

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira

Faculté de la Technologie



Département d'Automatique, Télécommunication et d'Electronique

## Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et informatique industrielle

### Thème

*Identification des systèmes dynamiques par l'approche d'optimisation*

**Préparé par :**

TARAFT Selma

ZERZIH Djamila

**Dirigé par :**

*Mr. Nait Mohand Nacim*

*Mr. Lehouche Hocine*

**Examiné par :**

*Mr. Mendil*

*Mr. Heddar*

Année universitaire : 2021/2022

# *Remerciements*

*Nous tenons à remercier tout d'abord Dieu, le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté, la santé ainsi que la patience pour réaliser ce modeste travail.*

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à nos chers encadrants **Mr.Lehouche Hocine** et **Mr. Nait Mohand Nacim** pour leur contribution, disponibilité, leurs conseils judicieux et leur sens de gestion et d'orientation durant la préparation de ce travail.*

*Nous remercions également les membres de jury **Mr.Mendil** et **Mr. Heddar** qui ont fait l'honneur de participer au jugement de ce travail.*

*Et enfin nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de fin d'étude.*

# *Dédicace*

❖ *Je dédie ce travail à:*

*Mes très chers parents qui ont fait de moi ce qui je suis aujourd'hui à ma chère maman qui ma élevée et fait de moi la femme que je suis à mon père et qui a veillé sur moi qui s'est fatigué et s'est déplacé jour et nuit pour que moi je puisse accomplir mes études, pour leur grands émotions, leur sacrifices, et leur soutien et encouragement pendant la réalisation du travail. A mes frères et sœurs. À mes petites nièces et mon neveu. À toute ma famille.*

*Djamila Zerzih*

❖ *Je dédie ce travail à toutes les personnes qui m'ont soutenu.*

*Selma Tarajt*



---

# Table des matières

<b>Chapitre I</b> .....	<b>VI</b>
<b>I. Identification des systèmes dynamiques</b> .....	<b>VI</b>
I.1 Introduction .....	1
I.2 La modélisation des systèmes dynamiques .....	1
I.2.1 Les types de modèles [5] : .....	2
I.3 L'identification des systèmes dynamiques : .....	3
I.3.1 Processus d'identification des systèmes dynamiques [7] : .....	4
I.3.2 Les méthodes d'identification des systèmes dynamiques .....	5
I.3.3 Les méthodes paramétrique statiques .....	7
I.3.4 Les moindres carrés récursifs .....	10
I.4 Identification en boucle fermée .....	14
I.5 Exemple d'application de la méthode des moindres carrés récursifs : .....	15
I.6 Conclusion : .....	16
<b>Chapitre II</b> .....	<b>17</b>
<b>II. Modélisation d'un pendule inversé</b> .....	<b>17</b>
II.1 Introduction .....	18
II.2 Présentation du pendule inversé .....	18
II.2.1 Description de la maquette .....	18
II.2.2 Principe de fonctionnement.....	19
II.3 Les domaines d'applications du pendule inversé .....	19
II.4 Modélisation du système (pendule-chariot) [15,16].....	20
II.4.1 L'énergie cinétique du « chariot -pendule.....	21
II.4.2 L'énergie potentielle du « pendule-chariot ».....	21
II.4.3 L'équation $L$ de Lagrange : .....	22
II.5 Linéarisation du modèle autour des points d'équilibre [15,16].....	23
II.5.1 Position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ) .....	23
II.5.2 Position d'équilibre instable ( $\theta = 0$ ).....	24
II.6 Modèle d'état de l'ensemble chariot pendule.....	26
II.7 Linéarisation du modèle d'état autour du point d'équilibre instable [15,16] .....	26
II.8 Simulation du système en boucle ouverte [16].....	27
II.8.1 Simulation du système en boucle ouverte dans sa représentation non-linéaire.....	28
II.8.2 Simulation du système en boucle ouverte dans sa représentation linéaire .....	30

---

II.9	Conclusion.....	31
	<b>Chapitre III.....</b>	<b>33</b>
	<b>III. Application de la méthode Aliénor sur pendule inversé.....</b>	<b>33</b>
III.1	Introduction .....	34
III.2	Description de la méthode d'Aliénor [17,18].....	34
III.3	Applications de la méthode d'Aliénor à l'identification des systèmes discrets [19].....	36
III.3.1	Application 1 .....	37
III.3.2	Application 2 .....	38
III.4	Application de la méthode d'Aliénor sur le pendule inversé .....	40
III.4.1	Pendule inversé et négligence de frottement du chariot .....	41
III.4.2	Modèle discrétisé du pendule inversé.....	41
III.4.3	Application de la méthode d'Aliénor .....	41
III.5	Conclusion :.....	43
	<b>Conclusion générale.....</b>	<b>44</b>
	<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>46</b>
	<b>Annexes.....</b>	<b>48</b>

---

# Notations et abréviations

**MCR** : Moindre Carré Récurive.

**ARMAX** : Auto Régressive à Moyenne Ajustée et variable Exogène.

**ARX** : Auto Régressive à variable exogène.

**SISO**: Single Input Single Output.

**MIMO** : Multiple Input Multiple Output.

**CAN** : Convertisseur Analogique- Numérique.

**BOZ** : Bloqueur d'Ordre Zéro.

$u(t)$ : Signal d'entrée.

$\hat{u}(t)$  : Signal d'entrée estimé.

$y(t)$  : Signal de sortie.

$\hat{y}(t)$  : Signal de sortie estimé.

$b(t)$  : Perturbation (bruit).

$k(t)$  : Gain de correction.

$\varepsilon(t)$  : Erreur de prédiction (résidu).

$\theta$  : Vecteur des paramètres du système.

$e(k)$ : Erreur de prédiction ou d'équation.

$\hat{\theta}$  : Vecteur des paramètres du modèle.

$\Omega(t)$ : Vitesse de rotation.

$\Phi$  : Vecteur d'observation.

$A(p)$  : Dénominateur du Fonction transfert du système.

$\hat{A}(p)$  : Dénominateur Fonction du transfert du modèle.

$B(p)$  : Numérateur du Fonction transfert du système.

$\hat{B}(p)$  : Numérateur du Fonction transfert du modèle.

$C(q^{-1})$  : Numérateur du Fonction transfert du bruit.

$\hat{C}(q^{-1})$  : Numérateur du Fonction transfert estimé du bruit.

$D(q^{-1})$  : Dénominateur du Fonction transfert du bruit.

$\hat{D}(q^{-1})$  : Dénominateur du Fonction transfert estimé du bruit.

$\varepsilon(t)$ : Les degrés de liberté.

$Df$  : L'énergie dissipée par frottement.

---

## Listes des figures

Figure I.1. Principe d'identification .....	3
Figure I.2. Structure d'identification paramétrique statique. ....	3
Figure I.3. Erreur de sortie .....	5
Figure I.4. Structure d'identification basée sur l'erreur de prédiction .....	6
Figure I.5. Structure d'identification basée sur l'erreur de prédiction .....	22
Figure I.6. Registre générateur de séquence SBPA .....	23
Figure I.7. Diagramme temporel d'une SBPA de période $15 T_{SBPA}$ .....	26
Figure I.8. Identification en boucle fermé .....	27
Figure I.9. La sortie de système et celle du modèle obtenu (avec bruit).....	28
Figure I.10. Evolution des paramètres du système en appliquant un signal d'entrée aléatoire (avec bruit) .....	32
Figure II.1. Synoptique de banc d'essais du pendule inversé .....	35
Figure II.2. Le transporteur humain segway .....	37
Figure II.3. Aérospatiale .....	38
Figure II.4. Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé .....	38
Figure II.5. L'angle du pendule.....	39
Figure II.6. La position du chariot.....	46
Figure II.7. L'angle du pendule .....	48
Figure II.8. La position du pendule .....	48
Figure III.1. Résultat de simulation exemple 1 .....	55
Figure III.2. Résultat de simulation exemple 2 .....	57
Figure III.3. Résultat simulation pendule inversée .....	60



---

## Liste des tableaux

Tableau I.1-Estimation des paramètres en fonction d'une entrée aléatoire (avec bruit).....	18
Tableau I.2 - Estimation des paramètres en fonction d'une entrée aléatoire (avec bruit).....	34
Tableau II.1-Les paramètres du système .....	46

## Introduction générale

L'automatique est une science qui traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques. L'automatisation des opérations a comme objectifs : d'accroître la productivité, et d'augmenter la sécurité.

L'identification de système, est un aspect de l'automatique, qui revient à appliquer ou observer des signaux de perturbation à l'entrée d'un système (par exemple, pour un système électronique, ceux-ci peuvent être de type binaire aléatoire ou pseudo-aléatoire, Gallois, sinusoïde à fréquences multiples...) et à analyser la sortie afin d'obtenir un modèle proprement mathématique.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'identification du pendule inversé, qui est système dynamique multi variable, couplé, non linéaire et instable [1]. Ce système occupe une place importante, en robotique, en particulier dans les nouveaux moyens de transports à deux roues, comme le segway, qui permet d'avancer en se penchant en avant. Cet intérêt à ce système est dû particulièrement au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites [2].

Pour identifier les paramètres de modèle discret du pendule inversé, nous transformons le problème d'identification en un problème d'optimisation d'une fonction à plusieurs variables (paramètres à identifier). Pour déterminer les optimums globaux de cette fonction, nous avons utilisé la méthode d'Aliénor, qui est une méthode d'optimisation globale, qui consiste à ramener le problème d'optimisation à plusieurs variables à un problème d'optimisation à une seule variable  $d$  (facile à résoudre) à l'aide d'une transformation réductrice, ce qui permet de simplifier la résolution du problème d'optimisation et de localiser la solution globale du problème d'optimisation.

Notre travail est structuré de la manière suivante :

- Le premier chapitre est consacré à des rappels sur la modélisation des systèmes dynamique, et à l'exposition de quelques méthodes paramétriques et non paramétriques des systèmes dynamiques.
- Le deuxième chapitre est dédié à la description du pendule inversé ainsi qu'à sa modélisation dynamique qui est déduite à partir du formalisme d'Euler Lagrange, et à

la simulation en boucle ouverte du pendule inversé dans le but d'appréhender son comportement.

- Le troisième chapitre fait l'objet d'une application de la méthode d'Aliénor à l'identification du système discret du pendule inversé ainsi qu'à la présentation d'une synthèse d'exemples d'application de cette méthode.

# Chapitre I

## I. *Identification des systèmes dynamiques*

## I.1 Introduction

Une grande partie de systèmes physiques peuvent être représentés par un ensemble de relations mathématiques reliant les variables d'entrées aux variables de sorties au cours du temps. L'action du système est alors équivalente à un opérateur mathématique de l'espace des entrées, à valeurs dans l'espace des sorties. Dans ce chapitre notre intérêt porte sur les systèmes dynamiques, qui sont définis comme des procédés de nature quelconque qui évolue dans le temps en fonction des signaux d'entrées. Les différentes variables et signaux interagissent et produisent les signaux de sorties qui caractérise l'évolution du système.

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques éléments sur quelques types de modèles pour un système dynamique, et sur l'identification de ce type de système. Il ne s'agit pas de donner un aperçu exhaustif de tous les modèles et méthodes d'identification, mais de préparer les lecteurs à quelques outils et concepts qui seront utilisés dans les chapitres 2 et 3.

Il n'est pas logique de parler de l'identification sans passer par la modélisation, pour cela nous allons commencer par expliquer cette notion et pourquoi est-elle cruciale dans le domaine de l'automatique.

## I.2 La modélisation des systèmes dynamiques

La modélisation d'un système dynamique, est l'exercice qui vise, au départ d'une description discursive et qualitative du système, à en établir une description mathématique quantitative sous la forme d'un modèle d'état.

Sans être inutilement compliqué, le modèle ainsi obtenu doit être un outil efficace pour la résolution du problème d'ingénierie posé pour le système considéré. Les hypothèses adoptées pour la modélisation doivent être clairement formulées et mises en évidence [3].

Le modèle mathématique obtenu est généralement d'écrit par des équations différentielles ou aux différences ou par des fonctions de transfert. Le modèle mathématique peut être obtenu par deux approches [4] :

- **Par modélisation théorique** : Le modèle de connaissance obtenu dans cette approche est basé des lois physiques, chimiques, biologiques, économiques...etc.

- **Par identification** : Le modèle de représentation obtenu par cette approche décrit le comportement entrées/sorties (modèle expérimental ou encore modèle de commande).

Le tableau suivant donne les caractéristiques des modèles obtenus par les des deux approches.

Approche par modélisation théorique	Approche par identification
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Difficultés de décrire fidèlement les phénomènes complexes (nécessite des spécialistes) ;</li> <li>- Précis et complet ;</li> <li>- Dilemme précision-simplicité (hypothèses simplificatrices) ;</li> <li>- Les paramètres ont un sens physique donc modèle commode pour l'analyse.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Système boîte noire ;</li> <li>- Moins précis et moins complet (spécialité non nécessaire), exploitation plus</li> <li>- Efficace ;</li> <li>- Paramètres du modèle n'ont aucun sens physique ;</li> <li>- Modèle de conduite utile pour la commande.</li> </ul>

**Tableau I.1-** Les caractéristiques des modèles obtenus par l'approche de modélisation et l'approche d'identification

### I.2.1 Les types de modèles [5] :

- **Modèle de boîte blanche ou de connaissance**  
 Dans ce type de modèle, on exploite les connaissances a priori sur le système et les lois de physique connues pour déduire des relations mathématiques traduisant le comportement du système. On peut citer un domaine d'application de ce type de modèle qui est le domaine spatial ou les essais expérimentaux sont difficiles et compliqués.
- **Modèle de boîte noire ou de comportement**  
 Dans ce type de modèles, les paramètres n'ont aucun sens physique et les connaissances a priori ne sont pas nécessaires, on exploite seulement les mesures prélevées sur les entrées/sorties et éventuellement les expériences précédentes. (Exemple : système de climatisation d'un grand centre commercial).
- **Modèle de boîte grise ou modèle hybrides**

C'est le modèle le plus courant, il combine les deux types de modèles précédents. Ainsi cette modélisation prend en considération les connaissances physiques pour déterminer la structure du modèle et les lois de comportement obtenues expérimentalement pour estimer les valeurs des paramètres.

(Exemple : un modèle qui décrit les dynamiques thermiques d'un bâtiment).

Il existe également plusieurs d'autres critères de classifications de modèles :

- Selon le nombre des entrées/sorties : modèle (SISO) possédant une entrée/une sortie ou (MIMO) possédant plusieurs entrées et plusieurs sorties.
- Selon la description mathématique : modèle linéaire ou non-linéaire.
- Selon le caractère des régimes de fonctionnement : modèle statique (si ses équations sont algébrique) et dynamique (si ses équations sont différentielles).
- À temps continu ou à temps discret.

### I.3 L'identification des systèmes dynamiques :

L'identification d'un système dynamique consiste à caractériser un autre système (appelé modèle), à partir de la connaissance expérimentale des entrées et sorties de manière à obtenir identité comportement [6].

Le schéma suivant illustre le principe de l'identification :

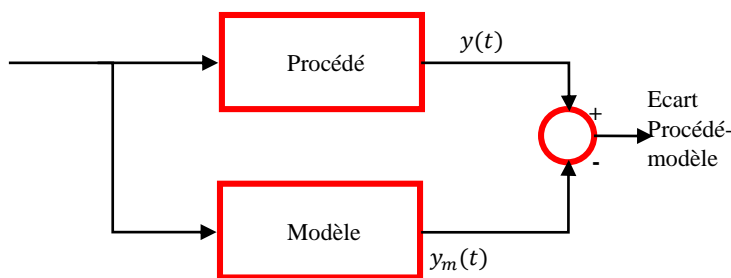


Figure I.1. Principe d'identification.

Les méthodes d'identification des systèmes sont employées pour construire des modèles permettant la synthèse de lois de commande. Cependant, ce domaine d'utilisation conventionnel n'est pas le seul

En effet, l'identification est utilisée également pour :

- L'estimation de paramètres physiques qui ne sont pas directement mesurables.

- Le diagnostic des systèmes.
- La simulation, utilisée à des fins de conception, de prévision ou de formation.
- L'interprétation des essais.

