



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité :

Dynamique des fluides et énergétique

Thème

Stabilité de l'écoulement d'une couche de film sur une paroi déformable

Présentée par

BELHEDDAD Khelaf et AKKOUCHE Koutiba

Soutenu le : 12/07/2022

Devant le Jury composé de :

Nom	Prénom	Département d'affiliation	Qualité
Mme MEHIDI	Nadia	professeur	présidente
Mr DJEMA	Amar	MCB	Rapporteur
Mme DJESSAS	Houria	MAA	Examinatrice

Année universitaire 2021/2022

Remerciement

En premier lieu , on remercie 'Allah ' le tout puissant de nous avoir donné la force , la santé , la patience , ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés et les obstacles .

A notre encadrant M' Djema :

Nous vous remercions pour l'encadrement, vos précieux conseils, votre gentillesse et simplicité, ça nous a fait plaisir de travailler avec vous.

Nos remerciement vont également aux membres de jury pour avoir accepté d'examiner et de juger notre travail

Dédicaces

*A mon très cher père décédé
qui était toujours à mes cotés, jusqu'à son dernier jour.*

A ma très chère mère :

*Ma source de joie, de bonheur et tendresse, c'est grâce à toi
que j'arrivais à finir mes études , je t'aime .*

A Mes deux frère Aissa et Moussa.

A Mes tentes et mon oncle maternelle.

A tous mes amis.

*Et A tous les étudiants de la promotion dynamique des fluides
et énergétique*

Khelaf

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon très cher père décédé

A ma très chère mère

Source Inépuisable de tendresse, de patience et de sacrifice. Ta prière et ta Bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie.

Quoique je puisse dire et écrire, je ne pourrais exprimer ma grande affection et ma profonde reconnaissance. Puisse Dieu tout puissant, te préserver et t'accorde santé, longue vie et bonheur

A mes chers frères,

A mes chères sœurs

Et à toute ma famille

Et à tous mes amis

Et A tous les étudiants de la promotion dynamique des fluides et énergétique

Zoutiba

Table des matières

Introduction générale -----1

Chapitre I : *Ecoulement a surface libre d'un liquide sur une paroi incliné*

1.1 Problème étudié -----4

1.2 Les équations gouvernantes-----4

1.2.1 Conservation de la masse du liquide-----4

1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement du liquide-----5

1.2.3 conservation de la masse du solide-----6

1.2.4 Equation de la quantité de mouvement du solide----- 6

1.3 Condition aux limites-----7

1.4 Ecoulement de base-----10

1.4.1 Pour le liquide-----10

1.4.2 Pour le solide-----11

1.5 Le débit volumique-----11

1.6 La vitesse moyenne-----12

1.7 Conclusion-----12

Chapitre II : l'analyse dimensionnelle

2.1 Introduction-----13

2.2 les nombres adimensionnels-----13

2.3 échelle caractéristique-----13

2.4 Equation de mouvement adimensionné-----14

2.4.1 pour le solide-----14

2.4.2	pour le liquide-----	15
2.5	Conditions aux limites-----	15
2.5.1	condition cinématique-----	16
2.5.2	conditions dynamiques-----	16
2.5.3	condition cinématique-----	16
2.5.4	conditions dynamiques-----	17
2.6	solution pour un écoulement stationnaire-----	17
2.6.1	Pour le solide-----	17
2.6.2	Pour les fluide-----	17
2.7	Conclusion-----	18

Chapitre III : la stabilité linéaire

3.1	Introduction-----	19
3.2	Linéarisations par rapport à l'écoulement de base-----	19
3.2.1	dans le solide-----	19
3.2.2	dans le fluide-----	20
3.3	Conditions au limites-----	20
3.4	Système d'or Sommerfeld-----	21
3.4.1	Pour le solide-----	21
3.4.2	Pour le liquide-----	21
3.5	Conclusion-----	23

Chapitre IV : Résolution du système d'Or-Sommerfeld et Résultats

4.1	Introduction-----	24
4.2	Recherche de la solution analytique dans le solide-----	24

4.3 Résoudre le problème d'Orr-Sommerfeld dans le liquide-----26

4.4 Résultats-----31

4.5 conclusion-----34

5. conclusion générale-----35

références bibliographiques

Nomenclature

Grandeur	Notation et expression
$\boldsymbol{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes
σ	Tension superficielle
\boldsymbol{D}	Tenseur des déformations
ρ_s	Masse volumique du solide
ρ	Masse volumique du liquide
Pa	Pression atmosphérique
P	Pression
\boldsymbol{v}	Champ de vitesse dans le liquide
u, v	Composantes du Champ de vitesse
\boldsymbol{U}	Champ de déplacement dans le solide
U, V	Composantes du Champ de déplacement
h_0	La hauteur du liquide
s_0	L'épaisseur du solide
\boldsymbol{n}	Vecteur normal
\boldsymbol{t}	Vecteur tangent
\bar{K}	Courbure
F	Gradient du tenseur de déformation
μ	Viscosité dynamique du fluide
I	Matrice identité
β	Angle d'inclinaison du substrat par rapport à l'horizontale
\boldsymbol{g}	Champ gravitationnel
x, y, t	Coordonnées de l'espace et du temps
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport aux temps
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à x
$\frac{\partial}{\partial y}$	Dérivée partielle par rapport à y

Introduction générale

Introduction générale

Nous étudions dans ce mémoire la stabilité d'un écoulement sous gravité d'un film mince d'un liquide sur un solide déformable attaché à une paroi inclinée d'un angle (β). Ces dernières décennies l'étude de la stabilité de ces écoulements est devenue très intéressante car beaucoup de travaux se sont achevés, dans le but de savoir les conditions d'apparition des instabilités. Ces écoulements interviennent dans plusieurs procédés industriels comme le refroidissement des composants électroniques, les réacteurs chimiques, les échangeurs de chaleur, ou les procédés de revêtement de surface [1], dont l'apparition de ces instabilités signifie le dysfonctionnement du système et la mauvaise qualité du produit. Il est donc très important de connaître ces conditions afin de les éviter[2].

Dans un écoulement d'un film mince sous l'effet de la gravité, la transition d'un écoulement stable à un écoulement turbulent, s'effectue par une série d'instabilité[2] :

Instabilités primaires : elle fait apparaître une structure spatiale temporelle.

Instabilité secondaire : elle fait apparaître une périodicité temporelle.

Ces instabilités rendent l'écoulement de plus en plus complexe, ou le comportement devient totalement chaotique, et on distingue deux types d'instabilités qui pourraient se développer au sein du fluide[1] :

Instabilité d'origine visqueuse : elle apparaît lorsque l'angle d'inclinaison du plan est faible et le nombre de Reynolds est élevé, et on pourra observer des ondes de longueur comparable à l'épaisseur du fluide.

Instabilité d'origine gravitaire : elle apparaît lorsque le nombre de Reynolds est faible, et elle se manifeste par des ondes interfaciales.

