

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Installations Énergétiques et Turbomachines

Par :

AMMAOUI Kamel

BENREMILA Sofiane

AMARI Idir

Thème

**Etude d'un écoulement de couche limite induit par un jet axisymétrique
sur un cylindre chauffé**

Soutenu le 20/09/2022 devant le jury composé de:

Mr.	SAHI. A	Président
Mr.	MENDIL. F	Rapporteur
Mr.	HAMDI. M	Examineur

Année Universitaire 2021-2022

Année Universitaire 2021-2022

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant.

Je tiens à remercier vivement notre encadreur Mr F. Mendil pour ses précieux conseils et ses orientations.

Je tiens aussi à remercier le chef de département Mr A. Benslimane et tout le personnel de l'administration.

Mes remerciements s'étendent aussi aux membres de jury qui acceptent d'évaluer ce travail.

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce travail du près ou de loin.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Mes frères et sœurs

Toute la famille paternelle et maternelle

Mes amis (es) et à ceux et celles que j'ai pu rencontrer à l'université.

S. BENREMILA

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A toute ma famille,

A tous mes amis sans exception

A tous ceux qui me sont chers.

K. AMMAOUI

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A toute ma famille,

A tous mes amis sans exception

A tous ceux qui me sont chers.

A. IDIR

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre.I Généralités et revue bibliographique	3
I.4 Introduction :.....	3
I.5 Types d'écoulements	3
I.5.1 Ecoulement laminaire	3
I.5.2 Ecoulement turbulent	4
I.6 Couche limite	4
I.6.2 Concept de couche limite dynamique	5
I.6.3 . Concept de couche limite thermique.....	6
I.7 Jet impactant	6
I.7.1 Jet impactant unique	7
I.7.1.1 Structuredujetlibre.....	7
I.7.2 Différents types de jets impactants sur une surface	8
I.7.3 Jet impactant dans une cavité cylindrique	8
I.7.3.1 Région de jet libre	8
I.7.3.2 Région de stagnation (région d'impact).....	8
I.7.3.3 Régiondejetpariétal	9
I.7.4 Géométrie d'un jet impactant sur un cylindre.....	9
I.7.5 Différentesapplicationsdesjets	9
I.8 Généralités sur les transferts de chaleur.....	10
I.9 Revue bibliographique	10
I.9.1 Intérêt de l'écoulement de stagnation	10
I.9.2 Ecoulement de Hiemenz	11
I.10 Conclusion	14
Chapitre.II Positionnement de problème et formulation	
mathématique.....	15
II.1 Introduction	15
II.2 Définition de problème	15

II.3 Formulation mathématique	16
II.4 Formulation adimensionnelle :	17
II.5 Les nombres adimensionnels	19
II.6 Conclusion	20
Chapitre.III Méthode numérique	21
III.1 Introduction	21
III.2 Méthode d'Euler.....	21
III.3 Méthode de Runge-Kutta	22
III.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre N.....	22
III.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	23
III.4 Méthode de Tirs	25
III.5 Algorithme de résolution.....	27
III.6 Conclusion.....	27
Chapitre.IV : Résultats et Discussion	28
IV.1 Introduction	28
IV.2 Caractéristique dynamique.....	28
IV.3 Caractéristique thermique :	33
IV.4 Conclusion :	39
Conclusion générale.....	40

Liste des figures

Fig. I. 1 : Schématisation d'un écoulement laminaire dans une conduite.....	4
Fig. I. 2 : Schématisation d'un écoulement turbulent dans une conduite.....	4
Fig. I. 3 : Représentation schématique des couches limites dynamique et thermique se développant sur un cylindre.	5
Fig. I. 4 : Représentation d'une couche limite dynamique.....	6
Fig. I. 5 : Représentation d'une couche limite thermique.	6
Fig. I. 6 : Structure générale du jet libre.....	7
Fig. I. 7 : Différents types de jets impactants sur une surface.....	8
Fig. I. 8 : Structure d'un jet impactant sur un cylindre.	9
Fig. I. 9 : Représentation de stagnation ou point d'arrêt (solution de Hiemenz).	11
Fig. I. 10 : Configuration jet – cavité cylindrique [Ben 1985]......	12
Fig. I. 11 : Visualisation de l'écoulement obtenue par couche de laser, Ergin Ersigemez et al.....	13
Fig. I. 12 : Différentes configurations jet-cylindre, S. A. Nada et al.....	14
Fig. IV. 1 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil f en fonction de η	28
Fig. IV. 2 : Effet de nombre de Reynolds sur le profil f en fonction de η	29
Fig. IV. 3 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil f en fonction de η	29
Fig. IV. 4 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil de vitesse f' en fonction de η	30
Fig. IV. 5 : Effet de nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse en fonction de η	30
Fig. IV. 6 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur profil de vitesse f' en fonction de η	31
Fig. IV. 7 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur profil f'' en fonction de η	31
Fig. IV. 8 : Effet de nombre de Reynolds Re sur le profil f'' en fonction de η	32
Fig. IV. 9 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil f'' en fonction de η	32
Fig. IV. 10 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil de température θ	33
Fig. IV. 11 : Effet de Reynolds Re sur le profil de température θ en fonction de η	34
Fig. IV. 12 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil de température θ en fonction de η	34
Fig. IV. 13 : Effet de nombre de Prandtl (Pr) sur le profil de θ' en fonction de η	35
Fig. IV. 14 : Effet de nombre de Reynolds (Re) sur le profil de θ' en fonction de η	35
Fig. IV. 15 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil de θ' en fonction de η	36
Fig. IV. 16 : Profil du nombre de Nusselt local en fonction de λ	37
Fig. IV. 17 : Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de λ	37

Nomenclature

SYMBOLES	SIGNIFICATION	Unité (SI)
T	Température	K
λ	Paramètre de flottabilité	-
P	Pression	Pa
g	Gravité	m/s ²
a	Accélération	m/s ²
k	Conductivité thermique	W/mk
(r, z)	Coordonnées cylindriques	-
c	Constante positive	-
T_w	Température sur la surface du cylindre	K
δ	Epaisseur de la couche limite	m
T_∞	Température ambiante	K
β	Paramètre de Source de chaleur	-
(u, w)	Composant de vitesse dans (r,z) direction	-
C_f	Coefficient de frottement à la paroi	-
q_w	Flux de chaleur de la surface de cylindre	-
Nu	Nombre de Nusselt	-
Pr	Nombre de Prandtl	-
Re	Nombre Reynolds	-

SYMBOLES GRECS	SIGNIFICATION	Unité (SI)
α	Diffusivité thermique	m ² /s
η	Variable de similitude	-
θ	Température adimensionnelle	-
μ	Viscosité dynamique	Pa .s
ν	Viscosité cinématique	m ² /s
ρ	Masse volumique	Kg/m ³
τ_w	Contrainte pariétal	pa
Ψ	Fonction de courant	-

INDICES	SIGNIFICATION	Unité (SI)
'	Dérivation	-
∞	Condition à l'infini amont	-
w	Condition à la paroi	-

Introduction générale

Introduction Générale

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (conduction et convection). Les scientifiques se penchent sur l'étude des écoulements avec transfert de chaleur, par différents modes de convection (naturelle, forcée et mixte). Ces écoulements sont étudiés à travers des géométries connues, en raison de leurs applications pratiques.

Le transfert de chaleur et de masse a suscité un grand intérêt dans le monde de la recherche scientifique et dans le développement technologique, cet intérêt est une conséquence de l'omniprésence de ces deux phénomènes dans de nombreuses applications industrielles.

Les jets impactant sont largement utilisés dans l'industrie, car ils génèrent d'importants transferts de chaleur. L'utilisation du jet impactant est devenue l'application la plus prisée dans les solutions industrielles lorsque l'on cherche à refroidir ou bien à chauffer une surface. Les jets impactant sont employés dans le but de contrôler la température de surface d'un corps par convection. Les procédés de traitement thermique des surfaces sont d'une grande importance dans l'industrie, on citera parmi de nombreux exemples, le refroidissement thermique de denrées alimentaires, ou la trempe de verre par jet d'air plan, ou le refroidissement des équipements électronique.

La dynamique de l'écoulement produit par les jets impactant est très complexe, car la mesure où il se produit une compétition entre les effets de flottabilité engendrés par la différence de température entre le cylindre et le fluide. En pratique, cette compétition se traduit par le décollement de la couche limite dynamique et thermique du fluide sur le cylindre, à une distance plus ou moins éloignée de l'axe de la buse.

Dans ce présent mémoire nous nous présentons d'étudier numériquement un écoulement de couche limite induit par un jet axisymétrique sur un cylindre chauffé dont la température est supérieure à celle du fluide, et ce en examinant les structures dynamique et thermique de l'écoulement de couche limite introduit par le jet.

Ce manuscrit est composé de trois chapitres et structuré comme suit :

- Dans Le premier chapitre, nous présentons des généralités sur les notions fondamentales relatives des jets impactant, et une description de la couche limite dynamique et thermique, suivi par une synthèse bibliographique des différents travaux antérieurs sur les jets impactant sur des surfaces chaude.

- Le deuxième chapitre est consacré à la formulation du problème, aux hypothèses Simplificatrices et à l'établissement des équations et des conditions aux limites qui leurs sont associées. Enfin, nous définissons les principales grandeurs adimensionnelles caractérisant le modèle ainsi la présentation de modèle physique.
- Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode numérique par laquelle nous résoudrons le problème étudié, utilisant la méthode de Runge kutta d'ordre quatre, largement connue (utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires) et la méthode de tir (pour faire démarrer la méthode de Runge kutta).
- Le quatrième chapitre, nous présentons et nous discutons les principaux résultats obtenus. Finalement nous terminons ce mémoire par une conclusion générale, qui résume les principaux résultats obtenus lors de cette étude.

Chapitre I. Généralités
et
revue bibliographique

Chapitre.I Généralités et revue bibliographique

I.4 Introduction :

L'étude des jets impactant sur les surfaces a fait l'objet d'un grand nombre de travaux scientifiques pendant les dernières décennies. Parmi les nombreux travaux dont la publication amena à comprendre et caractériser les écoulements et les transferts de chaleur qui se développent à l'intérieur des jets impactant sur les surfaces cylindrique.

Lorsque le jet évolue dans une cavité, plusieurs types d'interactions sont produits simultanément dépendant de son emplacement dans la cavité. La présence de plusieurs parois solides (parois de la cavité) confine le jet. Ce confinement est difficile à explorer, car il est lié à plusieurs phénomènes complexes de l'interaction jet-cavité telle que les recirculations, les décollements, les recollements et l'impact.

Au cours de ces dernières années, plusieurs travaux de recherche concernant les jets impactant ont été publiés, dus à leur importance dans diverses applications dans plusieurs domaines pratiques tels que l'environnement (aération), l'industrie (traitement des surfaces), le transport (moteurs à impulsion) etc.

I.5 Types d'écoulements

Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de prendre en compte le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite.

Les jets impactant sont étroitement associés à l'écoulement du fluide, il est donc primordial de s'intéresser de près aux différents régimes d'écoulement caractérisant le mouvement du fluide. Le fluide en écoulement peut évoluer soit en régime laminaire ou en régime turbulent, la transition du régime laminaire vers le régime turbulent est caractérisée par le régime dit transitoire.[1]

I.5.1 Ecoulement laminaire

Dans ce type d'écoulement les couches du fluide ne se mélangent pas et la trajectoire des particules restent parallèles.

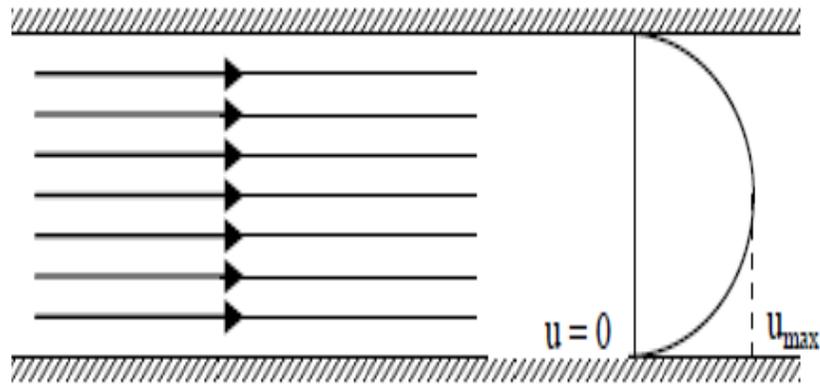


Fig. I. 1 : Schématisation d'un écoulement laminaire dans une conduite.[12]

I.5.2 Écoulement turbulent

Dans le mouvement turbulent, le mécanisme de conduction est favorisé par d'innombrables tourbillons. Les petits volumes du fluide, en se mélangeant avec d'autre, jouent le rôle de porteur d'énergie. Par conséquent un accroissement de turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection.

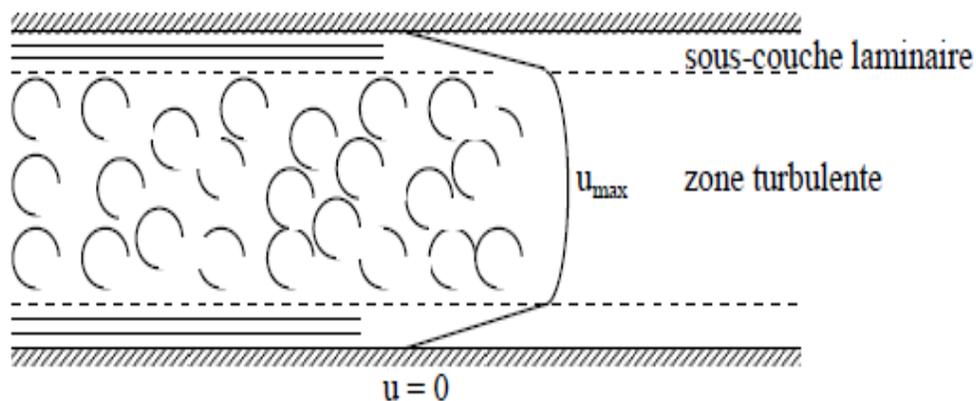


Fig. I. 2 : Schématisation d'un écoulement turbulent dans une conduite.[12]

I.6 Couche limite

La couche limite est une zone d'interface entre un corps et le fluide environnant lors d'un mouvement relatif entre les deux. On y observe les effets de la viscosité. Elle est un élément important en mécanique des fluides.