### **I.3.1 Processus d'identification des systèmes dynamiques [7] :**

L'identification est une approche expérimentale pour la détermination du modèle dynamique d'un système. Elle comporte quatre étapes :

#### ***Etape 1. Acquisition des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation :***

Il s'agit essentiellement de choisir un signal d'excitation avec un contenu fréquentiel riche couvrant la bande passante du procédé à identifier mais d'amplitude faible (car en pratique il y a une contrainte très forte sur l'amplitude des variations des signaux de commande).

#### ***Etape 2. Choix ou estimation de la complexité du « modèle » :***

Le problème typique rencontré est de définir l'ordre des polynômes (numérateur, dénominateur) de l'opérateur (fonction) de transfert échantillonné pouvant représenter le modèle du procédé. On utilise souvent des procédures essais/erreur, mais des techniques fiables d'estimation de la complexité des modèles ont été développées ces dernières années.

#### ***Etape 3. Estimation des paramètres du modèle***

La méthode d'identification « classique » utilisée pour obtenir des modèles paramétriques à partir des modèles non paramétriques type « réponse en échelon » est illustrée dans la figure (I.2). Cette méthode, initialement utilisée pour obtenir des modèles paramétriques continus, a été étendue pour l'identification des modèles échantillonnés.

#### ***Etape 4. Validation du modèle identifié.***

Plusieurs points de vue peuvent être considérés pour la mise en place d'une procédure de validation. L'objectif est de vérifier que la sortie du modèle excité par le même signal que le procédé reproduit les variations de la sortie causées par les variations de la commande en s'affranchissant de l'effet de bruit de mesure.



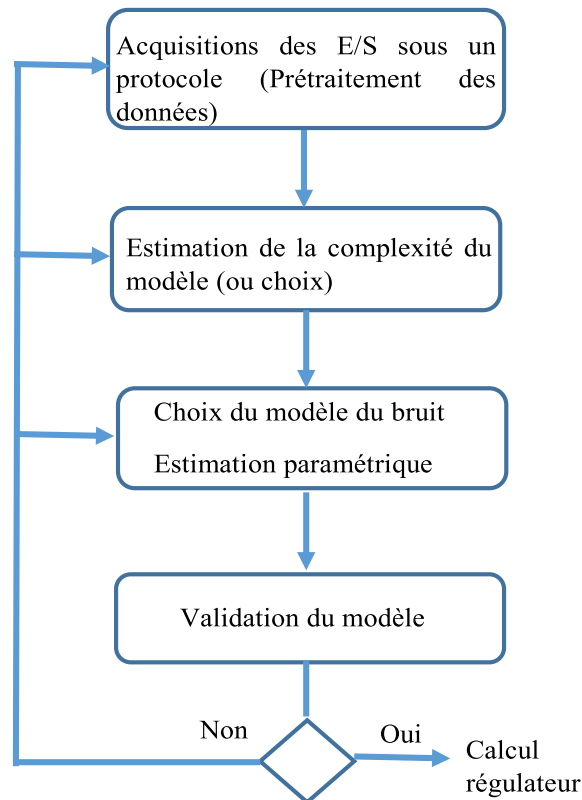


Figure I.2. Les étapes de l'identification.

### I.3.2 Les méthodes d'identification des systèmes dynamiques

Le monde de l'identification des systèmes dynamique est très vaste. Nous distinguons deux sortes de modèles de représentation ou d'identification. L'identification non paramétrique, sont des modèles de représentations constitués de courbes (par exemple la réponse impulsionnelle ou la fonction de transfert harmonique dans des diagrammes de Bode<sup>1</sup>) ne pouvant pas être décrits par un ensemble fini de nombres, et l'identification paramétrique ces modèles, quant à eux, peuvent être caractérisés par un ensemble fini de nombres (par exemple des coefficients des polynômes au dénominateur et au numérateur d'une fonction de transfert) [8, 9].

#### I.3.2.1 Méthodes d'identification non paramétrique [1]

Les méthodes d'identification non paramétriques sont des méthodes graphiques. Elles sont basées sur la réponse du procédé à identifier à un échelon. A partir de la forme de la réponse,

<sup>1</sup> Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système. Il permet une résolution graphique simplifiée, en particulier pour l'étude des fonctions de transfert de systèmes analogiques. Il est utilisé pour les propriétés de marge de gain, marge de phase, gain continu, Bande passante, rejet des perturbations et stabilité des systèmes.

des informations sur la dynamique du système sont déduites. Cela permet en particulier d'obtenir une valeur approchée du retard, du gain et du temps de réponse. Ces méthodes sont utilisées pour identifier des modèles à structure simple (systèmes du premier et du second ordre oscillant). Par contre, elles ne sont pas adaptées à l'identification des systèmes d'ordre élevé.

La question à poser est quelle entrée peut-on utiliser ?

- ***Analyse harmonique***

Entrée sinusoïdale de type  $u = A \sin(\omega t)$ ,  $\omega$  balaye l'espace des pulsations susceptibles de contenir une pulsation de coupure du système. En notant l'amplitude et le déphasage de la sortie vis-à-vis de l'entrée on trace un diagramme de Bode. De l'analyse de ce diagramme on détermine le modèle. Les résultats sont difficiles à exploiter si les constantes de temps sont proches. Bonne excitation sur tout le spectre de fréquences. Ce n'est pas une commande industrielle classique et par conséquent elle est difficile à mettre en œuvre.

- ***Réponse impulsionnelle***

Idéalement la meilleure méthode car le spectre est constant. Mais il est impossible de réaliser un Dirac parfait. Une bonne approximation du Dirac peut être obtenue en électronique (générateur d'impulsions) et en mécanique (percussion souvent utilisée en mécanique vibratoire) voire explosion dans le domaine du génie civil.

- ***Réponse indicielle***

Le spectre est correct, la commande est facile à implanter car c'est une commande classique. C'est la méthode la plus utilisée.

Dans notre étude on s'intéresse à l'identification paramétrique.

### **I.3.2.2 Méthodes d'identification paramétrique**

L'identification paramétrique consiste à déterminer les paramètres d'un modèle mathématique, de façon à obtenir une représentation satisfaisante du système réel considéré.[11]

Il existe deux principales classes de méthodes paramétriques

- Les méthodes paramétriques graphiques ou déterministes (Strejc, Broida) [12]
- Les méthodes paramétriques statistiques (études stochastiques).

### I.3.3 Les méthodes paramétrique statiques

L'identification paramétrique statistique est généralement basée sur l'erreur de prédiction, qui est l'erreur entre la sortie du procédé  $y(t)$ , et la sortie  $\hat{y}(t)$  prédite par le modèle. Cette erreur de prédiction est utilisée par un Algorithme d'Adaptation Paramétrique (A.A.P), qui à chaque instant d'échantillonnage, va modifier les paramètres du modèle afin d'en minimiser l'erreur. L'entrée appliquée au système est généralement une Séquence Binaire Pseudo Aléatoire (S.B.P.A).de très faible niveau, engendrée par le calculateur [11].

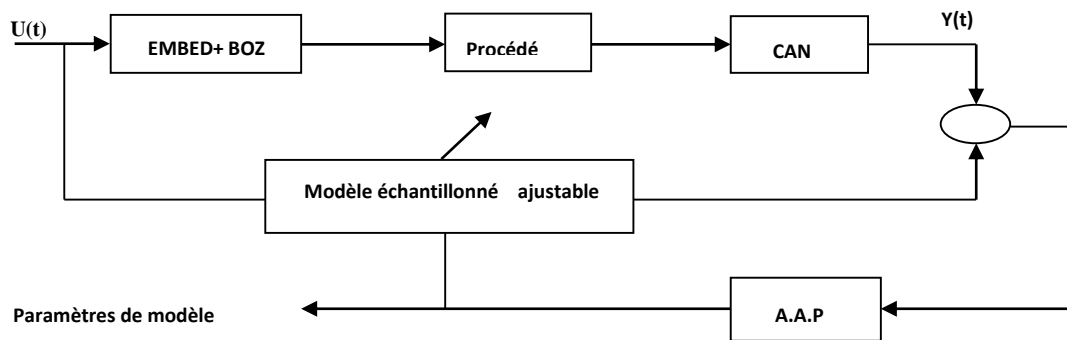


Figure I.3. Structure d'identification paramétrique statique.

#### I.3.3.1 Identification basée sur l'erreur de sortie

Cette méthode est basée sur la comparaison entre la sortie d'un processus et celle d'un modèle dont on veut estimer les valeurs des paramètres. Les approches basées sur l'erreur de sortie utilisent les concepts de la programmation non linéaire. L'inconvénient majeur est qu'aucun de ces algorithmes n'est capable de garantir que le résultat est vraiment l'optimum. [10][13].

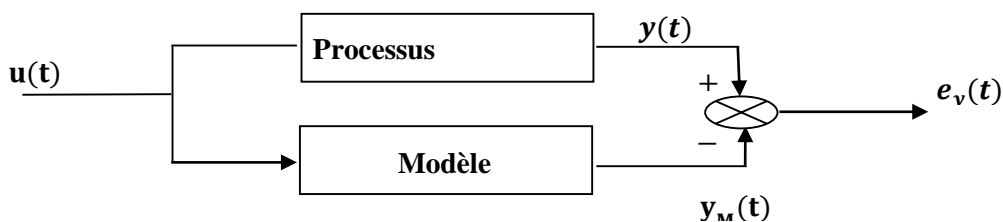


Figure I.4. Erreur de sortie.

#### I.3.3.2 Identification basée sur l'erreur de prédiction

Ce type d'identification se base sur le concept de prédiction sortie de système réel à l'aide d'équation algébrique de prédiction. Le principe est de la même nature de la commande

prédicative, ou l'on cherche à minimiser l'écart entre la consigne et la sortie en calculant la variable manipulée (la variable à la sortie de prédicteurs).

Le principe est illustré par la figure suivante [11] :

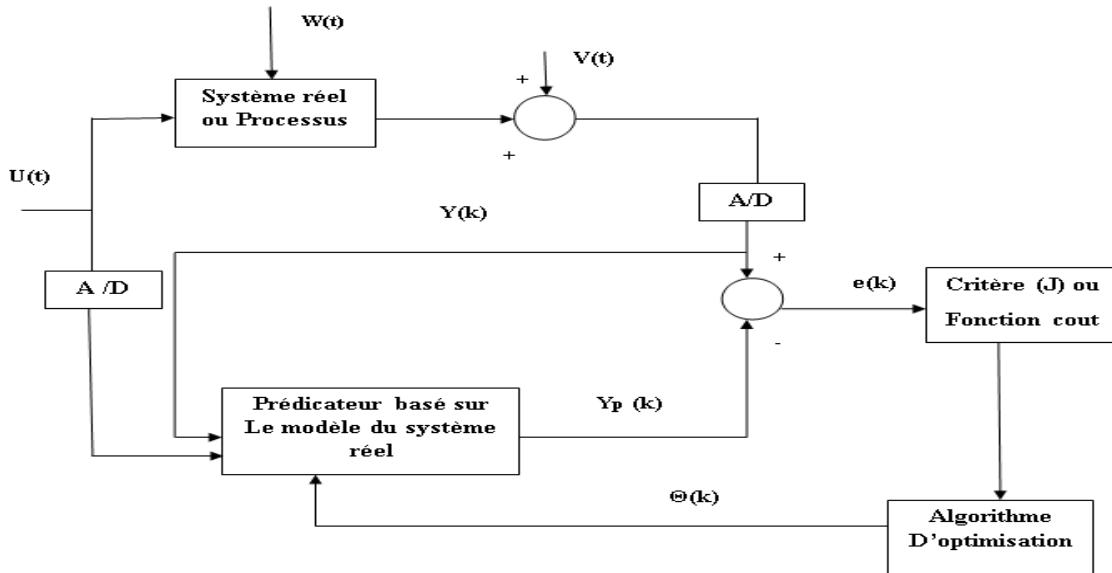


Figure I.5. Structure d'identification basée sur l'erreur de prédiction.

Le prédictor calcule d'une sortie  $y_p(k)$  en se servant des valeurs d'entrée  $U$  et de sortie  $Y$  présentes et passées, mesurées sur le système réel. Dans le prédictor il y a des équations algébriques basées sur le modèle et non un système d'équation différentielle. Le gros avantage est de ne pas passer par une intégration numérique de style Runge-Kutta et donc le temps de calcul de la sortie est réduit. Le Principe est de considérer l'erreur de prédiction ou d'équation  $e(k)$  comme étant un bruit de mesure. Ces méthodes peuvent être facilement importantes en temps réel sous forme récursive. Par contre l'usage de ces méthodes est réservé à l'étude des modèles de la forme :

$$y(k) = \hat{\varphi}^T(k)\theta + e(k). \quad (\text{I.1})$$

Dite de régression linéaire. Ceci veut dire que les sorties sont linéaires par rapport aux paramètres.

#### ❖ Le choix du signal d'excitation pour l'identification

Afin d'obtenir un modèle cohérent, il est important d'exciter le processus avec toutes les fréquences de sa gamme de fonctionnement. Le signal d'entrée appliqué doit donc être riche en fréquences (avec un large spectre de fréquence qui peut contenir des constantes de temps associées aux pôles et aux zéros du système.) pour autoriser la sollicitation que nous essayons d'identifier.[4]

Les signaux suivants sont proposés :

- Signal sinusoïdal : parfait du point de vue du spectre (balayage des fréquences) mais peu de systèmes acceptent ce type d'entrée.
- L'impulsion de Dirac : parfait d'une perspective théorique, mais souvent difficile à atteindre un tel signal sauf en électronique.
- Echelon : moins bon d'un point de vue spectral ( $u(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$ ), mais facile à mettre en œuvre.
- Bruit blanc : idéal d'un point de vue spectral mais difficile à réaliser.

IL arrive que nous n'ayant aucune possibilité d'exciter le système (ex : machine en production), il faudra alors profiter des commandes « naturelles » du système de signal d'entrée du système. Dans ce cas, le premier travail consiste à calculer le spectre du signal d'entrée (FFT par exemple). IL faudra vérifier a posteriori que les constantes de temps identifiées sont bien dans des domaines de fréquence dans lesquels le système a été excité [13]. La solution théorique standard est d'appliquer une SBPA.

#### ❖ Les séquences binaires pseudo aléatoire SBPA :

C'est un signal binaire généré par un registre à décalage de N bits rebouclé par une fonction spécifique à base de "OU exclusifs". L'état des N bascules forment un mot de N bits observé par sérialisation.

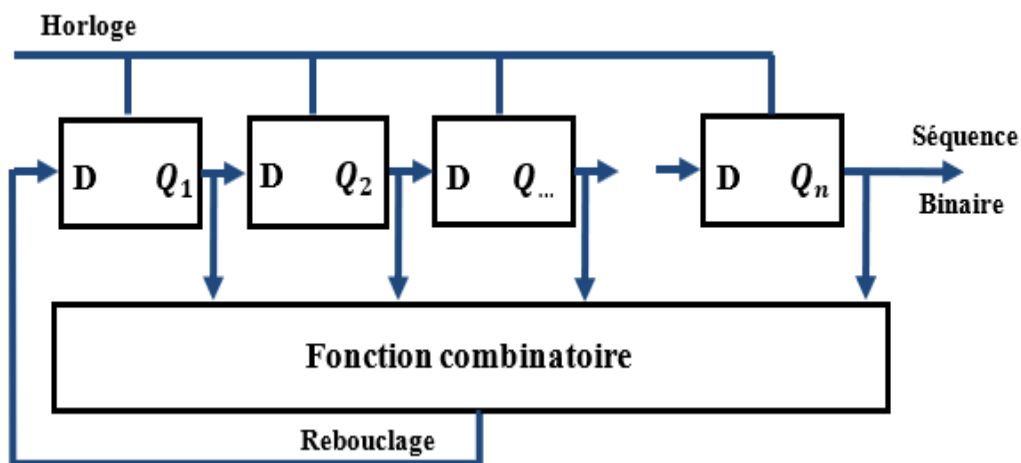


Figure I.6. Registre générateur de séquence SBPA.

Si la fonction de bouclage est bien choisie, le registre peut prendre au mieux toutes les combinaisons possibles des N bits soit  $2^N$  états différents, sauf la combinaison "0 0 0 ...0"

(le registre resterait à une valeur nulle indéfiniment !). Cette structure sert de générateur de mots binaires aléatoires, la séquence étant formée de  $2^N - 1$  valeurs différentes du mot. A partir des  $2^N$  valeurs, il y a répétition de la première valeur ; le générateur "reboucle" sur sa première valeur. La séquence est donc cyclique et se répète tous les  $2^N - 1$  coups d'horloge.

