

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Abderhmane Mira - Bejaia -
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire de fin de Cycle en vue de l'obtention du diplôme de Master
Option : Analyse Mathématique

Thème

Étude d'un système dynamique représentant un phénomène biologique

Réalisé par :

M^{elle} SEKOUCI SYLIA

Soutenue le : 15 Juin 2022 devant le jury composé de :

Présidente : M^{me} A. BOULKROUNE M.A.A U. A. Mira Béjaïa.
Promotrice : M^{me} N. MOHDEB M.C.A U. A. Mira Béjaïa.
Examinatrice : M^{me} A. NASRI M.A.A U. A. Mira Béjaïa.

Promotion 2021-2022.

Remerciement

*Je remercie le bon **dieu** tout puissant de m'avoir donner la santé et la volonté d'entamer et d'achever ce travail.*

*Tout d'abord ce modeste travail n'aurait pas été riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mme N.MOHDEB**, je la remercie pour sa patience, rigueur et disponibilité durant ma préparation de ce mémoire.*

*Je tient à remercier **Mme A. BOULEKROUNE** d'avoir accepter de présider ma soutenance mes remerciements vont aussi vers **Mme A. NASRI**, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant d'examiner notre travail.*

Je ne cesserai jamais de remercier mes parents qui m'ont épaulé, soutenu et ont tout sacrifié pour que j'arrive à accomplir ce que j'ai accompli aujourd'hui.

Dédicaces

Ce modeste travail est dédié en premier lieu à mes parent qui me donnent le sourire et la force, à ma sœur ДУХИА, et à mes trois frères (ГОУВА, МЕСИРСА et КОУСЕИЛА). Ce mémoire est dédié également à toute ma famille et mes copines qui n'ont jamais cessé de m'aider.

TABLE DES MATIÈRES

1	Préliminaire	7
1.1	Rappels sur les systèmes dynamiques	8
1.1.1	Étude du comportement des solutions des équations différentielles ordinaires :	9
1.1.2	Existences et unicité des solutions	9
1.1.3	Stabilité des points stationnaires :	12
1.1.4	Classification des points stationnaires selon la trace et le déterminant	14
1.2	Modèle Lotka-Volterra :	16
1.2.1	Introduction	16
2	Étude mathématique d'un modèle épidémiologique au temps du COVID-19	19
2.1	Présentation du modèle	19
2.2	Étude qualitative du modèle	20
2.2.1	Taux d'immigration non nuls	20
2.2.2	Taux d'immigration nuls	36
2.2.3	Taux d'immigration nuls	40
2.2.4	Taux d'immigration d'individus infectés nul	44
2.2.5	Taux d'immigration d'individus sains nul :	48
3	Simulations numériques du modèle épidémiologique au temps du COVID - 19	53
3.1	Simulation numérique où le taux d'immigration des individus sains est nul.	53
3.1.1	Premier cas	53
3.1.2	Deuxième cas	55

3.1.3	Troisième cas	58
3.2	Taux d'immigrations sont nuls :	60
3.2.1	Quatrième cas	60
3.2.2	Cinquième cas	62
3.2.3	Sixième cas	64

Notations

TABLE 1 – Table de Notation

\mathbb{R}^2 : Ensemble des nombres réels d'ordre 2.

Lip_{loc} : Ensemble des fonctions localement lipschitziennes.

$C(\mathbb{D})$: Ensemble des fonctions continues dans D .

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}_+ : Ensemble des nombres réels positifs.

J : La matrice jacobienne d'un système.

Δ : Le discriminant d'une matrice A .

$det(A)$: déterminant d'une matrice A .

$tr(A)$: trace d'une matrice A .

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le *COVID* – 19 qui fait référence à (Corona virus infection disease 2019) est une maladie provoquée par le virus de la famille des *coronaviruses* 2, le *SARS – Cov2*, qui se caractérise par une transmissibilité rapide qui lui permet de se prolonger longtemps. L'origine de cette maladie est à débattre. le *COVID* – 19 est une maladie respiratoire pouvant être mortelle pour les personnes âgées et celles ayant une faible immunité, elle se transmet par contact physique avec les personnes infectées.