Les instabilités des fluides sur une paroi inclinée étaient depuis très longtemps un sujet important, dont beaucoup de chercheurs ont passé beaucoup de temps pour essayer de comprendre le comportement de ces écoulements, et ils sont parvenus à trouver des résultats intéressants, dont nous citons quelques-uns de leurs travaux :

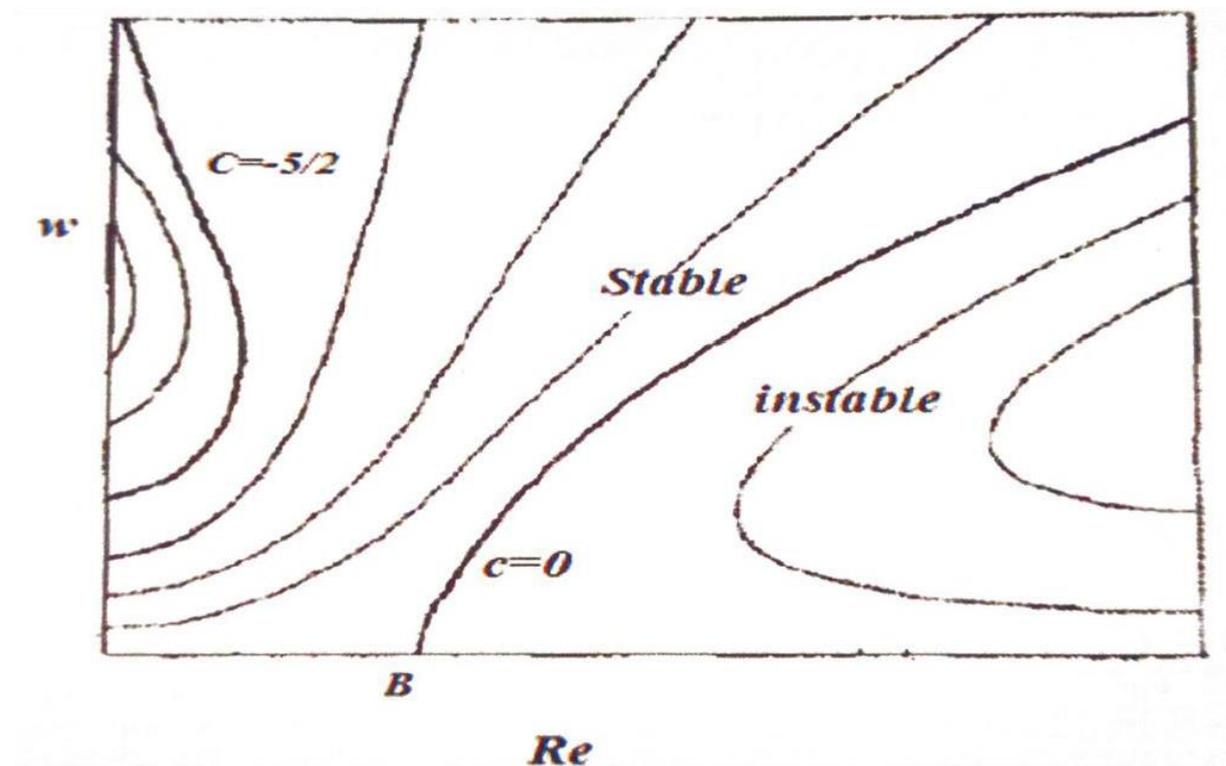
Introduction générale

Kapitza [4] (1949)

Son travail était sur les ondes qui se développent sur un film qui s'écoule sur une plaque inclinée. Il a prouvé l'existence des ondes solitaires qui développent des pics secondaires loin de la source et il a défini un nombre portant son nom, dépendant des propriétés physiques du fluide, qui exprimait le rapport entre l'effet de la tension superficielle et celui de l'inertie, ce nombre est le nombre de Kapitza.

Benjamin [5] (1957) et Yih [6] (1963) :

La stabilité d'un écoulement de fluide mince a été largement étudiée depuis que ces deux chercheurs ont posé le problème. Dans leurs travaux ils ont montré que l'instabilité ne se déclenche que pour des nombre de Reynolds différent de zéro, ou le seuil critique des instabilités ne dépend que de l'angle d'inclinaison du plans (β), et que la vitesse des ondes propagées est double que celle du liquide à la surface [2].



(figure 1 : courbe neutre de Yih) [6]

Introduction générale

Debruin [7] (1974) :

Les résultats précédents ont été complétés par Florian et al [7] (1987). Dans ses travaux Florian a montré qu'il ya un type d'instabilité qui pourra se développer dans un écoulement avec un angle d'inclinaison inférieure à $0,5^\circ$ et un grand nombre de Reynolds, où des modes dont le seuil critique est plus bas que celui de la surface deviennent les modes les plus instables, on les appelle les modes de cisaillement, leur longueur d'onde est de l'ordre de l'épaisseur du film et elle se propage à une vitesse inférieure que celle de la surface libre.

Kelly et al [2] (1989) :

Dans leurs travaux ils ont démontré les mécanisme responsables des instabilités en effectuant un bilan énergétique. Ils ont démontré qu'au niveau de la surface déformée, les forces de cisaillement sont dominées par les termes de production d'énergie, et qu'une instabilité se développe lorsque le déplacement de la surface libre crée un saut de vorticité de la perturbation.

Smith[8] (1990) :

Smith dans ses travaux, a trouvé les mêmes résultats que Yih [6] (1963) concernant le nombre de Reynolds critique et la vitesse des ondes propagées, et il a donné des explications sur les origines de la croissance des instabilités à grande longueur d'onde.

Pederson et al [4] (2000) :

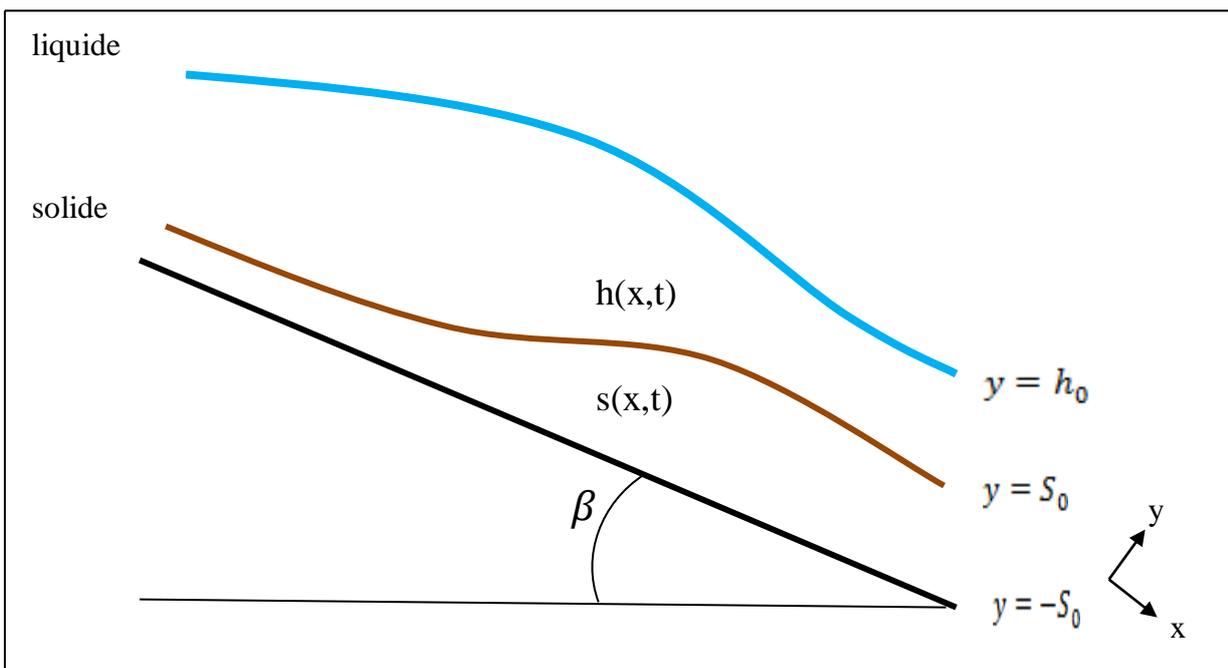
Ils ont développer une technique pour mesurer l'épaisseur d'un film liquide qui s'écoulait sur un plan incliné durant sa condensation, ils ont introduit des ondes périodiques à l'interface liquide-gaz ensuite ils ont fait une analyse spectrale sur les ondes réfléchies.

