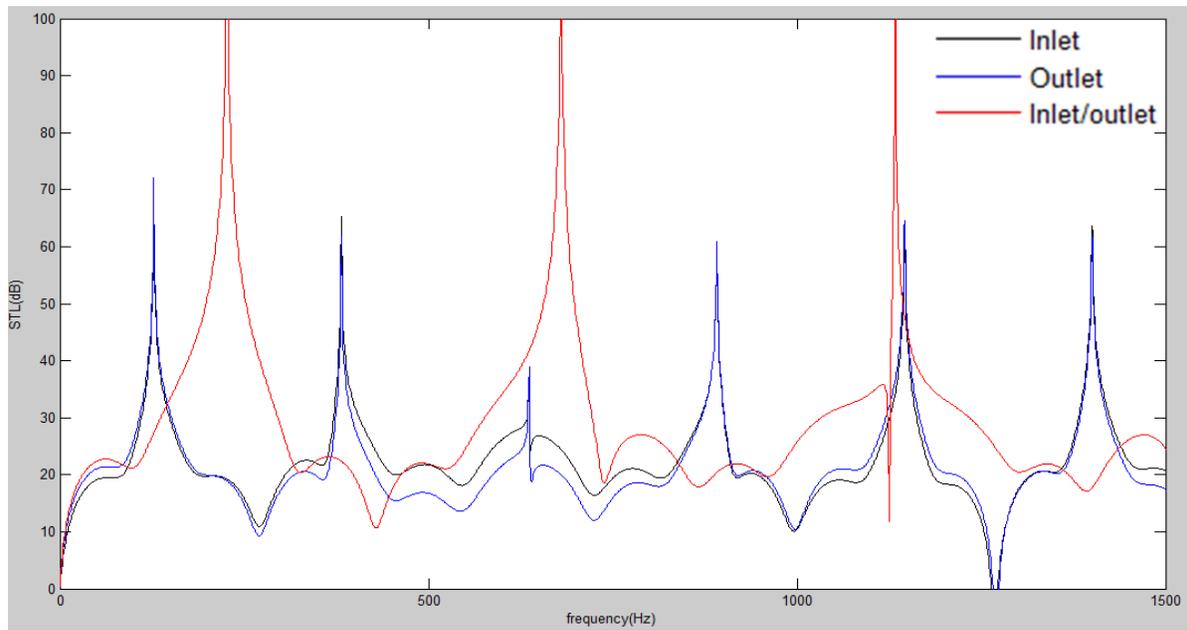


FIGURE 5.16- Comparaison du niveau STL optimal par rapport aux trois types de silencieux optimisés [bruit à large bande]

Pour la solution MEF, l'affaiblissement acoustique des trois configurations de silencieux optimisées en fonction de la fréquence est tracé sur la Figure 5.17. Les courbes montrent que toujours pour le troisième type de silencieux étudié présente la performance acoustique la plus élevée par rapport aux autres silencieux.

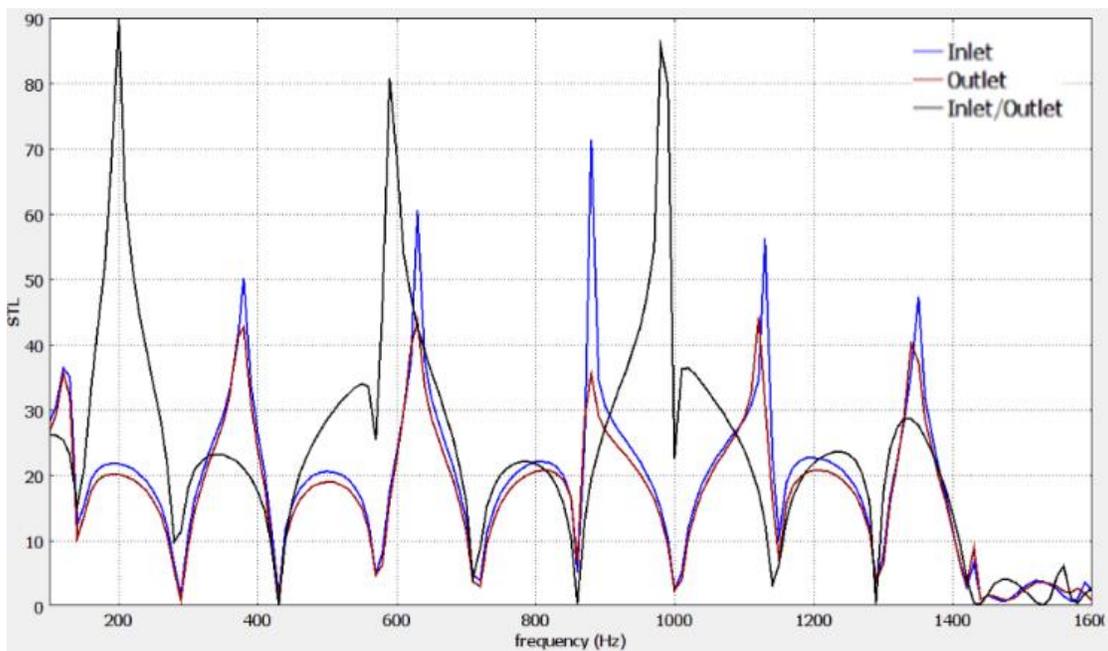


FIGURE 5.17- Solution MEF des silencieux à trois géométries optimisées: Entrée (ligne bleue), sortie (ligne rouge) et entrée / sortie (ligne noire)

## 5.5 Conclusion

L'optimisation géométrique de trois types de silencieux réactifs avec des tubes étendus sous contraintes géométriques est appliquée dans ce travail en utilisant un nouveau schéma numérique appelé l'algorithme d'acceptation de seuil couplé à l'analyse par éléments finis en 3D, cette analyse numérique se révèle être une méthode efficace pour optimiser les silencieux réactifs sous contraintes géométriques. L'algorithme d'optimisation AS est basé sur la méthode de transfert de matrice appliquant la théorie de l'onde plane ainsi que les matrices de transfert à quatre pôles. Cette méthode d'optimisation montre l'importance des deux paramètres AS ( $CR$  et  $I_{max}$ ) dans le processus d'optimisation. Il révèle également que cette méthode est valide lorsque l'influence des modes de fréquences élevées peut être négligée. Pour la méthode des éléments finis, l'analyse est effectuée sur les silencieux optimisés géométriquement obtenus préalablement par l'algorithme d'acceptation de seuil. L'analyse par éléments finis MEF est basée sur la théorie de la puissance acoustique. La méthode de transfert de matrice utilisée dans cette étude dépend de l'élément modélisé (la géométrie du silencieux) et non de la source acoustique, alors que c'est le contraire pour la méthode de la puissance acoustique qui dépend de la source acoustique et ne permet pas d'obtenir les matrices de transfert du système acoustique, cela dépend aussi de la formulation des MEF et la méthode de maillage numérique.

La comparaison entre la prédiction numérique basée sur la méthode de transfert de matrice et la solution MEF présente des écarts plus élevés dans les courbes pour le silencieux avec tube étendu de sortie que les deux autres silencieux. La méthode d'optimisation par algorithme d'acceptation de seuil et la méthode d'analyse par éléments finis ont montré que le silencieux, à chambre à expansion unique avec tube étendu à l'entrée et à la sortie, offre des valeurs de perte de transmission acoustique nettement meilleures que les deux autres types de silencieux. Par conséquent, l'approche de la conception optimale de la perte de transmission acoustique proposée dans cette étude est assez efficace pour traiter les silencieux réactifs dans une situation à contrainte géométrique.

# Conclusion générale

Il existe dans la littérature un grand nombre d'études réalisées sur la réduction du bruit issu des moteurs à combustion interne. S'inscrivant dans cette thématique, le travail qui a été réalisé concerne l'optimisation géométrique d'un silencieux destiné à espace limité de fonctionnement et cela dans le but d'avoir un maximum de réduction du bruit issu du moteur à combustion.

Le bruit issu des moteurs à combustion internes est un ensemble de son produit par des vibrations plus ou moins irrégulières dépourvues de toute harmonie. Il est souvent perçu comme une nuisance sonore qu'on doit réduire avec des silencieux. La géométrie de ces éléments joue un rôle important dans la réduction de ce bruit. L'industrie actuelle exige de plus en plus un espace limité pour ces réducteurs du bruit. Cela amène à chercher un compromis entre une géométrie limitée dans l'espace et une réduction du bruit maximale. De nouveaux outils numériques sont apparus dans le domaine d'optimisation, un de ses outils est l'algorithme d'acceptation de seuil. Dans ce travail une comparaison est réalisée entre la performance acoustique obtenue par cet algorithme avec celle obtenue par la méthode des éléments finis.

Des notions sur l'acoustique ont été présentées au début de ce travail. Notamment, les différents silencieux utilisés dans la réduction du bruit des moteurs à combustion internes sont détaillés. Les paramètres acoustiques qui caractérisent ces silencieux sont la vitesse et la pression acoustique, ces deux paramètres sont calculés et utilisés pour mesurer la perte de transmission acoustique.

Nous avons établi par la suite les différentes techniques utilisées pour l'étude acoustique des silencieux des moteurs à combustion internes, leur évolution et leurs avantages et inconvénients. Nous avons développé des équations généralisées des ondes dans les fluides afin d'arriver à la formulation des coefficients de la matrice de transfert globale d'un silencieux. Ces coefficients nous permettent de calculer le coefficient de perte par transmission d'un silencieux. Les outils utilisés dans cette étude notamment la méthode des éléments finis et les algorithmes d'optimisation géométrique sont présentés. L'optimisation du bruit acoustique de trois types de silencieux est élaborée par l'utilisation de la méthode des éléments finis et l'algorithme

d'acceptation de seuil. La géométrie optimale obtenue par l'algorithme est analysée par la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus sont comparés de point de vue de la meilleure réduction du bruit pour chaque type de silencieux. Ainsi, les inconvénients, les avantages et les limitations de chacune des méthodes sont analysés.