Il s'agit de cette mince couche de fluide qui se forme sur la surface d'un corps solide lorsque ce dernier entre en contact avec un fluide visqueux en déplacement (écoulement) ; elle peut être de nature dynamique, thermique.[2,3,4]

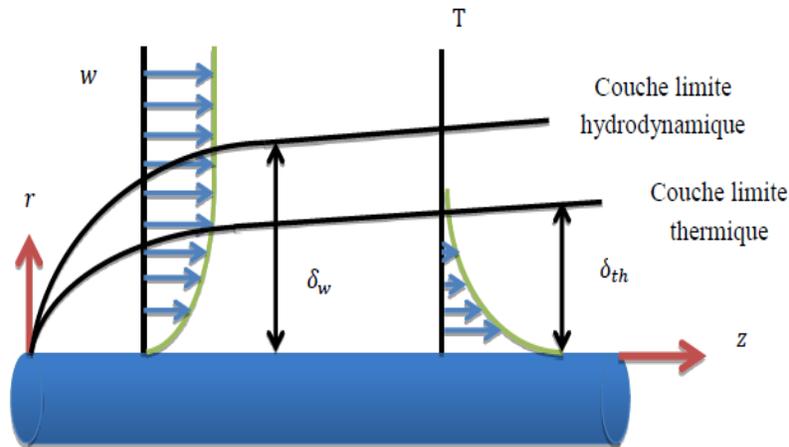


Fig. I. 3 : Représentation schématique des couches limites dynamique et thermique se développant sur un cylindre.[13]

I.6.2 Concept de couche limite dynamique

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais à la paroi. La couche limite est la zone de fluide contiguë à la paroi dans la quelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse local du fluide libre. Les propriétés de l'écoulement qui dépendent de cette couche limite sont (Les forces de frottement, Transfer thermique).

La couche limite laminaire est caractérisée par le fait que tous les vecteurs vitesses sont parallèles à un même plan, l'écoulement se présente alors sous la forme de lames de fluide glissant les unes sur les autres. Ces lames restent rectilignes sur une certaine longueur, puis s'estompent. On observe une telle couche limite vers le bord d'attaque d'un profil. On appelle conventionnellement l'épaisseur δ de la couche limite la distance à la paroi.

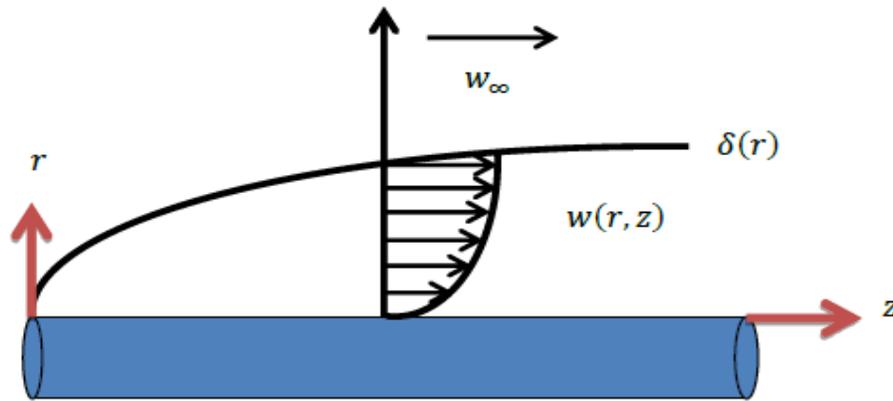


Fig. I. 4 : Représentation d'une couche limite dynamique.[13]

I.6.3 . Concept de couche limite thermique

Lorsqu' un fluide de température T_{∞} , s'écoule sur une paroi à la température T_w , des échanges thermiques s'établissent. Les particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme.

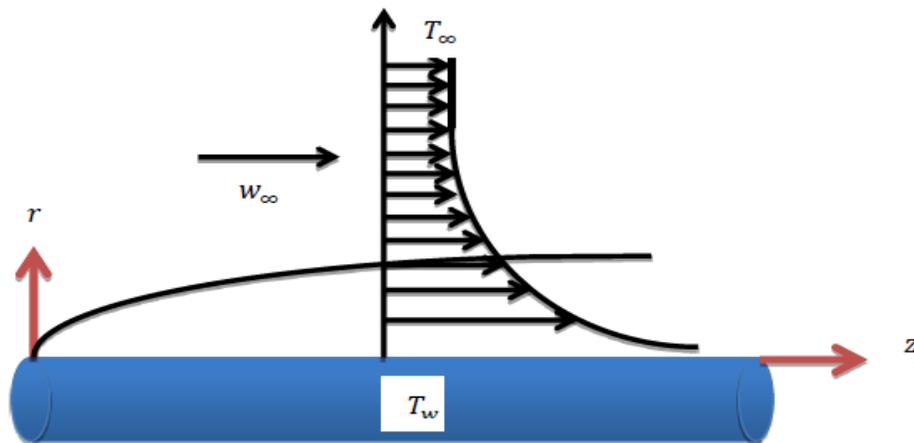


Fig. I. 5 : Représentation d'une couche limite thermique.[13]

I.7 Jet impactant

La technique des jets impactant se trouve dans nombreuses applications industrielles et les résultats de sa mise en place dépendent de nombreux paramètres. Ainsi de nombreuses études expérimentales et numériques ont été menées dans le but d'une meilleure compréhension des phénomènes physiques intervenant et régissant l'impact d'un jet. [5]

Pour comprendre les structures propres au jet en impact, il convient d'abord de s'intéresser au cas du jet libre.

I.7.1 Jet impactant unique

Pour comprendre les structures propres au jet en impact, il convient d'abord de s'intéresser au cas du jet libre.[5]

I.7.1.1 Structure du jet libre

Une décomposition classique proposée pour le jet libre est de distinguer trois zones.

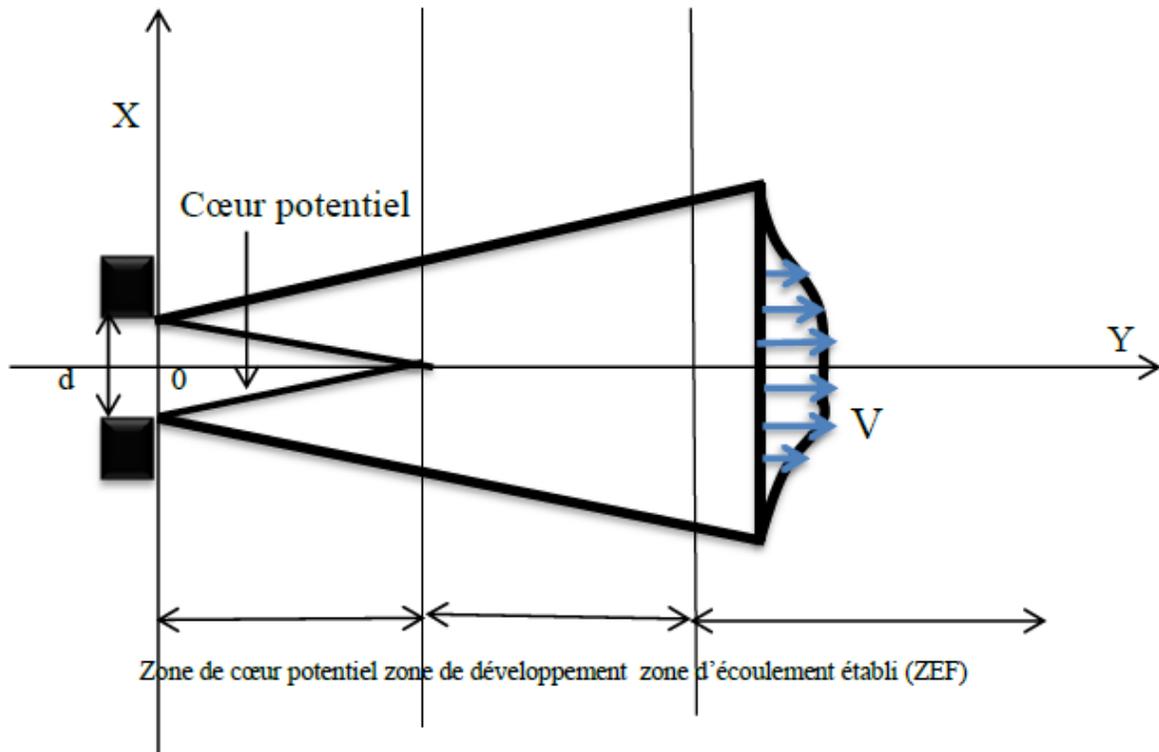


Fig. I. 6 : Structure générale du jet libre.[14]

- **Zone de corps potentiel**

Elle se caractérise par une vitesse en sortie de buse conservée sur l'axe central du jet à l'intérieur de ce qui s'appelle alors le corps potentiel. L'air environnant est entraîné par le jet et réduit ainsi progressivement la vitesse dans le jet jusqu'à atteindre la ligne centrale. L'entraînement de l'air environnant crée une région de mélange et de fort cisaillement. La longueur du corps potentiel est généralement évaluée entre 4 et 7 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur, mais ce résultat dépend fortement des profils de vitesse et des taux de turbulence en sortie d'injecteur. La géométrie de l'injecteur influence nécessairement ces deux

paramètres. Par exemple, pour un jet issu d'un tube long circulaire, la longueur du corps potentiel est de l'ordre de 4,5 à 5 fois le diamètre hydraulique.

- **Zone de transition**

Cette zone commence lorsque les couches de mélange se rejoignent au centre du jet. On observe alors une baisse de la vitesse axiale due aux fortes contraintes de cisaillement dans cette zone.

- **Zone développée**

Les profils de vitesse sont désormais auto semblables et peuvent donc être déduits des profils amont par similitude. Différents auteurs placent le début de cette zone à partir de 8 fois jusqu'à 20 fois le diamètre hydraulique de l'injecteur.

I.7.2 Différents types de jets impactants sur une surface

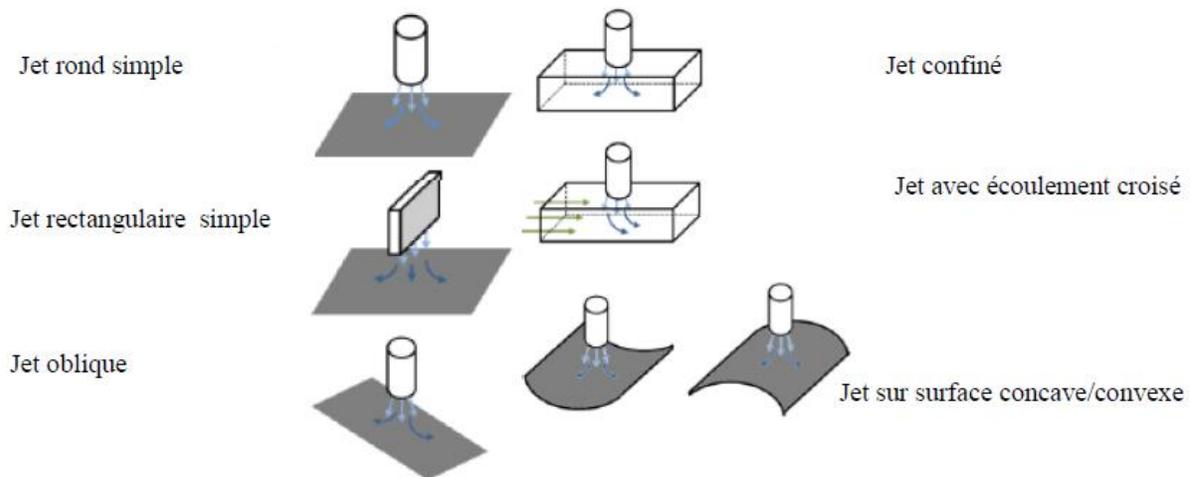


Fig. I. 7 : Différents types de jets impactants sur une surface.

I.7.3 Jet impactant dans une cavité cylindrique

L'interaction des jets avec une cavité cylindrique consiste à un écoulement d'un jet plan ou bien rond qui se développe dans un cylindre. Cette configuration est utilisée dans les systèmes de refroidissement de la verrerie, le système d'aération des tunnels, des galeries ou bien des mines. Le jet impactant sur une paroi cylindrique peut se décomposer en trois régions essentielles :[2,3]

I.7.3.1 Région de jet libre

cette région est caractérisée par l'écoulement d'un jet rond turbulent, axisymétrique en moyenne, il peut atteindre une zone d'écoulement établi ZEF (Zone of Established Flow) cette dernière ne peut apparaître que lorsque la distance d'impact est suffisamment grande.

I.7.3.2 Région de stagnation (région d'impact)

cette région est caractérisée principalement par une forte diminution de la composante de vitesse axiale à l'amont du point de stagnation, une élévation importante de la pression au point d'arrêt, et une forte augmentation de la composante de vitesse radiale en aval du point d'impact.

I.7.3.3 Région de jet pariétal

cette région est caractérisée par le développement et l'épaississement d'un jet pariétal, c'est à dire le long de la surface d'impact et dont la vitesse radiale maximale diminue.