Chapitre 1:Formulation du problème

Chapitre 1:Formulation du problème

1.1 Problème étudié

On s'intéresse à l'écoulement d'un film mince de liquide à surface libre sous gravité sur un solide déformable considéré comme attaché à une paroi inclinée d'un angle (β) par rapport à l'horizontale, le solide est considéré comme un gel élastique et incompressible soumis à des petits déplacements et de petites transformations, le liquide incompressible visqueux, on lui rattache un repère cartésien (oxy). On suppose que l'écoulement est bidimensionnel et dirigé suivant la direction de l'axe (ox). dans ce premier chapitre, on considère l'écoulement du liquide est stable (sans perturbations), et on écrira les équations gouvernant l'écoulement : les équations de Navier Stokes et de conservation de la masse qui décrivent l'évolution de la vitesse et de la pression du liquide.



(Figure 1 : écoulement d'un liquide sur une paroi déformable)

1.2 Les équations gouvernantes

1.2.1 Conservation de la masse du liquide

Chapitre 1: Formulation du problème

Elle s'appelle aussi l'équation de continuité, sa forme générale est :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

ρ_f : est la masse volumique du liquide

$\mathbf{v}=(u,v)$: est le vecteur vitesse

Le fluide considéré est incompressible, c'est-à-dire ρ_f est constante, donc l'équation réduite est :

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

u, v : les composantes du champ de vitesse

1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement du liquide

La forme générale de l'équation est :

$$\rho_f \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho_f \mathbf{g} \quad (1.3)$$

Où $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy du fluide, tel que :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$\boldsymbol{\tau}$: est le tenseur des contrainte visqueuse

\mathbf{I} : est le tenseur identité

\mathbf{D} : est le tenseur de déformation

μ : est la viscosité dynamique du fluide

Avec :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Et $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ est la dérivée particulaire.

Chapitre 1: Formulation du problème

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

projection de l'équation (1.3)

Projection sur l'axe ox :

$$\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u + \rho_f g \sin \beta \quad (1.5)$$

Projection sur l'axe oy :

$$\rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v + \rho_f g \cos \beta \quad (1.6)$$

avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

1.2.3 Conservation de la masse du solide

Le solide est élastique déformable, et il est considéré incompressible et imperméable au fluide, le déplacement d'un point matériel par rapport à sa position initiale est représenté par un champs de déplacement $\mathbf{u} = (U, V)$.

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

1.2.4 Equation de la quantité de mouvement du solide

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{grad} p_s = E \Delta \mathbf{u} + \mu_s \Delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_s \mathbf{g} \quad (1.8)$$

La contrainte dans le solide est exprimée par :

$$\sigma^s_{ij} = -p_s \delta_{ij} + \left(E + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.9)$$

σ^s est le tenseur des contraintes de Cauchy

ρ_s est la densité du solide

Chapitre 1: Formulation du problème

E est le coefficient d'élasticité

μ_s est la viscosité dynamique du solide

δ_{ij} est le symbole de Kronecker

Projection sur les axes (ox) et (oy)

$$\rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial x} = E \Delta U + \mu_s \Delta \frac{\partial U}{\partial t} + \rho_s g \sin \beta \quad (1.10)$$

$$\rho_s \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial y} = E \Delta V + \mu_s \Delta \frac{\partial V}{\partial t} - \rho_s g \cos \beta \quad (1.11)$$

1.3 Conditions aux limites

a) Conditions entre la paroi rigide et le solide déformable

Au niveau de la surface paroi-solide d'équation ($y = -S_0$) le solide est fixé, et on écrit :

$$U = V = 0 \quad (1.12)$$

b) Conditions entre le solide et le liquide (interface)

On distingue deux conditions au niveau de l'interface solide-liquide d'équation $y = s(x, t)$:

$$u = \frac{\partial U}{\partial t} \qquad v = \frac{\partial V}{\partial t}$$

- **Condition tangentielle :**

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{t} \quad (1.13)$$

- **Condition normale :**

$$(\boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \sigma_{s/l} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (1.14)$$

Où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire de la surface du solide-fluide et il s'écrit comme suit :

Chapitre 1: Formulation du problème

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}} \left(-\frac{\partial s}{\partial x}, 1 \right)^t$$

et \mathbf{t} est le vecteur tangent unitaire de la surface solide-fluide, et il s'écrit comme suit :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}} \left(1, \frac{\partial s}{\partial x} \right)^t$$

avec :

$$\text{div } \mathbf{n} = -\check{K}$$

tel que

$$\check{K} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

on remplace dans les équations (1.13) et (1.14) , on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\partial s^2}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= \left(1 - \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right) \left(E + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \\ &4 \frac{\partial s}{\partial x} \left(E + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} (p - p_s) + \frac{2}{1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2} \left(\mu \left(\frac{\partial s}{\partial x} \left(E + \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \left(1 - \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right) \left(E + \right. \right. \\ \left. \left. \mu_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial s}{\partial x} - \left(1 - \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) &= \frac{\sigma_s / l}{\left(1 + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

b) conditions au niveau de la surface libre

Il existe deux types de conditions au niveau de **la surface libre** (liquide - air)

- **Condition cinématique**

L'équation cinématique , appelée aussi l'équation de non miscibilité traduit l'imperméabilité de l'interface de l'équation : $f(x,y,t)=y-h(x,t)$

on a :

Chapitre 1: Formulation du problème

$$\frac{Df}{Dt} = 0$$

Et :

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.17)$$

- **Conditions dynamiques**

Il existe deux type de condition dynamique , condition normale et tangentielle , elles s'écrivent comme suit :

a) Condition normale

$$(p_a - p + \sigma_{l/a} \operatorname{div}(\mathbf{n})) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \tau \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.18)$$

Le vecteur normal unitaire à **la surface libre** s'écrit : $\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad}(f)}{\|\operatorname{grad}(f)\|}$ avec $f = y - h(x, t)$

On le remplace les expressions suivantes :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, 1\right)^t$$

on a $\operatorname{div} \mathbf{n} = -k$

avec
$$k = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Après le développement on trouve :

$$\left(p_a - p + \sigma_{a/f} \operatorname{div}(\mathbf{n})\right) + \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.19)$$

b) Condition tangentielle :

$$\mathbf{t} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.20)$$

Chapitre 1: Formulation du problème

La tangente est perpendiculaire au vecteur normal \mathbf{n} , son expression est :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \left(1, \frac{\partial h}{\partial x}\right)^t$$

on remplace \mathbf{n} et \mathbf{t} dans l'équation (1.11) et on trouve après le développement :

$$\mu \left[\left(1 - \frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.21)$$

1.4 Ecoulement de base

1.4.1 Pour le liquide

Considérons maintenant que l'écoulement est stationnaire c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, et le champ de vitesse se réduit à $\mathbf{v}=(u, 0)$, et l'épaisseur du liquide ($h = h_0$) est constante, donc les équations (1.5) et (1.6) deviennent :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho_f \sin(\beta)}{\mu} \\ u(0) = 0 ; \frac{\partial u}{\partial y}(h_0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = \rho_f g \cos(\beta) \\ p(h_0) = p_a \end{array} \right.$$

donc

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho_f g \sin(\beta) = 0 \quad (1.22)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_f g \cos(\beta) = 0 \quad (1.23)$$

pour résoudre ces équations nous tenons comptes des conditions :