L'optimisation géométrique par l'algorithme d'acceptation de seuil est couplée à l'analyse par éléments finis en 3D. Cette analyse numérique se révèle être une méthode efficace pour optimiser les silencieux réactifs sous contraintes géométriques. L'algorithme qui est basé sur la méthode de la matrice de transfert, cette dernière applique la théorie de l'onde plane ainsi que les matrices de transfert à quatre pôles. Cette méthode d'optimisation montre l'importance des deux paramètres de l'algorithme, qui sont le nombre d'itérations et le taux de refroidissement, dans le processus d'optimisation. Il révèle également que cette méthode est valide lorsque l'influence des modes de fréquences élevées peut être négligée. Pour la méthode des éléments finis, l'analyse est effectuée sur les silencieux optimisés géométriquement obtenus préalablement par l'algorithme d'acceptation de seuil. L'analyse est basée sur la théorie de la puissance acoustique. La méthode de transfert de matrice utilisée dans cette étude dépend de l'élément modélisé (la géométrie du silencieux) et non de la source acoustique, alors que c'est le contraire pour la méthode de la puissance acoustique qui dépend de la source acoustique et ne permet pas d'obtenir les matrices de transfert du système acoustique, cela dépend aussi de la formulation des éléments finis et la méthode de maillage numérique.

La comparaison entre la prédiction numérique basée sur la méthode de la matrice de transfert et de la solution par éléments finis présente des écarts plus élevés dans les courbes pour le silencieux avec tube étendu de sortie que les deux autres silencieux. La méthode d'optimisation par algorithme d'acceptation de seuil et la méthode d'analyse par éléments finis ont montré que le silencieux, à chambre à expansion unique avec tube étendu à l'entrée et à la sortie, offre des valeurs de perte de transmission acoustique nettement meilleures que les deux autres types de silencieux. Par conséquent, l'approche de la conception optimale de la perte de transmission acoustique proposée dans cette étude est assez efficace pour traiter les silencieux réactifs dans une situation à contrainte géométrique. Ce travail peut être étendu pour d'autre type de silencieux comme les silencieux passifs dont les propriétés physiques des matériaux absorbants du bruit

peuvent influencer sur la performance acoustique des silencieux et sur la géométrie d'optimisation.

# Annexe

## A. Équations de la thermodynamique

### 1. Évolution isentropique et isotherme

En écrivant (2.35) pour les deux régimes, permanent et perturbé, et en prenant (l'évolution isotherme), on obtient :

$$p_0 = \rho_0 \cdot a_0^2 \quad (\text{A-1})$$

$$p_0 + p = \rho_0 \cdot a_0^2 + \rho \cdot a_0^2 \quad (\text{A-2})$$

La différence de ces deux relations nous donne l'équation de l'évolution isentropique et isotherme (2.44) :

$$\frac{P}{\rho_0} = a_0^2 \quad (\text{A-3})$$

### 2. Évolution de l'entropie au niveau de la discontinuité

Le premier principe de la thermodynamique nous permet d'écrire :

$$\frac{P_T}{\rho_T} + C_v \cdot T + \frac{U_T^2}{2} = cte \quad (\text{A-4})$$

En prenant la différentielle totale de cette équation on obtient :

$$\frac{dP_T}{\rho_T} - \frac{P_T}{\rho_T^2} d\rho_T + C_v \cdot dT + u_T \cdot du_T = 0 \quad (\text{A-5})$$

D'autre part, en utilisant le deuxième principe de la thermodynamique, on peut écrire :

$$-\frac{P_T}{\rho_T^2} d\rho_T + C_v \cdot dT = T \cdot d\mathcal{s}_1 \quad (\text{A-6})$$

Ainsi, compte tenu de (A-6), l'équation (A-5) s'écrit :

$$\frac{dP_T}{\rho_T} + u_T \cdot du_T = -T \cdot d\mathcal{s}_1 \quad (\text{A-7})$$

Après intégration, cette équation nous donne, en prenant  $p_T \cong \rho_0$  :

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho_0} + \frac{1}{2}(u_3^2 - u_1^2) = T \cdot (\mathcal{s}_1 - \mathcal{s}_3) \quad (\text{A-8})$$

En écrivant cette équation pour les deux régimes permanent et perturbé et en faisant la différence, on obtient :

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho_0} + (u_{3_0} \cdot u_3 - u_{1_0} \cdot u_1) = T \cdot (\mathcal{s}_1 - \mathcal{s}_3) \quad (\text{A-9})$$

En supposant nulle l'entropie dans la région (3), cette équation devient :

$$\mathcal{s}_1 = \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 T} + \frac{(u_{3_0} \cdot u_3 - u_{1_0} \cdot u_1)}{T} \quad (\text{A-10})$$

Ou en termes de variables aéroacoustique :

$$\mathcal{s}_1 = \frac{1}{\rho_0 T} \cdot (P_{c_3} - P_{c_1}) \quad (\text{A-11})$$

Finalement, en substituant l'expression de  $P_{c_3}$  déduite de (2.77) dans cette dernière équation, on obtient :

$$\mathcal{s}_1 = \frac{Y_3 K \cdot M_1}{\rho_0 T} \cdot \frac{u_{c_3} - M_1 \cdot \frac{P_{c_1}}{Y_1}}{1 - M_1^2} \quad (\text{A-12})$$

### 3. Détermination de la masse volumique acoustique de part et d'autre de la discontinuité

En prenant la différentielle totale de l'équation de gaz parfait :

$$\frac{P_T}{\rho_T} = R.T \quad (\text{A-13})$$

On obtient :

$$\frac{dP_T}{\rho_T} - \frac{P_T}{\rho_T} = \frac{dT}{T} \quad (\text{A-14})$$

D'autre part, compte tenu de (A-13), le deuxième principe de la thermodynamique (A.6) nous permet d'écrire :

$$\frac{dT}{T} = \frac{ds_1}{C_v} + (\gamma - 1) \frac{d\rho_T}{\rho_T} \quad (\text{A-15})$$

Ou :

$$\gamma = \frac{R}{C_v} + 1 \quad (\text{A-16})$$

En portant  $\frac{dT}{T}$  déduite de (A.15) dans l'équation (A.14), on obtient :

$$\frac{dP_T}{P_T} - \gamma \frac{d\rho_T}{\rho_T} = \frac{ds_T}{C_v} \quad (\text{A-17})$$

Sachant que :

$$\begin{cases} P_T = P_0 + P \cong P_0 \\ \rho_T = \rho_0 + \rho \cong \rho_0 \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

L'équation (A.16) devient :

$$\frac{dP}{P_0} - \gamma \frac{d\rho}{\rho_0} = \frac{ds}{C_v} \quad (\text{A-19})$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{P}{P_0} - \gamma \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{s}{C_v} \quad (\text{A-20})$$

En appliquant cette équation, dans les deux régions 1 et 3 et en prenant  $s_3 \cong 0$ , on trouve :

**Région 3 :**

$$\frac{P_3}{P_0} - \gamma \frac{\rho_3}{\rho_0} = 0 \quad (\text{A-21})$$

**Région 1 :**

$$\frac{P_1}{P_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{s}{C_v} \quad (\text{A-22})$$

Compte tenu de (A.3), ces équations permettent d'écrire :

$$\rho_3 = \frac{P_3}{a_0^2} \quad (\text{A-23})$$

$$\rho_1 = \frac{P_1 - s_1 \cdot (\gamma - 1) \cdot T \cdot \rho_0}{a_0^2} \quad (\text{A-24})$$

## SHAPE OPTIMIZATION OF REACTIVE MUFFLERS USING THRESHOLD ACCEPTANCE AND FEM METHODS

Abdelkader Khamchane<sup>\*1</sup>, Youcef Khelifaoui<sup>†1</sup>, Brahim Hamtache<sup>‡1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energétique (L2ME), Université de Bejaia, Faculté de Technologie Targa ouzamour Bejaia, DZ 06000, Algeria

### Résumé

L'optimisation de forme des silencieux réactifs sous contrainte d'espace a une grande importance dans la conception d'environnements moins bruyants. Dans ce travail, les performances acoustiques de trois types de silencieux soumis à un espace limité sont étudiées. Une analyse d'optimisation de forme est effectuée en utilisant un algorithme d'optimisation appelé Threshold Acceptance (TA). La conception optimale obtenue est analysée par la méthode des éléments finis (FEM : Finite Element Method). Cette approche numérique est basée sur la maximisation de la perte de transmission acoustique (STL : Sound Transmission Loss) à l'aide de la méthode de transfert de matrices (TMM : Transfer Matrix Method) qui est une méthode de modélisation basée sur le modèle de propagation d'onde plane. La solution en élément finis utilisée pour analyser la STL est basée sur la méthode de puissance acoustique, un code de calcul standard utilisé pour analyser en 3D l'atténuation acoustique des silencieux par la méthode FEM. La capacité acoustique des silencieux obtenus est évaluée en comparant la solution FEM à la méthode analytique. Les résultats montrent que la valeur maximale de la STL est précisément située à la tonalité ciblée. En outre, la performance acoustique du silencieux avec tube à l'entrée et à la sortie prolongée se trouve être supérieure aux autres types de silencieux. Par conséquent, cette approche fournit un schéma rapide pour l'optimisation de la forme des silencieux réactifs.