I.7.4 Géométrie d'un jet impactant sur un cylindre

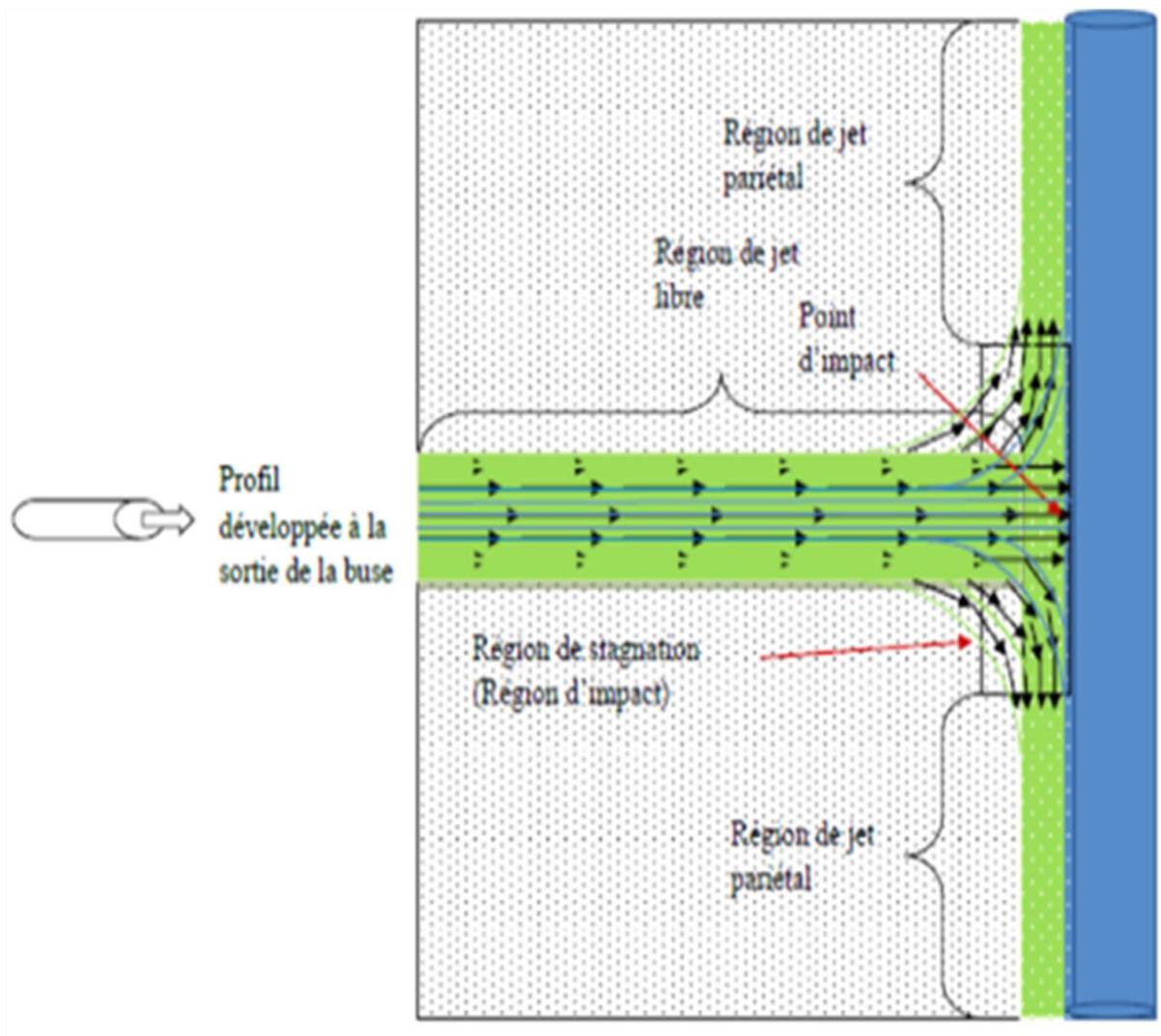


Fig. I. 8 : Structure d'un jet impactant sur un cylindre.

I.7.5 Différentes applications des jets

Les jets impactant sont utilisés dans plusieurs applications industrielles parmi les quelles les processus de séchage, de refroidissement et de réchauffement. Par exemple, on peut citer :

- Découpe et refroidissement de nappes de verre en fusion.
- Evaporation de l'eau de la pâte à papier dans l'industrie papetière.
- Refroidissement de feuillets métalliques ou plastiques.
- Refroidissement de moteurs thermiques, circuits hydrauliques, chambres de combustion, aubes de turbines et moteurs électriques de grande puissance destinés à une nouvelle génération de voitures électriques.
- Refroidissement de denrées alimentaires.

I.8 Généralités sur les transferts de chaleur

Le processus par lequel le transfert de l'énergie s'effectue est désigné par le terme transfert de chaleur. La grandeur transférée, appelée chaleur, ne peut être ni mesurée ni observée directement, mais les effets qu'elle produit sont sujets à l'observation et aux mesures. Le transfert thermique est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Il intervient naturellement entre deux zones, ou entre deux systèmes, dès qu'il apparait entre eux un gradient de température et ce, quel que soit le milieu qui les sépare.

L'étude des transferts thermiques repose sur les concepts de quantité de chaleur, qui est associée au mouvement de translation, de vibration et de rotation des molécules, et des différences de températures qui caractérisent l'intensité de l'énergie transférée. Ces concepts sont définis par la thermodynamique qui ne s'intéresse qu'à des états d'équilibre, négligeant les mécanismes d'échange d'énergie qui y conduisent.

I.9 Revue bibliographique

Au cours de ces dernières années, plusieurs travaux de recherche concernant les jets impactant ont été publiés, dus à leur importance dans diverses applications dans plusieurs domaines pratiques tels que l'environnement (aération), l'industrie (traitement des surfaces), le transport (moteurs à impulsion) etc.

L'objectif de ce travail est de déterminer et d'analyser la structure dynamique et thermique de l'écoulement d'un jet impactant. On présente dans ce chapitre une synthèse bibliographique des principales études effectuées sur ce type de configuration.

I.9.1 Intérêt de l'écoulement de stagnation

L'écoulement de couche limite de stagnation avec transfert de chaleur est largement répondu dans beaucoup d'applications qui sont le siège d'écoulements en présence de fluide impactant sur des obstacles solides chauffés. On le retrouve dans différents process industriels (dégivrage de bord d'attaque des ailes, refroidissement des aubages des turbines et des composants électroniques...) car il permet des taux élevés d'échange de chaleur et de masse.

Il convient de mettre le point sur la particularité et l'intérêt de l'écoulement de stagnation convectif. En effet, dans ce type de situation les flux thermiques échangés sont nettement plus élevés au voisinage du point de stagnation. Ce qui s'explique par l'existence d'une importante composante de vitesse normale à la paroi qui empêcherait le développement des couches limites. Le transfert de chaleur sera ainsi favorisé puisque celui-ci est inversement proportionnel à l'épaisseur de la couche limite.

I.9.2 Ecoulement de Hiemenz

La résolution des équations de Navier-stokes présentent des difficultés mathématiques insurmontable ceci est principalement dû au fait que les équations de Navier-stokes sont non linéaires. Hiemenz est le premier qu'a étudié l'écoulement ou voisinage de point de stagnation Il a simplifié les équations de Navier-stokes gouvernant l'écoulement en une seule équation différentielle ordinaire de 3ème ordre, loin de la paroi cet écoulement est semblable à l'écoulement non visqueux. Après Homan a étudié un écoulement axisymétrique tridimensionnel orthogonal impactant sur un disque et avait retrouvé des solutions analogues à celles de Hiemenz.[6]

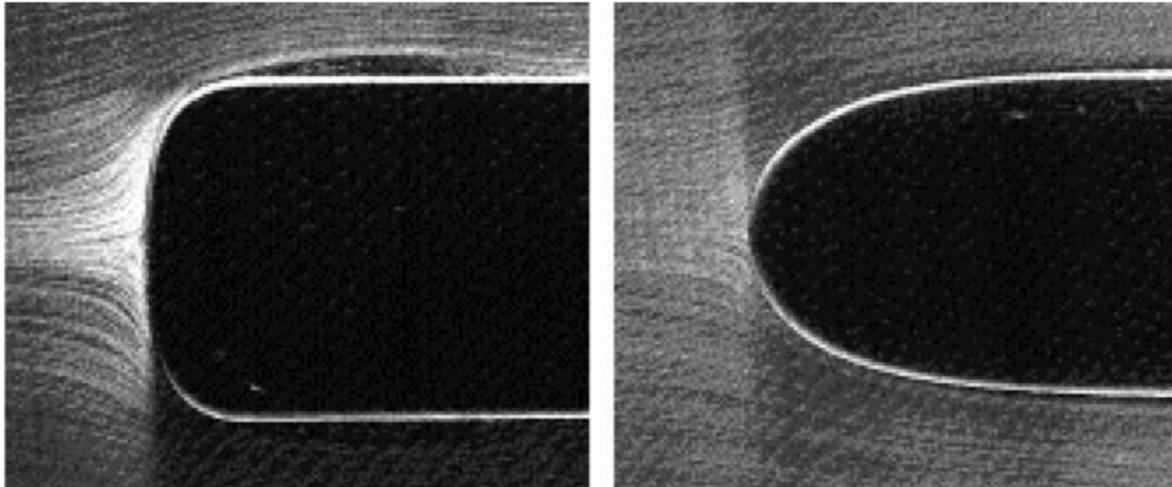


Fig. I. 9 : Représentation de stagnation ou point d'arrêt (solution de Hiemenz).[6]

F. Gori et L. Bossi [7] ont mené une étude expérimentale du refroidissement d'un cylindre chauffé électriquement, le cylindre a un diamètre $D=10$ mm, la dimension du jet est $S=2.5$ mm ie $D/S=4$. Les mesures ont montré que le nombre de Nusselt moyen est maximal pour $H/D=8$ ou H représente la distance buse-cylindre ceci pour les valeurs du nombre de Reynolds entre 4000 et 22000. Le nombre de Nusselt local est au maximum au point de stagnation alors que son minimum à 180° à partir du point de stagnation.

S. Benhadid [8] a étudié numériquement et expérimentalement l'évolution symétrique d'un jet rond dans une cavité cylindrique, le rapport des diamètres étant $D_{cav} / d = 7.83$. L'étude numérique est basée sur une méthode des différences finies d'un écoulement laminaire. Le fluide est supposé parfait et incompressible.

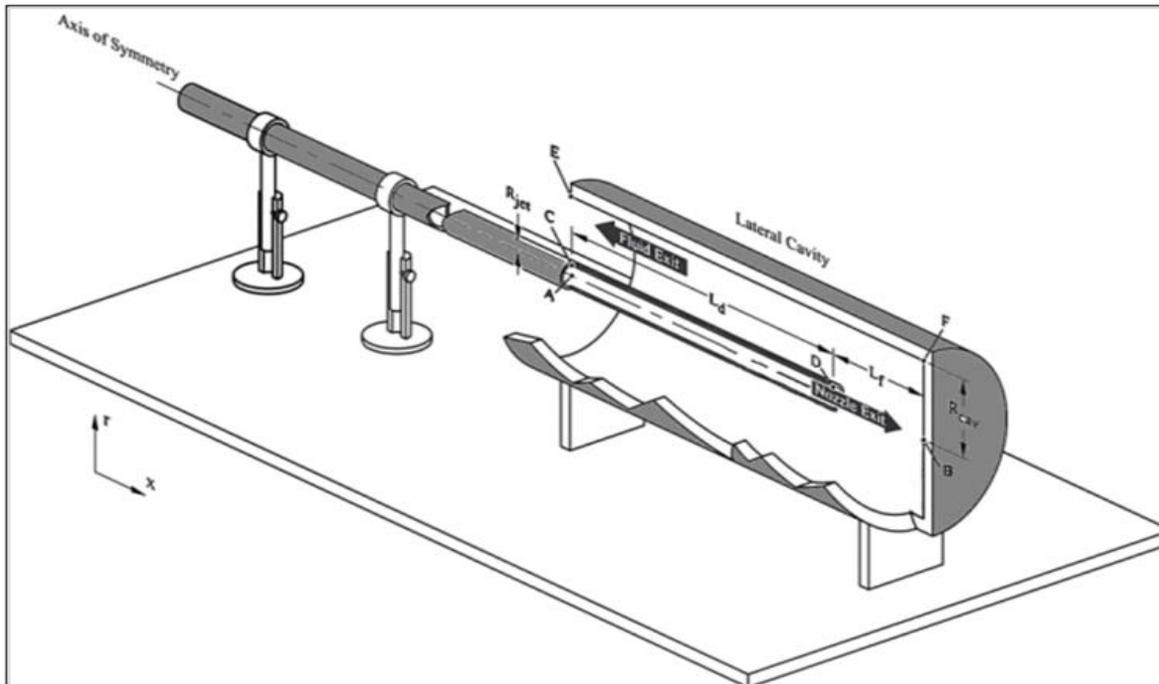
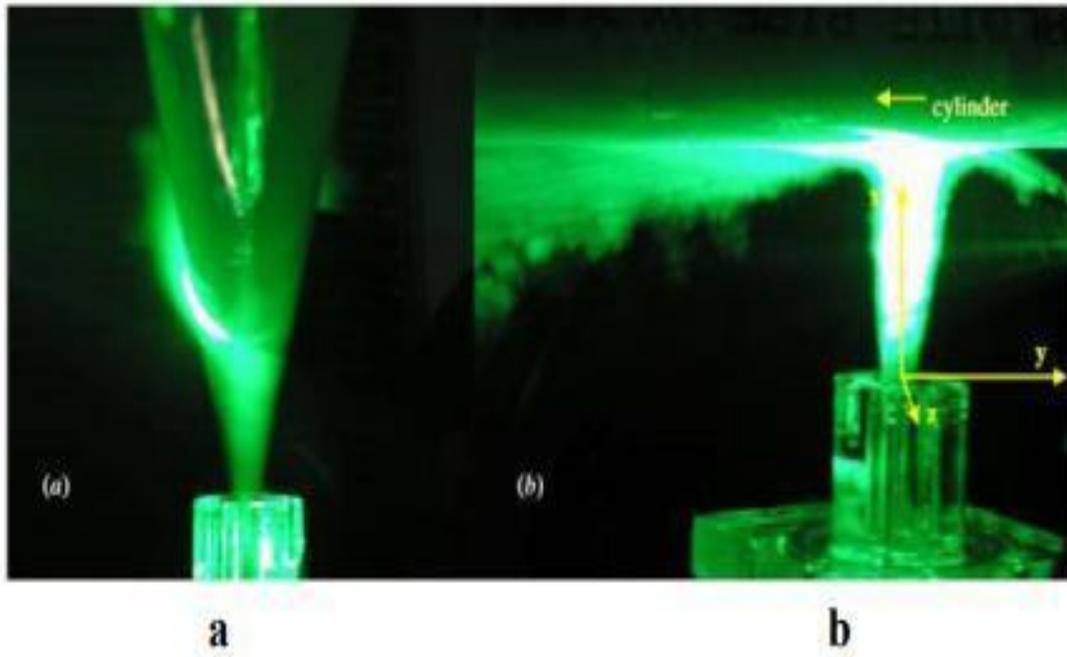


Fig. I. 10 : Configuration jet – cavité cylindrique [Ben 1985].[8]

Une étude expérimentale a été menée par E. Ersigomez et al [9]. En vue d'étudier la physique d'écoulement d'un jet d'air rond impactant une surface cylindrique convexe. Deux composantes de la vitesse moyenne, la contrainte normale et les profils de contrainte de cisaillement ont été obtenues à l'aide d'un LDV (laser doppler velocymeter), à deux composantes de vitesse simultanées à fibre optique . Les profils de vitesse obtenus à sept emplacements axiaux dans le cas de jet impactant, sont comparés aux profils obtenus à huit emplacements axiaux loin de la sortie du jet afin de déterminer les effets de surface sur le jet libre. Le nombre de Reynolds de l'écoulement sur la base du diamètre du jet, est 25000 et le cylindre convexe est située à $\lambda = 4,0$ (vitesse de sortie du jet, $= 24 \text{ ms}^{-1}$, diamètre du jet, $d = 15,24 \text{ mm}$; cylindre de section circulaire diamètre, $D = 60,5 \text{ mm}$). Les résultats de la visualisation de l'écoulement indiquent que le jet initialement axisymétrique devient un écoulement tridimensionnel, s'enroule sur le cylindre à travers le cylindre et se comporte comme un jet de paroi le long de l'axe du cylindre. La vitesse moyenne commence à diminuer fortement à la distance $(1d)$ avant la paroi du cylindre. Les contraintes radiales, normales tangentielle et de cisaillement ne sont pas affectées par la présence de la surface dans le voisinage de l'axe du jet jusqu'à ce qu'ils atteignent une distance de $0.05d$ de la surface, et sont affectés à proximité du bord du jet environ $0,75D$ loin de la surface.