C'est dans la ville de Wuhan qui est dans la province du Hubei que le *COVID* – 19 a émergée puis s'est propagée dans toute la Chine, ensuite dans tout le reste des pays du monde ce qui a déclenché une pandémie mondiale.

Depuis lors *l'OMS* (ORGANISATION MONDIALE DE LA SANTÉ) a déclaré la pandémie le 11 Mars dans sa publication sur son site Web. Cette pandémie pose plusieurs questions aussi bien dans son analyse statistique, sa modélisation potentielle et l'identification des facteurs sur lesquels il faut agir pour enrayer sa propagation.

Dans le début de la pandémie une multitude de donnée sont accumulées chaque jour, permettant de modéliser l'évolution des nouveaux cas du *COVID* – 19 et d'en prédire la propagation. L'importance de la modélisation mathématique est confirmée par l'histoire occidentale des sciences qui fait habituellement remonter l'emploi de modèles mathématiques comme réponse à une question de santé publique au travail du médecin, physicien, mathématicien suisse Daniel Bernoulli (1700-1782) sur la variolisation. Cette pratique importée d'Asie, où elle est attestée plusieurs siècles auparavant, consistait en l'inoculation prophylactique de la variole prélevée sur des cas peu sévères. La modélisation longtemps restée entre les mains des expertes, et est devenue un outil pédagogique

susceptible pour étudier l'épidémiologie et ses conclusions afin d'obtenir des informations quantitatives qui contribuent aux processus de compréhension et de gestion de l'écllosion d'une épidémie pour suggérer des stratégies pour la combattre et contrôler la maladie [3]. On s'intéresse à un autre processus abordé dans ce mémoire qui est les systèmes dynamiques.

Les prévisions à long terme de certains systèmes deviennent souvent impossibles. Même leurs trajectoires ne peuvent pas être représentés par la géométrie habituelle.

Dans de nombreuses conditions naturelles, nombreuses questions dans l'esprit humain, par exemple comment définir et expliquer les turbulences dans le mouvement des fluides? Répondre à ces questions nous n'avons pas d'autres moyens que d'étudier la dynamique non linéaire.

Les systèmes dynamiques sont généralement décrits par des équations différentielles ou aux différences [5]. L'étude des équations différentielles en mathématiques ont été consacrées principalement à trouver des solutions analytiques d'équations pendant plus de deux siècles. Mais les comportements dynamiques d'un système ne peuvent pas toujours être déterminés par des solutions exactes. De plus, la solution analytique des équations non linéaires est difficile à obtenir sauf dans quelques cas particuliers. Les systèmes dynamiques avaient évolué à la fin du XIXe siècle et ont apporté d'importantes contributions à comprendre certains phénomènes non linéaires. La dynamique est un processus évolutif dans le temps. La dynamique d'un système qui peut être exprimé soit comme un temps continu, soit comme un processus évolutif en temps discret.

Les modèles mathématiques les plus simples des systèmes continus sont ceux consistant en équations différentielles du premier ordre. En systèmes autonomes du premier ordre (explicite en temps), la dynamique est une classe de système très restrictive puisque son mouvement est dans la ligne réelle.

La science non linéaire et sa dynamique ont été une question de grande importance dans le domaine des sciences naturelles et sociales. Les exemples incluent les sciences physiques (par exemple, l'atmosphère, le laser, le circuit électronique, la supraconductivité, la turbulence des fluides, etc.), la chimie (la réaction de Belousov-Zhabotinsky, le modèle de Brusselator, etc.), la biologie (les Systèmes neuronaux et cardiaques, les processus biochimiques), l'écologie et les sciences sociales (propagation de la décoloration, propagation des maladies, fluctuations des prix des marchés et des stocks marchés, etc.), pour n'en citer que quelques-uns. Les systèmes non linéaires sont plus difficiles (sinon parfois impossible) à résoudre que les systèmes linéaires. Cependant, les solutions de systèmes linéaires sont utiles pour l'analyse des systèmes non linéaires [5]. Ce présent manuscrit

est partagé en trois chapitres :

Le premier chapitre : qui est un rappel global de définitions principales sur l'étude du comportement des solutions des équations différentielles ordinaires.