**Mots clés :** silencieux réactifs, algorithme d'optimisation, méthode de transfert de matrices, puissance acoustique

### Abstract

The shape optimization of reactive muffler under space constraint becomes of great importance in the design of quieter environments. In this paper, the acoustical performance of three different expansion-chamber mufflers with extended tube under space constraint is presented. A shape optimization analysis is performed using a novel scheme called Threshold Acceptance (TA). The best design obtained by the shape optimization method is analyzed by Finite Element Method (FEM). This numerical approach is based on the maximization of the Sound Transmission Loss (STL) using the Transfer Matrix Method (TMM). The TMM method is a modelling method based on the plane wave propagation model whereas the FEM solution is based on the acoustical power method. A standard computational code is used to analyze the sound attenuation of the mufflers by the FEM method in 3D. The acoustical ability of the mufflers is then assessed by comparing the FEM solution with the analytical method. Results show that the maximal STL is precisely located at the desired targeted tone. In addition, the acoustical performance of muffler with inlet and outlet extended tube is found to be superior to the other ones. Consequently, this approach provides a quick scheme for the shape optimization of reactive mufflers.

**Keywords:** reactive muffler, threshold acceptance, transfer matrix method, sound acoustic power

### 1 Introduction

The use of mufflers for exhaust noise attenuation with limited space in vehicles and machinery pushes the researchers to develop different numerical modelling methods [1-2]. The most common type of linear acoustic model applies classical electrical filter theory. This theory is widely known as the transfer matrix method (TMM) [3]. Though, it is also referred to as the 4-pole parameter method [4-6]. A technique that combines the use of transfer matrix approach and finite element method in the study of duct acoustics is reported after by Craggs in 1989 [7].

Since the muffler space dimension is often limited to

meet the demands of operation and maintenance, there are increasing interests in designing mufflers in order to optimize the STL using shape optimization methods [8]. A simple expansion chamber muffler is studied by Bernhard [9] by using a shape optimization method with a non-constrained space condition. To obtain a good acoustical performance for the shape optimization of mufflers, novel schemes have appeared such as Genetic Algorithm (GA) and Simulating Annealing (SA) [10]. Yeh and al. [11] studied the shape optimal design of a double expansion-chamber muffler under space constraints by using SA and GA optimizers. Their study reveals that either SA or the GA is applicable in the optimization analysis. Both algorithms are much easier to use compared to gradient-based optimizers which require a good starting.

\*abdelkader.khamchane@yahoo.fr

†youcef.khelifaoui@yahoo.fr

‡brahim.hamtache@yahoo.fr

This paper is built on the acoustic attenuation study of three types of expansion-chamber mufflers with extended tubes under space constraints by using a deterministic acceptance criterion optimizer named Threshold Acceptance combined with a finite element analysis.

## 2 Mathematical models

The reactive mufflers adopted for the noise reduction in this work are composed of three types of inlet/outlet extended tube mufflers as shown in figure 1 (a, b and c). The three kinds of mufflers are left inlet extended tube, right outlet extended tube and inlet/outlet extended tube. The different acoustical elements of the mufflers (acoustic pressure  $p$  and acoustic particle velocity  $u$ ) are illustrated in figure 2 (a, b and c). These elements within the left and right extended tube mufflers are represented by seven nodes and for the inlet and outlet extended tube muffler are represented by eight nodes.

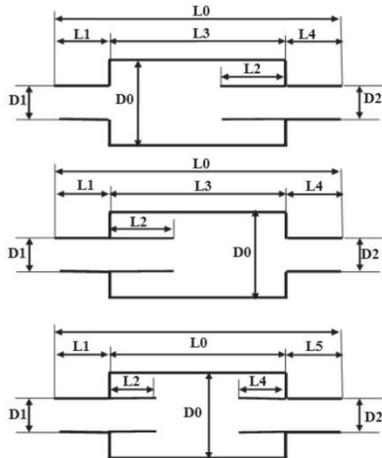


Figure 1: Sketches of expansion-chamber mufflers with extended tube: (a) inlet, (b) outlet, (c) inlet & outlet side.

Two different approaches were used to analyze the acoustical performance of the three mufflers under chosen limited space ( $L=1.5$  m,  $D0=0.3$ ). These approaches are the sound acoustic power and the transfer matrix methods. The most widely used acoustical performance to characterize the sound attenuation of the mufflers is the sound transmission loss (STL). This value depends only on the muffler and not on the sound source. It is considered as the best parameter to use when comparing different methods and designs [12]. The optimization method is developed using Matlab tool. For the FEM and simulation analysis a standard computational code named COMSOL Multiphysics Tools is used.

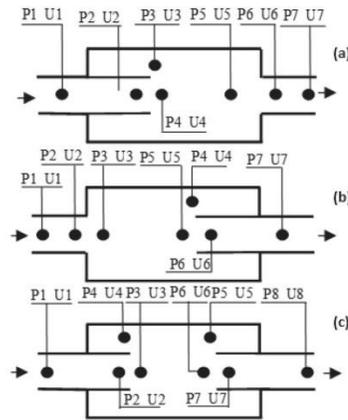


Figure 2: Sketches of the one-dimensional plane wave propagation of expansion-chamber mufflers with extended inlet/outlet tube: (a) inlet, (b) outlet, (c) inlet & outlet side.

## 3 Numerical assessment

### 3.1 Shape optimization method

A system of four-pole matrix evaluating the acoustical performance (sound transmission loss) is used and derived by using a decoupled numerical method called Transfer Matrix Method (TMM). This method uses  $2 \times 2$  matrices to relate two variables at planes on either side of an acoustic component. The matrices for individual components can be readily combined to form a single and overall matrix that describes the behavior for a multi-component muffler's system [5, 13].

A Threshold Acceptance method, a deterministic acceptance criteria optimizer similar to simulated annealing, is applied to the optimizations of the mufflers.

### 3.2 Theoretical formulation

The acoustical system of four-pole matrix uses  $2 \times 2$  matrix to relate two variables at planes (acoustic pressure ( $p$ ) and volume velocity ( $u$ )) on either side of an acoustic component [14, 15]. To describe the overall acoustic property of the muffler we need to relate all the individual matrices in one total transfer matrix of the system as:

$$T = T_1 T_2 T_3 \dots \quad (1)$$

The following general transfer matrix may be written to relate the state variables of straight duct and expansion/contracted ducts respectively for the three kinds of expansion-chamber mufflers with extended tube.

$$T_i = e^{-j \frac{M_i k L_i}{1 - M_i^2}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{k L_i}{1 - M_i^2}\right) & j \sin\left(\frac{k L_i}{1 - M_i^2}\right) \\ j \sin\left(\frac{k L_i}{1 - M_i^2}\right) & \cos\left(\frac{k L_i}{1 - M_i^2}\right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$T'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{S_i}{S_{i-1}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Where  $T_i$ ,  $T'_i$ ,  $M$ ,  $k$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $j$  and  $i$  are respectively the transfer matrix of straight ducts, the transfer matrix of expansion/contracted ducts, the Mach number, the wave number, the length of element, the area of the element, the imaginary unit section and the  $i$  represent the  $i^{\text{th}}$  node.

For the cross-sectional discontinuity case, the transition elements used are shown in the first column of table 1. By using decreasing element-subscript values with distance from the noise source, the cross-sectional areas upstream and downstream of the transition ( $S_3$ ,  $S_2$  and  $S_1$ ) are related through:

$$C_1 S_1 + C_2 S_2 + S_3 = 0 \quad (4)$$

The constants  $C_1$  and  $C_2$  are selected to satisfy the compatibility of the cross-sectional areas across the transition.

**Table 1:** Parameters values of transition elements

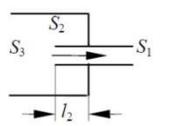
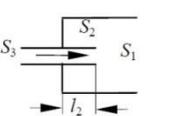
Element Type	$C_1$	$C_2$	K
	-1	-1	$\frac{1 - \frac{S_1}{S_3}}{2}$
	-1	1	$\left(\frac{S_1}{S_3} - 1\right)^2$

Table 1 also shows the pressure loss coefficient  $K$  for each configuration that accounts for conversion of some mean-flow energy and acoustical field energy into heat at the discontinuities. As indicated,  $K \leq 0.5$  for area contraction, while  $K \rightarrow (S_1 / S_3)^2$  for area expansions at large values of  $S_1 / S_3$ .

The four-pole matrices of the ducts with cross-sectional discontinuities [15] (for Mach number  $M = 0$ ) is given by

$$T_{discontinuite} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{C_2}{C_1 \left(-j \frac{c_0}{S_2} \cot kl\right)} & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

The computation of the transfer matrix for the whole silencer is achieved based on the individual matrices which relate the pressure  $P$  and mass velocity  $V$  at the inlet and outlet. The individual matrices are calculated separately for every sector as:

$$\begin{pmatrix} P_i \\ \rho_0 c_0 u_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_o \\ \rho_0 c_0 u_o \end{pmatrix} \quad (6)$$

Where  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  and  $T_{22}$  are referred to as the four poles of the acoustical system. The STL of a muffler is calculated as [5]:

$$STL(f, Q, R_1, R_2, R_3, R_4) = 20 \log \left[ \frac{Y_n}{Y_1} \right]^{1/2} \left| \frac{T_{11} + T_{12} Y_n + T_{21} Y_1 + T_{22} (Y_1 / Y_n)}{2} \right| \quad (7)$$

$Y_1$  is calculated for the input pipe and  $Y_n$  for the output pipe. Where for the inlet and outlet mufflers:

$$R_1 = D_1/D_0, \quad R_2 = D_2/D_0, \quad R_3 = L_3/L_0, \quad R_4 = L_2/L_0, \quad L_1 = 1/2(L_0 - L_3), \quad L_4 = 1/2(L_0 - L_3), \quad L_0 = L_1 + L_3 + L_5.$$

And for Inlet and outlet muffler:

$$R_1 = D_1/D_0, \quad R_2 = D_2/D_0, \quad R_3 = L_3/L_0, \quad R_4 = L_0/L_0, \quad L_1 = 1/2(L_0 - L_3), \quad L_5 = 1/2(L_0 - L_3), \quad L_2 = 1/2(L_3 - L_0), \quad L_0 = L_1 + L_3 + L_5$$

Because of the remarkably pure tone noise effect at 300 Hz [11], noise elimination at this frequency by shape optimization is applied.