(a) section transversale du jet impactant dans la direction z

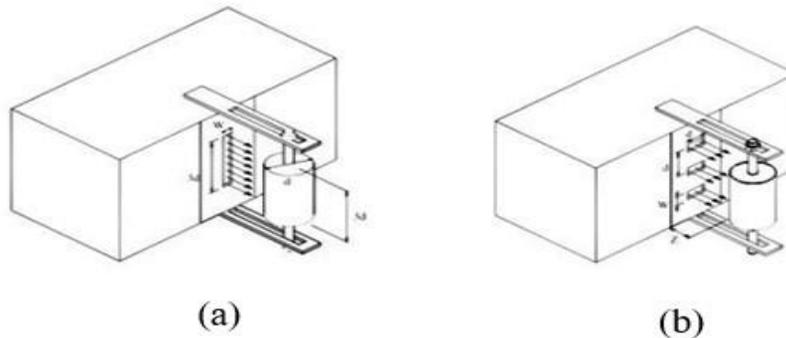
(b) le jet impactant enveloppant le cylindre le long de son axe.

Fig. I. 11 : Visualisation de l'écoulement obtenue par couche de laser, Ergin Ersigemez et al.[9]

N. Zuckerman et N. Lior [10] ont étudié numériquement le refroidissement d'un cylindre par un nombre de rangées de jets impactant la surface cylindrique. Il a été constaté que les effets de fontaine ont joué un rôle important dans le transfert de chaleur sur la cible, influençant jusqu'à un tiers de la surface de la cible. Les effets du nombre de Reynolds ont dominé devant l'effet du nombre de jets lorsqu'on tente d'augmenter le nombre de Nusselt moyen « Nu_{avg} ». Il a été conclu que la plus haute valeur du « Nu_{avg} » par unité de puissance ou flux investi se produirait en ayant un nombre de rangées de jets inférieur n (2 ou 4). Les dispositions pour le refroidissement avec six et huit buses avaient des niveaux similaires de non-uniformité du nombre de Nusselt. L'augmentation de n pour un nombre de Reynolds donné tendait à augmenter « Nu_{avg} ». Des corrélations ont été établies entre le nombre de Nusselt « Nu_{avg} », le rapport des diamètres buse-cylindre, le nombre de Reynolds, le nombre de rangées de jets et le nombre de Prandtl.

S. A. Nada et al [11] , ont étudié expérimentalement le transfert thermique d'un jet plan impactant un cylindre pour deux configuration géométrique , buse longue unique alignée suivant l'axe du cylindre et buses multiples aussi alignées suivant l'axe du cylindre, en faisant

varier la distance buse cylindre par le paramètre adimensionné (z/w) ou « z », représente la distance buse cylindre et W la dimension de la buse. Les résultats ont montré que le nombre de Nusselt augmente avec le nombre de Reynolds, le nombre de Nusselt moyen maximum se trouve dans la position $4 < \frac{z}{w} < 6$, aussi la courbure du cylindre influence sur le transfert de chaleur.



(a) Configuration 1 (fente unique alignée avec l'axe du cylindre)

(b) Configuration 2 (fente multiple perpendiculaires à l'axe du cylindre)

Fig. I. 12 : Différentes configurations jet-cylindre, S. A. Nada et al.[11]

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé dans la première partie sur quelques notions générales sur les écoulements, aussi bien les couches limites. Dans la seconde partie nous avons donné une définition sur les jets impactant, de plus le transfert thermique . Pour ce faire, nous allons aborder quelques concepts sur les différents travaux menés relatifs sur le jet impactant sur un cylindre axisymétrique chauffé. ceci permettra alors de préciser le contexte de notre travail.

Chapitre. II

Positionnement de problème et formulation mathématique

Chapitre.II Positionnement de problème et formulation mathématique

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la dynamique des fluides. Nous présentons en premier lieu les équations générales qui décrivent l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique.

II.2 Définition de problème

Nous avons mis au point un modèle numérique fondé sur l'écriture des équations de Navier-Stokes et du transfert de chaleur avec les conditions aux limites imposées par la géométrie du système. Dans les hypothèses d'un écoulement axisymétrique, laminaire, incompressible en régime établi, ces équations s'écrivent en coordonnées cylindriques (r, z) .

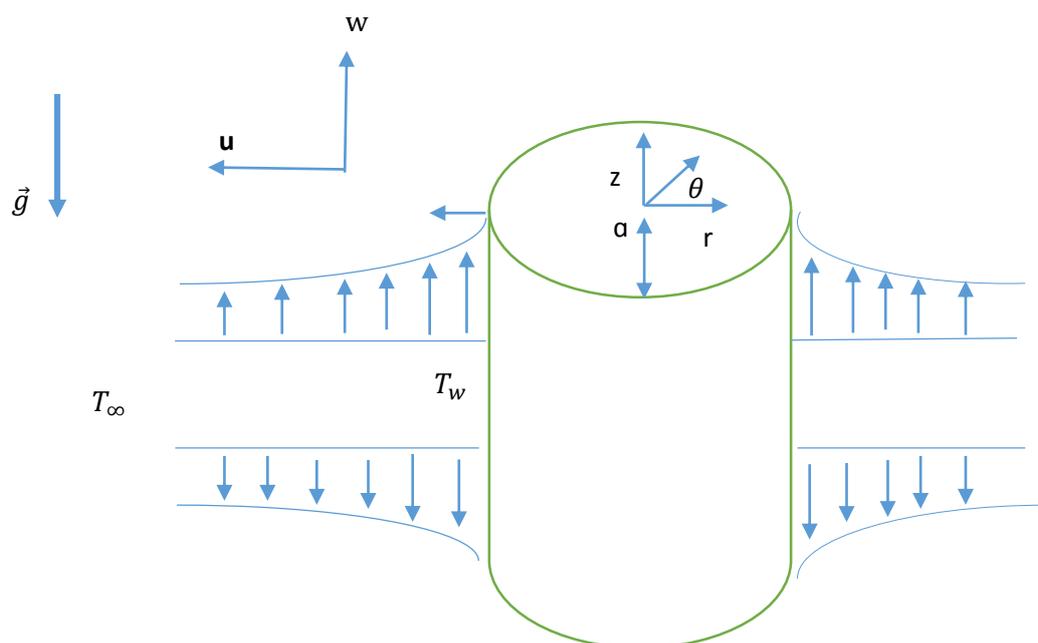


Fig. II. 1 : Représentation schématique d'un jet impactant sur un cylindre vertical.

II.3 Formulation mathématique

➤ Les hypothèses simplificatrices

Des hypothèses simplificatrices sont introduite au niveau de la modélisation afin de simplifier les équations. Nous nous limitons aux hypothèses couramment retenues dans les écoulements réels qui sont les suivantes :

- Le fluide est Newtonien et incompressible.
- L'écoulement est permanent et en régime laminaire.
- Les forces de gravités sont négligeables, ce qui impose la symétrie axiale du problème (axisymétrique).
- L'approximation de boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède.

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_\infty)]$$

➤ Les équations gouvernant ce modèle sont les équations classiques de Navier-Stokes incompressible.

Dans notre étude d'un écoulement de couche limite induit par un jet axisymétrique sur un cylindre chauffé, on a les lois suivantes :

- La loi de la conservation de la masse (équation de continuité).
- La loi de la conservation de la quantité de mouvement (Newtonien, Navier -stokes).
- La loi de la conservation de l'énergie (équation d'énergie).

• Equation de continuité :

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II. 1})$$

• Equation de quantité de mouvement :

$$\nabla(\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla p + \nabla(\mu \nabla \vec{V}) + \rho \vec{g} \quad (\text{II. 2})$$

• Equation de l'énergie :

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{II. 3})$$

Avec : ν désigne la viscosité cinématique de fluide :

$$\nu = \mu / \rho$$

En utilisant les hypothèses simplificatrices on aura :

• Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 4})$$

- **Equation de quantité de mouvement**

La projection des équations de Navier stokes sur les trois axes du repère cylindrique est donnée :

✓ **Selon z**

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II. 5})$$

✓ **Selon r**

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II. 6})$$

- **Équation de l'énergie**

$$u \frac{\partial T}{\partial z} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 7})$$

- **Condition aux limites**

$$\mu = 0 \quad ; \quad \vartheta = 0 \quad ; \quad w = 0 \quad (\text{II. 8})$$

$$T = T_w \quad \text{quand } r = a \quad \omega \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, \quad (\text{II. 9})$$

II.4 Formulation adimensionnelle :

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures, et ainsi permettre d'avoir des informations généralisées sur une variété de problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes d'un côté, et d'un autre côté, réduire le nombre de paramètres d'un problème.

Pour résoudre le système d'équations de mouvement, nous cherchons une solution de type auto-similaire (*self similaire*) étant donné qu'il s'agit d'un écoulement de couche limite. Ainsi, nous introduirons les transformations similaires suivantes :

$$u_e = c \left(\frac{a^2}{r} - r \right) \quad ; \quad w_e = 2cz; \quad c: \text{constante} \quad (\text{II. 10})$$

$$\eta = \left(\frac{r}{a} \right)^2 \quad ; \quad \theta(\eta) = \frac{(T-T_\infty)}{(T_w-T_\infty)} \quad ; \quad \Psi = cazf(\eta) \quad ; \quad T_w = T_\infty + b.z \quad (\text{II. 11})$$

on développe u et w

$$u = -c \frac{a}{r} f(\eta) \quad ; \quad w = 2czf'(\eta) \quad (\text{II. 12})$$

- **Formule adimensionnelles de l'équation de quantité de mouvement :**

On remplace (8-9) dans l'équation de quantité de mouvement on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right] - g\beta(T - T_\infty) \end{aligned} \quad (\text{II. 13})$$

Après simplification ont ramené l'équation de mouvement aux dérivées partielles difficiles a ressource des équations différentielles ordinaires :

$$\eta f'''' + f'' + Re_e(1 + ff'' - f'^2) + \lambda \theta = 0 \quad (\text{II. 14})$$

- **Le paramètre de flottabilité**

Le paramètre de flottabilité est le rapport de deux nombre adimensionnel, le nombre de Grashof et le nombre de Reynolds

$$\lambda = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\rho\beta(T - T_\infty)}{\nu^2}$$

- **Forme adimensionnel de l'équation d'énergie :**

On a :

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 15})$$

On remplace (II.10 ; II.11) dans l'équation d'énergie on aura :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 16})$$

$$\eta \theta'' + \theta' + PrRe (f\theta' - f'\theta) = 0 \quad (\text{II. 17})$$

- ✓ **Condition aux limites**

$$f(1) = 0, f'(1) = 0, \theta(1) = 1 \quad (\text{II. 18})$$

$$f' \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0, \text{ lorsque } \eta \rightarrow \infty \quad (\text{II. 19})$$

II.5 Les nombres adimensionnels

- Nombre de Prandtl :

Le nombre de Prandtl caractérise l'importance relative de deux mécanismes qui pilotent la convection du fluide qui sont, la diffusion de quantité de mouvement (viscosité cinématique, ν et diffusion de chaleur α).

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Les valeurs du nombre de Prandtl nous renseignent sur les caractéristiques thermo physiques du fluide choisi.

- Le nombre de Reynolds :

Est le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses et est un paramètre commode pour prédire si une condition d'écoulement sera laminaire ou turbulent.

$$Re = \frac{ca^2}{2\nu}$$

Si $1 \leq \eta \leq \infty$, où les nombres premiers désignent une différenciation par rapport à la variable indépendante $\eta = \left(\frac{r}{a}\right)^2$.

- Le nombre de Nusselt :

Est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser le type et le transfert thermique entre un fluide et une paroi. Il met en rapport le transfert par convection par rapport au transfert par conduction. Il est d'autant plus élevé que la convection prédomine sur la conduction.

$$Nu = \frac{aq_w}{k(T_w - T_\infty)}$$

Avec k étant la conductivité thermique.

- Coefficient de frottement :

Est une composante de la traînée, qui est une force résistante exercée sur un objet se déplaçant dans un fluide.

$$C_f = \tau_w / ((\rho w^2 w) / 2)$$

Comme τ_w représente la contrainte de cisaillement à la paroi et q_w représente le flux de chaleur transmis par la paroi au fluide.

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=0}, q_w = k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0}$$

Avec μ et k représentent la viscosité dynamique et la conductivité thermique respectivement.

En utilisant les variables de similarité on obtient :

$$Nu/2 = -\theta'(0) \quad , \quad C_f(R_{ez}/\alpha) = f''(0)$$

II.6 Conclusion

Après avoir posé le problème traité (écoulement de couche limite induit par un jet axisymétrique sur un cylindre chauffé) sous forme des équations mathématique (dynamique et thermique), ainsi que les conditions aux limites sont posées et les équations gouvernantes du problème sont mises sous formes adimensionnelles, dans le chapitre suivant, nous résoudrons le problème.