Pour les applications d'identification, on utilise la sortie obtenue par sérialisation (la sortie de n'importe quelle bascule peut servir de sortie série). La sortie du registre binaire présente une succession de "0" et de "1" pseudo-aléatoire. Après translation de niveau et amplification d'un facteur  $a$ , la séquence présente l'allure suivante :

Le signal obtenu est aléatoire (on ne peut prédire la valeur suivante connaissant la valeur courante) et forme une Séquence Binaire Pseudo Aléatoire. Sa longueur maximal est donc  $L = 2^N - 1$  (Dont  $2^{N-1} - 1$  '1' et  $2^{N-1} - 1$  '0'), à partir des  $2^N$  valeurs il y a répétition de la première valeur (périodicité de la SBPA).

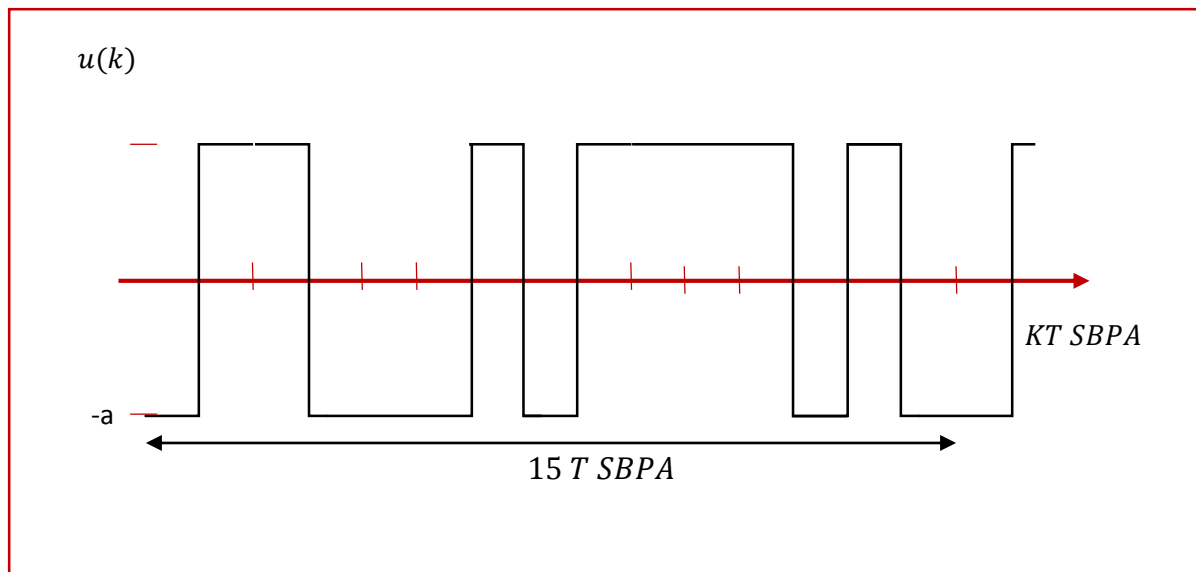


Figure I.7. Diagramme temporel d'une SBPA de période  $15 T_{SBPA}$ .

Parmi les méthodes qui se basent sur l'utilisation des algorithmes pour trouver les paramètres du modèle on a :

### I.3.4 Les moindres carrés récursifs

La méthode recalcule à chaque fois une nouvelle estimation des paramètres  $\hat{\theta}(k)$  sur la base de l'estimation précédente  $\hat{\theta}(k-1)$  sans effectuer à chaque fois l'inversion de matrice.[4,7]

Le critère à minimiser devient :  $J(\theta) = \sum_{i=1}^k (y(i) - \varphi^T(i)\theta)^2$

Nous considérons les mesures jusqu'à l'instant  $kT$

On pose la matrice carrée  $P_k$  de dimension  $P$  (nombre de paramètres) est l'inverse de la matrice d'information.

$$P_k = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) \right]^{-1} \quad (I.2)$$

L'estimation des paramètres peut être écrite sous forme récursive :

$$\hat{\theta}_k = P_k \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i) \right] \quad (I.3)$$

La matrice ( $P_{k+1}^{-1}$ ) est calculée de manière récursive comme suit :

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{-1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)\varphi^T(i) = \sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) + \varphi(k+1)\varphi(k+1)^T \\ &= P_k^{-1} + \varphi(k+1)\varphi(k+1)^T \end{aligned} \quad (I.4)$$

Le vecteur des paramètres à l'instant  $k+1$  peut être écrit sous forme récursive :

$$\hat{\theta}_{k+1} = P_{k+1} \left[ \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)y(i) \right] = P_{k+1} \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i) + \varphi(k+1)y(k+1) \right] \quad (I.5)$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = P_{k+1} [P_{k+1}^{-1} - \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)] \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1)y(k+1) \quad (I.6)$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1) [y(k+1) - \varphi(k+1)^T \hat{\theta}_k] \quad (I.7)$$

Le terme entre crochets correspond à l'erreur de prédiction  $\varepsilon(k+1)$  calculée à partir de  $\hat{\theta}_k$ . Cette erreur est pondérée par le gain  $P_{k+1}\varphi(k+1)$ , ce qui génère une correction de  $\hat{\theta}_k$  proportionnelle à l'erreur de prédiction.

L'algorithme des moindres carrés peut être présenté par les deux équations récurrentes suivantes :

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (I.8)$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1) [y(k+1) - \varphi(k+1)^T \hat{\theta}_k] \quad (I.9)$$

A l'instant  $k+1$ , on mesure  $y(k+1)$  et on construit le vecteur  $\varphi(k+1)$ . Puis, on calcule  $P_{k+1}^{-1}$  à partir de l'équation (I.8) et enfin  $\hat{\theta}_{k+1}$ .

Pour éviter l'inversion de la matrice ( $P_{k+1}^{-1}$ ) à chaque itération, ce qui peut conduire à de gros volumes de calcul rendant l'implémentation en temps réel difficile à réaliser ; on peut utiliser le lemme d'inversion de matrice :

Soient  $A$ ,  $C$  et  $C^{-1} + DA^{-1}B$  des matrices inversibles, alors :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (I.10)$$

La démonstration du lemme se fait en calculant le produit des deux termes de l'équation qui doit être égale à la matrice d'identité.

En Prenant  $A=P_k^{-1}$ ,  $B = \varphi(k+1)$ ,  $C = 1$ ,  $D = \varphi^T(k+1)$  dans l'équation (I.8),

On obtient :

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \varphi(k+1) \varphi^T(k+1) P_k}{1 + \varphi^T(k+1) P_k \varphi(k+1)} \quad (I.11)$$

Comme  $\varphi^T(k+1) P_k \varphi(k+1)$  est un scalaire, le calcul de  $P_{k+1}$  ne nécessite pas l'inversion d'une matrice.

La formulation récursive des moindres carrés peut être :

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \varphi(k+1) \varphi^T(k+1) P_k}{1 + \varphi^T(k+1) P_k \varphi(k+1)} \quad (I.12)$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1) [y(k+1) - \varphi(k+1)^T \hat{\theta}_k] \quad (I.13)$$

#### I.3.4.1 Méthode des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli

Dans un processus industriel, les paramètres du modèle sont souvent variables dans le temps en raison de la présence de perturbations et de non-linéarités. Dans le cas où les paramètres du modèle évoluent lentement, on utilise la méthode récursive des moindres carrés avec un facteur d'oubli.[4]

Dans ce cas, on introduit une pondération qui donne plus de poids aux informations récentes que les mesures passées (diminution du poids des mesures anciennes au profit des plus récentes, d'où le principe de l'oubli du passé). Le critère à minimiser devient, si  $a(k)$  est une séquence de pondérations positives :  $J(\theta) = \sum_{i=1}^k a(k)(y(i) - \varphi^T(i)\theta)^2$

Toutes les erreurs de prédiction ne doivent pas avoir la même importance dans le critère quadratique. Cette pondération permet d'établir un compromis entre la précision de l'estimation des paramètres et la possibilité de suivre les variations de ces paramètres en évitant que la matrice de gain ( $k$ ) soit décroissante.

L'algorithme général permettant de surmonter le problème de la décroissance de la matrice de gain, et d'obtenir différents profils de variation du gain d'adaptation est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(k) = y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1) \\ \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + p(k) \varphi(k) \delta(k) \\ p(k) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[ p(k-1) \frac{p(k-1) \varphi^T(k) p(k-1)}{\frac{\lambda_1(k)}{\lambda_2(k)} + \varphi^T(k) p(k-1) \varphi(k)} \right] \end{array} \right. \quad (I.14)$$



❖ **Moindres carrés récurrents à facteur d'oubli constant :**

Où  $0 < \lambda_1(k) \leq 1$ ,  $0 < \lambda_2(k) < 2$  sont des facteurs introduits pour établir un compromis entre la précision de l'estimation et la capacité de suivi des paramètres.  $\lambda_1(k) < 1$  tend à augmenter le gain d'adaptation tandis que  $\lambda_2(k) > 0$  tend à le diminuer.

$\lambda_1(k) = \lambda_1 = cst < 1$  et  $\lambda_2(k) = 1$ , valeurs typiques pour  $\in [0,95 \ 0,99]$ . Cet algorithme est adapté à l'identification de systèmes à variation lente, mais peut provoquer l'explosion de la matrice  $p(k)$  (si  $p(k) \approx \frac{1}{\lambda_1} p(k-1)$ ;  $\lambda_1 < 1$ ;  $p(k)$  explose.) [4,9]

### I.3.4.2 Les Méthode des moindres carrés récurrents étendus

L'idée est d'appliquer un algorithme des moindres carrés récurrents comme pour un modèle ARX, pour estimer les paramètres d'un modèle affecté d'un bruit corrélé. La méthode permet d'obtenir un estimateur non biaisé de paramètres si les observations sont affectées d'un bruit corrélé avec les mesures.

Soit le modèle ARMAX du procédé :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})C(q^{-1})u(t)e(t) \quad (I.15)$$

$$\bar{v}(k) = C(q^{-1})e(k); \quad C(q^{-1}) \neq 1$$

Le bruit  $\bar{v}(k)$  est généré par un bruit blanc  $e(k)$  à travers un filtre  $C(q^{-1})$ .

La forme de régression est pseudo-linéaire  $y(k) = \varphi^T(k, \theta)\theta + e(k)$ , le prédicteur optimal est

$$y(k|k-1), \theta = \varphi^T(k, \theta)\theta = (C(q^{-1}) - 1)\delta(k, \theta) + (1 - A(q^{-1}))y(t) + q^{-d}B(q^{-1})C(q^{-1})u(t) \quad (I.16)$$

Comme le vecteur de paramètre n'est pas connu, on remplace dans la forme de régression et dans le prédicteur optimal  $\theta$  par  $\hat{\theta}(k-1)$ .

avec les vecteurs de mesures et de paramètres sont augmentés des informations relatives au processus perturbateur :

$$\varphi^T(k, \hat{\theta}(k-1)) = [-y(k-1) \dots -y(k-n_a) (u(k-d) \dots u(k-n_b-d)) \delta(k-1, \hat{\theta}(k-1)) \dots \delta(k-n_c, \hat{\theta}(k-1))] \quad (I.17)$$

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{n_a} \hat{b}_0 \hat{b}_1 \dots \hat{c}_1 \dots \hat{c}_{n_c}]^T$$

Algorithme des moindres carrés récurrent étendus :

$$\|\delta(k) = y(k) - \varphi^T(k, \hat{\theta}(k-1))\hat{\theta}(k-1)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + \frac{P(k-1)k, \hat{\theta}(k-1)\delta(k)}{1 + \varphi^T(k, \hat{\theta}(k-1))P(k-1)\varphi(k, \hat{\theta}(k-1))} \\ \|\|P(k) &= \frac{P(k-1) - P(k-1)\varphi(k, \hat{\theta}(k-1))\varphi^T(k, \hat{\theta}(k-1))P(k-1)}{1 + \varphi^T(k, \hat{\theta}(k-1))P(k-1)\varphi(k, \hat{\theta}(k-1))} \end{aligned}$$

### I.4 Identification en boucle fermée

Ce domaine de l'identification est actuellement très actif. En effet ces modèles sont nécessaires dans le cadre de la commande adaptative et prédictive, rappelons que le plus souvent l'identification en milieu industriel s'effectue sur une machine en production. Il est par conséquent difficile voire impossible d'ouvrir la boucle pour procéder à une identification. C'est particulièrement le cas des systèmes instables. L'identification en boucle fermée est motivée aussi quand un régulateur existe déjà.

Il reste néanmoins possible d'obtenir un modèle. Le système de la figure 1.12 représente le système à identifier en boucle fermée. Le correcteur du système est représenté par la fraction rationnelle  $C_R(q^{-1}) = \frac{P(q^{-1})}{Q(q^{-1})}$

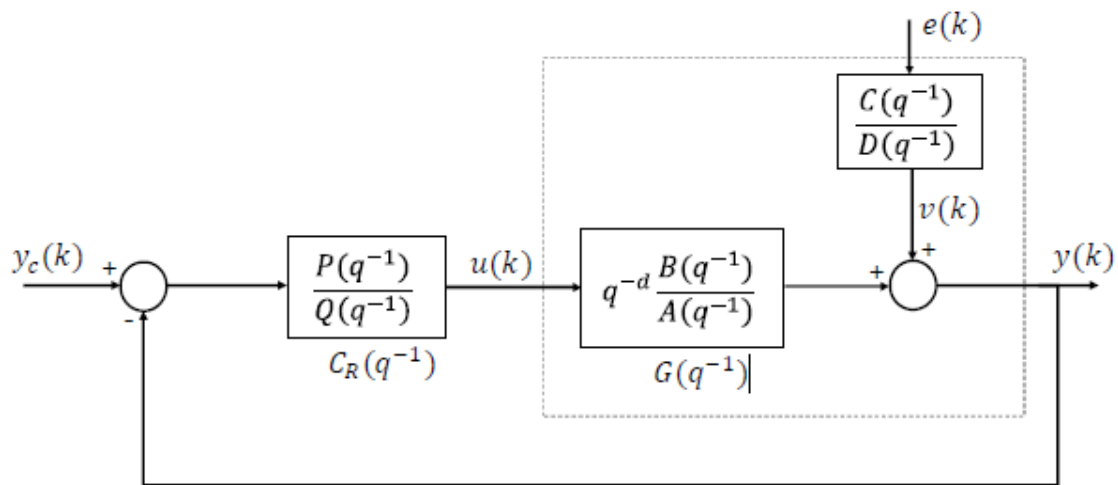


Figure I.8. Identification en boucle fermée.

Trois approches sont alors possibles :

**Méthode directe :** Dans ce cas on utilise l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ . L'identification se fait alors comme en boucle ouverte. L'avantage de cette approche est de ne pas nécessiter la connaissance du régulateur. Les méthodes ARX, ARMAX donnent de bons résultats. Les meilleurs résultats seront obtenus si :

- Le modèle de bruit est bon,

- La boucle de retour n'affecte pas ou peu le spectre du signal d'entrée  $u(k)$ ,
- Le rapport signal/bruit est important (peu de bruit).

Dans le cas contraire, l'estimateur est biaisé.

**Méthode indirecte :** Dans ce cas on utilise la consigne  $y_c(k)$  et la sortie  $y(k)$  On identifie alors le système en boucle fermée soit :

$$M(q^{-1}) = \frac{y(k)}{Y_c(k)} = \frac{C_R(q^{-1})G(q^{-1})}{1 + C_R(q^{-1})G(q^{-1})} = \frac{q^{-d}P(q^{-1})B(q^{-1})}{q^{-d}P(q^{-1})B(q^{-1}) + Q(q^{-1})A(q^{-1})} \quad (I.18)$$

La connaissance du régulateur nous permet de déterminer le modèle du système :

$$G(q^{-1}) = \frac{M(q^{-1})}{C_R(q^{-1}) - M(q^{-1})C_R(q^{-1})} \quad (I.19)$$

L'avantage de cette méthode est que n'importe quelle méthode d'identification est applicable et donnera un modèle du système en boucle fermée. Par contre, la moindre erreur sur le régulateur (pas forcément bien connu, paramètres, saturations ...) se retrouve dans le modèle.