### 3.3 Threshold Acceptance

Threshold Acceptance method applied in this work is a metaheuristic algorithm. It's a modification of the well-known Simulated Annealing metaheuristic method (SA) [16]. The SA method draws its analogy from the annealing process of solids. The solid is heated to a high temperature and gradually cooled in order to crystallize. It must be cooled slowly such that the atoms have enough time to align themselves to reach a minimum energy state. This analogy can be used in combinatorial optimizations with the states of the solid corresponding to the feasible solution. The energy at each state correspond to the value of objective function and the minimum energy represent the optimal solution [17].

SA always accepts moves to neighboring solutions that improve the objective function value. More precisely, the solution ( $S$ ) in the neighborhood  $N(S)$  is accepted as the new current solution if  $\Delta \leq 0$ , where  $\Delta = C(S') - C(S)$  in which  $C$  denotes the objective function. To allow the search to escape a local optimum, a stochastic approach is used to direct the search. A move that worsens the objective function value is accepted with a probability  $e^{-\Delta/T}$  if  $\Delta > 0$ .  $T$  is a parameter called the Temperature.

The value of  $T$  varies from a relatively large value to a small value close to zero. An initial temperature and an optimization temperature are chosen in this interval at each step of optimization of the algorithm. This method of temperature selection is identical to that of the metal cooling process.

The TA algorithm uses a predetermined deterministic sequence to decide whether a new point is selected or not (if worse than the current point), whereas SA method probabilistically determines a new point selection at every iteration.

Dueck and Scheurer [18] simplified the SA procedure by leaving out the probabilistic element in accepting worse solutions. Instead, they introduced a deterministic threshold ( $\tau$ ) and a worse solution is accepted if its difference to the incumbent solution is smaller or equal to the threshold. The new procedure is named Threshold Acceptance.

The key components of TA are the function  $g(t)$  that determines the lowering of the threshold during the course of the procedure, the stopping criteria as well as the methods used to create initial and neighboring solutions. The main advantages of TA are its conceptual simplicity and its excellent performance on different combinatorial optimization problems [19].

### 3.4 FEM Analysis method

In the second part of this paper, we analyze the acoustical performance of the obtained shape optimized mufflers by using FEM. The available numerical tool used for analyzing muffler performance includes 3D linear acoustic codes with and without mean flow is using FEM methods where the most important effect of flow is included by altering the boundary conditions without considering the mean flow [20].

The following equation defines the attenuation  $d_w$  (dB) of the acoustic energy is:

$$d_w = 10 \log \left( \frac{w_o}{w_i} \right) \quad (8)$$

Here  $w_o$  and  $w_i$  denote the outgoing power at the outlet and the incoming power at the inlet respectively. Each of these quantities can be calculated as an integral over the corresponding surface:

$$w_o = \int_{\partial\Omega} \frac{|p|^2}{2\rho c_s} dA \quad (9)$$

$$w_i = \int_{\partial\Omega} \frac{P_0^2}{2\rho c_s} dA \quad (10)$$

The FEM model solves the problem in the frequency domain using the time-harmonic pressure of the acoustic application mode. The STL is calculated directly with the computational code tool using the acoustic power method at the inlet and at the outlet of the acoustic system. Each model of muffler is simulated using a three dimensional model and

is meshed using the Lagrange-quadratic elements. A harmonic pressure of  $1Pa$  is specified at the inlet of the muffler and a radiation boundary condition is applied at the inlet and outlet of the muffler. A material with default values of air is created with density of  $1.2 \text{ kg/m}^3$  and with sound speed of  $340 \text{ m/s}$ . By using the default values of air, the acoustic damping is not taken into account.

### 3.5 Case studies

To check the transmission loss model on the single inlet chamber muffler a comparison between theoretical and experimental data [3] is realized. As shown in figure 3, there is a coherence between the theoretical and experimental data. Hence, the transmission loss model is acceptable and can be applied to the studied models.

The available space selected for the mufflers is  $0.5 \text{ m}$  in width  $0.5 \text{ m}$  in height and  $1.5 \text{ m}$  in length. To obtain the best acoustical performance within a fixed space a pure tone noise with  $300 \text{ Hz}$  is applied for the mufflers as a numerical case. Also to reach an initial transition probability of  $0.5$  of the TA method, the initial temperature is selected as  $0.2$  and the flow rate ( $Q = 0.01 \text{ (m}^3/\text{s)}$ ) is preset in advance to simplify the optimization for the mufflers [10]. The selected space constraints ranges for the three types of mufflers are:

$$R_1: [0.1, 0.5], R_2: [0.1, 0.5], R_3: [0.2, 0.8] \text{ and } R_4: [0.2, 0.8]$$

After shape optimization of the mufflers, a numerical analysis by FEM is presented in the second part of this work. To assess the acoustical performance of each idealized muffler a 3D simulation analysis is applied for the FEM. The used parametric solver provides results for a range of frequencies. The software computes integrals in the power expressions using boundary integration coupling variables and it plots the resulting attenuation versus frequency.

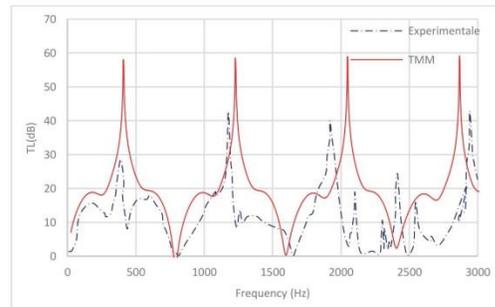


Figure 3: Performance curves of STL, comparison between TMM theoretical model and experimental values of simple expansion chamber muffler with extended tube [3].

### 3.6 Objective Function

The accuracy of the TA optimization depends on two control parameters: the cooling rate ( $CR$ ) and the number of

iteration ( $I_{max}$ ). The optimization process with respect to objective functions ( $Obj1$ ,  $Obj2$  and  $Obj3$ ) is performed by varying these parameters. From formula (7), the objective functions and their ranges are reduced and set for the three mufflers respectively as following:

$$Obj_1(X_1, X_2, X_2) = STL(D_1, D_2, L_2) \quad (11)$$

$$Obj_2(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) = STL(D_1, D_2, D_3, L_1, L_2, L_3, L_5) \quad (12)$$

$$Obj_3(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9) = STL(L_1, L_2, L_3, L_5, L_7, D_1, D_2, D_3, D_4) \quad (13)$$

#### 4 Results and discussion

For the three studied muffler, the shape optimization is performed by testing various sets of parameters with respect to the pure tone of 300Hz. After this step, the STL is calculated with respect to various pure tones (300Hz, 500Hz, 700Hz and 800Hz) by using the optimal design obtained by optimization method.

Following the optimization process, the muffler is analyzed using a FEM and simulation analysis. The simulation analysis start by applying the required boundary conditions and then the meshing with a coarse predefined mesh sizes of 0.25mm on the x direction scale.

##### 4.1 First case: Expansion-chamber muffler with inlet extended tube

The optimization process for the expansion chamber muffler with inlet extended tube using various sets of TA parameters

is performed. The result is shown in table 2. The optimal design data is obtained at the cooling rate  $CR = 0.99$  and iteration number  $I_{max} = 2500$ . This result reveals that the minimal state is achieved at the higher cooling rate.

Figure 4 plots the STL with respect to frequency in various design case. It shows that the STL values are roughly maximized at the desired frequencies and that the highest values of the  $CR$  and  $I_{max}$  parameters gave the highest STL. Therefore, the method of variation of these two parameters play essential role in TA optimization and using this method to find the better design solution is reliable.

The second step is to measure the STL of the optimized muffler with respect to various pure tones. Table 3 gives the obtained results of STL and this result is displayed in figure 5. This result reveals that increasing the pure tone expands the frequency bandwidth and the STLs are precisely maximized at the desired frequencies.

The 3D analysis of propagation modes is performed on the related optimal muffler's size with respect to pure tone of 2000 Hz. Figure 6 displays the internal sound pressure distribution at 2000 Hz. The pressure field varies primarily with the y direction while it is nearly constant in the z direction. The reason is that 2000 Hz is just higher than the cutoff frequency for the first symmetric propagating mode excited by the incoming wave.

We observe also that the selected frequencies how the sound pressure level distributions near the muffler inlet and outlet is important.

**Table 2:** Sound Transmission Loss of a single expansion-chamber muffler with targeted tone of 300 Hz and various  $CR$  and  $I_{max}$ .

Case	TA parameters	Results				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	$CR = 0.90$ $I_{max} = 250$	0,213580756	0,202902009	0,795782821	0,781371602	20,56
2	$CR = 0.93$ $I_{max} = 250$	0,202115091	0,201711434	0,754368947	0,784125799	20,84
3	$CR = 0.96$ $I_{max} = 250$	0,201675088	0,201648677	0,759723156	0,799370566	20,96
4	$CR = 0.99$ $I_{max} = 250$	0,200000412	0,200000004	0,799999932	0,799993991	21,39
5	$CR = 0.99$ $I_{max} = 400$	0,200000297	0,20000003	0,799999879	0,798941011	21,38
6	$CR = 0.99$ $I_{max} = 800$	0,200002602	0,200875503	0,730584904	0,759254063	20,70
7	$CR = 0.99$ $I_{max} = 1500$	0,200090707	0,200030674	0,798613086	0,799459378	21,37
8	$CR = 0.99$ $I_{max} = 2500$	0,2	0,2	0,799999989	0,8	21,39
9	$CR = 0.99$ $I_{max} = 6000$	0,200000024	0,20000003	0,799999982	0,799999802	21,38
10	$CR = 0.99$ $I_{max} = 10000$	0,20010711	0,200000046	0,799996472	0,799834974	21,38

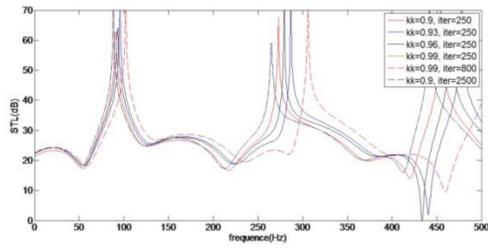


Figure 4: Performance curves of STL with respect to various maximal iterations ( $I_{max}$ ) by TA [ $To = 0.2$ ].