Chapitre. III

Méthode numérique

Chapitre.III Méthode numérique

III.1 Introduction

La simulation numérique en mécanique des fluides est reconnue aujourd'hui comme des outils incontournables de conception, c'est un ensemble de méthodes numériques permettant d'obtenir une solution approximative d'un problème de dynamique des fluides ou de transfert thermique. Grâce au développement des méthodes numériques et à des calculateurs de plus en plus puissants avec une grande capacité de mémoire, la simulation numérique des solutions très satisfaisantes

Une équation qui comporte une ou plusieurs dérivées de la fonction inconnue est appelée équation différentielle. L'ordre de cette équation est déterminé par l'ordre du degré le plus élevé de la dérivation.

Dans ce chapitre, nous s'intéressera à la résolution des systèmes d'équations différentielles, ces équations ne possèdent pas des solutions analytiques, dans le cas général, les descriptions mathématiques sont des moyens pour trouver des solutions approximatives aux solutions exactes. Ces équations sont classées en deux catégories : les équations différentielles avec des conditions initiales et les équations différentielles avec des conditions aux limites.

Dans un premiers temps nous remplaçons ces équations différentielles par une ou plusieurs équations algébriques, plus facile à résoudre.

Dans la seconde étape on applique la transformation des conditions aux limites en conditions initiales, beaucoup plus simples à résoudre ce qui fait appel à l'utilisation de la méthode de Runge- Kutta d'ordre quatre (RK4) et la méthode de Tir.

III.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode de résolution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) de premier degré à une condition initiale, cette méthode est la plus simple. Elle est due au mathématicien et physicien suisse Euler (1707-1783). Elle a une bonne interprétation géométrique et son emploi est facile. L'inconvénient de cette méthode est néanmoins qu'elle est peu précise et l'erreur introduite à la première itération à des répercussions sur les calculs de la deuxième itération donc l'erreur se propage d'une itération à l'autre. On appelle équation différentielle ordinaire, une équation, ou un système d'équations, dont les fonctions et leurs dérivées successives ne dépendent que d'une seule variable. On appelle ordre de l'équation, le plus fort degré de dérivation apparaissant dans l'équation. Une équation différentielle est dite

linéaire, si elle est écrite sous forme d'une combinaison linéaire (coefficients constants) de dérivées successives des inconnues. [12]

L'équation peut être écrite sous la forme :

$$f' = F(x, f) \quad (\text{III. 1})$$

Le passage au domaine direct, repose sur le principe du développement de la série de Taylor de solution $f(x_{i+1})$ avec $x = x_i$, généralement on arrête le développement à un ordre qui dépend de la précision voulue. On choisit développement d'ordre deux, on écrit :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} \quad (\text{III. 2})$$

Avec ; $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

Donc :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \varepsilon(\Delta x^2) \quad (\text{III. 3})$$

$\varepsilon(\Delta x^2)$: C'est erreur de troncature, et elle est bornée, ce qui est équivalent à écrire :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)_i \quad (\text{III. 4})$$

Alors on obtient le schéma d'Euler, qui s'écrit sous la forme :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x F(f_i, x_i) \quad (\text{III. 5})$$

III.3 Méthode de Runge-Kutta

III.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre N

Les méthodes de Runge-Kutta (ou RK), sont des méthodes dérivées de la méthode d'Euler mais plus faciles et plus pratiques, parmi ses avantages est de ne pas avoir des conditions pour démarrer que naitre les conditions initiales, elles ont l'avantage d'être simples à programmer et sont assez stables pour les fonctions courantes de la physique et peu d'erreur. Ses inconvénients est les consommations en temps de calcul. Le but d'application de méthode de Runge-Kutta, qui est très recommandée pour ce genre de problème. Elle nous permet d'aboutir à des solutions approximatives avec une grande précision. Cette famille de méthodes explicites plus efficaces et plus pratiques que les méthodes d'Euler est basée sur le schéma numérique suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \quad (\text{III. 6})$$

Avec :

$$k_j = F(Y_i, x_i + h\xi_j), \text{ avec } 0 \leq \xi_j \leq 1 \quad (\text{III. 7})$$

Sachant que F est la fonction incrémentée qui s'écrit :

$$Y_i = f_i + \sum_{K=1}^N x_{jk} Y_k \quad (\text{III. 8})$$

Pour estimer la pente de la fonction f , on pose le point N de l'intervalle $[x_i, x_i + \Delta x]$

Après on calcule la pente moyenne, en utilisant le terme $\sum_{j=1}^N \bar{\omega}_j K_j$. Pour obtenir l'incrément par l'utilisation de la méthode d'Euler.

Pour déterminer les coefficients ξ_j, X_{jk} et les points posés $\bar{\omega}_j$, on impose que le schéma précédant soit équivalent associé à celui de la méthode des séries entières d'ordre N.

III.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La version la plus utilisée la méthode de Runge-Kutta est celle du quatrième ordre (RK4), c'est une méthode un pas unique et simple à programmer, cette méthode est très couramment utilisée pour la résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO), directement dérivée de la méthode d'Euler. Cette méthode repose sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite. [13]

Cette méthode s'exprime sous la forme :

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$f' = F(x, f) \quad f(x_0) = f_0 \quad (\text{III. 9})$$

Puis on utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de f_{i+1} à partir de la valeur calculée f_i .

Donc, les points intermédiaires s'écrit comme suit :

1^{er} Point d'abscisse $x_i + \frac{\Delta x}{2}$ dont la valeur de l'ordonnée est donnée par :

$$f_{i1} = f_i + \Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)_i \quad (\text{III. 10})$$

2^{eme} Point d'ordonné est :

$$f_{i2} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)_{i1} \quad (\text{III. 11})$$

On utilisant la relation précédente pour calculer l'ordonné d'un point 3 d'abscisse $x_i + h$

On obtienne :

$$f_{i3} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)_{i2} \quad (\text{III. 12})$$

Donc on aura quatre coefficients de méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 comme suite :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)_i \\ k_2 &= \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)_{i1} \\ k_3 &= \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)_{i2} \\ k_4 &= \Delta x \left(\frac{df}{dx} \right)_{i3} \end{aligned} \quad (\text{III. 13})$$

Avec

$$f' = F(x, f)$$

On aura donc la formule de résolution numérique de méthode Range-kutta ordre 4, qui se présente comme suit **(IV-14)** :

$$k_1 = F(x_i, f_i)$$

$$k_2 = \left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_1}{2} \right); f \text{ est calculé en utilisant } k_1 \text{ au point } x_i + \frac{\Delta x}{2}.$$

$$k_3 = \left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, f_i + \frac{k_2}{2} \right); f \text{ est calculé en utilisant } k_2.$$

$$k_4 = (x_i + \Delta x, f_i + k_3); f \text{ est calculé en utilisant } k_3.$$

$$f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Avec :

- k_1 : la pente au début de l'intervalle.
- k_2, k_3 : la pente au milieu de l'intervalle.
- k_4 : la pente à la fin de l'intervalle. 4 k.
- f_{i+1} : est l'ordonnée définitive du int d'abscisse $x_i + \Delta x$

III.4 Méthode de Tirs :

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir, un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum de Pontriaguine. Le principe de méthode de tir est transformer le problème aux limites en un problème aux valeurs initiales. Elles sont basées sur quatre étapes successives suivantes [14] :

- Choisir un point $0x$ comme une condition initiale.
- La résolution du problème aux conditions initiales utilisant l'un des méthodes précédente, telle que la méthode Runge-Kutta (RK4).
- calculer la valeur de la condition aux limites.
- Si on ne trouve pas la valeur finale, on modifie la valeur initiale, puis on répète les étapes précédentes jusqu'à l'obtention de la valeur finale qu'on cherche.

La méthode de tir appliqué comme suit :

On considère l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = F\left(x, f, \frac{df}{dx}\right); \text{ avec } x \in [a, b] \quad (\text{III. 14})$$

Utilisant les conditions aux limites suivantes:

$$f(a) = c_1 ; f(b) = c_2 . \quad (\text{III. 15})$$

Nous pouvons encore approcher ce problème par le choix des contions initiales suivantes :

$$f(a) = c_1 ; \frac{df(a)}{dx} = e_n \quad (\text{III. 16})$$

- e_n : Une constante qui doit être calculé quand $f(b) = c_2$

Le choix de valeur e_n est généralement arbitraire qui toutefois vérifie le test de convergence :

$$|f(b, e_n) - c_2| \leq \varepsilon \quad (\text{III. 17})$$

Avec ε : un nombre real petite

Le test de de convergence doit être vérifié, sinon il va falloir corriger la valeur de e_n par le moyen d'une correction de type Newton, le processus itératif est ainsi poursuivi jusqu'à satisfaction du test de convergence.

Le principe de la correction de Newton est présenté comme suit, en utilisant le développement limité à l'ordre un au voisinage de e_n , et on obtient alors :

$$f(b, e_{n+1}) = f(b, e_n) + (e_{n+1} - e_n) \frac{df}{de_n}(b, e_n) = c_2 \quad (\text{III. 18})$$

A partir de l'équation précédente, On déduit la formule de correction de Newton suivante :

$$e_{n+1} = e_n \frac{c_2 - f(b, e_n)}{\frac{df}{de_n}(b, e_n)} \quad (\text{III. 19})$$

L'utilisation de la formule de correction de newton (III.19) nécessite la connaissance préalable de la fonction G.

Avec : G Fonction introduite $G = f'$

Donc on résout le problème avec l'utilisation des variations relatives suivante :

$$\frac{d}{de_n} f(b, e_n) \quad (\text{III. 20})$$

Alors, on résout le problème aux variations mentionné ci-dessus, associée à l'équation (III-14), Munie des conditions aux limites (III-16), donc le problème se présente comme suit (III-21) :

$$\frac{d}{de_n} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) = \frac{d}{de_n} \left(F \left(x, f, \frac{df}{dx} \right) \right) \text{ avec } x \in [a, b] \quad (\text{III. 21})$$

Avec

$$\frac{d}{de_n} f(a) = 0 \quad \frac{d}{de_n} f'(a) = 1 \quad (\text{III. 22})$$

L'équation obtenue (III-21), avec les conditions aux limites (III-22), elle peut être résolue par la méthode de Rangé-kutta (RK4).

III.5 Algorithme de résolution

Un algorithme est une suite finie et non ambiguë d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre une classe de problèmes, l'exemple étudié précédemment montre bien que le problème consiste à chercher la valeur appropriée de e_n , Qui ressemble au problème présentées. Donc on peut présenter l'algorithme associer le problème original comme suit :

- Résoudre l'équation différentielle aux conditions initiales choisie arbitrairement,

$$y(a) = c_1 \text{ et } y'(a) = e_n$$

- Détermine la valeur de $f(b)$, a $x = b$, pour faire une comparaison entre la valeur chercher et la valeur qu'on trouve.
- ajuste la valeur de e_n jusqu'au niveau de précision désiré.
- Dès que la valeur cible souhaitée est obtenue par les itérations successives avec la précision requise, on affiche les conditions initiales trouvées.

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté brièvement les méthodes de résolutions des équations utilisées dans notre étude. Nous avons aussi présenté l'algorithme de la méthode de Tir et de Runge Kutta. Dans le chapitre suivant nous allons présenter les résultats issus de la simulation.

Chapitre. IV

Résultats et Discussion

Chapitre.IV : Résultats et Discussion

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les principaux résultats obtenus à partir de l'étude numérique d'un écoulement de couche limite induit par un jet axisymétrique sur un cylindre chauffé. Les résultats numériques présentés dans ce chapitre sont obtenus en utilisant la méthode numérique (méthode de Runge- Kutta d'ordre 4). Nous rappelons que notre étude concerne un écoulement de point de stagnation de couche limite bidimensionnelle qui se développe sur un cylindre verticale chauffé, dont la température est supérieure à celle du fluide. En raison de l'existence d'un transfert thermique, il existe un couplage entre l'aspect dynamique et thermique du problème. L'étude est sur l'influence de la variation du nombre de Prandtl (Pr) et le paramètre de flottabilité (λ) et le nombre de Reynolds (Re) sur la couche limite dynamique et thermique de l'écoulement le long de la paroi.

IV.2 Caractéristique dynamique

Cette section concerne uniquement les résultats issus de la résolution de l'équation du mouvement. En analysant cette équation on constate qu'elle dépend de nombre de Prandtl, nombre de Reynolds ainsi que la flottabilité. Pour mieux suivre le développement des champs dynamiques nous présentons les profils des vitesses suivants :

➤ **Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil f en fonction de η :**

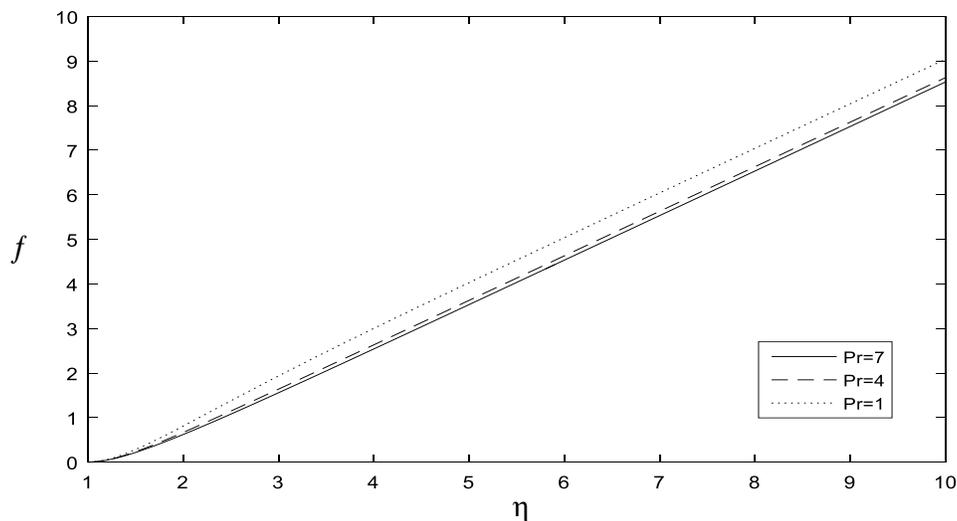


Fig. IV. 1 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil f en fonction de η .

La variation du profil f en fonction de la variable adimensionnelle (η), pour divers valeurs de nombre de Prandtl Pr (1, 4,7), avec un nombre de Reynolds et le paramètre de flottabilité (λ) fixe, on remarque sur la figure(IV.1) que avec l'augmentation de nombre de Prandtl (Pr)

l'épaisseur de la couche limite dynamique augmente et le profil f augmente avec l'augmentation de (η) .