Le deuxième chapitre : Concerne l'étude générale d'un modèle qui étudie la maladie du *COVID-19* qui est issu du modèle de *Lotka – Volterra*.

Le troisième chapitre : est consacré à la simulation numérique de certains cas pour mieux illustrer l'aspect des résultats obtenus dans l'étude faite au chapitre 2.

Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles. La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps.

Le but de cette théorie est de modéliser des processus qui évoluent dans le temps et d'étudier leur comportement. Cette étude doit permettre de prédire le comportement du système et de le réguler afin d'obtenir les résultats désirés. La théorie des systèmes dynamiques a son origine dans les travaux de Poincaré, à la fin du *XIX* siècle, sur le problème des Trois corps. Poincaré a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système, d'utiliser des arguments topologiques et géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions, considérées comme orbites (ou trajectoires) dans l'espace de phases. Une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire. Lagrange qui a travaillé sur ce sujet, ses travaux consistèrent à interpréter l'influence des corps autres que le soleil sur une planète comme une succession des chocs infinitésimaux. Au *XIX* siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapounov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement.

Dans ce chapitre, on introduit la notion de système dynamique, à temps continu. On décrit aussi plusieurs outils mathématiques qui nous servent à mieux comprendre les systèmes dynamiques, tels

que : les trajectoires, les points stationnaires, l'existence et l'unicité des solutions, la stabilité des points stationnaires, les champs de vecteurs, les isoclines, les portraits de phases, enfin le modèle Lotka Volterra qui a été la source d'inspiration du modèle étudié dans ce mémoire.

1.1 Rappels sur les systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 (Systèmes dynamiques). *Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance [7] :*

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 ;
- de sa loi d'évolution.

C'est ainsi qu'on arrive à définir un système dynamique par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'états X , du domaine temporel ($T = \mathbb{N}$), et d'une application de transition d'état $f : T \times X \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.

Cette dernière qui décrit un système dynamique possède deux variables :

- 1) Variables dynamiques : ce sont les quantités qui changent à travers le temps.
- 2) Variables statique : Ce sont les paramètres statiques du système.

Dans le cas où la composante du "temps" est continue, le système dynamique est présenté en forme d'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x \in X \tag{1.1}$$

Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application itérative de la forme suivante :

$$x_k = f(x_k); x_k \in X, k = 1, 2, 3...n, n \in T \text{ o } T = \mathbb{N}, \text{ le domaine temporel.} \tag{1.2}$$

Si le membre de droite de l'équation (1.1) est explicitement indépendant du temps alors le système est dit autonome. Dans le cas contraire il est dit non-autonome.

1.1.1 Étude du comportement des solutions des équations différentielles ordinaires :

Un des modèles les plus élaborés dans la modélisation en science des vivants et de l'ingénierie est l'équation différentielle. L'étude du comportement des solutions de ces équations peut effectuer selon trois méthodes importantes :

a) *La méthode analytique* : C'est d'obtenir des solutions exactes de formes explicites.

l'inconvénient de cette méthode est le fait qu'elle ne soit pas applicable à tous les types d'équations différentielles.

b) *La méthode numérique* : Cette méthode permet de se rapprocher de la solution exacte par des approximations effectuées sur un intervalle de temps borné et pour des conditions initiales données ; par exemple, la méthode de Runge-Kutta et la méthode d'Euler.

c) *La méthode qualitative* : En général, on procède avec cette méthode lorsqu'il n'est pas possible de résoudre l'équation différentielle analytiquement. Elle consiste à étudier les points stationnaires, la stabilité et le comportement asymptotique des solutions de ces équations, l'existence de solutions particulières.

Dans ce qui suit, on va s'intéresser à cette dernière méthode.

1.1.2 Existences et unicité des solutions

Définition 1.1.2. On note $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $D = I \times \Omega$ où I est un ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de E et $f : D \rightarrow E$ une fonction continue. Pour tout $(t, x) \in D$, on notera :

$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2, \dots, f_n(t, x))$$

où chaque fonction f_i est continue de D dans \mathbb{R} .