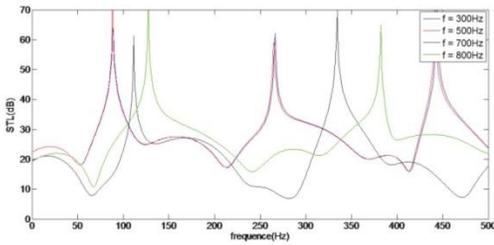


Figure 5: STL with respect to frequencies of a Single expansion-chamber for various pure tones [Targeted frequency: 300, 500, 700 and 800 Hz].

Figure 7 plots the theoretical transmission loss based on the TMM (blue line) and the FEM solution (red line) as a function of frequency. It's noticeable that the FEM solution has an upper frequency limit for its validity. This limit is the cut-on frequency which defines the frequency range where only plane waves can propagate. Above this frequency, also higher modes can propagate.

At frequencies higher than approximately 1400 Hz, the plot's behavior is more complicated and there is generally less damping. This is because, for such frequencies, the tube supports not only longitudinal resonances but also cross-sectional propagation modes. We notice that a discrepancy exists between the theoretical and the FEM solution even below the cut-on frequency. This discrepancy is due to that the elementary transfer matrices depend on the element which is modelled. The sound transmission loss is independent of the source and requires an anechoic termination at the downstream end. Thus, it does not involve neither the source nor the radiation impedance of

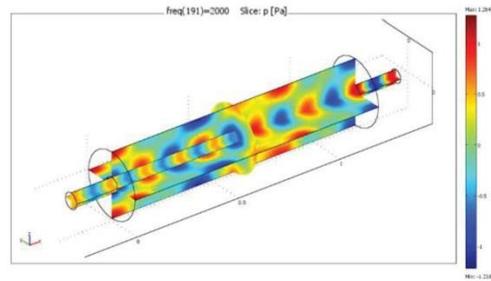


Figure 6: Optimized FEM model of the single expansion-chamber muffler with extended inlet tube and internal sound pressure distribution at 2000 Hz.

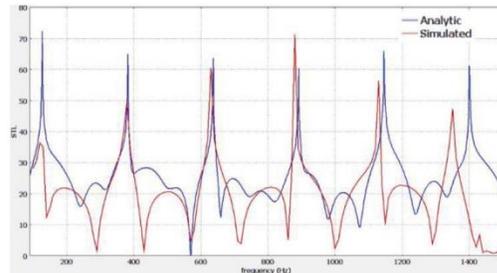


Figure 7: Muffler transmission loss versus frequency of single expansion-chamber muffler with inlet tube: Theoretical solution (blue line) and simulated solution (red line).

the termination whereas the sound depend only on the sound source and does not allow the transfer matrices of the acoustic system to be obtained.

The differences obtained in the results may also be attributed to the finite element formulation used in simulation method which is Lagrange elements method or to the computational mesh method (density and refinement).

#### 4.2 Second case: Expansion-chamber muffler with outlet extended tube

The shape optimization of a single expansion chamber with outlet extended tube with various sets of TA parameters with respect to the pure tone of 300Hz is performed. The result is shown in table 4.

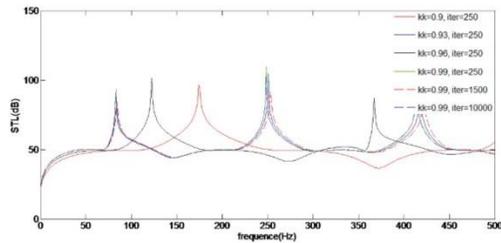
Table 3: Sound Transmission Loss of a single expansion-chamber with respect to various targeted frequencies ( $CR=0.99, I_{max} = 2500$ ).

Case	Target frequency	Results				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	300 Hz	0,20010935	0,20002373	0,79999829	0,79634202	22,11
2	500 Hz	0,2	0,2	0,8	0,8	25,68
3	700 Hz	0,23791322	0,46730982	0,78741544	0,64434888	115,50
4	800 Hz	0,240834641	0,200736224	0,798729653	0,555818811	119,69

**Table 4:** Optimal STL for a Double expansion-chamber muffler at various  $CR$  and  $I_{max}$  (Targeted tone of 300 Hz).

Case	TA parameters	Results				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	$CR = 0.90$ $I_{max} = 250$	0,203970327	0,201331047	0,558524911	0,543257189	45,88
2	$CR = 0.93$ $I_{max} = 250$	0,200021583	0,200056361	0,799954532	0,792637646	49,31
3	$CR = 0.96$ $I_{max} = 250$	0,202802328	0,201578411	0,743689134	0,582243506	47,86
4	$CR = 0.99$ $I_{max} = 250$	0,200001586	0,200065207	0,799935022	0,799861406	49,34
5	$CR = 0.99$ $I_{max} = 400$	0,200181749	0,200032438	0,774090819	0,710186438	48,81
6	$CR = 0.99$ $I_{max} = 800$	0,200259589	0,200027709	0,725326708	0,798266388	48,77
7	$CR = 0.99$ $I_{max} = 1500$	0,200000723	0,200001383	0,794550818	0,79040532	49,27
8	$CR = 0.99$ $I_{max} = 2500$	0,20000004	0,200366626	0,799441375	0,799332283	49,31
9	$CR = 0.99$ $I_{max} = 6000$	0,200014056	0,20000011	0,799806204	0,798318742	49,33
10	$CR = 0.99$ $I_{max} = 10000$	0,200001007	0,200000002	0,799986738	0,799974136	49,34

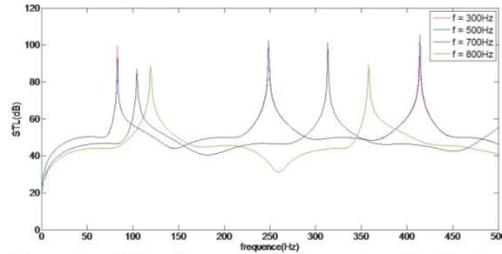
As indicated, the optimal design data can be obtained at the cooling rate  $CR = 0.99$  and iteration number  $I_{max} = 10000$ . This result indicate that the minimal state is achieved at the higher cooling rate. The acoustic performance of STL (with respect to frequency in various design case) is presented and plotted in figure 8. Obviously, the results revealed that the highest values of  $CR$  and  $I_{max}$  gave the highest STL. At higher frequency, the plots behavior is more complicated and the STL are roughly maximized at the desired frequencies.



**Figure 8:** Performance curves of STL with respect to various maximal iterations ( $I_{max}$ ) by TA [ $To = 0.2$ ].

After this optimization step, the optimal design with respect to various pure tones is measured and summarized in table 5. The optimal STL curves with respect to targeted frequencies are plotted and depicted in figure 9.

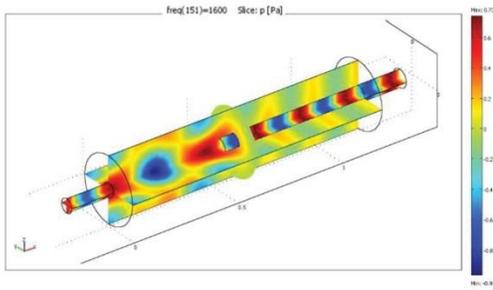
The levels of the STL increase in the low frequency range whereas it decreases at high frequencies. It shows that the STLs are precisely maximized at the selected frequencies.



**Figure 9:** STL with respect to frequencies of a Double expansion-chamber muffler for various pure tones [Targeted frequency: 300, 500, 700 and 800 Hz].

**Table 5:** Optimal STLs for a double expansion-chamber with respect to various targeted frequencies ( $CR = 0.95$ ,  $I_{max} = 50000$ ).

Case	Targette frequency	Results				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	300 Hz	0,200006541	0,200000986	0,799564675	0,799695519	50,09
2	500 Hz	0,2	0,2	0,8	0,8	53,64
3	700 Hz	0,236345991	0,20385864	0,653122383	0,776829314	141,22
4	800 Hz	0,212167477	0,271589061	0,797512162	0,55666418	167,92



**Figure 10:** Optimized FEM model of the one expansion-chamber muffler and internal sound pressure distribution at 1600Hz (absolute pressure).

The 3D analysis of propagation modes is performed on the related optimal muffler's size with respect to pure tone of 1600 Hz. The result is shown in Figure 10.

We notice that for the selected frequencies how the sound pressure level distributions near the muffler outlet is important.

Figure 11 plots the theoretical transmission loss (blue line) and the numerical solution (red line) as a function of frequency. We observe a discrepancy between the analytic and the simulated plots is higher than those of muffler with inlet extended tube. Also we notice that the FEM solution present an upper frequency limit for its validity which is around 1500 Hz. This limit is the cut-on frequency defined previously.

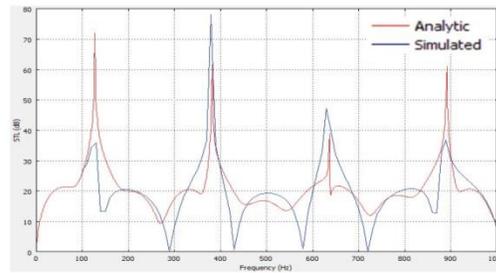
### 4.3 Third case: Expansion-chamber muffler with inlet and outlet extended tube

The result of the shape optimization of a the expansion-chamber muffler with inlet and outlet extended tubes based on various sets of TA parameters and with respect to the pure tone of 300Hz is shown in table 6.