Chapitre 1: Formulation du problème

$$u = v = 0 \quad \text{en } y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; p = p_a \quad \text{en } y = h_0$$

après intégrations des équations (1.22) et (1.23) nous trouvons :

$$u_b = \frac{\rho_f g \sin(\beta)}{2\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h_0} \right)^2 \right] \quad (1.14)$$

$$p_b = \rho_f g \cos(\beta)(h_0 - y) \quad (1.16)$$

1.4.2 Pour le solide

On a

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ V(-S) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V_b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\rho_s \sin(\beta)}{E} \\ U(-S) = 0; \frac{\partial U}{\partial y}(0) = \frac{\mu}{E} \frac{\partial u}{\partial y}(0) = \frac{\rho_f g \sin(\beta)}{E} h_0 \end{array} \right.$$

On aura les expressions suivantes :

$$U_b = \frac{\rho_s g \sin \beta}{E} \left(\frac{\rho_f h_0}{\rho_s} (s_0 + y) - \frac{1}{2} (y^2 - s_0^2) \right) \quad (1.17)$$

$$p_b = p_a + (\rho_f h_0 - \rho_s y) g \cos \beta \quad (1.18)$$

1.5 Le débit volumique

Nous intégrons la vitesse $u_b(y)$ bornée de 0 à $h(x,t)$ et nous trouvons la formule du débit volumique :

Chapitre 1:Formulation du problème

$$Q_m = \int_0^h u_b(y)dy = \frac{\rho_f g \sin(\beta)}{3\mu} h_0^3 \quad (1.19)$$

1.6 La vitesse moyenne

$$U_m = \frac{Q_m}{h} = \frac{\rho_f g \sin(\beta)}{3\mu} h_0^2 \quad (1.20)$$

1.7) Conclusion

Dans ce chapitre on a considéré que le liquide est en écoulement stable sans perturbation, ensuite on a trouvé les équations de la quantité de mouvement et de la conservation de la masse du liquide et du solide, ce qui nous a permis de trouver la vitesse et la pression de base, ainsi que la vitesse moyenne de l'écoulement.

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle

2.1 Introduction

L'analyse dimensionnelle est un domaine dans la physique qui concerne les unités des grandeurs, chaque grandeur physique a une unité spécifique, par exemple, l'unité de la distance est le mètre, l'unité du temps est la seconde. En physique on ne peut pas additionner dans une équation deux grandeurs non compatibles.

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une équation car toute équation non homogène est forcément fautive. En mécanique des fluides nous utilisons l'adimensionnement qui nous permet de faire apparaître des groupements de nombre qui n'ont pas de dimension dans les équations. Dans ce chapitre nous allons écrire les équations qui décrivent l'écoulement ainsi que les conditions aux limites trouvées dans le chapitre précédent sous leur forme adimensionnelle. Nous utiliserons des grandeurs spécifiques à l'écoulement pour obtenir des nombres adimensionnels caractéristiques de l'écoulement tel que le nombre de Reynolds.

2.2. Les nombres adimensionnels

Après dimensionnement des équations, nous aurons les nombres suivants:

Nombre de Reynolds

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, son expression est :

$$Re = \frac{\rho U_m h}{\mu}$$

- Nombre de Weber

Il caractérise l'écoulement d'un fluide à l'interface d'un système multiphasique. Il correspond au rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle, son expression est :

$$We = \frac{\gamma}{\rho U_m^2 h}$$

2.3. Echelles caractéristiques

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle

Grandeur dimensionnée	Grandeur de référence	Grandeur sans dimension
X	$x_{réf} = h_0$	$x^* = \frac{x}{x_{réf}} = \frac{x}{h_0}$
Y	$y_{réf} = h_0$	$y^* = \frac{y}{y_{réf}} = \frac{y}{h_0}$
T	$t_{réf} = \frac{h_0}{U_m}$	$t^* = \frac{t}{t_{réf}} = \frac{tU_m}{h_0}$
U	$u_{réf} = U_m$	$u^* = \frac{u}{u_{réf}} = \frac{u}{U_m}$
V	$v_{réf} = U_m$	$v^* = \frac{v}{v_{réf}} = \frac{v}{U_m}$
P	$p_{réf} = \frac{\mu U_m}{h_0}$	$p^* = \frac{p}{p_{réf}} = \frac{(p - p_a)h_0}{\mu U_m}$

(Tableau 1) : tableau représentant les grandeurs de référence

On utilise les grandeurs caractéristiques pour déterminer l'adimensionnement des équations de l'écoulement stationnaire. On h_0 l'épaisseur constante du film liquide, (les échelles de longueur suivant la normale au plan incliné) et U_m est la vitesse moyenne de l'écoulement, elle est considérée comme vitesse caractéristique. Avec ces échelles, on peut déduire les autres grandeurs caractéristiques dans ce tableau :

2.4 Equations du mouvement adimensionnées :

En utilisant ces variables adimensionnelles, sachant que h_0 est l'épaisseur du liquide pour un écoulement stable. Les équations du mouvement et les conditions aux limites s'écrivent comme suit :

2.4.1 pour le solide

Si $-\tilde{S} < y < s(x, t)$

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

- Bilan de la quantité de mouvement :

Sur l'axe (ox) :

$$\rho R \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial x} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \eta_r \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial y^2} \right) + 3\rho \quad (2.2)$$

Sur l'axe (oy) :

$$\rho R \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \eta_r \left(\frac{\partial^3 V}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial t \partial y^2} \right) + 3\rho \cot \beta \quad (2.3)$$

Avec : $\eta_r = \mu_s/\mu$ et $\Gamma = Eh_0/\mu U_m$

2.4.2 Pour le liquide

Si $s(x,t) < y < h(x,t)$

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

- Bilan de la quantité de mouvement :

Projection suivant (ox) :

$$Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \quad (2.5)$$

Projection suivant (oy) :

$$Re \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 3 \cot \beta \quad (2.6)$$

2.5 Conditions aux limites pour le solide :

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle

Les conditions aux limites sont données par:

En $y = -\tilde{S}$

$$U = V = 0 \quad (2.7)$$

2.5.1 condition cinématique :

En $y = s(x, t)$

$$u = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.8)$$

2.5.2 conditions dynamiques

- conditions tangentielles

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\partial s^2}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \left(1 - \frac{\partial s^2}{\partial x} \right) \left(\Gamma + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial s}{\partial x} \left(\Gamma + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.9)$$

- Conditions normal

$$\begin{aligned} (p - p_s) + \frac{2}{1 + \frac{\partial s^2}{\partial x}} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \left(\Gamma + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \left(1 - \frac{\partial s^2}{\partial x} \right) \left(\Gamma + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial s}{\partial x} - \left(1 - \frac{\partial s^2}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = \frac{W_1 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial s^2}{\partial x} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10) \end{aligned}$$

En $y = h(x, t)$

2.5.3 Conditions cinématiques

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.11)$$

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle

2.5.4 Conditions dynamiques

- Conditions tangentielles

$$\left[\left(1 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.12)$$

- Condition normale

$$p + \frac{2}{1 + \frac{\partial h^2}{\partial x}} \left[\left(1 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = - \frac{W \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial h^2}{\partial x} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.13)$$

2.6 solution pour un écoulement stationnaire

Nous allons intégrer les équations du mouvement en considérant l'écoulement stationnaire et le fluide incompressible, nous obtenons les solutions suivantes :

2.6.1 Pour le solide

En $-\tilde{S} < y < 0$

$$U_b = \frac{3}{\Gamma} \left(\tilde{S} + y + \frac{\rho}{2} (\tilde{S}^2 - y^2) \right); \quad V_b = 0; \quad P_b = 3(1 - \rho y) \cot \beta \quad (2.14)$$

2.6.2 Pour le fluide

Pour $0 < y < 1$

$$u_b = \frac{3}{2} (1 - (1 - y)^2); \quad v_b = 0; \quad p_b = 3(1 - y) \cot \beta \quad (2.15)$$

Avec :

$$R_e = \frac{\rho_f h_0 u_m}{\mu} ; \quad \rho = \frac{\rho_s}{\rho_f} ; \quad \Gamma = \frac{Eh}{\mu u_m} ; \quad W = R W_e ; \quad W_1 = R w_e'$$

Chapitre 2 : Analyse dimensionnelle

$$W_e = \frac{\sigma_{l/a}}{\rho_f h u_m^2}$$

$w_e' = \frac{\sigma_{s/l}}{\rho_f h u_m^2}$: est le nombre de Weber qui représente l'effet de la tension surfacique .