### I.5 Exemple d'application de la méthode des moindres carrés récurrents :

Considérons un système physique stable ayant la fonction de transfert suivante [14] :

$$H(Z) = Z^{-1} \frac{1 + 2Z^{-1}}{1 + 0.3Z^{-1} + 0.8Z^{-2}} \quad (I.20)$$

Avec :  $a_1 = 0.3$     $a_2 = 0.8$     $b_1 = 1$     $b_2 = 2$

En appliquant un signal d'entrée aléatoire de niveaux  $\pm 1$  de taille 100 échantillons avec la présence du bruit sur ce système nous avons obtenu les résultats suivants :

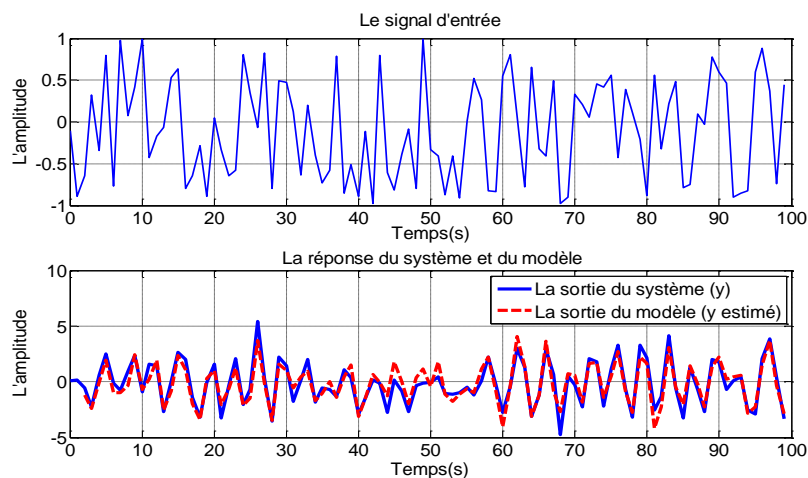


Figure I.9. La sortie de système et celle du modèle obtenu (avec bruit).

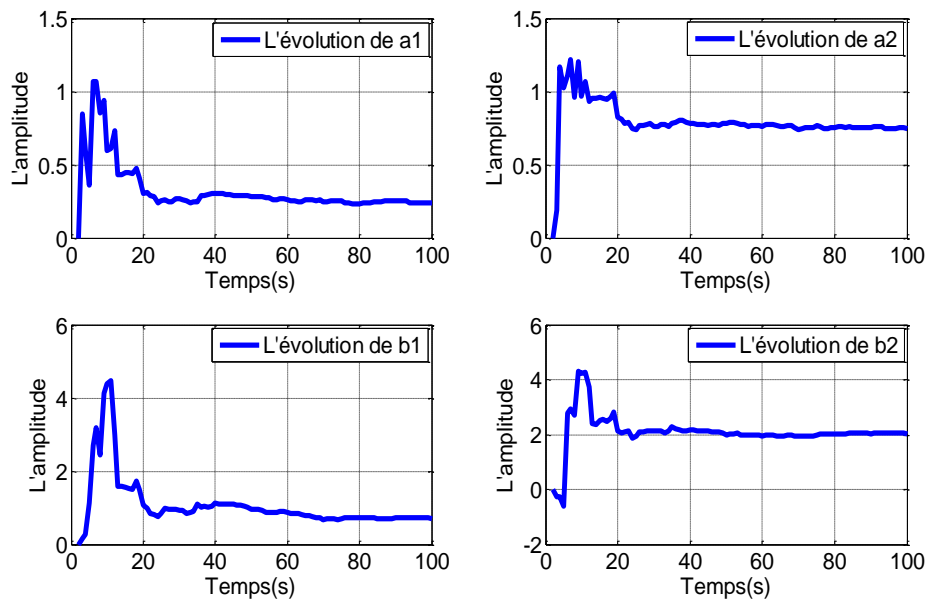


Figure I.10. Evolution des paramètres du système en appliquant un signal d'entrée aléatoire (avec bruit).

$a, b$	$a1$	$a2$	$b1$	$b2$	EQM
$0.2 * \text{randn}(n,1)$	0.3117	0.7974	1.0097	2.0693	0.0397

**Tableau I.1** – Estimation des paramètres en fonction d'une entrée aléatoire (avec bruit).

Lorsque nous avons appliqué un signal d'entrée aléatoire de 100 itérations et avec bruit, nous avons obtenu les résultats de tableau I.3, on remarque que les paramètres sont presque identiques aux paramètres donnés.

### I.6 Conclusion :

Au cours de ce premier chapitre, nous avons vu l'importance de la modélisation et l'identification dans le domaine de l'automatique, nous avons cité les différentes étapes, ainsi que quelques méthodes d'identification, nous avons appliqué l'une de ses méthodes qui est MCR sur un système pour montrer l'utilité de cette dernière.

## **Chapitre II**

### **II. Modélisation d'un pendule inversé**

## II. Modélisation d'un pendule inversé

### II.1 Introduction

Dans la toute première partie de ce chapitre, nous allons commencer par aborder la description générale du pendule inversé et son importance et utilité dans le domaine de l'automatique. Ensuite, nous allons exposer le modèle dynamique qui sera représenté par ensemble d'équations différentielles issues du formalisme d'Euler-Lagrange qui est une approche systématique simple à implémenter, cela sera suivi par une simulation en boucle ouverte de ce système.

### II.2 Présentation du pendule inversé

#### II.2.1 Description de la maquette

L'objectif de la manipulation est de maintenir une tige en état d'équilibre vertical. Cette tige est fixée par une jointure pivotante sur un chariot qui peut se mobiliser en couissant le long d'un rail de roulement horizontal. Le mouvement de rotation d'un moteur électrique est transformé en mouvement de translation du chariot au travers d'un ensemble de deux poulies et d'une courroie crantée. Le mouvement du chariot dans un sens ou dans l'autre entraîne par réaction l'équilibre vertical du bras du pendule. Le but étant de le redresser en position et surtout le maintenir dans cette position. [15]

Le schéma de l'appareil est le suivant :

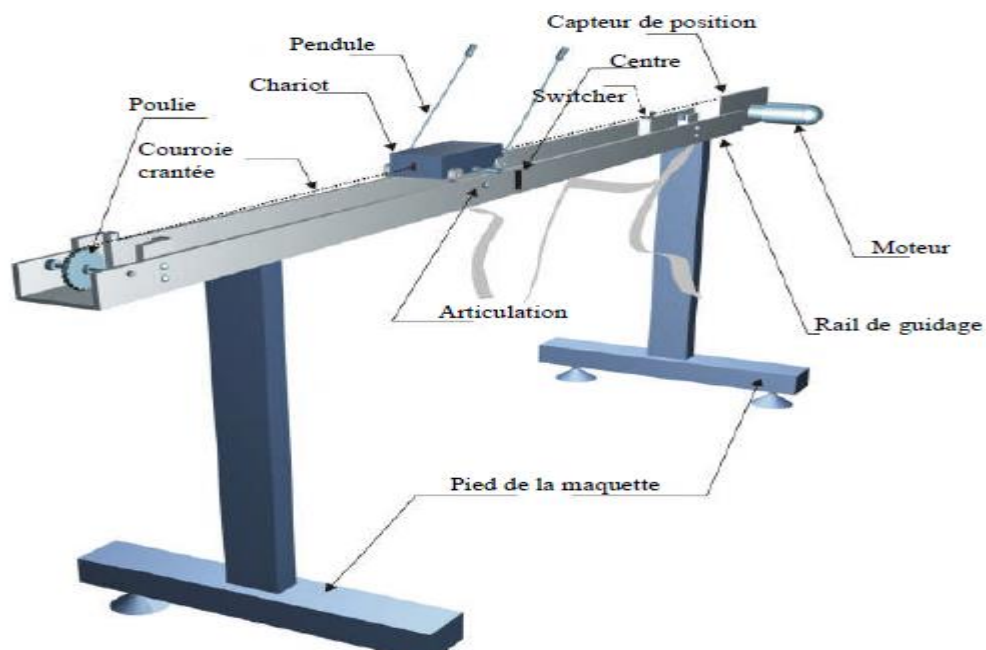


Figure II.1. Synoptique de banc d'essais du pendule inversé.

### II.2.2 Principe de fonctionnement

Le fonctionnement de ce système est très simple théoriquement. Ce système est un système instable sans contrôle, autrement dit, le pendule va tomber simplement si le chariot ne se déplace pas pour l'équilibrer. Le but du système de contrôle est d'équilibrer le pendule inversé en exerçant une force sur le chariot auquel le pendule est attaché. Le pendule est forcé de se déplacer dans le plan vertical illustré, ce qui signifie que lorsque le pendule oscille vers la droite, le chariot doit le rattraper en se déplaçant vers la droite, et vice versa. [15]

### II.3 Les domaines d'applications du pendule inversé

Le pendule inversé est utilisé dans divers domaines. L'application du pendule inversé la plus courante est le SEGWAY. C'est un moyen de transport à deux roues qui permet le déplacement d'une personne. L'utilisateur en se penchant en avant accélère, et lorsqu'il se penche en arrière, le véhicule ralentit.



Figure II.2. Le transporteur humain segway i180 series.

Le pendule inversé est largement étudié dans divers domaines tels que la robotique, l'ingénierie marine, le génie aérospatiale.



Figure II.3. Aérospatiale .

## II.4 Modélisation du système (pendule-chariot) [15,16]

L'ensemble du chariot-pendule possède deux degrés de liberté dont les coordonnées généralisées sont respectivement :  $x$  pour le déplacement horizontal du chariot et  $\theta$  pour la rotation du pendule.

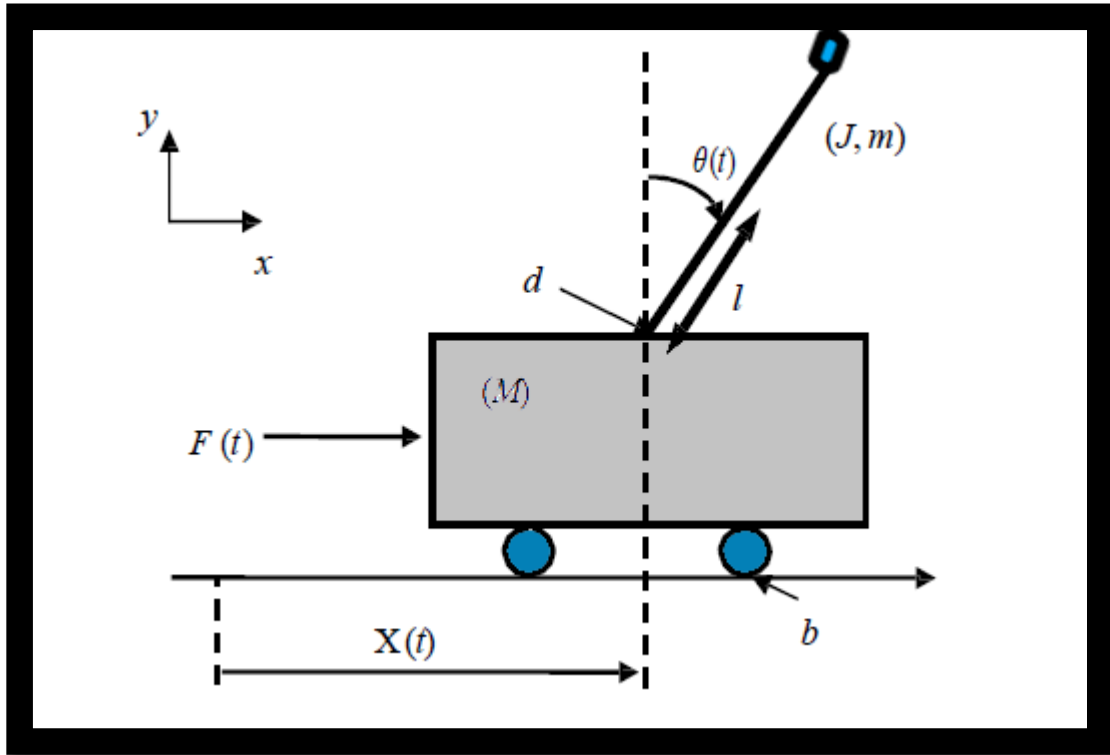


Figure II.4. Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé.

- $m$  : Masse du pendule ;
- $M$  : Masse du chariot ;
- $l$  : Demi longueur du pendule ;
- $b$  : Frottements de déplacement du chariot ;
- $d$  : Frottements du pendule ;
- $F(t)$  : Force exercée sur le chariot ;
- $x(t)$  : Position du chariot
- $\theta(t)$  : L'angle du pendule

Pour la modélisation nous allons utiliser la méthode de formalisme d'Euler-Lagrange, qui est la différence entre l'énergie cinétique ( $E_c$ ) et l'énergie potentielle ( $E_p$ ).

$$L = E_c - E_p. \quad (\text{II.1})$$



### II.4.1 L'énergie cinétique du « chariot -pendule

L'énergie cinétique du chariot est exprimée par l'équation :

$$E_{cM} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2, \quad (\text{II.2})$$

$\dot{x}$  : La vitesse du chariot

L'énergie cinétique du pendule  $E_{cm}$  est exprimée par l'équation :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2, \quad (\text{II.3})$$

$\dot{\theta}$  : La vitesse angulaire du pendule

$J$  : Le moment d'inertie du pendule.

$V_C$  : La vitesse du centre de gravité du pendule

L'énergie cinétique du « pendule chariot »

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2. \quad (\text{II.4})$$

- L'équation qui exprime la position du chariot est :

$$x_c = (x + l \sin \theta) i + (l \cos \theta) j. \quad (\text{II.5})$$

- La vitesse du centre de gravité de pendule est exprimée par :

$$V_c = \frac{dx_c}{dt} = (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta) i - (l \dot{\theta} \sin \theta) j. \quad (\text{II.6})$$

En substituant (II.6) dans (II.3) et on obtient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m [(\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta) i - (l \dot{\theta} \sin \theta) j]^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2. \quad (\text{II.7})$$

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2. \quad (\text{II.8})$$

On simplifie le terme  $l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 + \sin^2) = l^2 \dot{\theta}^2$

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2. \quad (\text{II.9})$$

En substituant (II.9) dans (II.4), L'énergie cinétique totale  $E_c$  est enfin exprimée par :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2. \quad (\text{II.10})$$

### II.4.2 L'énergie potentielle du « pendule-chariot »

Pour l'ensemble pendule chariot, seul le pendule possède une énergie potentielle  $E_p$  caractérisant le centre de gravité du pendule, si on néglige la masse de la barre

$$E_p = mgl \cos \theta. \quad (\text{II.11})$$

**II.4.3 L'équation  $L$  de Lagrange :**

$$L = E_c - E_p,$$

En substituant (II. 10) et (II. 11) dans (II. 1), on obtient :

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta. \quad (II. 12)$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\varepsilon}} = F, \quad (II. 13)$$

avec :  $\varepsilon(t)$  : Le degré de liberté ;

$F$  : La force généralisée ;

$D_f$  : L'énergie dissipée par le frottement ;

$L$  : Lagrangien.

L'équation de lagrangien pour le pendule inversé :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = F, \quad (II. 14)$$

L'équation du Lagrangien pour le degré de liberté  $\varepsilon(t) = x(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b\dot{x}, \quad (II. 15)$$

La dérivée partielle du Lagrangien suivant  $\dot{x}$  et  $t$  :

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta}) - 0 = F - b\dot{x}. \quad (II. 16)$$

Ce qui nous donne :

$$(M + m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta) + b\dot{x} = F. \quad (II. 17)$$

L'équation du Lagrangien pour le degré de liberté  $\varepsilon(t) = \theta(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta}. \quad (II. 18)$$

La dérivée partielle du lagrangien  $\dot{\theta}$  et  $t$  :

$$\frac{d}{dt} (ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mglsin\theta) = -d\dot{\theta}. \quad (II. 19)$$

La deuxième équation de Lagrange est :

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + ml\dot{x}\sin\theta\dot{\theta} - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mglsin\theta + d\dot{\theta} = 0. \quad (II. 20)$$

Le modèle de connaissance du système « pendule-chariot » est donné par :

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + b\dot{x} = F; \\ (ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mglsin\theta + d\dot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (II. 21)$$

On constate qu'il y a une dépendance entre l'accélération du chariot  $\ddot{x}$  et l'accélération angulaire du pendule  $\ddot{\theta}$ , et lorsque  $F = 0$  et on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il sera soumis à sa propre inertie, il se mettrait à osciller et le pendule commencerai à se mouvoir puisque il est fixé au chariot.