➤ **Effet de nombre de Reynolds sur le profil f en fonction de η :**

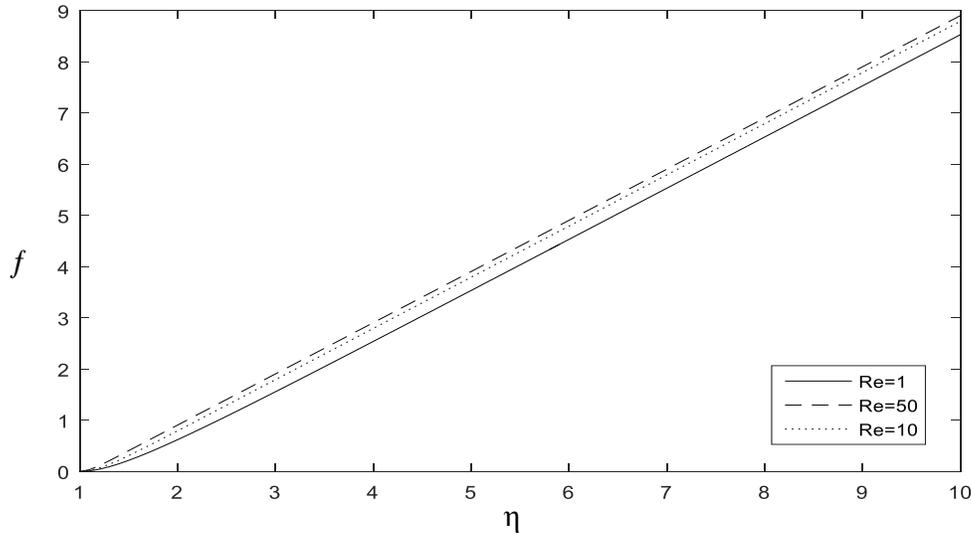


Fig. IV. 2 : Effet de nombre de Reynolds sur le profil f en fonction de η .

La variation du profile f en fonction de la variable adimensionnelle (η), pour divers valeurs de nombre de Reynolds Re (1,10,50), avec un nombre de $Pr=7$ et le paramètre de flottabilité (λ) fixe, on remarque sur la figure(IV.2) que avec l'augmentation de nombre de (Re) l'épaisseur de la couche limite dynamique augmente et le profil f augmente avec l'augmentation de (η).

➤ **Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil f en fonction de η :**

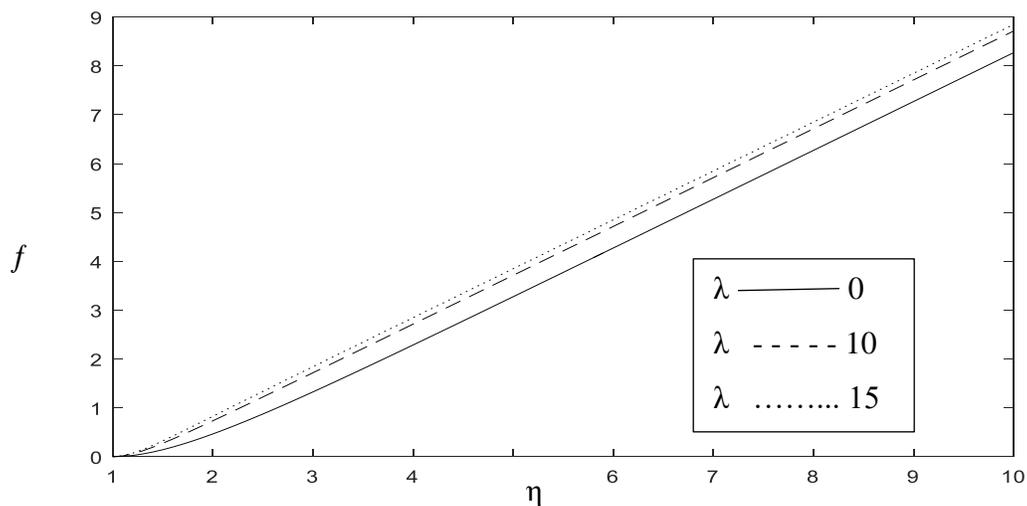


Fig. IV. 3 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil f en fonction de η .

La variation du profile f en fonction de la variable adimensionnelle (η), pour divers valeurs de paramètre de flottabilité λ (0,10,15), avec un nombre de Reynolds (Re) et (Pr) fixe, on remarque sur la figure(IV.3) que avec l'augmentation de paramètre de flottabilité λ , l'épaisseur de la couche limite dynamique augmente et le profil f augmente avec l'augmentation de (η).

➤ **Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil de vitesse f' en fonction de η :**

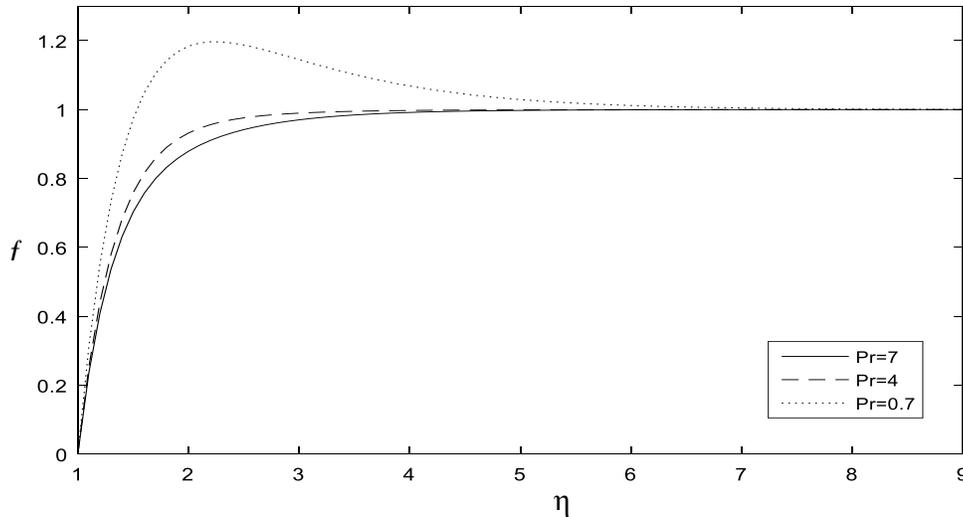


Fig. IV. 4 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil de vitesse f' en fonction de η .

La figure (IV.4) présente la variation du profile de vitesse f' en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers valeurs de Pr (0.7, 5,7), avec un nombre de Re et le paramètre de flottabilité λ est fixe, on remarque que l'épaisseur de la couche limite dynamique s'étend avec l'augmentation de nombre de Pr , et on remarque que l'augmentation de Pr accélère l'écoulement.

➤ **Effet de nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse f' on fonction de η :**

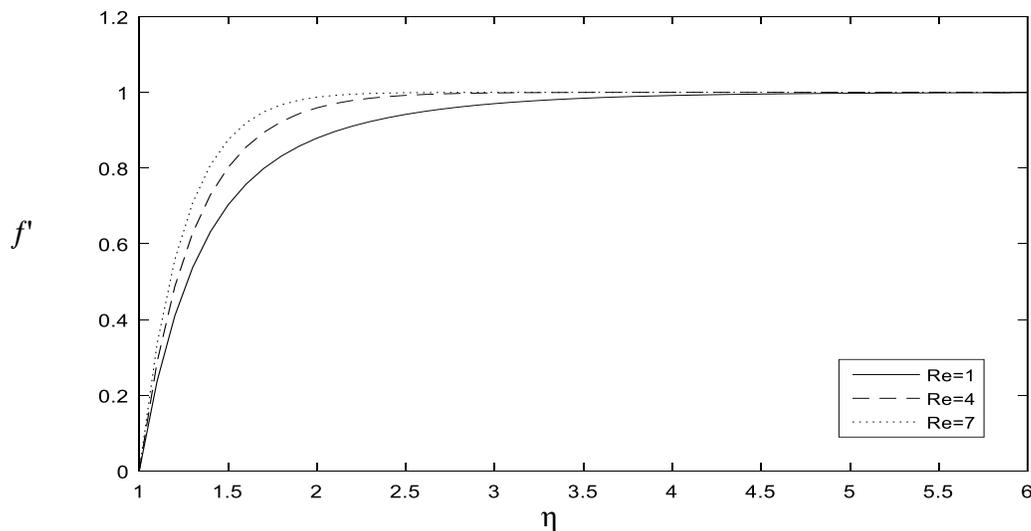


Fig. IV. 5 : Effet de nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse en fonction de η

La figure (IV.5) présente la variation du profil de vitesse f' en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers valeurs de Re (1, 4,7), avec un nombre de Pr et le paramètre de flottabilité λ est fixe, on remarque que l'épaisseur de la couche limite dynamique s'étend avec l'augmentation de nombre de Re , et on que l'augmentation de Re accélère l'écoulement.

➤ **Effet de paramètre de flottabilité λ sur profil de vitesse f' en fonction de η :**

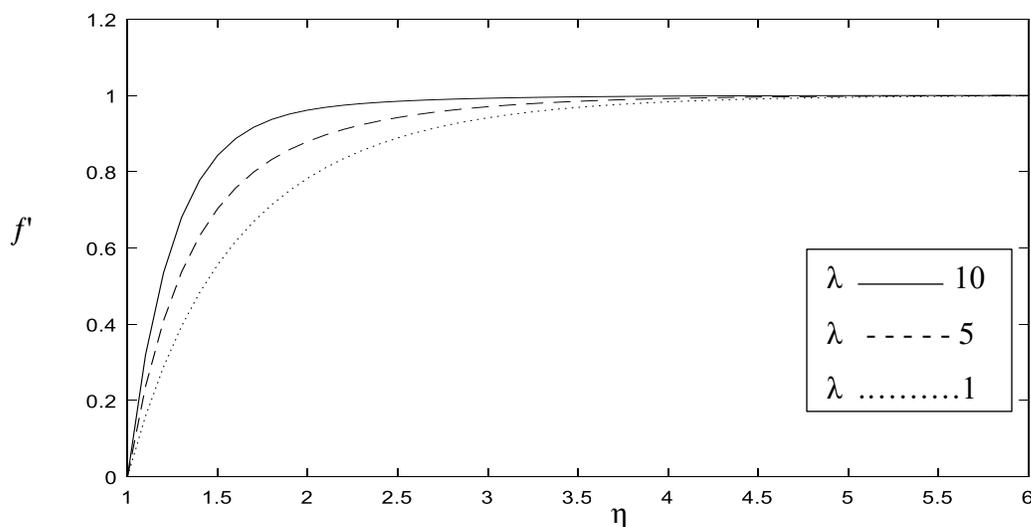


Fig. IV. 6 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur profil de vitesse f' en fonction de η .

La figure (IV.6) présente la variation du profil de vitesse f' en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers valeurs de paramètre de flottabilité (1, 5,10), avec un nombre

de Re et Pr est fixe, on remarque que l'épaisseur de la couche limite dynamique s'étend avec l'augmentation de paramètre de flottabilité, et on remarque que l'augmentation de paramètre de flottabilité accélère l'écoulement.

➤ **Effet de nombre de Prandtl Pr sur profil f'' en fonction de η :**

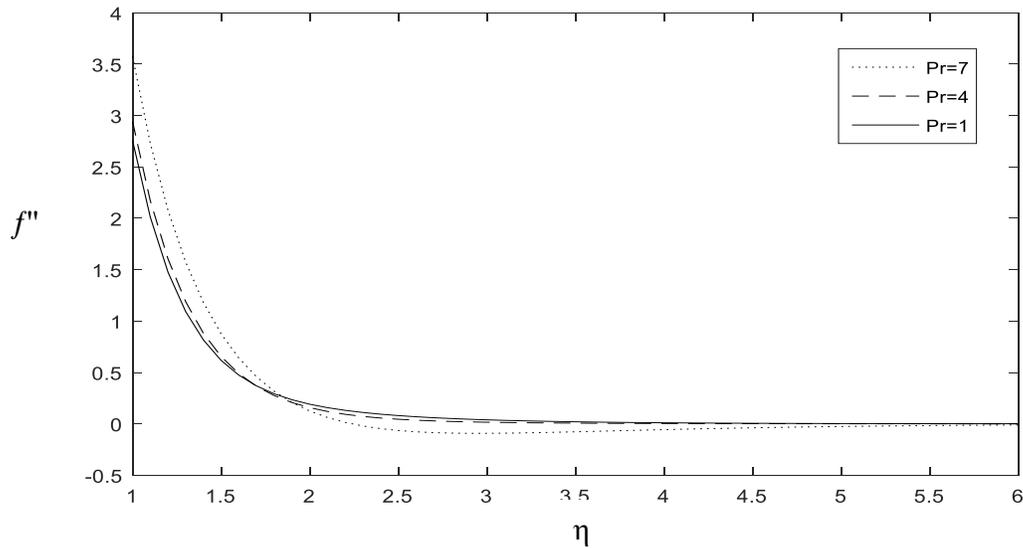


Fig. IV. 7 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur profil f'' en fonction de η

La figure (IV.7) présente la variation du profil de f'' en fonction(η), pour divers valeurs nombre de Prandtl Pr (0.7, 4,7), avec les paramètres Re et le paramètre de flottabilité λ est fixe, on remarque que le profil f'' diminue avec l'augmentation de (η), et que l'épaisseur de couche limite dynamique se rétrécit avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