As indicated, the optimal design data can be obtained at the cooling rate  $CR = 0.99$  and iteration number  $I_{max} = 10000$ . It reveals that the minimal state is achieved at the higher cooling rate. The acoustic performance of STL (with respect to frequency in various design case) is presented and plotted in figure 12.

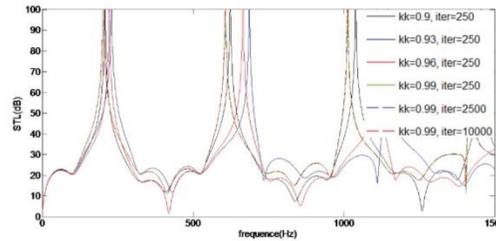
**Table 6:** Optimal STL for a Double expansion-chamber muffler at various  $CR$  and  $I_{max}$  (Targeted tone of 300 Hz).

Case	TA parameters	Results				
		R1	R2	R3	R4	STL (dB)
1	$CR = 0.90, I_{max} = 250$	0,493648572	0,200000002	0,7995986	0,318039144	21,31
2	$CR = 0.93, I_{max} = 250$	0,20040704	0,200000006	0,799314016	0,380509568	21,38
3	$CR = 0.96, I_{max} = 250$	0,49057417	0,200938109	0,796665887	0,358804594	21,11
4	$CR = 0.99, I_{max} = 250$	0,203700732	0,200000011	0,793509973	0,302309052	21,62
5	$CR = 0.99, I_{max} = 400$	0,202774242	0,200670458	0,779143091	0,355654907	21,29
6	$CR = 0.99, I_{max} = 800$	0,200927913	0,200172399	0,799162089	0,30012868	21,65
7	$CR = 0.99, I_{max} = 1500$	0,200775342	0,2	0,79999581	0,301296387	21,67
8	$CR = 0.99, I_{max} = 2500$	0,200003813	0,2	0,799782514	0,300023475	21,67
9	$CR = 0.99, I_{max} = 6000$	0,200037701	0,200000069	0,799983124	0,30018866	21,67
10	$CR = 0.99, I_{max} = 10000$	0,2	0,2	0,799999999	0,3	21,68



**Figure 11:** Single expansion-chamber muffler with outlet extended tube, transmission loss versus frequency (Theoretical solution (blue line) and simulated solution (red line)).

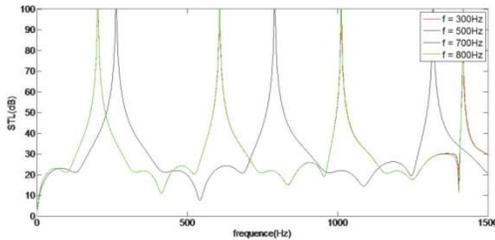
Obviously, the results reveal that the highest values of the maximum of ( $CR$  and  $I_{max}$ ) gave the highest STL. At higher frequency, the plots behavior is more complicated and the STLs are roughly maximized at the desired frequencies. The STL of the muffler's optimal sizes with respect to various pure tones are summarized in table 7. The optimal STL curves with respect to targeted frequencies are plotted and depicted in figure 13. We notice that the levels of the transmission loss increase in the low frequency range, whereas the levels decrease at high frequencies and it shows that the STLs are precisely maximized at the selected frequencies. After that the 3D analysis of propagation modes is performed on the related optimal muffler's size with respect to pure tone of 2820 Hz.



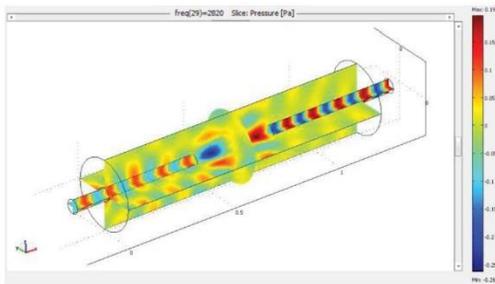
**Figure 12:** Performance curves of STL with respect to various maximal iterations ( $I_{max}$ ) by TA [ $T_0 = 0.2$ ].

**Table 7:** Optimal STLs for a double expansion-chamber with respect to various targeted frequencies ( $CR=0.95, I_{max}=50000$ ).

Case	Targette frequency	Results				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	300 Hz	0,200378869	0,200005517	0,799887167	0,300417339	22,49
2	500 Hz	0,200004147	0,200002545	0,61423464	0,300032686	23,14
3	700 Hz	0,200428366	0,200205034	0,799994563	0,300055346	23,25
4	800 Hz	0,20000481	0,20001244	0,799999553	0,300006166	28,62



**Figure 13:** STL with respect to frequencies of the expansion-chamber muffler with inlet and outlet extended tube for various pure tones [Targeted frequency: 300, 500, 700 and 800 Hz].



**Figure 14:** Optimized FEM model of the one expansion-chamber muffler and internal sound pressure distribution at 2820Hz (absolute pressure).

Figure 14 shows the internal sound pressure distribution at 2820 Hz of the single expansion chamber muffler, we observe how the sound pressure level is higher than those of muffler with inlet extended tube and outlet extended tube in high frequencies. We can also observe for the selected frequencies how the sound pressure level distributions near the muffler outlet is important.

Figure 15 plots the theoretical transmission loss (blue line) and the simulation solution (red line) as a function of frequency.

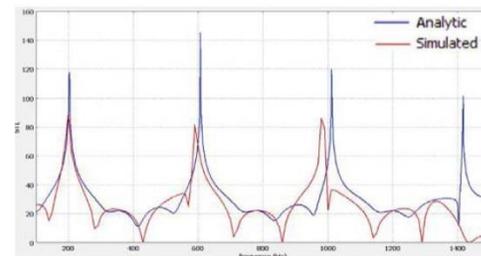
The FEM solution has an upper frequency limit for its validity. This limit is the cut-on frequency defined previously, we observe a discrepancy between the analytic and the simulated plots as the theoretical results based on the TMM depend on the element which is modelled and not on the source whereas the FEM solution is based on the sound acoustic power method and depend only on the sound

source and do not allow the transfer matrices of the acoustic system to be obtained.

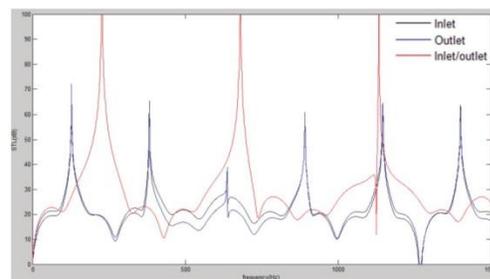
The discrepancy obtained in the results plot may also be attributed to the used formulation in finite element method which is Lagrange elements or to the computational meshed applied (density and refinement).

#### 4.4 Comparison

The optimal muffler's design data for the three kinds of expansion-chamber mufflers with extended tubes (inlet, outlet and inlet/outlet tubes) with space constraint is summarized in table 8 and plotted in figure 16. As shown, it is obvious that the attenuation of the single expansion-chamber muffler with inlet and outlet tube is a little superior to the other mufflers. Consequently it gives the best acoustical performance.



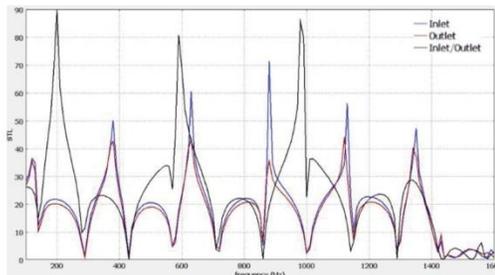
**Figure 15:** Expansion-chamber muffler with inlet and outlet extended tube transmission loss versus frequency: theoretical solution (blue line) and simulated solution (red line).



**Figure 16:** Comparison of the optimal STL level with respect to the three kinds of optimized mufflers within a same space-constrained space [broadband noise].

**Table 8:** Comparison of the acoustical performance with respect to three kinds of optimized mufflers within same space-constrained situation.

Case	Type of muffler	Results				STL (dB)
		R1	R2	R3	R4	
1	Inlet extended tube	0,24	0,2	0,79	0,55	119,69
2	Outlet extended tube	0,21	0,27	0,79	0,55	167,92
3	Inlet & Outlet extended tubes	0,2	0,2	0,79	0,3	28,62



**Figure 17:** FEM solution of the three shape optimized mufflers: Inlet (Blue line), Outlet (Red line) and Inlet/Outlet (Black line).

For the FEM Solution, the sound attenuation of the three optimized mufflers' configurations as a function of frequency is plotted in figure 17. The plot shows that for the muffler with inlet and outlet extended tubes gives the highest acoustical performance than the two other mufflers.

## 5 Conclusion

The shape optimization of three kinds of reactive mufflers with extended tubes under space constraints is applied in this paper by using a novel scheme Threshold Acceptance coupled with 3D finite element analysis.

This numerical analysis using TA optimizer shows to be an efficient method to optimize reactive mufflers under space constraints.

The TA optimizer is based on the TMM method applying the plane wave theory as well as four-pole transfer matrices. This optimization method shows the importance of the two TA parameters ( $CR$  and  $J_{max}$ ) in the optimization process also it reveals that this method is valid when the influence of high order modes can be neglected. For the FEM, the analysis is performed on the shape optimized mufflers obtained by the TA methods. This method depend on the sound acoustic power. The TMM depends on the element which is modelled and not on the sound source, whereas for the sound acoustic power depend on the sound source and does not allow the transfer matrices of the acoustic system to be obtained, also it depends on the finite element formulation and the computational mesh method.

The comparison between the numerical prediction based on the TMM and the FEM solution based on the sound acoustic power displays higher discrepancies in the

curves for the muffler with outlet extended tube than the two other mufflers.

The TA optimization method and the FEM method showed that the single expansion-chamber muffler with inlet and outlet extended tube provides considerably better STL values than the two other mufflers.

Consequently, the approach of the optimal design of STL proposed in this study is quite efficient in dealing with the reactive mufflers within a space-constrained situation.