D'après les équations (II.21) on tire  $\ddot{x}$  et  $\ddot{\theta}$  et on aura les expressions suivantes :

$$\ddot{x} = \frac{F - ml(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta} \cos\theta) - b\dot{x}}{M + m}. \quad (II.22)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2ml^2} (mgl \sin\theta + ml\ddot{x} \cos\theta - d\dot{\theta}). \quad (II.23)$$

## II.5 Linéarisation du modèle autour des points d'équilibre [15,16]

La linéarisation du modèle nous permet d'étudier le comportement local du système autour d'un point d'équilibre choisi, on va linéariser les équations (II.21)

Le système à deux points d'équilibre :

- $\theta = 0$  point d'équilibre instable ;
- et  $\theta = \pi$  point d'équilibre stable.

Pour des petites variations de  $\theta$  autour du point d'équilibre  $\theta_0$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \varepsilon; \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon}. \end{cases} \quad (II.24)$$

Le développement en série de Taylor du premier ordre d'une fonction de  $\theta$  est donné par :

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \varepsilon \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_0}, \quad (II.25)$$

Et les termes du haut ordre sont négligés

$$\varepsilon \approx 0.$$

### II.5.1 Position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ )

Pour ( $\theta = \pi$ ), le développement limite du premier ordre des équations (II.24) et (I.25) est :

$$\begin{cases} \cos(\theta) \approx \cos \pi + (\pi - \theta)(-\sin(\pi)) = -1; \\ \sin(\theta) \approx \sin \pi + (\pi - \theta)\cos(\pi) = -\theta; \\ \dot{\theta}^2 = 0. \end{cases} \quad (II.26)$$

En substituant ces linéarisations dans le système d'équations (II.21) et en négligeant les termes du haut ordre, on trouve le système d'équation linéarisé suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\theta} = F; \\ (ml^2 + J)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - ml\ddot{x} + mgl\theta = 0. \end{cases} \quad (II.27)$$

En appliquant la transformée de Laplace sur le système d'équation linéarisé ci-dessus, on trouve :

$$\begin{cases} (M + m) s^2 x(s) + b s x(s) - m l s^2 \theta(s) = F(s); \\ (m l^2 + J) s^2 \theta(s) + d s \theta(s) - m l s^2 x(s) + m g l \theta(s) = 0. \end{cases} \quad (II.28)$$

Ou :  $X(s) = L(x(t))$  et  $\theta(s) = L(\theta(t))$

En substituant pour éliminer  $x(s)$  ou  $\theta(s)$  dans (II.28), on trouve les deux fonctions de transfert suivante :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s} \quad (II.29)$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{c_1 s}{b_4 s^3 + b_3 s^2 + b_2 s + b_1} \quad (II.30)$$

Avec :

- $a_0 = m g l$ ;
- $a_1 = d$ ;
- $a_2 = m l^2 + J$ ;
- $b_1 = m g l b$ ;
- $b_2 = (M + m) m g l + d b$ ;
- $b_3 = (M + m) d + (m l^2 + J) b$ ;
- $b_4 = (M + m) (m l^2 + J) - m^2 l^2$ ;
- $c_1 = ml$ ;

Les fonctions de transfert respectivement de la position du chariot et de la rotation du pendule sont :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(ml^2 + J)s^2 + ds - mgl}{((M + m)(ml^2 + J) - m^2 l^2)s^4 + ((M + m)d + (ml^2 + J)b)s^3 + (-(M + m)mgl + db)s^2 - mglb s}$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-mls}{((M + m)(ml^2 + J) - m^2 l^2)s^3 + ((M + m)d + (ml^2 + J)b)s^2 + (-(M + m)mgl + db)s - mglb}$$

### II.5.2 Position d'équilibre instable ( $\theta = 0$ )

Si on se limite aux petites variations de  $\theta$  autour du point de fonctionnement  $\theta_0 = 0$  correspondant à la position verticale de la barre. Pour ( $\theta = 0$ ), le développement limite du premier ordre des équations (II.24) et (II.25) est :

$$\begin{cases} \cos \theta \approx \cos(0) + \theta (-\sin(0)) = 1; \\ \sin \theta \approx \sin(0) + \theta (\cos(0)) = \theta; \\ \dot{\theta}^2 = 0. \end{cases} \quad (II.31)$$

En substituant ces linéarisations dans le système d'équation (II.21) et en négligeant les termes du haut ordre, on trouve le système d'équation linéarisé suivant :

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + b\dot{x} = F; \\ (ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} - mgl\theta + d\dot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (II.32)$$

En appliquant la transformée de Laplace sur le système d'équation linéarisé ci-dessus, on trouve :

$$\begin{cases} (m + M)s^2X(s) + mls^2\theta(s) + b_sX(s) = F(s); \\ (ml^2 + J)s^2\theta(s) + mls^2X(s) - mgl\theta(s) + ds\theta(s) = 0. \end{cases} \quad (II.33)$$

où :  $X(s) = L(x(t))$  et  $\theta(s) = L(\theta(t))$

En substituant pour éliminer  $X(s)$  ou  $\theta(s)$  dans (II.33), on trouve les deux fonctions de transfert suivantes :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s}. \quad (II.34)$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{c_2s}{b_4s^3 + b_3s^2 + b_2s + b_1}. \quad (II.35)$$

avec :

- $a_0 = -m g l$ ;
- $a_1 = d$ ;
- $a_2 = m l^2 + J$ ;
- $b_1 = -m g l b$ ;
- $b_2 = -(M + m) m g l + d b$ ;
- $b_3 = (M + m) d + (m l^2 + J) b$ ;
- $b_4 = (M + m) (m l^2 + J) - m^2 l^2$ ;
- $c_2 = -m l$ .

Les fonctions de transfert respectivement de la position du chariot et de la rotation du pendule sont :

$$G_1(s) = \frac{(ml^2 + J)s^2 + ds \pm mgl}{((M+m)(ml^2 + J) - m^2l^2)s^4 + [(M+m)d + (ml^2 + J)b]s^3 + [-(M+m)mgl + db]s^2 + mglbs}. \quad (II.36)$$

$$G_2(s) = \frac{-mls}{[(M+m)(ml^2 + J) - m^2l^2]s^3 + [(M+m)d + (ml^2 + J)b]s^2 + [-(M+m)mgl + db]s + mglb}. \quad (II.37)$$

## II.6 Modèle d'état de l'ensemble chariot pendule

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule, on utilise une nouvelle fois le modèle (II.21). Le vecteur d'état est :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$$

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (I.36) ou la grandeur de commande est la force  $F$  [20][21].

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bN}{D}x_2 - \frac{m^2l^2g}{D}\cos(x_3)\sin(x_3) + \frac{mld}{D}\cos x_3 x_4 + \frac{mlN}{D}\sin x_3 x_4^2 + \frac{FN}{D} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{mgl}{N}\sin x_3 - \frac{d}{N}x_4 + \frac{mlb}{D}\cos x_3 x_2 + \frac{m^3l^3g\cos^2 x_3 \sin x_3}{ND} - \frac{m^2l^2d\cos^2 x_3}{ND}x_4 - \frac{m^2l^2\cos x_3 \sin x_3}{D}x_4^2 - \frac{mlF}{D}\cos x_3 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{array} \right. \quad (II.38)$$

avec :

$$h = M+m ; \quad N = ml^2 + J ; \quad D = hN - m^2l^2\cos^2 x.$$

## II.7 Linéarisation du modèle d'état autour du point d'équilibre instable [15,16]

Comme les résultats précédant l'on décrit, le pendule en position inversé ( $\theta = 0$ ) revient toujours à sa position stable ( $\theta = \pi$ ), et comme l'objectif de la commande de notre système est d'asservir la position du chariot  $x$  et l'angle  $\theta$  à zéro, on conclue qu'une linéarisation autour du point d'équilibre instable ( $\theta = 0$ ) doit être établie.

On a déjà utilisé la linéarisation du système {II.5.2} pour obtenir la fonction de transfert (II.36) du système en position instable, donc on va utiliser la même approche pour linéariser la représentation d'état du système qui est traduit par (II.38).

Donc en tenant compte de {II.5.2} et l'équation (II.31) on obtient le modèle linéariser du système chariot-moteur-pendule suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bN}{D} x_2 - \frac{m^2 l^2 g}{D} x_3 + \frac{mld}{D} x_4 + \frac{FN}{D} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{mgl}{N} x_3 - \frac{d}{N} x_4 + \frac{mlb}{D} x_2 + \frac{m^3 l^3 g}{ND} x_3 - \frac{m^2 l^2 d}{ND} x_4 - \frac{m^2 l^2}{D} x_4 - \frac{mlF}{D} \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{array} \right. \quad (II.39)$$

A partir du modèle (II.39) on obtient le système matriciel suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{D} & -\frac{m^2 l^2 g}{D} & \frac{mld}{D} x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{D} & \frac{m^3 l^3 g}{ND} + \frac{mgl}{N} & -\frac{m^2 l^2 d}{ND} - \frac{d}{N} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{N}{D} & 0 & -\frac{ml}{D} \end{bmatrix} \quad (II.40)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### II.8 Simulation du système en boucle ouverte [16]

Dans cette partie nous allons simuler le modèle du système en boucle ouverte à l'aide de MATLAB. L'ensemble des paramètres pendule-chariot sont résumé dans le tableau suivant :

Paramètres	Description	Valeurs
$M$	Masse du chariot	2.3 Kg
$d$	Coefficient de frottement de la rotation de pendule	0.005 Nms/rad
$m$	Masse du pendule	0.2 Kg
$b$	Coefficient de frottement du chariot	0.00005 Ns.m
$l$	Demi-longueur du pendule	0.3 m
$J$	Moment d'inertie de masse de pendule	0.006kg.m <sup>2</sup>
$g$	intensité de pesanteur (gravité)	9.81 m/s <sup>2</sup> ,
$F(t)$	Force appliquée au chariot	//
$x(t)$	Position de chariot	//
$\theta(t)$	Angle du pendule par rapport à la verticale	//

**Tableau II.2-** Les paramètres du système chariot-pendule.

### II.8.1 Simulation du système en boucle ouverte dans sa représentation non-linéaire

Dans cette première partie de la simulation, on considère le système dans sa représentation non linéaire. Les conditions initiales seront très proches de la position d'équilibre souhaité (pendule verticale vers le haut) :  $\theta(0) = 0$ ;  $x(0) = 0$ ;  $\dot{\theta} = 0$ , et  $\dot{x} = 0$ .

Afin de tracer la réponse du système a un échelon  $u = 0.05$ , on va utiliser les  $\ddot{\theta}$  et  $\ddot{x}$ .

La figure suivante montre les résultats de la réponse du système

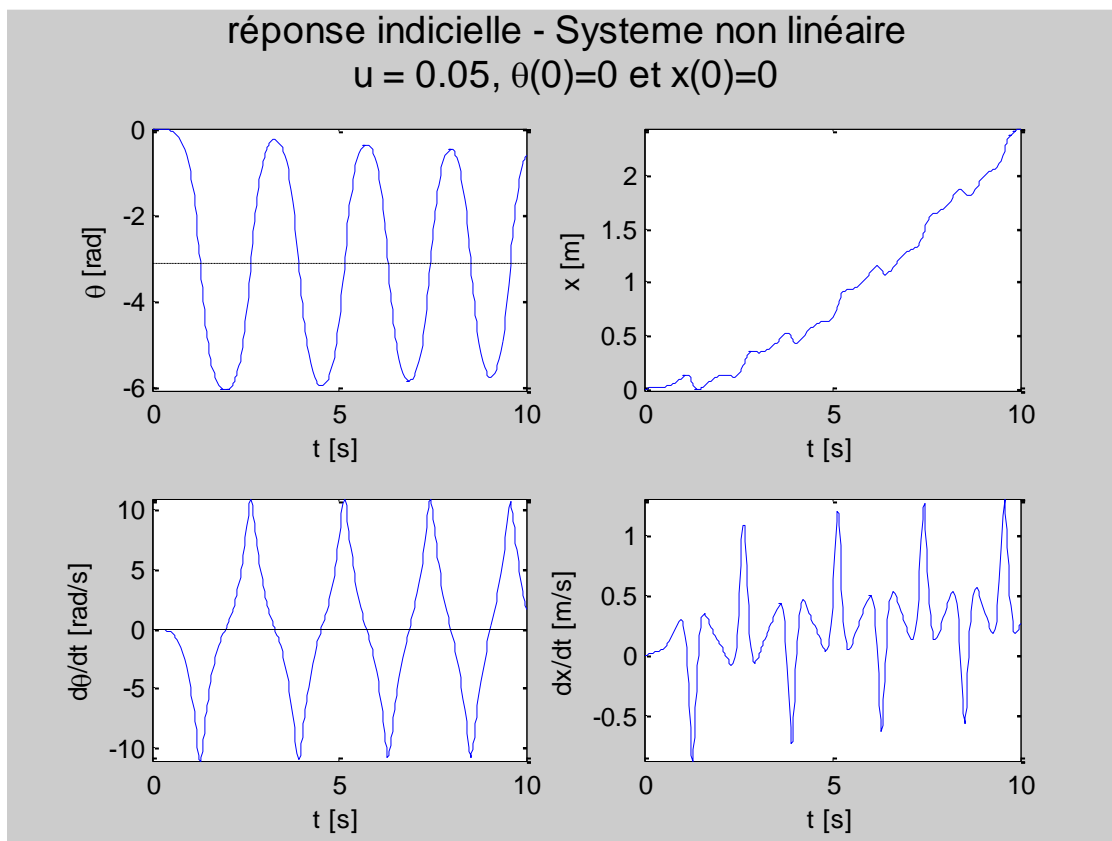


Figure II.5. La réponse du système a un échelon  $u = 0.05$  dans sa représentation non linéaire.