➤ **Effet de nombre de Reynolds Re sur le profil f'' en fonction de η :**

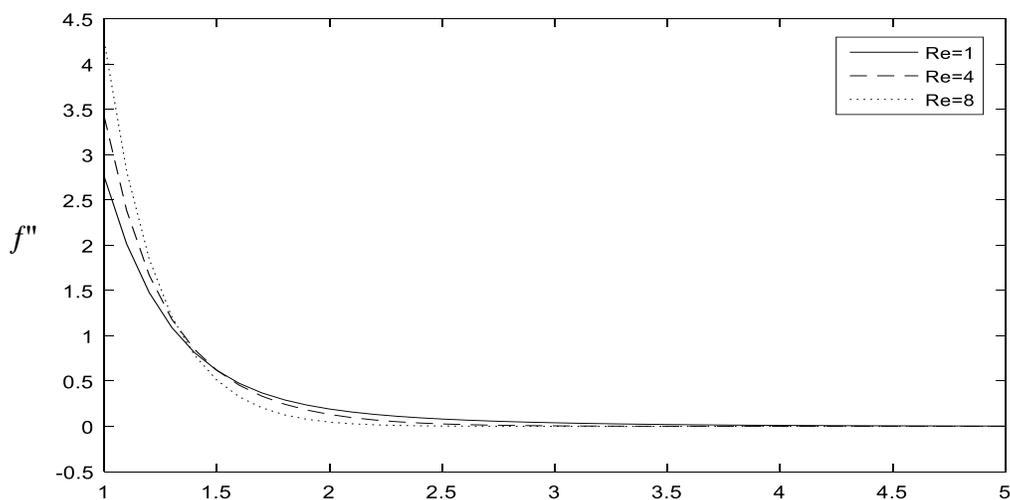
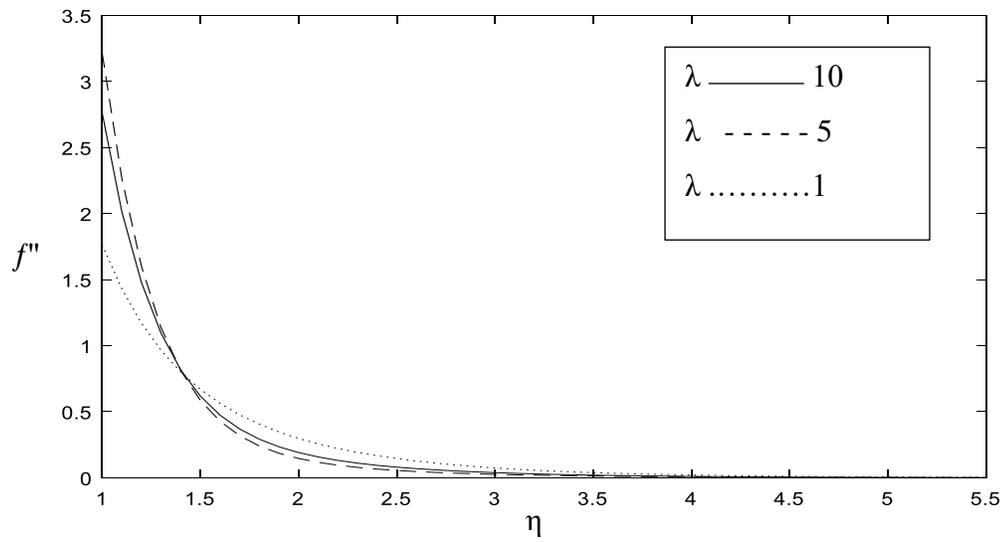


Fig. IV. 8 : Effet de nombre de Reynolds Re sur le profil f'' en fonction de η

La figure (IV.8) présente la variation du profil de f'' en fonction(η), pour divers valeurs nombre de Reynolds Re (1, 4,8), avec les paramètres Pr et le paramètre de flottabilité λ fixe, on remarque que le profil f'' diminue avec l'augmentation de (η), et que l'épaisseur de couche limite dynamique se rétrécit avec l'augmentation de nombre de nombre de Reynolds.

➤ **Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil f'' en fonction de η :**

**Fig. IV. 9 :** Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil f'' en fonction de η

La figure (IV.9) présente la variation du profil de f'' en fonction(η), pour divers valeurs nombre de paramètre de flottabilité λ (1,5,10), avec les paramètres Re et Pr fixe, on remarque que le profil f'' diminue avec l'augmentation de (η), et que l'épaisseur de couche limite dynamique se rétrécit avec l'augmentation de paramètre de flottabilité λ .

IV.3 Caractéristique thermique :

Cette partie concerne seulement les résultats obtenus lors de la résolution de l'équation d'énergie mentionnée précédemment. En analysant cette équation on constate qu'elle dépend de nombre de Prandtl, nombre de Reynolds ainsi que la flottabilité, Pour mieux suivre le développement des champs thermiques nous présentons les profils des températures suivants :

➤ **Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil de température θ :**

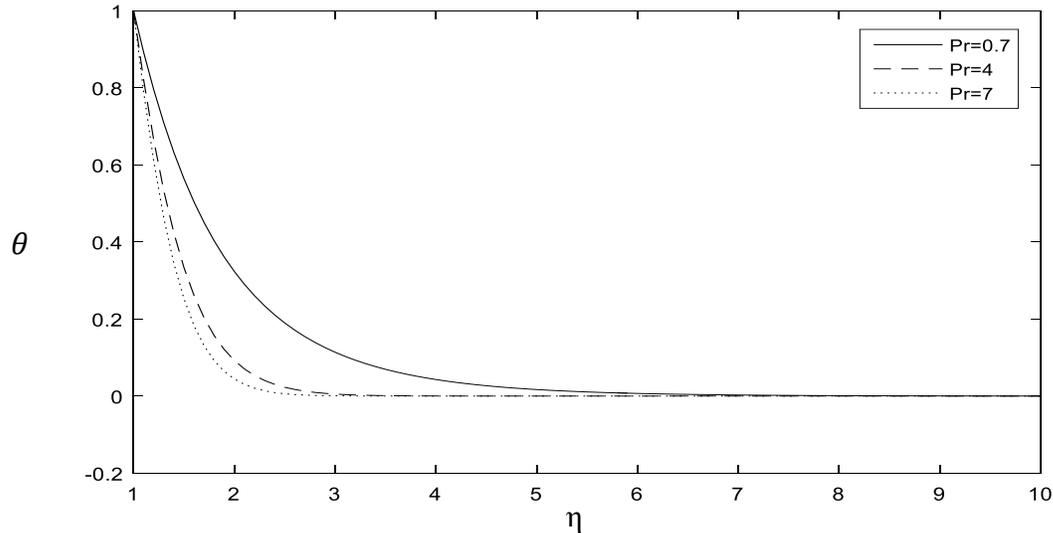


Fig. IV. 10 : Effet de nombre de Prandtl Pr sur le profil de température θ .

La figure (IV.10) présente la variation du profil de température θ en fonction(η), pour divers valeurs nombre de Prandtl Pr (0.7,4, 7), et une valeur de flottabilité fixé à $\lambda = 5$, on remarque que la température adimensionnelle (θ) diminue avec l'augmentation de (Pr), et que l'épaisseur de couche limite thermique se rétrécit avec l'augmentation de nombre de Prandtl.

➤ **Effet de Reynolds Re sur le profil de température θ en fonction de η :**

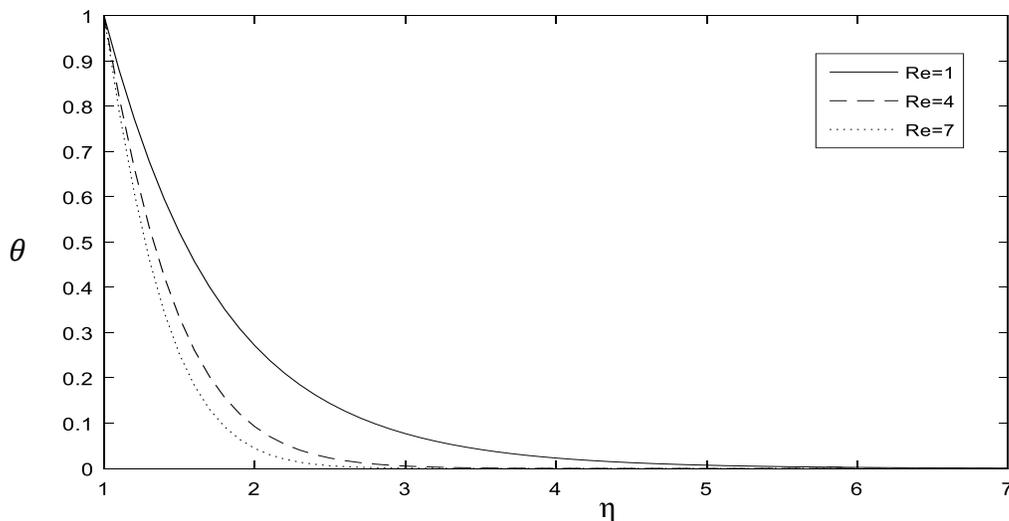


Fig. IV. 11 : Effet de Reynolds Re sur le profil de température θ en fonction de η

La variation du profil de température θ en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers valeurs de de nombre de Reynolds Re(1,4,7), avec un nombre de Prandtl fixe à

$Pr = 7$ et le paramètre de flottabilité $\lambda = 5$, on remarque sur la figure(IV.11) que avec l'augmentation de de nombre de Reynolds l'épaisseur de la couche limite thermique augmente et la température adimensionnelle θ diminue avec l'augmentation de (η).

➤ **Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil de température θ en fonction de η :**

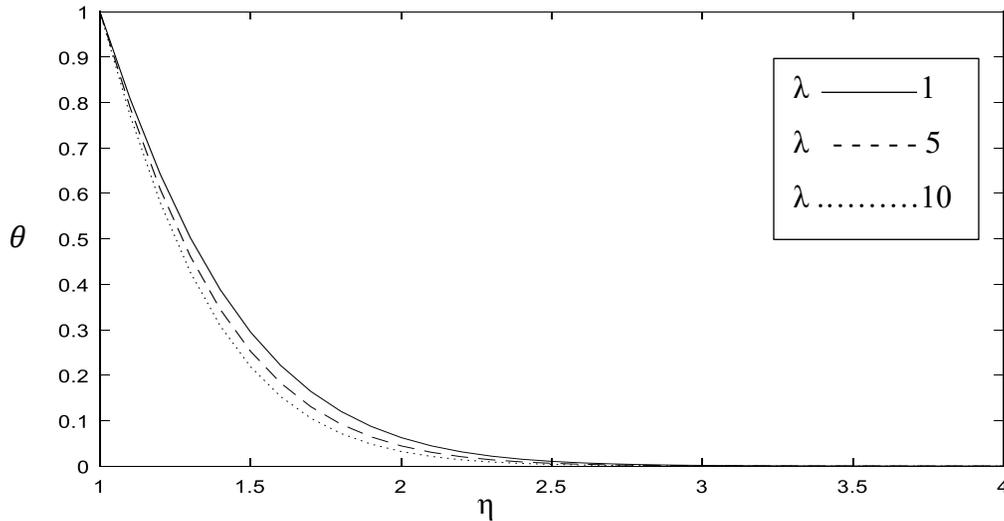


Fig. IV. 12 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil de température θ en fonction de η . La variation du profil de température θ en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers valeurs de de nombre de paramètre de flottabilité (1,5,10), avec un nombre de Prandtl fixe à $Pr = 7$ et le nombre de Reynolds $Re=1$, on remarque sur la figure(IV.12) que avec l'augmentation de paramètre de flottabilité l'épaisseur de la couche limite thermique augmente et la température adimensionnelle θ diminue avec l'augmentation de (η).

➤ **Effet de nombre de Prandtl (Pr) sur le profil de θ' en fonction de η :**

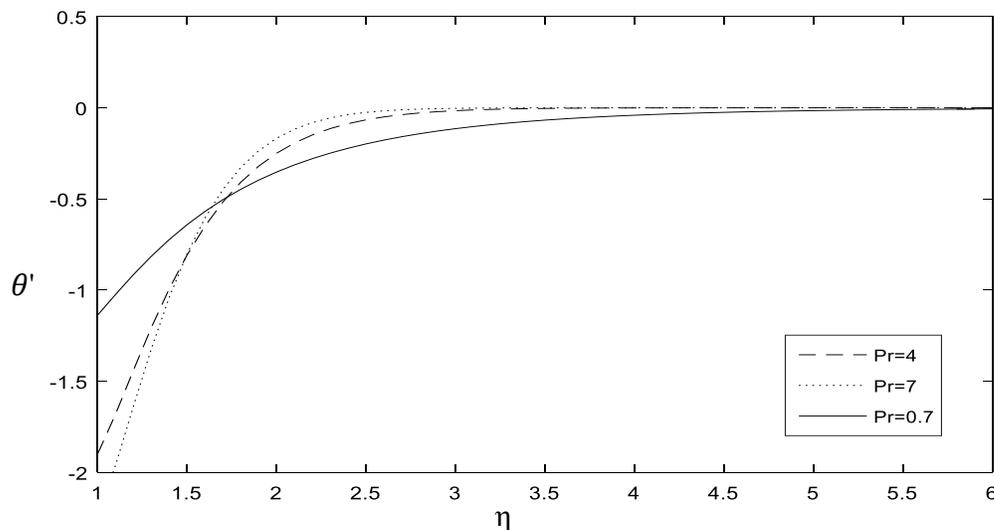


Fig. IV. 13 : Effet de nombre de Prandtl (Pr) sur le profil de θ' en fonction de η .

La figure (IV.13) présente la variation du profil de θ' en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers la valeur de Prandtl Pr (0.7,4 ,7), avec un nombre de Re et le paramètre de flottabilité λ est fixe, on remarque que l'épaisseur de la couche limite thermique s'étend avec l'augmentation de nombre de Pr, et on remarque que l'augmentation de Pr accélère l'écoulement.

➤ **Effet de nombre de Reynolds (Re) sur le profil de θ' en fonction de η :**

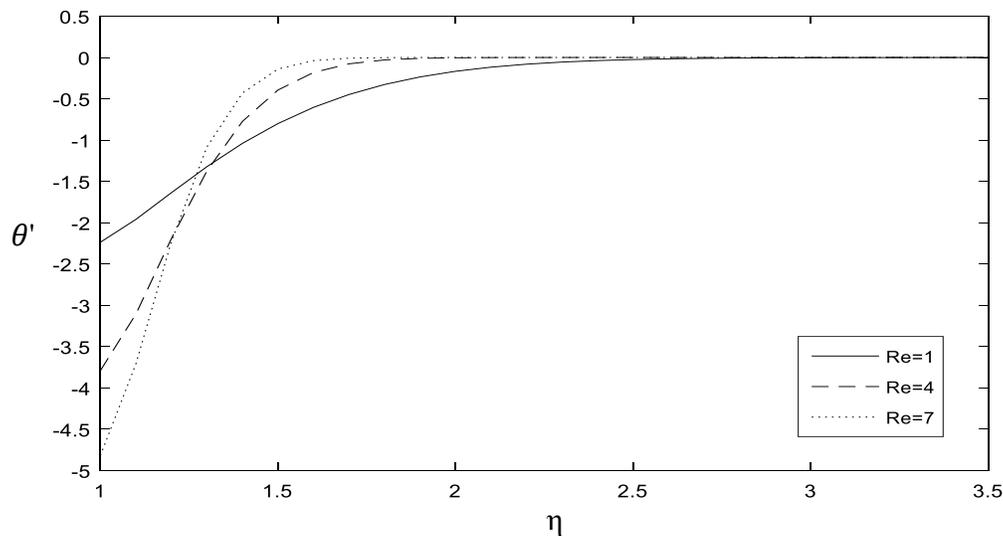


Fig. IV. 14 : Effet de nombre de Reynolds (Re) sur le profil de θ' en fonction de η

La figure (IV.14) présente la variation du profil de θ' en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers valeurs de Re (1, 4,7), avec un nombre de Pr et le paramètre de flottabilité λ est fixe, on remarque que l'épaisseur de la couche limite thermique s'étend avec l'augmentation de nombre de Re, et que l'augmentation de Re accélère l'écoulement.