## Acknowledgments

The authors acknowledge the support given by the technology department and mechanical engineering department of the University of Bejaia.

## References

- [1] E. Bécache, A.S. Bonnet-Bendhia, Numerical simulation of exhaust muffler, An homogenized finite element method, *Cari'06*, Vol. 1, (2006), pp. 1-10.
- [2] S. Bilawchuk, K. R. Fyfe, Comparison and implementation of the various numerical methods used for calculating transmission loss in silencer systems, *Appl. Acoust.*, Vol. 64, (2003), pp. 903-916.
- [3] S.N.Y. Gerges, R. Jordan, F.A. Thime, J.L. Bento Coelho, J.P. Arenas, Muffler Modeling by Transfer Matrix Method and Experimental Verification, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, Vol. 27(2), (2005), pp. 132-140.
- [4] M.L. Munjal, Plane wave analysis of side inlet/outlet chamber mufflers with mean flow, *Appl. Acoust.*, Vol. 52(2), (1997), pp. 165-175.
- [5] M. L. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers with Application to Exhaust and Ventilation System Design*, John Wiley & Sons, Inc., (1987), pp. 328.
- [6] M. L. Munjal, *Advances in the acoustics of flow ducts and mufflers*, Vol. 15(2), (1990), pp. 57-72.
- [7] K.S. Andersen, Analyzing Muffler performance using the Transfer Matrix Method, *Proc. Comsol Conf.*, (2008).
- [8] L.J. Yeh, M.C. Chiu, Computer aided design on single expansion muffler under space constraints, *Proc. 19th Nat. Conf. Mech. Eng.*, Vol. C7, (2002) pp. 625-633.
- [9] R.J. Bernhard, Shape Optimization of Reactive Mufflers, *Noise Cont Eng J*, Vol. 27(1), (1986) pp. 10-17.
- [10] M.C. Chiu, L.J. Yeh, Shape Optimization of Single-Chamber Mufflers with Side Inlet/Outlet by Using Boundary Element Method, Mathematic Gradient Method and Genetic Algorithm, *Tamkang J. Sc. Eng.*, Vol. 12(1), (2009) pp. 85-98.
- [11] L.J. Yeh, Y.C. Chang, M.C. Chiu, Shape Optimal Design on Double-Chamber Mufflers Using Simulated Annealing and a Genetic Algorithm, *Turkish J. Eng. Env. Sc.*, Vol. 29, (2005), pp. 207-224.
- [12] P. W. Jones, N. J. Kessissoglou, Experimental study of the Transmission Loss of Mufflers used in Reperatory Medical Devices, Vol. 38, (2010), pp. 1 - 13
- [13] M.L. Munjal, A. G. GALAITISIS, I. L. VER, *Passive Silencer, Noise Vibration Control Engineering*, J. Wiley & Son, Inc., (2005), pp. 279-343.

- [14] Davies, P.O.A.L., Realistic Models for Predicting Sound Propagation in Flow Duct Systems, *Noise Cont. Eng. J.*, Vol. 40,(1993), pp. 135-141. [18]
- [15] Beranek, L.L, Istvan, L, *Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications*, John Wiley & Sons, Inc, (1992), ISBN 0-471-61751-2.
- [16] O. Bräysyeen, J. Berger, A Threshold Accepting Metaheuristic for the Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Appl. Math.*, (2003).
- [17] A. Metropolis, Rosenbluth, Equation of static calculations by fast computing machines, *J. Chem. Phys.*, Vol. 21(6), (1953), pp. 1087-1092.
- [18] G. Dueck, T. Scheurer, Threshold accepting: A general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing, *J. Comput. Phys.*, vol. 90, (1990), pp. 161-175.
- [19] M. Yagiura, T. Ibaraki, On metaheuristic algorithms for combinatorial optimization problems, *Sys. Comp. Japan*, vol. 32, (2001), pp. 33–55.
- [20] COMSOL 3.4, Acoustics Module Model Library, COMSOL AB, (2007), pp. 74-85.

### Notation

STL	Sound transmission loss (dB)
$w_i$	time-averaged incident sound power
$w_t$	transmitted sound power
$q$	dipole source
$p_0$	incoming pressure wave
$k_f$	wave vector
$I$	time-averaged sound intensity
$W$	transmitted sound powers
$c_0$	sound speed (m/s)
$D_0$	diameter of the expansion chamber in the muffler (m)
$D_i$	diameter of the $i$ -th segment of the muffler (m)
$f_{0i}$	cut-off frequency (Hz)
$f$	cyclic frequency (Hz)
$J_{max}$	maximum iteration
$j$	imaginary unit
$k$	wave number
$CR$	cooling rate in SA
$L_0$	total length of the muffler (m)
$L_i$	length at the $i$ -th element (m)
$M_i$	mean flow Mach number at the $i$ th element
$Obj_i$	objective function (dB)
$p$	acoustic pressure (Pa)
$p_i$	acoustic pressure at the $i$ th node (Pa)
$u$	acoustic particle velocity ( $\text{ms}^{-1}$ )
$u_i$	acoustic particle velocity at the $i$ th node ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\rho_0$	air density ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$pb(T)$	transition probability
$T_0$	initial temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )
$Q$	volume flow rate of venting gas ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
$S_i$	section area at the $i$ -th node ( $\text{m}^2$ )

# Bibliographie

- A., Selamat. *Acoustic Attenuation of Hybrid Silencers*. Journal of Sound and Vibration, 2003.
- Abecasis G. "Simulated Annealing, cours Biostatistiques - chapitre19." <http://www.sph.umich.edu/csg/abecasis/>, 2011.
- Abom M. "Measurement of a scattering-matrix of acoustical two ports." *Mechanical systems and signal processing*, 1991: 89-104.
- acoustique, Éléments finis en. *Christophw Durand*. 2009.
- Andesen K.S. "Analyzing Muffler performance using the Transfer Matrix Method." *Proceeding of Comsol conferance*, 2008.
- Autin B. "Les métaheuristiques en optimisation combinatoire." *Conservatoire National Des Arts et Metiers*, 2006.
- Becache, E. and Bonnet. "Numerical studies." *Cari* 1 (2006): 21.
- Beranek, Istvan L.,. "Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications." *John Wiley & Sons Inc.*, 1992.
- Bernhard R.J. "Shape Optimization of Reactive Mufflers." *Noise control engineering journal*, 1986: ol. 27(1), pp. 10-17.
- Bies D.A and Hansen C. "Engineering Noise Control." *Spon Press*, 1996.
- Bilawchuk S., Fyfe K.R. "Comparison and implementation of the various numerical used for calculating transmission loss in silencer system." *Applied acoustci*, 2003: Vol. 64 pp. 903-916.
- Bramlette. M.F. "Initialization, mutation and selection methods in genetic algorithm for function optimization." *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, 1991: pages 100-107.
- Brassard, Gilles. "Fundamentals of Algorithmics." *Thesis*, 1995.
- Bräysyeay O. and Berger J. "A Threshold Accepting Metaheuristic for the Vehicle Routing Problem with Time Windows." *Applied mathematics journal*, 2003.
- Cěrný V. "A Thermodynamical Approach to the Travelling Salesman Problem; An Efficient Simulation Algorithm." *Journal of Optimization Theory and Applicaction*, 1985: Vol. 45, pp. 41-55.

- Chang Y.C., Chiu M.C. "Optimization of composite absorbers on constrained sound reverberant system by using simulated annealing." *Applied Acoustics*, 2005: Vol. 66, pp. 341–352.
- Chang Y.C., Yeh L.J. , Chiu M.C. ., "Shape optimization on double-chamber mufflers using genetic algorithm." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2005: Vol. 10, pp. 31–42.
- Cheremisinoff, P.N. and Cheremisinoff, P.P. "Industrial Noise Control Handbook,." *Ann Arbor Science*, 1977.
- Chiu M.C. and Yeh L.J. "Shape Optimization of Single-Chamber Mufflers with Side Inlet/Outlet by Using Boundary Element Method, Mathematic Gradient Method and Genetic Algorithm." *Tamkang journal of science engineering.*, 2009: Vol. 12(1), pp. 85-98.
- COMSOL AB. "COMSOL 3.4, Acoustics Module Model Library." 2007: pp. 74-85.
- Craggs A. "The application of the transfer matrix and matrix condensation methods with finite elements to duct acoustics." *Journal of Sound and Vibration*, 1989: Vol. 132(3): 393–402.
- Davies. "Realistic Models for Predicting Sound Propagation in Flow Duct Systems." *Noise control engineering journal*, 1993: Vol. 40, pp. 135-141.
- Davis D. D., J.M. Stokes, L. Moore, . "Theoretical and experimental investigation of mufflers with components on engine muffler design." *NACA Report*, 1954 : pp 1192.
- Davis. L. "Adapting operator probabilities in genetic algorithms." *In Proceedings of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms.*, 1989.: pp 61-69.
- De Jong K.A and W. Spears . "An analysis of interacting roles of population size and crossover in genetic algorithms." *Parallel problem solving from nature Proceedings of 1st workshop, PPSN I Dortmund, Germany.*, 1991.: Vol 496, pp 38-47.
- De Jong K.A. and J.Sharma. "Foundations of Genetic Algorithms 2." *Darrell Whitley*, 1992: pp 19-28.
- De Jong K.A. and W.M. Spears. "A formal analysis of the role of multi-point crossover in genetic algorithms." *Annals of mathematics and Artificial intelligence.*, 1992: Vol 5:1-26.
- Delany M.E. and Bazley E.N. "Acoustical properties of fibrous absorbent materials." *Applied acoustics*, 1970: Vol. 3 pp. 105-116.
- Dueck G. and Scheurer T., D. "Threshold accepting: A general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing." *Journal of computing physics*, 1990: vol. 90, pp. 161-175.
- Durand, Christophe. *Éléments finis en acoustique*. 2009.