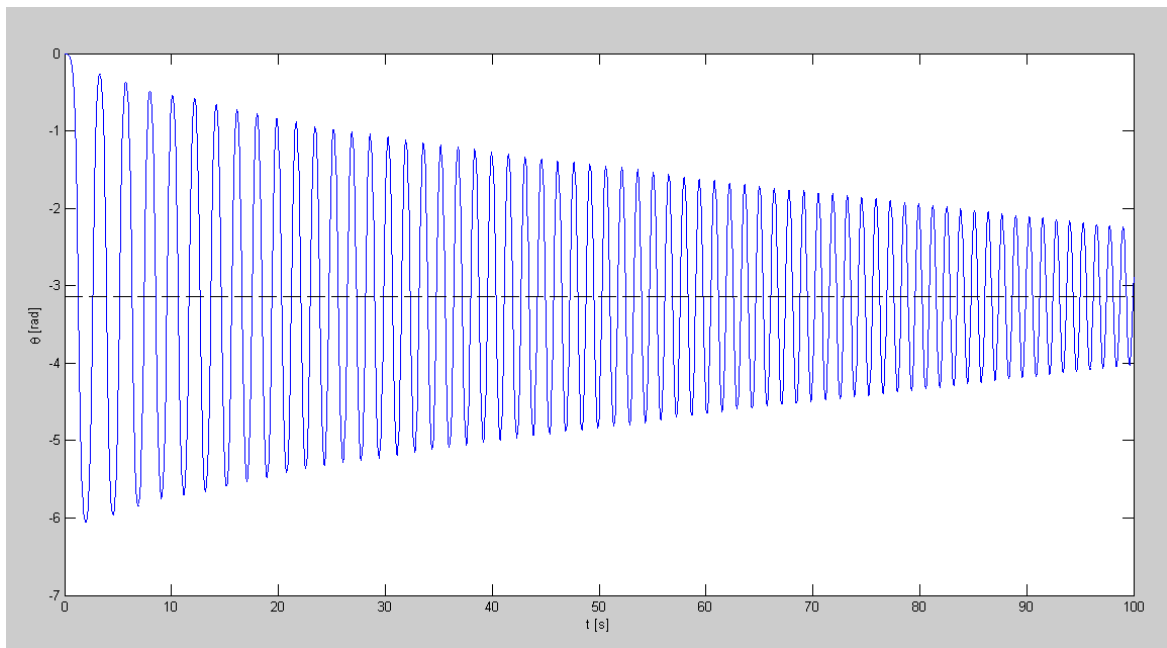


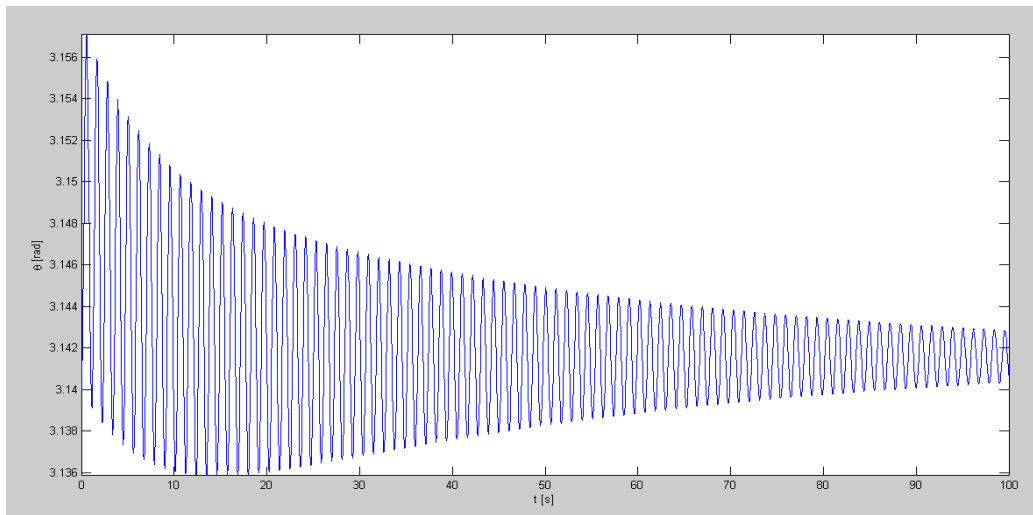
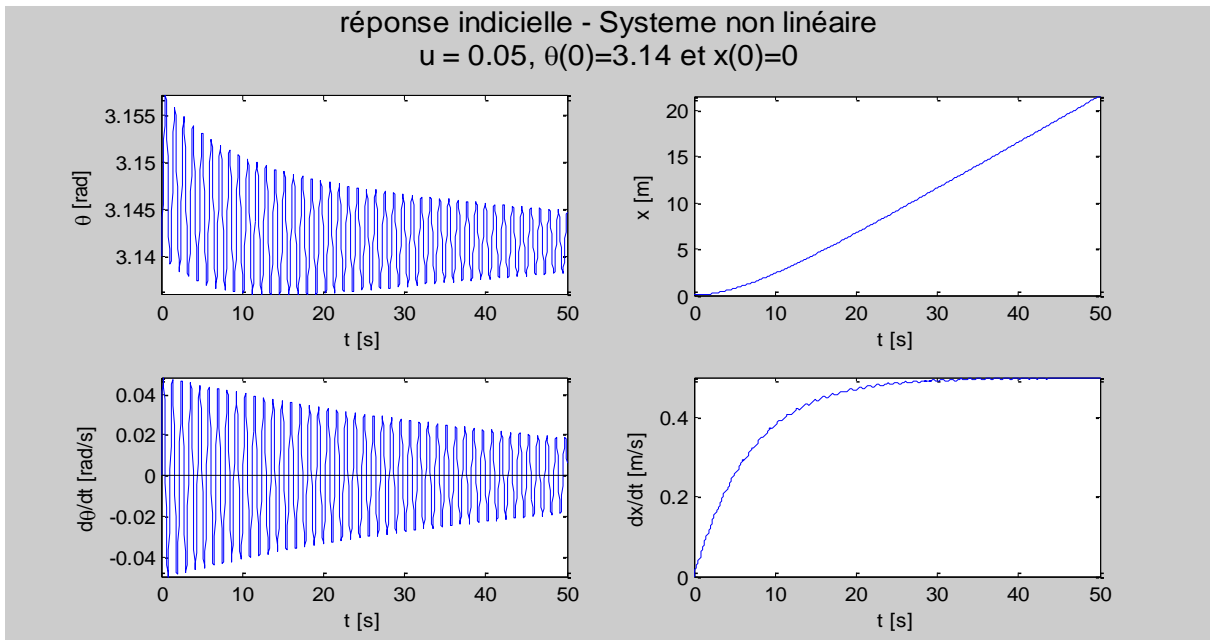
Figure II.6. Meilleure vue de l'angle du pendule.

On remarque que le pendule fait des oscillations sur son axe de rotation dans le sens négative (sens trigonométrique) lorsqu'il est à gauche du point d'équilibre ( $\theta=0$ ), jusqu'à ce point d'équilibre sans le dépasser, puis dans le sens positive en décrivant un cercle presque fermé; et ceci de façon périodique.

Ce sens d'oscillation de départ est prévisible puisqu'il est en sens inverse par rapport au mouvement du chariot en partant d'une position parfaitement verticale du pendule ( $\theta=0$ )

D'autre part, et à cause d'une force de commande (échelon «  $u$  ») constante appliquée sur le chariot, son déplacement est continue, mais sa vitesse varie en fonction de la position du pendule.

Pour un angle initiale «  $\theta(0)=\pi$  », on obtient la réponse illustrée à travers la figure suivante :



Figures II.7. La réponse à un échelon «  $u = 0.05$  » du système non linéaire avec  $\theta(0) = \pi$ .

On constate que le pendule fait des oscillations entretenues au tour de l'angle initiale «  $\theta(0) = \pi$  » après 50 secondes.

### II.8.2 Simulation du système en boucle ouverte dans sa représentation linéaire

Dans cette deuxième partie de la simulation, on considère le système dans sa représentation linéaire. La simulation de la réponse du système est obtenue en utilisant la représentation d'état linéarisé. Avec les conditions initiales suivantes :  $\theta(0) = 0$ ;  $u = 0.05$ ; et  $x(0) = 0$ .

Les résultats d'excitation du système linéarisé par un échelon sont illustrés à travers la figure suivante :

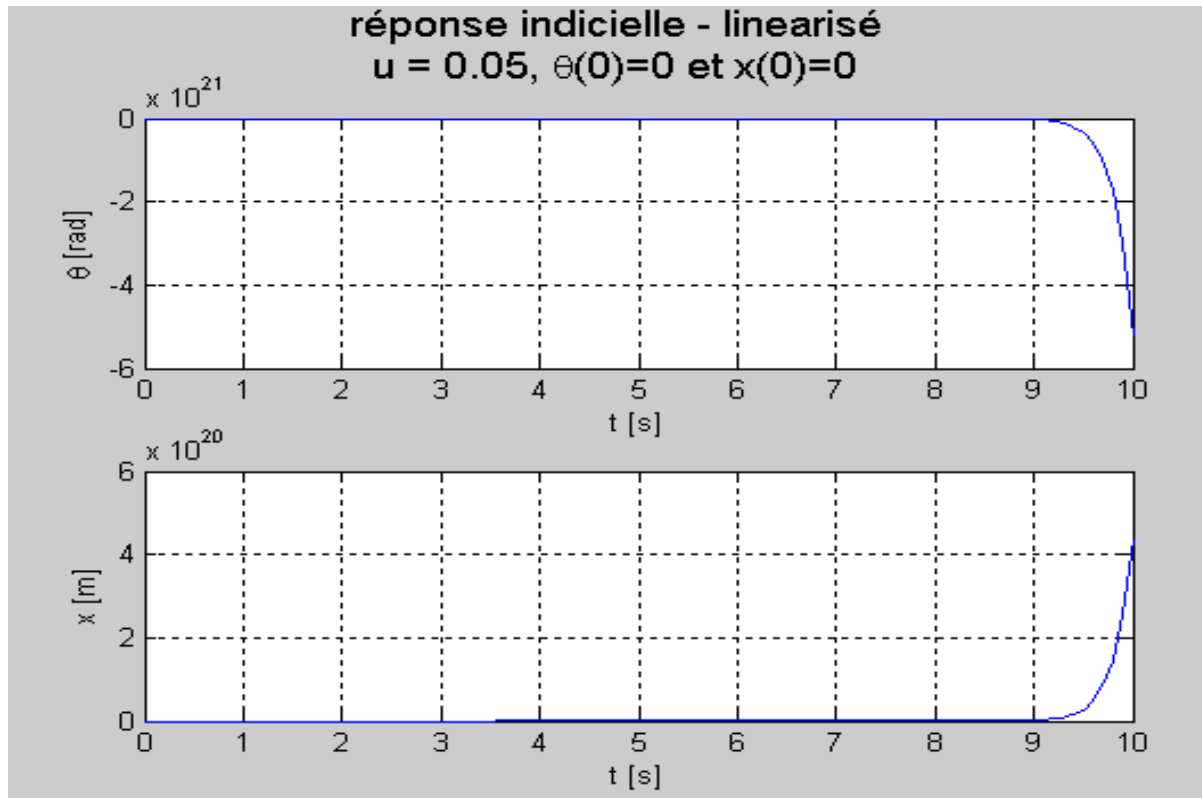


Figure II.8. La réponse du système a un échelon «  $u = 0.05$  » dans sa représentation linéarisée.

On voit que l'angle «  $\theta$  » du pendule augmente de façon exponentielle dans le sens négative de rotation. Ceci montre que le système est instable pour le point de fonctionnement souhaité, et qui est la position verticale vers le haut du pendule ( $\theta=0$ ).

D'autre part, le déplacement est continu, mais avec une vitesse «  $\dot{x}$  » qui est aussi exponentielle. L'aspect exponentiel de l'angle «  $\theta$  » peut être expliqué par le fait que le système ne respecte pas les suppositions de linéarisation, puisque le pendule tend à rejoindre l'équilibre naturel ( $\theta = \pi$ ).

## II.9 Conclusion

Dans ce travail, on a été amené à modéliser le système du pendule inversé sur un chariot. Le modèle non-linéaire a permis de réaliser des simulations de la réponse indicielle de ce système, et a donnée des résultats prouvant l'instabilité du système en boucle ouverte.

Avec la linéarisation du système autour des points d'équilibre «  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  » souhaité, On a obtenu des résultats prouvant que le système est instable dans ce point de fonctionnement.

## Chapitre III

### **III. *Application de la méthode Aliénor sur pendule inversé***

### III. Application de la méthode Aliénor sur le pendule inversé

#### III.1 Introduction

L'optimisation est une branche de mathématiques, qui vise à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement des problèmes d'optimisation. Un problème d'optimisation consiste étant donné une fonction réelle  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  à trouver son minimum (resp. son maximum)  $v$  dans  $\mathbb{R}$  et un point  $x^* \in X$  qui réalise ce minimum (resp. ce maximum) c-à-d :  $v = f(x^*)$

On appelle :

- $f$  : La fonction objective ;
- $v$  : La valeur optimale ;
- $x$  : la variable de décision ;
- $x^*$  : La solution optimale ;

Formellement le problème d'optimisation s'écrit :  $\min_{x \in X} f(x)$  (resp.  $\max_{x \in X} f(x)$ ).

Pour résoudre un problème d'optimisation, il est important de bien identifier à quelle catégorie ce problème appartient. En effet, les algorithmes développés sont conçus pour résoudre un type de problème donné et sont souvent peu efficaces pour un type différent.

Plusieurs méthodes d'optimisation numériques existent, dans ce chapitre nous allons voir certaines applications de la méthode d'Aliénor, à l'identification les deux systèmes dynamiques discrets et sur le pendule inversé (modèle continue discrétisé). [17]

#### III.2 Description de la méthode d'Aliénor [17,18]

La méthode d'optimisation globale d'Aliénor représente un outil mathématique intéressant permettant de ramener le problème d'optimisation d'une fonction à plusieurs variables en problème d'optimisation d'une autre fonction à une seule variable (approcher l'espace  $\mathbb{R}^n$  par  $\mathbb{R}$ ), tout en utilisant des transformations réductrices.

Les inventeurs de cette méthode proposent une première transformation réductrice en utilisant la spirale d'Archimède.

Soit le point  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , les coordonnées polaires de ce point s'écrivent suit :

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\varphi); \\ x_2 = r \sin(\varphi). \end{cases}$$

Les deux paramètres  $r$  et  $\theta$  sont reliés par la spirale d'Archimède :

$$r = \alpha \varphi,$$

Tel que :

- $\alpha \geq 0$  ;
- $\alpha$  Paramètre fixe tend vers zéro

On obtient alors :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \varphi \cos(\varphi); \\ x_2 = \alpha \varphi \sin(\varphi). \end{cases}$$

Par conséquent, elles permettent d'exprimer  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de la variable unique  $\varphi$ .

Si on possède à optimiser une fonction à trois variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , on relie d'abord  $x_1$  et  $x_2$  à l'aide d'une spirale d'angle  $\varphi_1$  :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \varphi_1 \cos(\varphi_1); \\ x_2 = \alpha \varphi_1 \sin(\varphi_1). \end{cases}$$

Puis, en relie de la même façon la nouvelle variable  $\varphi_1$  et la troisième variable  $x_3$  à l'aide d'une spirale d'Archimède d'angle  $\varphi$  :

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha \varphi \cos(\varphi); \\ x_3 = \alpha \varphi \sin(\varphi). \end{cases}$$

En substituant  $\varphi_{11}$  par son expression on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha^2 \varphi \cos(\varphi) \cos(\alpha \varphi \cos(\varphi)) = \mathbf{h_1(\varphi)}; \\ x_2 = \alpha^2 \varphi \cos(\varphi) \sin(\alpha \varphi \cos(\varphi)) = \mathbf{h_2(\varphi)}; \\ x_3 = \alpha \varphi \sin(\varphi) = \mathbf{h_3(\varphi)}. \end{cases}$$

Pour le cas d'optimisation d'une fonction à  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la généralisation se fait en reliant les variables deux à deux par des spirales d'angle  $\varphi : x_i = h_i(\varphi), (i = 1, \dots, n)$ . Les fonctions  $h_i(\varphi)$  sont de classe infinie et sont appelées transformations réductrices.

Avec la spirale d'Archimède les fonctions  $h_i(\varphi)$ ,  $i = 1, \dots, n$  s'obtiennent après plusieurs étapes, ce fait augmente le temps d'évaluation de la fonction à optimiser. En réponse à cet inconvénient de cette transformation réductrice, plusieurs transformations réductrices ont été proposées :

- Transformation de Mora et Cherruault
- Transformation de Cherruault
- Transformation de Konfé

Les transformations de Mora et Cherruault, de Cherruault, et de Konfé permettent d'obtenir la fonction à une seule variable à optimiser en une seule étape. Cette caractéristique permet de réduire davantage le temps de calcul de l'optimum.

Dans la suite de ce chapitre nous allons focaliser sur la transformation réductrice de Konfé, qui est réputée par sa précision et sa simplicité comparativement aux autres transformations.

La transformation de Konfé exige est définie par

$$x_i = \beta_i \cos(\omega_i \varphi + \psi_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

Avec :

- Les  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des réels et croissants ;
- Les  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des réels croissants et proche les uns des autres.
- Les  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des réels;

### III.3 Applications de la méthode d'Aliénor à l'identification des systèmes discrets [19]

Dans cette section, nous allons présenter deux applications de la méthode d'Aliénor, pour l'identification paramétrique de deux modèles dynamiques discrets. Ces applications ont été réalisées dans le cadre du projet de Master.

La présentation de ces deux applications a comme objectif d'illustrer aux lectures le mécanisme de fonctionnement d'application de la méthode d'Aliénor à l'identification des systèmes.



### III.3.1 Application 1

Le modèle du système linéaire est donné comme suit :

$$y(k) = -a \cdot y(k-1) - b \cdot y(k-2) + c \cdot u(k).$$

L'objectif est d'identifier les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  en transformons le problème d'identification en un problème d'optimisation puis le résoudre l'aide de la méthode d'Aliénor.

Pour générer les mesures, les auteurs ont fixé d'abord les valeurs des paramètres du modèle ( $a = -0.4232$  ;  $b = 0.5390$  ;  $c = 0.3456$ .) et ont choisi un horizon de temps déterminé pour faire la simulation ( $T = 38$  s), par la suite ils ont récupéré les trente-huit valeurs de simulations

Pour leur simulation le binôme d'étudiants, ont appliqué un échelon  $u=1$  comme entrée, considérée suffisante pour l'excitation du système,  $y(1) = y(2) = 1$ .

A l'aide de la transformation du Konfé, on aura un vecteur  $A$  qui s'écrit de la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\cos(5000\alpha) + 1) \\ 2(\cos(5001\alpha) + 1.00005) \\ 2(\cos(5002\alpha) + 1.0001) \end{bmatrix}$$

Cette transformation va nous permettre de passer d'une fonction de plusieurs variables à une fonction d'une seule variable de décision. Le problème d'optimisation à minimiser est donc le suivant :

$$(P_1): \min_{\alpha} \sum_{k=2}^{38} (y(k) - y_{\alpha}(k))^2,$$

avec :  $y_{\alpha} = -2(\cos(5000\alpha) + 1) \cdot y(k-1) - 2(\cos(5001\alpha) + 1.00005) y(k-2) + 2(\cos(5002\alpha) + 1.0001) u(k)$ .