R_e : représente le rapport entre les effets d'inerties et les effets visqueuses

2.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, en utilisant les grandeurs caractéristiques présentées dans le tableau 1, on a pu trouver les équations adimensionnés de la quantité de mouvement et de la conservation de la masse pour le liquide et le solide dans le cas stationnaire.

Chapitre 3 : Système d'Orr-Sommerfeld

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons perturber l'état de base , ce qui va rendre la vitesse , la pression et l'épaisseur du liquide s'écrivant comme une somme de l'état de base et une petite perturbation. En substituant ces quantités dans les équations de Navier Stokes et des conditions aux limites , ensuite nous éliminons les produits de deux perturbations . Nous obtenons les équation linéarisées .

3.2 Linéarisation par rapport à l'écoulement de base

Après la perturbation, la vitesse et la pression de l'état final s'écrivent comme la somme de l'état de base et une perturbation suffisamment petite.

$u = u_b + \delta \tilde{u}$
$v = \delta \tilde{v},$
$p = p_b + \delta \tilde{p}$
$U = U_b + \delta \tilde{U}$
$V = \delta \tilde{V}$
$h = 1 + \delta \tilde{h}$
$s = \delta \tilde{s}$

(tableau 2)

Nous remplaçons ces expressions dans les équations adimensionnelles, et en gardant que les termes d'ordre un en δ , c'est-à-dire les termes linéaires, on obtient :

3.2.1 Dans le solide

$$\frac{\partial(\tilde{U})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{V})}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho R \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde{p}_s}{\partial x} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} \right) + \eta_r \left(\frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial t \partial y^2} \right) + 3\rho \quad (3.2)$$

$$\rho R \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde{p}_s}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \right) + \eta_r \left(\frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial t \partial y^2} \right) + 3\rho \cot \beta \quad (3.3)$$

3.2.2 Dans le fluide $0 < y < 1$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$R_e \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + u'_b \tilde{v} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

$$R_e \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + u_b \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

3.3 Conditions au limites

On substitue les expressions du tableau 1 dans les équations adimensionnelles des conditions aux limites, puis on néglige tous les termes d'ordre supérieur à, pour obtenir à la fin les équations linéaires :

$$\tilde{U} = \tilde{V} = 0 \quad \text{En } y = -s_0 \quad (3.6)$$

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}; \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \quad \text{En } y=0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + u_b''(0)\tilde{s} = (\Gamma + \partial t) \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} + U_b''(0)\tilde{s} \right) \quad \text{En } y=0 \quad (3.8)$$

$$(\tilde{p} - \tilde{p}_s) + 2 \left[-(\Gamma + \partial t) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] = W_1 \frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial x^2} \quad \text{En } y=0 \quad (3.9)$$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + u_b \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad \text{En } y=1 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + u_b''(1) \tilde{h} = 0 \quad \text{En } y=1 \quad (3.11)$$

$$p + 2 \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}'_b \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right] = W \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2} \quad \text{En } y=1 \quad (3.12)$$

- **Remarque :**

$$f_b(h) = f_b(1 + \delta \tilde{h}) = f_b(1) + \delta f_b'(1) \tilde{h} + o(\tilde{h})$$

Et

$$f_b(s) = f_b(0 + \delta \tilde{s}) = f_b(0) + \delta f_b'(0) \tilde{s} + o(\tilde{s})$$

3.4 Système d'Orr Sommerfeld

Nous allons dans cette partie essayer de trouver la solution des équations linéaires qu'on a trouvé après la perturbation de l'écoulement, , on pose :

$$\Psi_f(x, y, t) = \varphi(y) e^{ia(x-ct)} \quad \text{et} \quad \Psi_s(x, y, t) = \phi(y) e^{ia(x-ct)}$$

$$\tilde{u} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \Psi_f}{\partial x}, \quad \tilde{U} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial y}, \quad \tilde{V} = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial x}, \quad \tilde{p} = p^*(y) e^{ia(x-ct)} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_s = p^*(y) e^{ia(x-ct)}$$

3.4.1 Pour le solide

on écrit les équation (3.4) et (3.7) en fonction de $\Psi_s(x, y, t)$ et en les substituant , nous aurons l'équation (3.23) qui est une équation aux valeurs propres :

$$\widetilde{\Gamma}(\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) + \rho R \alpha^2 c^2 (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) = 0 \quad (3.13)$$

avec $\tilde{\Gamma} = \Gamma - iac\eta_r$.

3.4.2 Pour le liquide

On écrit l'équation (3.11) et (3.14) en fonction de $\Psi_f(x, y, t)$, et en les substituant, nous aurons l'équation (3.25), qui est une équation aux valeurs propres :

$$(\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) + i\alpha R \left((u_b - c)(\alpha^2\phi - \phi'') + u_b''\phi \right) = 0 \quad (3.14)$$

- Les conditions aux limites

$$\phi(-\tilde{s}) = \phi'(-\tilde{s}) = 0 \quad \text{En } y = \tilde{S} \quad (3.15)$$

$$U_b'(0)\phi(0) + c\phi'(0) = -i\alpha c^2\phi'(0) \quad \text{En } y=0 \quad (3.16)$$

$$\phi(0) = -i\alpha c\phi(0) \quad \text{En } y=0 \quad (3.17)$$

$$(U_b''(0) - \Gamma U_b(0))\frac{\psi(0)}{c} + (\phi'' + \alpha^2\phi) = \tilde{\Gamma}(\phi'' + \alpha^2\phi) \quad \text{En } y=0 \quad (3.18)$$

$$i\alpha \left(p_b'(0) - p_b(0) \right) \frac{\phi(0)}{c} + [(\phi'''' - \alpha^2\phi') - \tilde{\Gamma}(\phi'''' - \alpha^2\phi') - i\alpha R((U_b - c)\phi' - U_b'\phi + i\alpha\rho c^2\phi')] - 2\alpha^2(\phi' - \Gamma\phi) = -\frac{\alpha^2 w_1 \phi(0)}{c} \quad \text{En } y=0 \quad (3.19)$$

$$\phi''(1) + \alpha^2\phi(1) + u_b''(1)\frac{\phi(1)}{c-u(1)} \quad \text{En } y=1 \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \phi''' - \alpha^2 \phi' - i\alpha R \left((u_b - c)\phi' - u\phi \right) - 2\alpha^2 \left(\phi' + u_b' \frac{\phi(1)}{c - U_b(1)} \right) \\ = \frac{i\alpha^3 W \phi(1)}{c - U_b(1)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En $y=1$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a considéré les perturbations sont infinitésimale pour négligé les termes non linéaires, et on a trouvé les équations d'Orr Sommerfeld du liquide et du solide qui sont des problèmes aux valeurs propres.