➤ **Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil de θ' en fonction de η :**

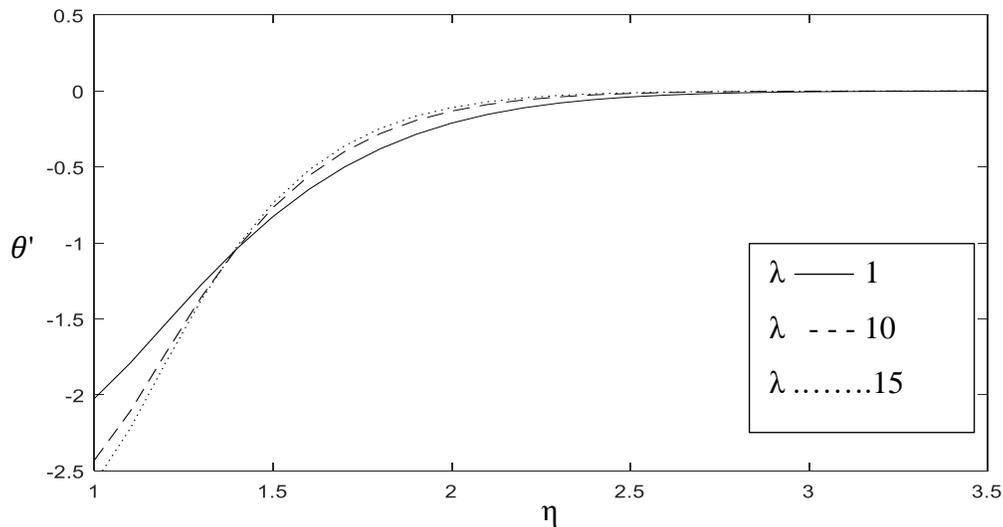


Fig. IV. 15 : Effet de paramètre de flottabilité λ sur le profil de θ' en fonction de η

La figure (IV.15) présente la variation du profile de θ' en fonction de la variable adimensionnelle(η), pour divers valeurs de paramètre de flottabilité λ (1, 10,15), avec un nombre de Pr et Re est fixe, on remarque que l'épaisseur de la couche limite thermique rétrécit avec l'augmentation de paramètre de flottabilité (λ), et que l'augmentation de λ accélère l'écoulement.

➤ **Profil du nombre de Nusselt local en fonction de λ :**

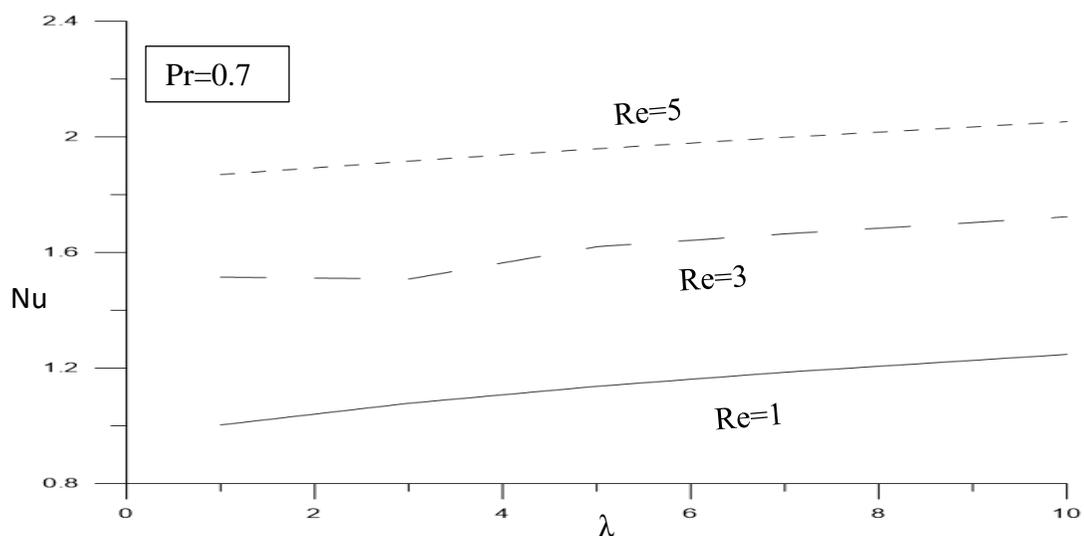
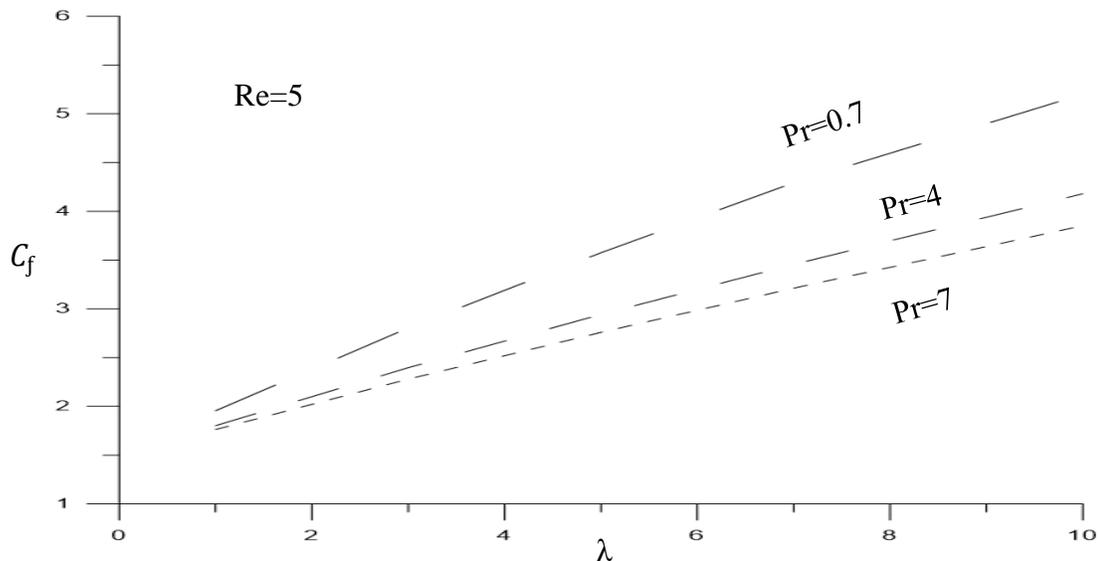


Fig. IV. 16 : Profil du nombre de Nusselt local en fonction de λ .

La figure (IV.16) présente la variation du nombre de Nusselt (Nu) en fonction de λ , pour divers valeurs de nombre de Reynolds et un nombre de Prandtl $Pr=0.7$, on remarque que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de λ .

➤ **Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de λ :**

**Fig. IV. 17 :** Profil du coefficient de frottement à la paroi en fonction de λ .

La figure (IV.17) présente la variation du coefficient de frottement (C_f) en fonction de λ , pour divers valeurs de nombre de Prandtl Pr (0.7,4,7) et un nombre de Reynolds fixe $Re=5$, on remarque que le coefficient de frottement augmente avec l'augmentation du λ .

IV.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté les comportements d'une couche limite dynamique et thermique pour un jet impactant sur un cylindre chauffé. Les profils des vitesses et des températures sont tracés en fonction de (η) pour étudier les effets de nombre de Prandtl (Pr), le nombre de Reynolds (Re) et le paramètre de flottabilité (λ) ainsi pour présenter l'évolution de nombre de Nusselt (Nu) et de coefficient de frottement (C_f) en fonction du paramètre de flottabilité λ , pour analyser la structure de couche limite. Les résultats obtenus à propos de cette étude sont analysés et discutés. Il est vérifié que l'épaisseur d'une couche limite varie avec la variation des paramètres (Pr), (Re) et (λ).

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons étudié numériquement un écoulement de couche limite induit par un jet axisymétrique sur un cylindre verticale chauffé dont la température est supérieure à celle du fluide et sans rotation. L'objectif principal de ce travail est l'analyse du comportement de la couche limite sous l'influence de plusieurs paramètres. L'étude fait partie d'un axe de recherche très important.

Une étude bibliographique nous a permis de nous familiariser sur l'écoulement de couche limite au voisinage de point de stagnation et d'acquérir une idée globale sur les caractéristiques d'un écoulement en présence des jets impactant sur un cylindre.

L'écoulement de base est obtenu on résolvant les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Les équations de mouvement sont réduites à un système d'équation ordinaire qui se présente sous forme d'un problème aux valeurs aux limites, ces équations sont résolues numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre associée à la méthode Tire.

Pour notre étude nous avons varié une gamme de paramètre, le nombre de Prandtl (Pr), le nombre de Reynolds (Re) et le paramètre de flottabilité(λ), pour étudier leurs effets sur les champs dynamiques (la vitesse (f') et le profil (f) et (f'')) et le champ thermique (la température θ et le profil (θ')).

L'analyse des résultats auxquelles nous avons abouti conduisent à ces conclusions :

- l'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique diminue avec l'augmentation de nombre de Prandtl(Pr).
- l'épaisseur de la couche limite dynamique augmente avec l'augmentation de paramètre de flottabilité (λ).
- l'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation de paramètre de flottabilité (λ).
- Plus (Re) et (λ) sont grands, plus la température est importante plus la couche limite thermique augmente, et chaque fois (Pr) augmente on a une diminution de température et un rétrécissement de l'épaisseur de couche limite thermique.

L'évolution de nombre de Nusselt (Nu) et le coefficient de frottement (C_f) pour un ensemble des paramètres différents, le nombre de Prandtl (Pr) et le nombre de Reynolds (Re) en fonction de paramètre de flottabilité λ montre que :

- L'augmentation de nombre de Reynolds augmente le nombre de Nusselt, donc le nombre de Prandtl (Pr) améliore le taux de transfert thermique
- L'augmentation de nombre de Prandtl (Pr) fait diminuer le coefficient de frottement C_f .

Référence bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] CHABANE Hakima, HADDAD Mohamed Said: “étude numérique des échanges thermiques par convection mixte dans un canal cavité». Mémoire de fin d'étude ; GM-UMMTO.
- [2] H.Ali, A. Abdenasser, Etude numérique du refroidissement d'une plaque chauffée par un jet l'impactant dans un canal, Mémoire de fin d'étude, université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [3] Incropera, D.Dewitt, T.Bergman, A.Lavine.”Fundamentals of Heat and Mass Transfert”. New York: Wiley, 6 edition ;(2007).
- [4] M. Tarik et A. Ferial, Etude de l'influence des effets de flottabilité thermique et massique sur l'écoulement impactant sur une paroi chauffée, Mémoire de fin d'étude, université Abderrahmane Mira Bejaia.
- [5] Daniel Thibault : “ Etude du refroidissement par impact de jets à travers une paroi mince et avec un écoulement cisailant amont : application aux aubes de turbines”. Engineering Sciences. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Méc mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2009.
- [6] Hiemenz,Dien Grenzschicht aneinem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten graden Kreiszyylinder, Dinglers Polytech. Journal 32 (1911) 321-410.
- [7] F. Gori , L. Bossi Optimal slot height in the jet cooling of a circular cylinder, applied thermal engineering 23 (2003) 859-870.
- [8] Benhadid.S, Contribution à l'étude de l'évolution d'un jet d'air à symétrie axiale dans une cavité cylindrique, Thèse de magister, Mécanique des fluides ,USTHB ,Alger ,sept.(1985).
- [9] Ergin Esirgemez et al, experimental study of a round jet impinging on a convex cylinder, Meas. Sci. Technol. 18 No 7 (July 2007) 1800-1810.
- [10] Neil Zuckerman* and Noam Lior “Radial Slot Jet Impingement Flow and Heat Transfer on a Cylindrical Target” JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER Vol. 21, No. 3, July–September 2007.
- [11] S. A. Nada et al, slot/slots air jet impinging cooling of a cylinder for different jets–cylinder configurations, Heat Mass Transfer (2006) 43: 135–148.

Résumé

Dans ce travail nous avons étudié numériquement un écoulement de la couche limite induit par un jet axisymétrique sur un cylindre vertical chauffé.

Dans le cadre des hypothèses simplificatrice, avec des équations gouvernantes (Navier-Stokes et d'énergie) simplifiées au voisinage de cylindre pour mettre en évidence le développement de la couche limite est réalisé à l'aide de la méthode de tire, qui est basée sur les conditions aux limites en utilisant la méthode Runge Kutta, pour la transformation des conditions aux limites aux conditions initiale.

L'étude est basée sur l'influence de la variation du nombre de Prandtl (Pr), nombre de Reynolds (Re) et le paramètre de flottabilité (λ), sur l'aspect dynamique et thermique de l'écoulement de couche limite qui se développe autour d'un cylindre vertical chauffé.

Mot clés : couche limite, écoulement laminaire, jet impactant méthode Runge-kutta, méthode tir.

Abstract

In this work we have numerically, with simplified governing equations (Navier-Stokes and energy) in the vicinity of cylinder to highlight the development of the boundary layer is carried out using the shooting method, which is based on the boundary conditions using the Runge Kutta method, for the transformation of the boundary condition to the Initial conditions.

The study is based on the influence of the variation of Prandtl (Pr), Reynolds number (Re) and the buoyancy parameter (λ), on the dynamic and thermal aspect of the boundary layer flow which develops around heated vertical cylinder.

Key word : boundary layer, laminar flow, impacting jet Runge-kutta method, shooting method.