La résolution du problème ( $P_1$ ) conduit à l'optimum global de valeur :

$$\alpha^* = 6.1991$$

En remplaçant  $\alpha^*$  dans le vecteur  $A$  obtenu par la transformation de Konfé on obtient les paramètres optimaux du modèle:

- $a^* = -1.4069$  ;
- $b^* = 0.5541$  ;
- $c^* = 0.4342$  ;

La valeur optimale de la fonction objectif du problème ( $P_1$ ) est 0.1307.

La figure suivante montre les deux systèmes mesuré et prédit:

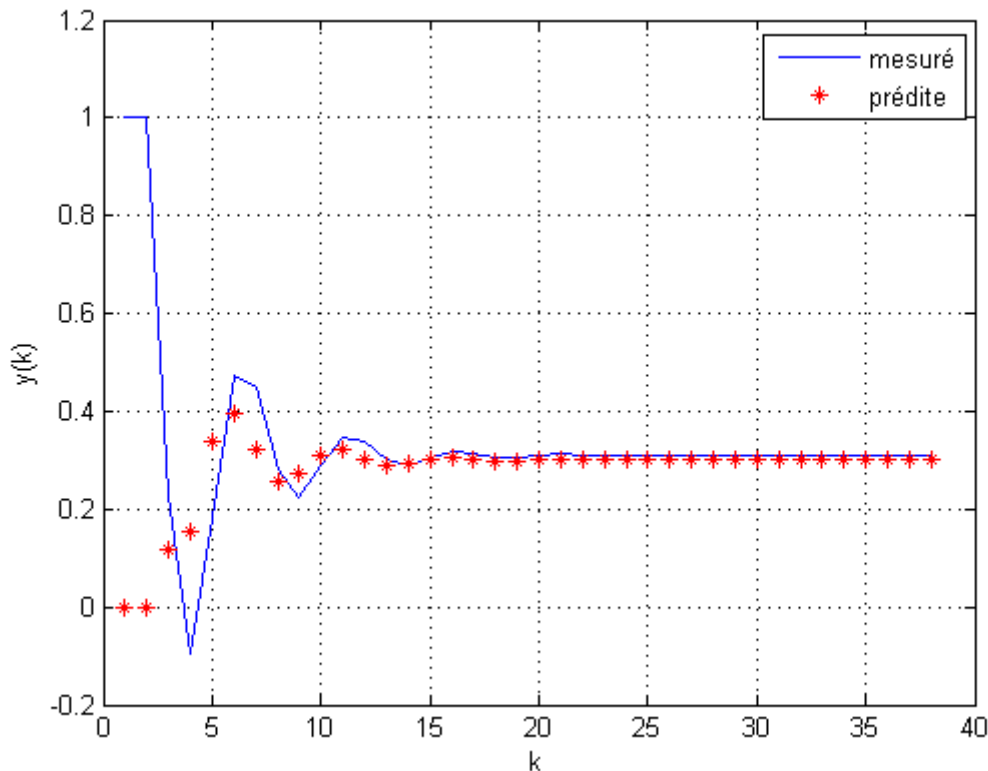


Figure III.1. Résultat simulation exemple 1.

A partir de ces résultats de simulation on peut déduire que le modèle prédit est très proche du modèle mesuré ce qui assure l'efficacité de la méthode d'Aliénor.

### *Remarque*

Nous tenons à signaler à ce stade, qu'en essayant de reproduire cette application sous l'environnement MATLAB, nous avons constaté que la version présentée dans [23] contient quelques erreurs, par conséquent, nous avons pris le soin de corriger toutes ces erreurs dans la présente présentation.

### III.3.2. Application 2

Le modèle du système non linéaire à identifier est donné sous cette forme :

$$y(k+2) = a y(k+1) + b y(k) u(k+1) + c u(k+1)$$

L'objectif est similaire à celui de l'application 1, il consiste à identifier les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  en transformons le problème d'identification en un problème d'optimisation puis le résoudre l'aide de la méthode d'Aliénor.

Pour générer les mesures de l'application 2, le binôme d'étudiants ont fixé d'abord les valeurs des paramètres du modèle ( $a = 0.9 ; b = -0.7 ; c = 0.5.$ ) et ont choisi un horizon de temps déterminé pour faire la simulation ( $T = 40$  s), par la suite ils ont récupéré les trente-huit valeurs de simulations

Pour leur simulation le binôme d'étudiants, ont appliqué une entrée  $u(k)$  aléatoire considérée suffisante pour l'excitation du système, et  $y(0) = y(1) = 0$ .

A l'aide de la transformation du Konfé, on aura un vecteur  $B$  qui s'écrit de la forme suivante :

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(100\alpha + 1.0000) \\ \cos(101\alpha + 1.00005) \\ \cos(102\alpha + 1.0001) \end{bmatrix}$$

On remplaçant dans l'équation de système on va aboutir à une équation à une seule variable. Le problème d'optimisation à résoudre est donc le suivant :

$$(P_2): \min_{\alpha} \sum_{k=0}^{38} (y(k+2) - y_a(k+2))^2,$$

avec :  $y_a(k+2) = \cos(100\alpha + 1) y(k+1) + \cos(101\alpha + 1.00005) y(k) u(k+1) - \cos(102\alpha + 1.0001) u(k+1)$ .

L'application de la méthode conduit à la solution de problème dont l'optimum global est de valeur suivante :

$$\alpha^* = 3.0344.$$

En remplaçant  $\alpha^*$  dans le vecteur  $B$  on obtient les valeurs optimales suivantes des paramètres du modèle prédit :

- $a^* = 0.9027$  ;
- $b^* = -0.7366$  ;
- $c^* = 0.5024$  ;

La valeur optimale de la fonction objectif du problème ( $P_2$ ) est  $6.3782 * 10^{-6}$ .

La figure suivante montre les deux systèmes mesuré et prédit:

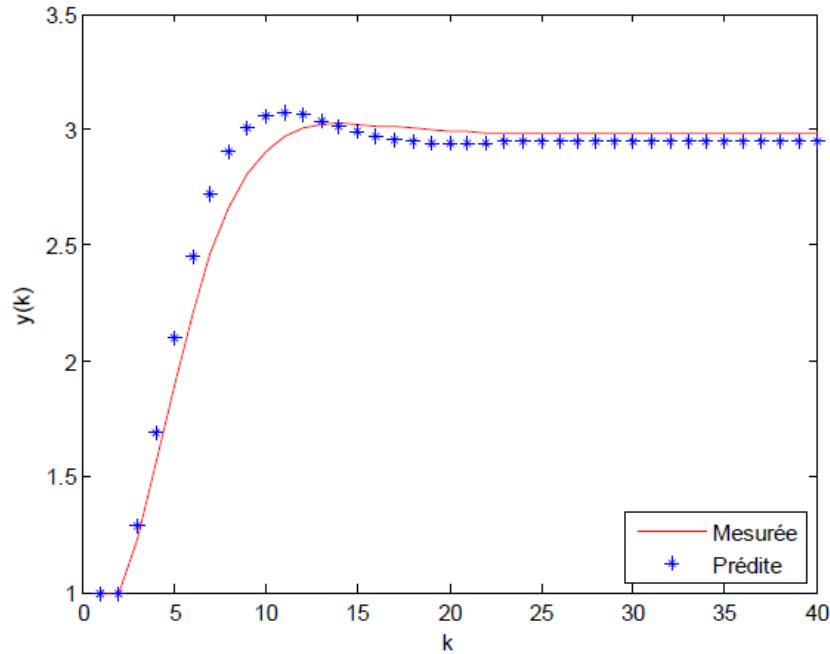


Figure III.2. Résultat simulation exemple 2.

A partir de cette figure, on constate que la méthode d'Aliénor permet d'identifier de manière plus au moins précise les paramètres du système non linéaire, puisque les valeurs estimées sont très proches des valeurs exactes.

### *Remarques*

A partir des applications : 1 et 2, on peut voir clairement que la méthode d'Aliénor est applicable pour l'identification des deux types de systèmes linéaire et non linéaire.

### **III.4 Application de la méthode d'Aliénor sur le pendule inversé**

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode d'Aliénor pour identifier les paramètres de modèle du pendule inversé, on s'intéresse au mouvement du pendule. Nous allons considérer comme fonction objectif à minimiser, la somme des écart-carrés (erreur quadratique) c.-à-d. l'écart observé entre les mesures de simulations  $\theta(k)$  et celles prédites par le modèle prédit  $\hat{\theta}(k)$ .

L'idée est donc consiste en utilisant la méthode d'optimisation d'Aliénor, qui adapte les paramètres du modèle d'une manière à avoir l'erreur  $e = \sum_k (\theta(k) - \hat{\theta}(k))^2$  proche de zéro [17].

### III.4.1 Pendule inversé et négligence de frottement du chariot

Reprenons l'équation (II.35), qui est la fonction de transfert continue du pendule pour le point instable  $\theta = 0$ .

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{c_2 s}{b_4 s^3 + b_3 s^2 + b_2 s + b_1},$$

On suppose dans la suite de ce travail, que le coefficient de frottement du pendule  $b = 0$ . Les paramètres seront donc :

- $b_4 = (M + m)(ml^2 + J) - m^2 l^2$ ;
- $b_3 = (M + m) d$ ;
- $b_2 = -(M + m) m g l$ ;
- $b_1 = 0$ ;
- $c_2 = -ml$ .

Donc notre fonction de transfert va prendre la forme suivante :

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{c_2 s}{b_4 s^3 + b_3 s^2 + b_2 s} = \frac{c_2}{b_4 s^2 + b_3 s + b_2}. \quad (\text{III. 1})$$

### III.4.2 Modèle discrétisé du pendule inversé

La fonction de transfert discrétisée du pendule dans ce cas prendra la forme suivante :

$$G_2(z) = \frac{\theta(z)}{u(z)} = \frac{a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_0} \quad (\text{III. 2})$$

D'une autre manière :

$$G_2(z^{-1}) = \frac{\theta(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}} \quad (\text{III. 3})$$

A partir de (III.3), on peut écrire l'équation  $\theta(k)$  du modèle discrétisé du pendule :

$$\begin{aligned} \theta(z^{-1})(1 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}) &= u(z^{-1})(a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}); \\ \theta(k) + (b_1 \theta(k-1) + b_0 \theta(k-2)) &= a_1 u(k-1) + a_0 u(k-2). \end{aligned} \quad (\text{III. 4})$$

Donc l'équation aux différences est donnée comme suit :

$$\theta(k) = a_1 u(k-1) + a_0 u(k-2) - b_1 \theta(k-1) - b_0 \theta(k-2). \quad (\text{III. 5})$$

### III.4.3 Application de la méthode d'Aliénor<sup>2</sup>

<sup>2</sup> L'algorithme de cette application est mis en annexe D.

L'objectif de cette application est d'identifier les paramètres  $a_0, a_1, b_0$  et  $b_1$  en transformons le problème d'identification en un problème d'optimisation puis le résoudre l'aide de la méthode d'Aliénor.

Pour générer les mesures nous avons utilisé modèle d'état linéarisé pour avoir avoir les valeurs  $\theta(k)$  aux instants différents, et on a choisi un horizon de temps déterminé pour faire la simulation ( $T = 3$  s), par la suite on a récupéré les soixante valeurs de simulations.

Nous avons appliqué un échelon  $u = 0.05$  comme entrée, suffisante pour l'excitation du système, et  $\theta(0) = 0$ ,  $\theta(1) = 0.000026590$ .

A l'aide de la transformation du Konfé, on aura un vecteur  $V$  qui s'écrit sous la forme suivante :

$$V = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\cos(5000 \alpha) + 1.00000) \\ 2(\cos(5001 \alpha) + 1.00005) \\ 2(\cos(5002 \alpha) + 1.00010) \\ 2(\cos(5003 \alpha) + 1.00015) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.6})$$

En remplaçant dans l'équation de système (III.5) on va aboutir à une équation à une seule variable. Le problème d'optimisation à résoudre est donc le suivant :

$$(P): \min_{\alpha} \sum_{k=2}^{60} (\theta(k) - \hat{\theta}(k))^2,$$

avec :  $\hat{\theta}(k) = 2(\cos(5000 \alpha) + 1) u(k-1) + 2(\cos(5001 \alpha) + 1.00005) u(k-2) - 2(\cos(5003 \alpha) + 1.00015)\theta(k-1) - 2(\cos(5002 \alpha) + 1.0001)\theta(k-2)$ .

La résolution du problème (P) a conduit à l'optimum global  $\alpha^* = 5.0379$

En remplaçant  $\alpha^*$  dans les relations, (III.-) on obtient les valeurs optimales des paramètres du modèle :

$$\begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ b_0^* \\ b_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1547 \\ -1.7922 \\ -1.6800 \\ 0.0722 \end{bmatrix}.$$

La figure suivante montre à la fois les deux modèles : modèle d'état linéarisé et le modèle prédit identifié à l'aide de la méthode d'Aliénor.

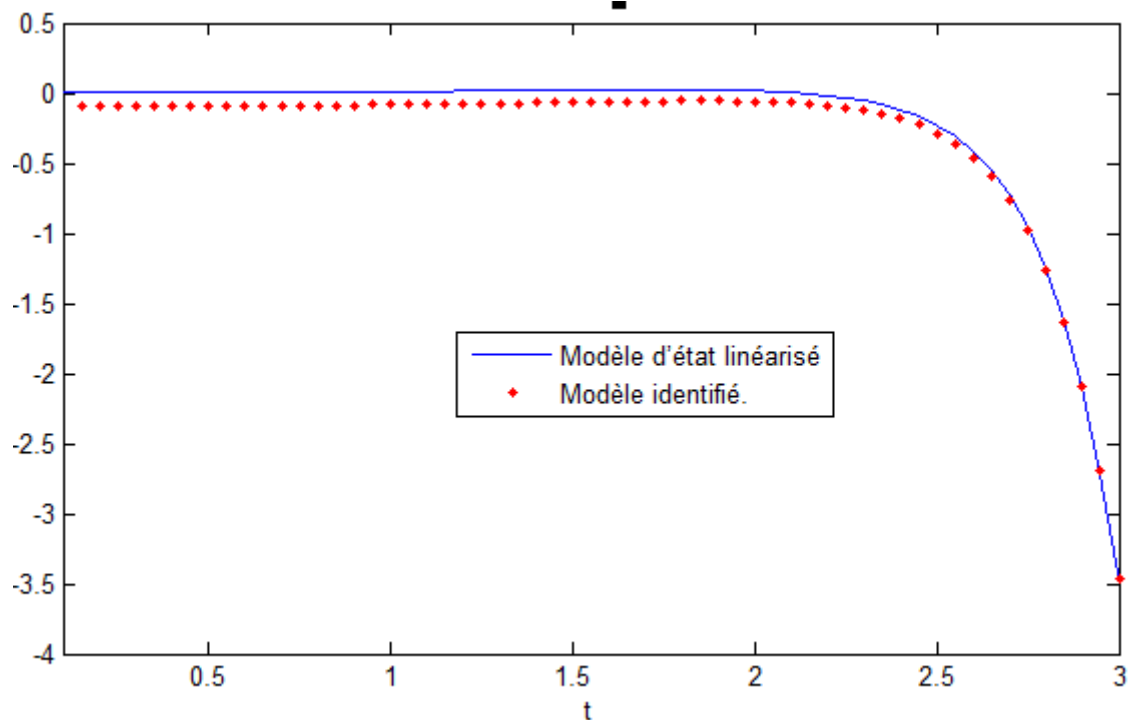


Figure III.3. Résultat simulation pendule inversé.

Les deux courbes sont presque identiques, donc on a pu obtenir un modèle prédit très proche du modèle réel (pendule) en utilisant la méthode d'Aliénor.

### III.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons exposé une synthèse d'applications de la méthode d'Aliénor pour l'identification des systèmes discrets linéaire et non linéaire. Egalement, nous avons pu appliquer cette approche d'optimisation (méthode d'Aliénor) pour l'identification des paramètres d'un système complexe à plusieurs variables, qui sont le pendule inversé. Les résultats obtenus de cette application sont très favorables à l'utilisation de cette approche comme outil d'identification.