Chapitre 4 : Résolution du système d'Orr-Sommerfeld et Résultats Numérique

4.1. Introduction :

Dans ce chapitre on va résoudre les équations qu'on a trouvés dans le chapitre précédent. L'équation du solide qui est une équation différentielle à coefficient constant, on va la résoudre analytiquement, et pour l'équation d'Orr-Sommerfeld du liquide, on utilisera la méthode de Riccati. Cette méthode transforme un problème aux limites en un problème à valeurs initiales, en tenant compte des conditions aux limites, on aura les résultats de la stabilité du fluide.

4.2. Recherche de la solution analytique dans le solide

L'équation d'Orr-Sommerfeld dans le solide et ses conditions aux limites sont données par :

$$\tilde{\Gamma}(\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) + \rho R\alpha^2 c^2(\varphi'' - \alpha^2\varphi) = 0 \quad (4.1)$$

$$\varphi(-\tilde{s}) = \varphi'(-\tilde{s}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\varphi'(0) = \frac{i}{\alpha c^2}(U_b'(0)\phi(0) + c\phi'(0)); \quad \varphi(0) = \frac{i}{\alpha c}\phi(0) \quad (4.3)$$

L'équation (4.1) est une équation différentielle d'ordre quatre à coefficients constants, donc la forme de la solution est :

$$\varphi = e^{\lambda y}$$

En remplaçant l'expression de (φ) dans l'équation (4.1), on obtient l'équation caractéristique suivant

$$(\lambda^2 - \alpha^2) [\tilde{\Gamma}(\lambda^2 - \alpha^2) + \rho R \alpha^2 c^2] = 0 \quad (4.4)$$

les racines de l'équation (4.4) sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha$$

Ou

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho R \alpha^2 c^2}{\tilde{\Gamma}}}$$

Dans le cas où α est réel, on peut écrire

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha \quad ; \quad \lambda_{3,4} = \pm \alpha \alpha_1 \quad ; \quad \text{avec } \alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{\rho R c^2}{\tilde{\Gamma}}}$$

Sachant que $\tilde{\Gamma}$ est un nombre complexe.

La solution est de la forme suivante :

$$\varphi(y) = c_1 \cosh(\alpha y) + c_2 \sinh(\alpha y) + c_3 \cosh(\alpha \alpha_1 y) + c_4 \sinh(\alpha \alpha_1 y) \quad (4.5)$$

Avec c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\varphi(-\tilde{s}) = 0; \quad \varphi'(-\tilde{s}) = 0; \quad \varphi(0) = \frac{i\phi_0}{\alpha c}; \quad \varphi'(0) = \frac{i(u_b'(0)\phi_0 + c\phi_0')}{\alpha c^2}$$

Où $\phi_0 = \phi(0), \phi_0' = \phi'(0)$.

En utilisant ces conditions aux limites on obtient un système de quatre équations et quatre inconnus, ainsi les valeurs des constantes sont données comme suite :

$$c_1 = \frac{-i \alpha \alpha_1 c \phi_0 [a_1 a_3 - \alpha_1 a_2 a_4] + (c \phi'_0 + 3 \phi_0) [a_1 a_4 - \alpha_1 a_2 a_3]}{\alpha^2 c^2 [2 \alpha_1 a_1 a_3 + (1 + \alpha_1^2) a_2 a_4 + \alpha_1 [a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2]}}$$

$$c_2 = \frac{-i \alpha \alpha_1 c \phi_0 [\alpha_1 a_1 a_4 - a_2 a_3] + (c \phi'_0 + 3 \phi_0) [\alpha_1 a_1 a_3 - a_2 a_4]}{\alpha^2 c^2 [2 \alpha_1 a_1 a_3 + (1 + \alpha_1^2) a_2 a_4 + \alpha_1 [a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2]}}$$

$$c_3 = \frac{-i \alpha c \phi_0 [\alpha_1 (a_1 a_3 - a_1^2 + a_2^2) - a_2 a_4] - (c \phi'_0 + 3 \phi_0) [a_1 a_4 - \alpha_1 a_2 a_3]}{\alpha^2 c^2 [2 \alpha_1 a_1 a_3 + (1 + \alpha_1^2) a_2 a_4 + \alpha_1 [a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2]}}$$

$$c_4 = \frac{-i \alpha c \phi_0 [-\alpha_1 a_1 a_4 + a_2 a_3] + (c \phi'_0 + 3 \phi_0) [a_1 a_3 - a_1^2 + a_2^2 - \alpha_1 a_2 a_4]}{\alpha^2 c^2 [2 \alpha_1 a_1 a_3 + (1 + \alpha_1^2) a_2 a_4 + \alpha_1 [a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2]}}$$

Où $a_1 = \cosh(\alpha \tilde{S})$, $a_2 = \sinh(\alpha \tilde{S})$, $a_3 = \cosh(\alpha \alpha_1 \tilde{S})$ et $a_4 = \sinh(\alpha \alpha_1 \tilde{S})$.

4.3 Résoudre le problème d'Orr-Sommerfeld dans le liquide.

L'équation d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites sont données par :

$$(\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi) + i\alpha R((u_b - c)(\alpha^2 \phi - \phi'') + u_b'' \phi) = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{En } y = 0 : \quad (\phi'' + \alpha^2 \phi) = \tilde{\Gamma} \alpha^2 (2c_1 + (1 + \alpha_1^2)c_3) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} -3i\alpha \cot(\beta) (1 - \rho) \frac{\phi}{c} + [(\phi'''' - \alpha^2 \phi') - i\alpha R(-c\phi' - 3\phi)] - 2\alpha^2 \phi' - \frac{i\alpha^3 W_1 \phi}{c} \\ = \tilde{\Gamma} \alpha^3 (2c_2 + \alpha_1 (1 + \alpha_1^2)c_4) - 2\alpha^3 \Gamma (c_2 + \alpha_1 c_4) - \alpha^4 \rho R c^2 (c_1 + \alpha_1^2 c_3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{En } y=1 : (c - 3/2)(\phi'' + \alpha^2 \phi) - 3\phi = 0 \quad (4.9)$$

$$\left[(\phi'''' - 3\alpha^2 \phi') + i\alpha R \left(c - \frac{3}{2} \right) \phi' \right] = \frac{i\alpha^3 W \phi}{\left(c - \frac{3}{2} \right)} \quad (4.10)$$

Afin d'utiliser la méthode de Riccati (une méthode de tir), qui transforme un problème aux limites à un problème à valeurs initiales, on effectue le changement de variables suivant (pour obtenir deux conditions

$$w = (c - 3/2)\phi'' + ((c - 3/2)\alpha^2 - 3)\phi \quad (4.11)$$

$$z = \phi''' + \left(i\alpha R \left(c - \frac{3}{2}\right) - 3\alpha^2\right)\phi' - \frac{i\alpha^3 W}{\left(c - \frac{3}{2}\right)}\phi \quad (4.12)$$

En dérivant l'équation (4.11) et en utilisant l'équation (4.12), on obtient

$$w' = \left(c - \frac{3}{2}\right)\left(z + \frac{i\alpha^3 W}{\left(c - \frac{3}{2}\right)}\phi\right) - \left(2\left(c - \frac{3}{2}\right)\alpha^2 + 3 + i\alpha R \left(c - \frac{3}{2}\right)^2\right)\phi' \quad (4.13)$$

En dérivant l'équation (4.12) par rapport à y , on obtient

$$\phi'''' = z' - \left(i\alpha R \left(c - \frac{3}{2}\right) - 3\alpha^2\right)\phi'' + \frac{i\alpha^3 W}{\left(c - \frac{3}{2}\right)}\phi' \quad (4.14)$$