- Fletcher H. and Munson. "Loudness, its definition, measurement and calculation." *Journal of acoustic society*, 1933: Vol. 5(2), pp 82–105.
- Fogel D.B. "Evolutionary Computation: Toward a new Philosophy of Machine Intelligence." *IEEE press*, 1995.
- Gerges S.N.Y. and Jordan R. "Muffler Modeling by Transfer Matrix Method and Experimental Verification." *Journal of brazilian society of mechanic and engineering*, 2005: Vol. 27(2), pp. 132-140.
- Goldberg D.E. and J.Richardson. "Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization." *In Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms*, 1987: pp 41-49,.
- Goldberg. D.E. "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning." *Addison Wesley*, 1989.
- Jayaraman K., Yam K. "Decoupling approach to modeling perforated tube muffler components." *Acoustical Society of America*, 1981: Vol 69 (2) pp 390–396.
- Jones P.W. and Kessissoglou N.J. "Experimental study of the Transmission Loss of Mufflers used in Reperatory Medical Devices,." 2010: Vol. 38 , pp. 1 - 13.
- Kendall G. "Simulated Annealing: course." *AI Methods: Nottingham University*, 2017.
- Kirkpatrick S., Gelatt C.D. , Vecchi M.P. "Optimization by simulated annealing, Science." *Science* , 1983: Vol. 1.220 (4598) pp. 671–680.
- Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi,. "Optimization by Simulated Annealing." *Science, New Series*, 1988: Vol 4598 - pp. 671-680.
- Knight, Elaine Rich and Kevin. "Artificial Intelligence (Second Edition)." 2009.
- Liacs. "Simulated Annealing." *Natural Computing Group ; Leiden University*, 2009.
- Metropolis A. and Rosenbluth. "Equation of static calculations by fast computing machines." *Journal of chemical and physic*, 1953: Vol. 21(6), pp. 1087-1092.
- Metropolis A., Rosenbluth W. , Rosenbluth M.N., Teller H., Teller E. "Equation of static calculations by fast computing machines,." *The Journal of Chemical Physics* , 1953: Vol; 21 (6). pp. 1087–1092.
- Munjal M.L. . "Acoustics of Ducts and Mufflers with Application to Exhaust and Ventilation System Design." *Wiley, New York*,, 1987.
- Munjal M.L. "Acoustics of Ducts and Mufflers." *Wiley-Interscience*, 1987.
- Munjal M.L. "Advances in the acoustics of flow ducts and mufflers." *Applied acoustic*, 1990: Vol. 15(2), pp. 57-72.

- Munjaj M.L. and Galitisis A.G. "Passive Silencer, Noise Vibration Control Engineering,." *Journal of Wiley & Son, Inc*, 2005: pp. 279-343.
- Munjaj M.L. *Plane wave analysis of side inlet/outlet chamber mufflers with mean flow*. 1997.
- Munjaj M.L., Rao K.N. , Sahasrabudhe A.D. "Aeroacoustic analysis of perforated muffler components." *Journal of Sound and Vibration*, 1987: Vol. 114 (2) pp 173–188.
- Munjaj M.L., Krishnan K. , Reddy M.M. "Flow-acoustic perforated element mufflers with application to design,." *Noise Control Engineering Journal*, 1993: Vol. 40 (1), pp.159–167.
- Nolle L., Armstrong D.A. ,Hopgood A.A. , Ware J.A. ,. "Simulated annealing and genetic algorithms applied to finishing mill optimization for hot rolling of wide steel strip,." *International of Knowledge-Based Intelligent Engineering System*, 2002: Vol. 6 (2), pp. 104–111.
- Olivier D. "Méthode du recuit simulé [Rapport] : complément TD/TP Recherche stochastique." 2001.
- Pascal J. "vibrations et acoustique II." *École nationale supérieure d'ingénieurs du mans*, 2009.
- Selamet A. "Acoustic Attenuation of Hybrid Silencers." *Journal of Sound and Vibration*, 2003: Vol 262, pp 509-527.
- Souquet, Amédé. *Algorithme génétique*. 2004.
- Sullivan J.W. "A method of modeling perforated tube muffler components II: theory,." *Acoustical Society of America*, 1979: Vol 66 pp 779-788.
- Sullivan J.W. "method of modeling perforated tube muffler components I: theory,." *Acoustical Society of America*, 1979: Vol 66 pp 772–778.
- Sullivan J.W., Crocker M.J. "Analysis of concentric tube resonators having unpartitioned cavities." *Acoustical Society of America* , 1978: Vol 64 pp 207–215.
- Thawani P.T., Jayaraman K. "Modeling and applications of straight-through resonators." *Acoustical Society of America*, 1983: Vol 73 (4) pp 1387–1389.
- Thomson W. "Transmission of elastic waves through a stratified solid medium." *Journal of Applied Physics*,, 1950: Vol 21, pp 89-93.
- Yagiura M. and Ibaraki T. "On metaheuristic algorithms for combinatorial optimization problems." *Journal of computing system*,, 2001: vol. 32, pp. 33–55.
- Yeh L.J. and Chang M.C. "Shape Optimal Design on Double-Chamber Mufflers Using Simulated Annealing and a Genetic Algorithm." *Turkish journal of engineering environment science*,, 2005: Vol. 29, pp. 207- 224.

- Yeh L.J. and Chiu M.C. "Computer aided design on single expansion muffler under space constraints." *Proceeding 19th national confernance of mechanical engineering.*, 2002: Vol. C7, pp. 625-633.
- Yeh L.J., Chang Y.C. , Chiu M.C. , Lai G.J. "GA optimization on multi-segment mufflers under space constraints." *Applied Acoustics*, 2004: Vol. 65 (5), pp. 521–543.
- Yeh L.J., Chang Y.C. , Chiu M.C. "Numerical studies on a constrained venting system with reactive mufflers by GA optimization,." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006: Vol. 65, pp. 165–1185.

## Résumé

L'optimisation numérique des silencieux réactifs, limités dans l'espace, a une grande importance dans la conception d'environnements moins bruyants. Dans ce travail, les performances acoustiques de trois types de silencieux, soumis à un espace limité, sont étudiées. Une analyse d'optimisation de forme est effectuée en utilisant un algorithme d'optimisation appelé le Seuil d'Acceptation. La conception optimale de la forme géométrique obtenue est analysée par la méthode des éléments finis. Cette approche numérique est basée sur la maximisation de la perte de transmission acoustique à l'aide de la méthode de transfert de matrices qui est une méthode de modélisation basée sur le modèle de propagation d'onde plane. La solution en élément finis utilisée pour analyser la STL est basée sur la méthode de puissance acoustique, un code de calcul standard est utilisé pour analyser en 3D l'atténuation acoustique des silencieux par la méthode EF. La capacité acoustique des silencieux obtenus est évaluée en comparant la solution EF à la méthode analytique. Les résultats montrent que la valeur maximale de la PTA est précisément située à la tonalité ciblée. En outre, la performance acoustique du silencieux avec tube prolongé à l'entrée et à la sortie se trouve être supérieure aux autres types de silencieux. Par conséquent, cette approche fournit un schéma rapide pour l'optimisation de la forme des silencieux réactifs.

## Abstract

The Shape optimization of reactive muffler under space constraint becomes of great importance in the design of quieter environments. In this paper, the acoustical performance of three different expansion-chamber mufflers with extended tube under space constraint is presented. A shape optimization analysis is performed using a novel scheme called Threshold Acceptance (TA). The best design obtained by the shape optimization method is analyzed by Finite Element Method (EF). This numerical approach is based on the maximization of the sound transmission loss (STL) using the Transfer Matrix Method (MTM). The MTM method is a modelling method based on the plane wave propagation model whereas the EF solution is based on the acoustical power method. A standard computational code is used to analyze the sound attenuation of the mufflers by the EF method in 3D. The acoustical ability of the mufflers is then assessed by comparing the EF solution with the analytical method. Results show that the maximal STL is precisely located at the desired targeted tone. In addition, the acoustical performance of muffler with inlet and outlet extended tube is found to be superior to the other ones. Consequently, this approach provides a quick scheme for the shape optimization of reactive mufflers.

## ملخص

الشكل الأمثل من كاتم الصوت التفاعلي تحت مساحة محدودة يصبح من أهمية كبيرة في تصميم بيئات أكثر هدوءاً. في هذا العمل، تقدم ثلاثة نماذج من كواتم الصوت مع أنبوب الموسعة تحت مساحة محدودة. يتم إجراء تحليل الشكل الأمثل باستخدام نظام يسمى انتهت عتبة قبول. ويتم تحليل أفضل تصميم تم الحصول عليها من طريقة الشكل الأمثل من خلال طريقة العناصر المحدودة. ويستند هذا النهج العددي على تحقيق أقصى قدر من فقدان انتقال الصوت باستخدام مصفوفة نقل الطريقة. هذا الأسلوب هو أسلوب النمذجة على أساس نموذج انتشار الموجات في حين حل يقوم على أسلوب القوة الصوتية. ويستخدم كود الحسابية القياسية لتحليل تخفيف صوت كاتمة للصوت من قبل طريقة العناصر نهائية. والقدرة الصوتية من كواتم الصوت ومن المقررة من قبل وبمقارنة حل طريقة العناصر النهائي مع المنهج التحليلي. أظهرت النتائج كيو لا أقصى خسارة الإرسال الصوت هو مكان الموقع هي لهجة المستهدفة المرغوب. وبالإضافة إلى ذلك، تم العثور على الأداء الصوتي من كواتم الصوت مع مدخل ومخرج بمد أنبوب لتكون متفوقة على كواتم الصوت الأخرى. ونتيجة لذلك، فإن هذا النهج يوفر خطة سريعة لتحسين شكل من كواتم الصوت.

الكلمات الرئيسية: كاتم الصوت التفاعلي، قبول العتبة، طريقة مصفوفة التحويل، الطاقة الصوتية.