### *Conclusion générale*

L'enjeu dans la problématique d'identification des systèmes dynamiques consiste en la recherche de modèles mathématiques sur la base des données expérimentales et des connaissances antérieures. Ces modèles doivent fournir une approximation la plus fidèle du comportement du système physique.

Dans ce travail, nous avons consacré la première partie, aux rappels de principe de l'identification en générale et ainsi que la présentation d'un ensemble de méthodes d'identification. Nous avons également, mis en avant à travers un exemple illustratif, l'importance de la méthode des moindres carrés récursifs, qui est l'un des algorithmes les plus efficaces dans l'identification des systèmes dynamique.

La deuxième partie de ce travail a été consacré à la description, la modélisation par le formalisme d'Euler-Lagrange, et la simulation (dans les deux représentations linéaire et non linéaire) de modèle du pendule inversé sur un chariot.

La dernière partie, est composée d'une synthèse d'un travail réalisé sur l'identification par approche d'optimisation globale [23], et de notre contribution sur l'identification du modèle discrétisé de pendule inversé. En se basant sur la fonction de transfert continue, et la fonction de transfert discrétisée, nous avons identifié les paramètres du modèle discret, en utilisant la méthode d'Aliénor, nous avons pu identifier les paramètres de modèle discret. Les résultats obtenus s'avèrent très intéressants, les comportements des modèles réelle et identifié sont similaires.

Comme développements futurs de ce travail travaux, il s'agit de travailler sur plusieurs volets qui peuvent être très porteurs.

1. La méthode d'Aliénor est révélée être une approche universelle, car elle peut être utilisée pour approximer des fonctions à plusieurs variables, pour résoudre des systèmes d'équations fonctionnels et autres problèmes multidimensionnels complexes, cela va ouvrir des portes à des chercheurs pour qu'ils puissent implémenter les idées de recherches qui n'ont pas pu réaliser à cause de leurs complexités.
2. En automatique une grande partie des problèmes d'identification peut être formulé sous forme de problème d'optimisation par exemple la détermination des paramètres d'un correcteur,



## **Conclusion générale**

---

l'optimisation des consignes d'un asservissement , identification des paramètres d'un modèle mathématique, la détermination d'un modèle nominal pour un système incertain, la réduction du modèle, la commande prédictive et la commande optimale basée sur l'approche directe et c'est ici que l'approche d'optimisation globale d'Aliénor peut prendre place et servir au développement d'autres thèmes de recherche

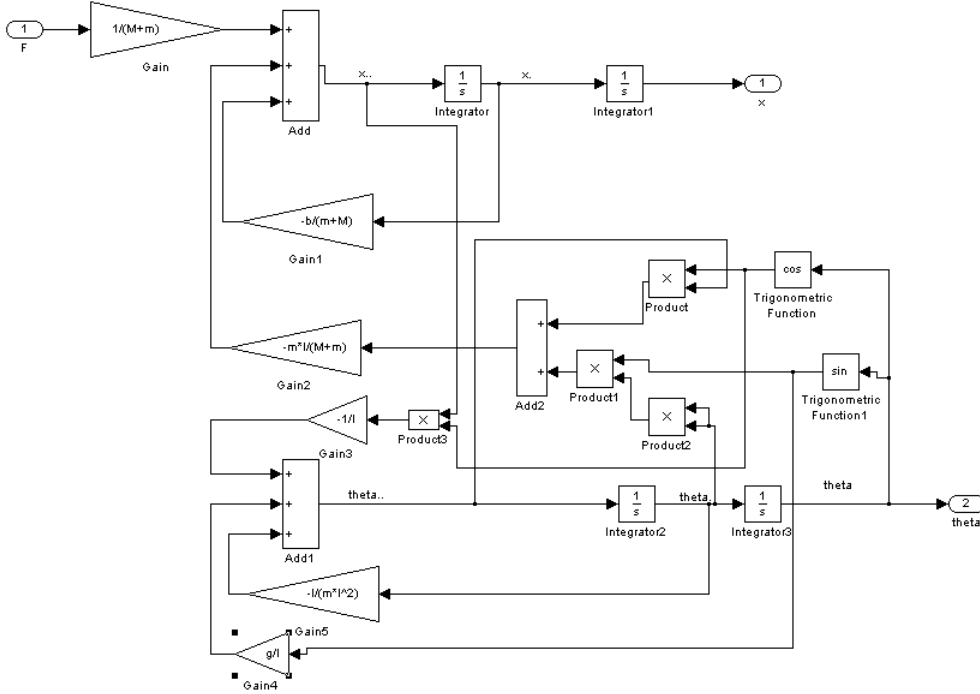
## **Références bibliographiques**

- [1] Müllhaupt, P. (2009). *Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR Presses polytechniques.
- [2] Matignon, D. (1994). *Représentation en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.
- [3] Janin, O. (2001). *Contribution à l'identification, la modélisation et l'analyse de systèmes dynamiques à non-linéarités irrégulières* Thèse de doctorat, Lyon 1.
- [4] GUISSER, M. H. (2018) *Identification Paramétrique et Commande Adaptative des Systèmes dynamiques Linéaires*. Université Hassan 1<sup>er</sup> Maroc.
- [5] Bacher, P., and Madsen, H. (2011). *Identifying suitable models for the heat dynamics of buildings*. *Energy and Buildings*, 43(7), 1511-1522.
- [6] Gasso, K. (2000). *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires: approche multi-modèle*, Thèse de doctorat, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL.
- [7] Landau.I.D. (2022). *Commande des Systèmes par Calculateur -identification, conception et mise en oeuvre*. ENSIEG – INPG, France.
- [8] Megherbi, A. C. (2012). *Identification des paramètres des systèmes non linéaires basée sur les techniques Soft Computing*, Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider biskra.
- [9] Longchamp,R .(2010). *Commande numérique de systèmes dynamiques: cours d'automatique* (Vol. 1). PPUR Presses polytechniques.
- [10] Ganzalo. C. *Identification des systèmes*, École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, France.
- [11] Meyem,S. Nabila,B. (2007) *Identification des systèmes linéaires*, Projet de fin d'études, UMMTO,Algérie.
- [12] Amine, H. (2020). *Identifications des systèmes linéaires*. Cours M1 Contrôle et processus, Université de Tlemcen, Algérie.
- [13] Verhaegen, M., and Dewilde, P. (1992). *Subspace model identification part 2. Analysis of the elementary output-error state-space model identification algorithm*. *International journal of control*, 56(5), 1211-1241.
- [14] Maddi, A., Guessoum, A., Berkani, D., et Belkina, O. (2005). *Etude de la méthode des moindres carrés récursive et application au signal de parole*. In 3rd International Conference: Sciences of Electronic, Technologies of Information and Telecommunications, Sousse, Tunisia).

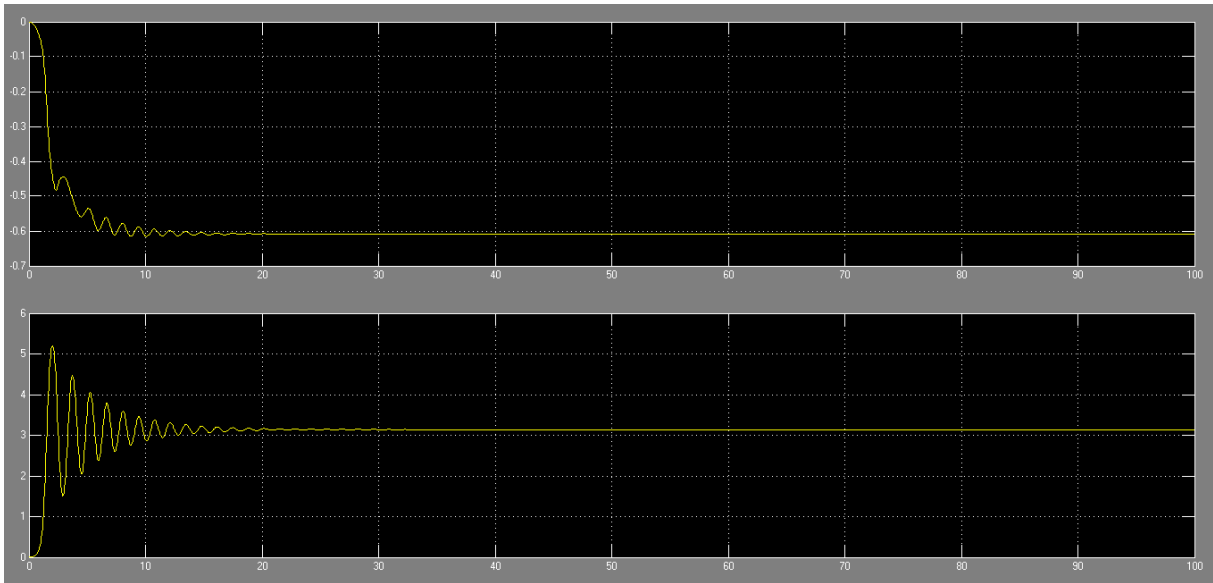
- [15] Lahouazi ,F. (2011).*Mise en oeuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application à un pendule inversé*. Mémoire de Magister, UMMTO, Algérie.
- [16] Aissat, A. (2017). *Commande Numérique RST Appliqué sur un Pendule Inversé*. Thèse de doctorat, Université Abderrahmane Mira, Bejaia, Algérie.
- [17] Cherruault, Y. and Mora,G. *Optimization globale. Théories des courbes-denses*. Economica, Paris, 2005
- [18] Konfe.B.O, Cherruault, Y, and ,Benneouala.T. *A global optimization method for a large number of variables (variant of alienor mehod)*.Kybernetes,34(7{8):1070{1083,2005.
- [19] Lounes.S, Ould Mahammed. S. (2019) *Identification des systèmes dynamiques par l'optimisation globale* .Projet fin d'étude, UMMTO, Algérie.

# Annexes

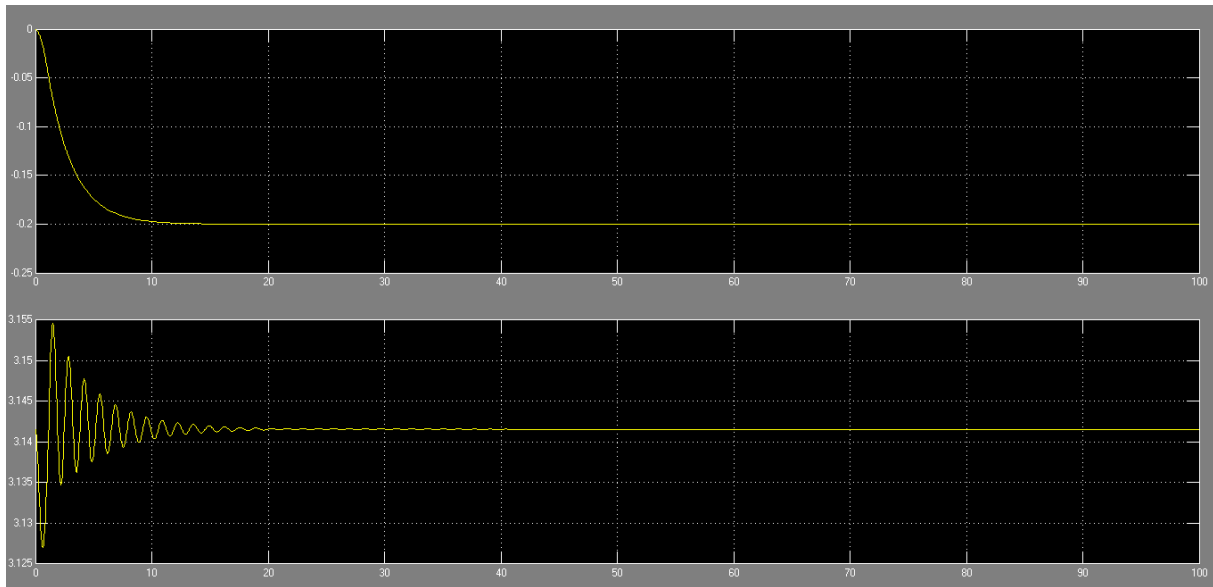
## Annexe A : Simulink subsystem du pendule inversé dans sa présentation non linéaire



## Annexe B : Réponse du système à un échelon unitaire avec $\theta = 0, x = 0$



**Annexe C :** Réponse du système à un échelon unitaire avec  $\theta=3.14$ ,  $x=0$ .



**Annexe D :** Code source de programme MATLAB de l'application de la méthode d'Aliénor sur le pendule.

```

clear all
close all
clc
syms alpha
a0=2*cos(5000*alpha+1);
a1=2*cos(5001*alpha+1.00005);
b0=2*cos(5002*alpha+1.0001);
b1=2*cos(5003*alpha+1.00015);
%%
te=0.05;
t=0:0.05:3;
g=9.81; %gravité
m=0.2; %masse de pendule
b=0; %frottement des roues du chariot
M=2.3; %mass de du chariot
d=0.005; %coefficient du frottement du pendule
l=0.3; %demi longueur du pendule
J=0.006;%m*l^2/3 %l'inertie du pendule
h=M+m;
N=m*l^2+J;
D=h*N-(m^2)*(l^2);
u = 0.05;
x0 = 0; %Etat initiale de x
th0 = 0.00; % Etat initiale de theta
CI = [th0 0 x0 0]; % C.I.: Conditions initiales: [th(0), Dth(0), x(0), Dx(0)]
%Representation d'état
A=[0 1 0 0;0 0 -b*N/D -m^2*l^2*b/D (m*l*d)/D;0 0 0 1;0 (m*l*b)/D
((m*g*l)/N+(m^3*l^3*g)/(N*D)) ((-d/N)-(m^2*l^2*d)/(N*D)]];
B=[0;N/D;0;(-m*l)/D];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D = [0;0];
sys =ss(A,B,C,D);
ft=tf(sys);
G=c2d(ft,te);
echelon = u.*ones(length(t),1);

```

```

y=lsim(sys,echelon,t,CI); %simulation avec C.I.
Y=y(:,1)%60 valeurs de simulations de theta
H=0;%H est la fonction a minimiser
length(t)
for k=3:1:length(t)
    ya(k)=a0*u+a1*u-b0*Y(k-2)-b1*Y(k-2);%%%%
    H=H+(Y(k)-ya(k))^2;
End
%%
F=[];%Vecteur des évaluation simultanées de H
II=[];
for i=0:0.0001:2*pi
    II=[II i];
    F=[F subs(H,alpha,i)];
end
for j=1:1:length(F)
    if F(j)==min(F)
        alphaopt=II(j)
    end
end
%%
a0=2*cos(5000*alphaopt+1)
a1=2*cos(5001*alphaopt+1.00005)
b0=2*cos(5002*alphaopt+1.0001)
b1=2*cos(5003*alphaopt+1.00015)
%%
plot(t,Y)
hold on
%%
YA=[];
for k=3:1:length(t)
    YA(k)=a0*u+a1*u-b0*y(k-2)-b1*y(k-2);%%%%
end
plot(t,YA,'.r')

```

## Identification des systèmes dynamiques par les approches d'optimisation

### Résumé

Ce travail traite la problématique d'identification d'un système dynamique en s'appuyant sur une approche d'optimisation globale. Plus précisément, nous donnons un aperçu sur quelques méthodes classiques d'identification des systèmes. Par la suite, l'accent est porté sur le modèle du pendule inversé sur chariot, qui est un système assez complexe. Nous avons pu identifier les paramètres du modèle linéarisé de pendule inversé par une application d'une méthode d'optimisation globale, à savoir la méthode d'Aliénor. Nos résultats montrent que cette approche d'optimisation globale peut être un outil efficace pour l'identification de systèmes multi variables non linéaire.

**Mots clés :** Identification des systèmes, pendule inversé, méthode d'Aliénor, système non linéaire.

## Identification of dynamic systems by optimization approaches

### Abstract:

This thesis deals with the problem of identifying a dynamic system based on a global optimization approach. More precisely, we give an overview of some classical methods of system identification. Then, the focus is put on the model of the inverted pendulum on a cart, which is a rather complex system. We were able to identify the parameters of the linearized inverted pendulum model by an application of a global optimization method, namely the Eleanor method. Our results show that this global optimization approach can be an efficient tool for the identification of nonlinear multivariate systems.

**Keywords:** System identification, inverted pendulum, Aliénor's method, nonlinear system.