Sachant que

$$\phi'' = \frac{1}{(c - 3/2)}(w + (3 - (c - 3/2)\alpha^2)\phi) \quad (4.15)$$

Donc

$$\phi'''' = z' - \left(i\alpha R \left(c - \frac{3}{2}\right) - 3\alpha^2\right)\left(\frac{1}{(c - 3/2)}(w + (3 - (c - 3/2)\alpha^2)\phi)\right) + \frac{i\alpha^3 W}{\left(c - \frac{3}{2}\right)}\phi' \quad (4.16)$$

En remplaçant dans l'équation (4.6), on obtient l'équation

$$z' = i\alpha R \left(\left((3 - (c - 3/2)\alpha^2) + (c - u_b) \left(2\alpha^2 + u_b'' - \frac{3}{(c - 3/2)} \right) \right) \phi + \left(1 + \frac{(u_b - c)}{(c - 3/2)} \right) w \right) - \frac{\alpha^2}{(c - 3/2)} (3\phi + w + i\alpha W\phi') \quad (4.17)$$

Les conditions aux limites

$$\text{En } y=0 : \quad \left(\frac{1}{(c - 3/2)} (w + (3 - (c - 3/2)\alpha^2)\phi) \right) + \alpha^2\phi = \tilde{\Gamma}\alpha^2(2c_1 + (1 + \alpha_1^2)c_3) \quad (4.18)$$

$$-3i\alpha \cot(\beta) (1 - \rho) \frac{\phi}{c} + z - \left(i\alpha R \left(c - \frac{3}{2} \right) - 3\alpha^2 \right) \phi' + \frac{i\alpha^3 W}{\left(c - \frac{3}{2} \right)} \phi - 3\alpha^2 \phi' \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & - i\alpha R(-c\phi' - 3\phi) \\ & = \tilde{\Gamma}\alpha^3(2c_2 + \alpha_1(1 + \alpha_1^2)c_4) - 2\alpha^3\Gamma(c_2 + \alpha_1c_4) \\ & - \alpha^4\rho Rc^2(c_1 + \alpha_1^2c_3) \end{aligned}$$

$$\text{En } y=1 : \quad w = z = 0 \quad (4.20)$$

On pose $\mathbf{X} = {}^t(\phi, \phi')$ et $\mathbf{Y} = {}^t(w, z)$. L'équation (4.13), (4.15) et (4.17) peut s'écrire comme un système matriciel de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}' = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{Y} \end{cases} \quad (4.21)$$

Avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{(c - 3/2)} - \alpha^2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{(c - 3/2)} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} i\alpha^3 W & -\left(2\left(c - \frac{3}{2}\right)\alpha^2 + 3\right) - i\alpha R \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \\ \delta_1 & -\frac{i\alpha^3 W}{(c - 3/2)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \left(c - \frac{3}{2}\right) \\ 2\alpha^2 + i\alpha R(u_b - c) & i\alpha R \left(1 + \frac{(u_b - c)}{(c - 3/2)}\right) - \frac{\alpha^2}{(c - 3/2)} \end{pmatrix}$$

Avec

$$\delta_1 = i\alpha R \left((3 - (c - 3/2)\alpha^2) + (c - u_b) \left(2\alpha^2 + u_b'' - \frac{3}{(c - 3/2)} \right) \right) - \frac{3\alpha^2}{(c - 3/2)}$$

On définit la matrice de Riccati comme suit :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}_1 \mathbf{X} \tag{4.22}$$

En dérivant l'équation (4.22) par rapport à y et en utilisant les expressions des dérivées de X et Y , on obtient une équation différentielle d'inconnue la matrice de Riccati, donnée par

$$\mathbf{R}'_1 = \mathbf{C}\mathbf{R}_1 + \mathbf{D} - \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{B} \tag{4.23}$$

On a, en $y=1$:

$$\mathbf{Y}(1) = \mathbf{R}_1(1)\mathbf{X}(1) = \vec{0}$$

Comme $X(1) \neq \vec{0}$ donc

$$\mathbf{R}_1(1) = \vec{0} \tag{4.24}$$

Résolution du système d'Orr-Sommerfeld et Résultats Numérique

D'où le problème d'Orr-Sommerfeld revient à résoudre le problème à valeurs initial (4.23) et (4.24), et cela en utilisant la méthode de Runge–Kutta.

En utilisant le changement de variables dans les conditions aux limites en $y=0$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{En } y = 0 : \quad & \frac{w + 3\phi}{(c - 3/2)} = \tilde{\Gamma}\alpha^2(2c_1 + (1 + \alpha_1^2)c_3) \\ & -3i\alpha \cot(\beta) (1 - \rho) \frac{\phi}{c} + z - i\alpha R \left(\frac{3}{2} \phi' - 3\phi \right) - i\alpha^3 \frac{cW + \left(c - \frac{3}{2}\right)W_1}{c \left(c - \frac{3}{2}\right)} \phi \\ & = \tilde{\Gamma}\alpha^3(2c_2 + \alpha_1(1 + \alpha_1^2)c_4) - 2\alpha^3\Gamma(c_2 + \alpha_1c_4) - \alpha^4\rho Rc^2(c_1 + \alpha_1^2c_3) \end{aligned}$$

Qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{EX} + \mathbf{FY} = \mathbf{G} \quad (4.25)$$

Avec

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{3}{(c - 3/2)} & 0 \\ -\frac{3i\alpha}{c} \cot(\beta) (1 - \rho) + 3i\alpha R - i\alpha^3 \frac{cW + \left(c - \frac{3}{2}\right)W_1}{c \left(c - \frac{3}{2}\right)} & -\frac{3i\alpha R}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(c - 3/2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}\alpha^2(2c_1 + (1 + \alpha_1^2)c_3) \\ \tilde{\Gamma}\alpha^3(2c_2 + \alpha_1(1 + \alpha_1^2)c_4) - 2\alpha^3\Gamma(c_2 + \alpha_1c_4) - \alpha^4\rho Rc^2(c_1 + \alpha_1^2c_3) \end{pmatrix}$$

Où $g_1 = \tilde{\Gamma}\alpha^2(2c_1 + (1 + \alpha_1^2)c_3)$; $g_2 = \tilde{\Gamma}\alpha^3(2c_2 + \alpha_1(1 + \alpha_1^2)c_4) - 2\alpha^3\Gamma(c_2 + \alpha_1c_4) - \alpha^4\rho Rc^2(c_1 + \alpha_1^2c_3)$

Le système (4.25) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} E + FR_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Avec $I_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $HI_0 = G$, c'est-à-dire $H = \begin{pmatrix} g_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g_2 \end{pmatrix}$

Finalement le problème aux valeurs propres est résolu en annulant le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} E + FR_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H \end{pmatrix} = 0.$$

4.3 Résultats numériques

La figure 1 représente la courbe de stabilité marginale (neutre) qui sépare dans le plan (R, α) en deux parties stable et instable. La figure 2 nous montre l'effet de l'épaisseur de la couche du solide sur l'instabilité du film liquide. Et on remarque la zone d'instabilité augmente en augmentant l'épaisseur de la couche du solide. Finalement la figure 3, nous montre l'effet du coefficient d'élasticité sur la stabilité. La zone de stabilité augmente en diminuant le nombre d'élasticité du solide Γ .

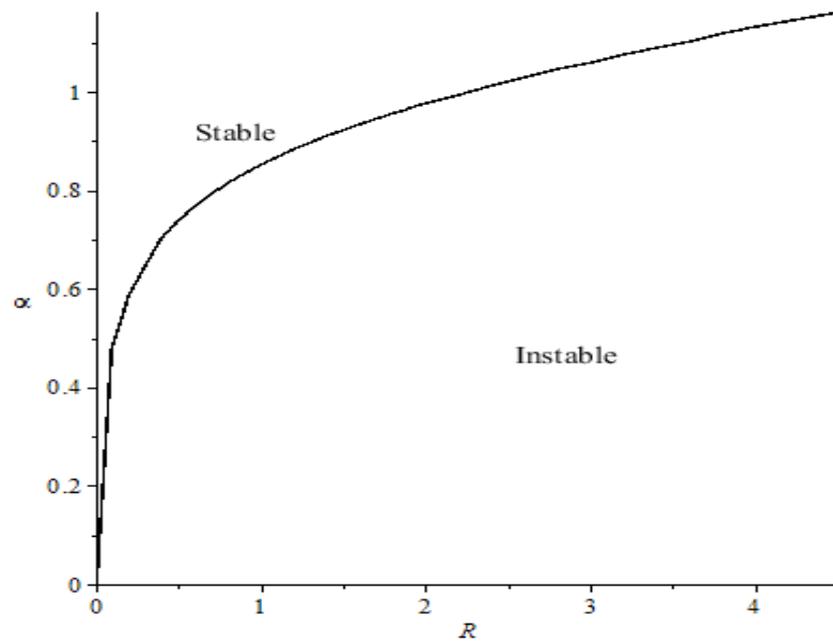


Figure1 : Courbe de stabilité marginale pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, $W=1$, $W_1 = 1$, $\Gamma = 0.01$, $\eta_r = 1$,
 $\rho = 1$, $S_0 = 0.5$.

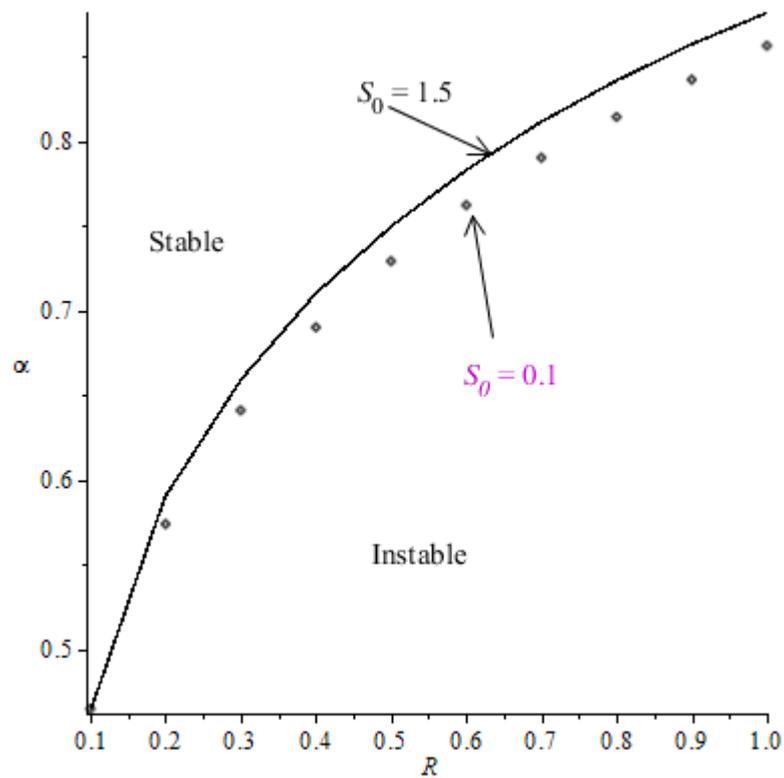


Figure 2 : Effet de l'épaisseur de la couche du solide sur l'instabilité du film liquide. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $W=1$, $W_1 = 1$, $\Gamma = 0.01$, $\eta_r = 1$, $\rho = 1$.

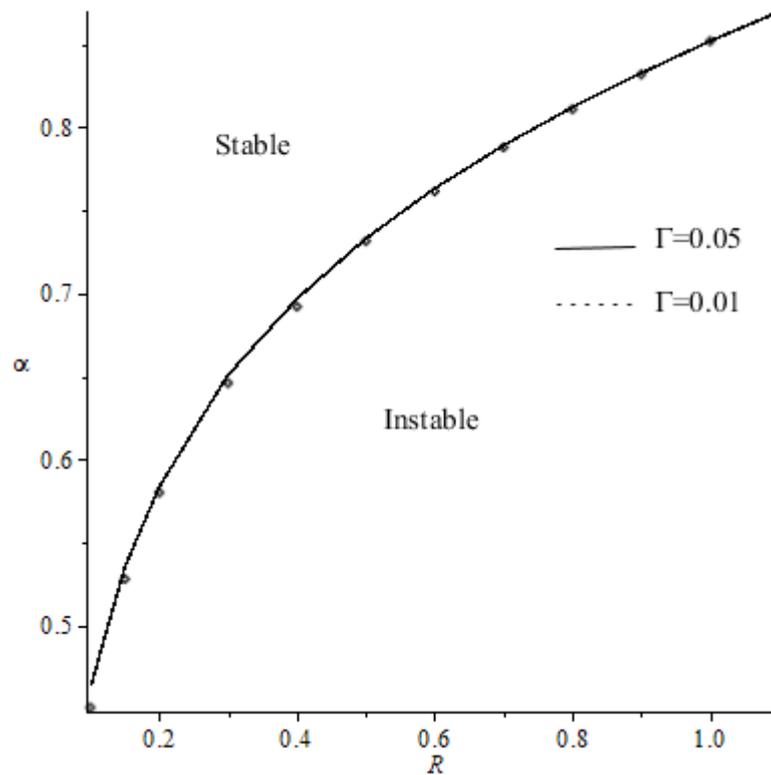


Figure 3 : Effet du coefficient d'élasticité la stabilité marginale. Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, $W=1$, $W_1 = 1$, $\eta_r = 1$, $\rho = 1$, $S_0 = 1$.

Conclusion

Dans ce chapitre on a résolu analytiquement l'équation d'Orr-Sommerfeld du solide. Par la suite, on a utilisé la méthode de Riccati pour transformer le problème aux limites d'Orr-Sommerfeld du liquide en un problème aux valeurs initiales. Ce dernier est résolu par la méthode de Runge-Kutta sous le logiciel Maple.

Conclusion général

Conclusion général

Dans ce mémoire on s'est intéressé à l'étude de la stabilité de l'écoulement d'un film mince d'un liquide sur une paroi déformable. On a exposé les équations de Navier Stokes gouvernant l'écoulement, et les équations qui décrivent le déplacement du solide, ainsi que les conditions aux limites.

Ensuite, on a écrit tous les équations sous leur forme adimensionnelles, et dans le chapitre trois, on a perturbé l'écoulement du liquide, et on a remplacé les vitesses par une vitesse moyenne plus une petite perturbation, après le développement et en éliminant les termes non linéaires, on a eu les équations linéarisées, ensuite on a établi le système d' Orr-Sommerfeld pour résoudre le problème. A la fin on a eu les résultats sur la stabilité de l'écoulement.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] AMATOUSSE Nawel , contribution a l'étude des instabilités interfaciales dans les films minces 12/01/2008.
- [2] Séverine millet , Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné 07/12/2007.
- [3] DJEMA Amar, Sur la dynamique non linéaire de l'écoulement d'un fluide non newtonien sur un plan incliné: modèles et bifurcations, 21/12/ 2016.
- [4] OULDREBAI Hakim , Etude de l'écoulement d'un film liquide sur un plan incliné , 05/05/2019
- [5] TB Benjamin, J. Fluid Mech. 2, 554 1957
- [6] C.S.Yih « instability due to Viscosity Stratification” J.Fluid.Mech.
- [7] DEBRUIN, J. G. Stability of a Layer of Liquid Flowing Down an Inclined Plane. J. Eng. Math. **8**, 259-270. (1974)
- [8] SMITH ,M. K., The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. J. Fluid Mech. **217**, 469-485. (1990)