Le théorème fondamental d'existence et unicité des solutions des équations différentielles est une conséquence directe du théorème du point fixe appliqué dans un certain espace fonctionnel. Il ne permet à priori de contrôler la solution que pendant un temps court. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Théorème 1.1.1. *Théorème de Cauchy-Lipschitz : [7] Si $f \in C(D) \cap Lip_{loc}$ (f est continue sur D et localement lipschitzienne par rapport à x). Alors pour tout $(x_0, t_0) \in D$ il existe une unique solution au problème de Cauchy.*

Remarque 1.1.1. *Notons que l'hypothèse que f est de classe C^1 est plus exigeante que celle du théorème de Cauchy, car :*

$$f \text{ de classe } C^1 \implies f \text{ est localement lipschitzienne.}$$

Points stationnaire, champ de vecteurs et portrait de phase :

On s'occupe d'un système différentiel autonome de dimension deux, donc de la forme.
où f et g sont des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} [2].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ \dot{y}(t) = g(t, x) \end{cases} \quad (1.4)$$

Nous supposons que les fonctions f et g sont continument dérivables, pour assurer le fait que par tout point M du plan, passe une solution et une seule.

Pour alléger les écritures, nous supposons de plus, que toutes les solutions sont définies sur \mathbb{R} tout entier.

a) Trajectoires :

Définition 1.1.3. *Une trajectoire du système différentiel (1.4) est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), y(t))$ qui parcourent le plan (x, y) lorsque t parcourt \mathbb{R} .*

En d'autres termes, une trajectoire est définie par l'ensemble suivant :

$$\{(x(t), y(t)); t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Champ de vecteurs :

Définition 1.1.4. *L'application :*

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (f(x, y), g(x, y))$$

défini un champ de vecteurs. A chaque point $M = (x, y)$ du plan, on associe le vecteur $V(M) = (f(x, y), g(x, y))$. Un champ de vecteurs (1.4) est donné par la propriété suivante :
 En tout point M du plan où $V(M) \neq (0, 0)$, la trajectoire passant par M est tangente à $V(M)$.

c) Isoclines :

Définition 1.1.5. Les isoclines sont les ensembles sur lesquels les composantes \dot{x} ou \dot{y} s'annulent. On distingue donc deux types d'isoclines :

1) Isocline horizontale :

L'isocline horizontale est l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $g(x, y) = 0$.

Sur l'isocline horizontale, le champ de vecteurs est horizontal, dirigé vers la droite si $f(x, y) > 0$ et vers la gauche si $f(x, y) < 0$.

2) Isocline verticale : L'isocline verticale est l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $f(x, y) = 0$.

Sur l'isocline verticale, le champ de vecteurs est vertical, dirigé vers le haut si $g(x, y) > 0$ et vers le bas si $g(x, y) < 0$.

d) Points stationnaires :

Définition 1.1.6. On appelle un point stationnaire $M = (x^*, y^*)$ (appelé également point d'équilibre ou point singulier) du système (1.4) est un point de \mathbb{R}^2 vérifiant :

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$$

Autrement dit, un point stationnaire est l'intersection d'une isocline verticale avec une isocline horizontale.

Un point stationnaire $M = (x^*, y^*)$ du système (1.4) est dit **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $J_F(x^*, y^*)$ ($oF = (f, g)$) associée au système (1.4) au point M ont la partie réelle non nulle. Autrement, le point M est dit **non-hyperbolique**.

Remarque 1.1.2. Un système différentiel peut n'admettre aucun, admettre un seul ou plusieurs points stationnaires.

e) Portrait de phase :

Dès que la dimension n du système dynamique dépasse l'unité, il devient assez difficile de voir comment le système évolue. L'outil de base est le portrait de phase.

Définition 1.1.7. *On appelle portrait de phase d'un système différentiel l'ensemble de ses trajectoires.*

Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires du système différentiel qui permet de dégager l'essentiel de l'information d'un système en mouvement et de dresser la carte routière de toutes ses possibilités. L'espace des phases (portrait de phase) est fondamental, ainsi pour décrire l'évolution d'un système dynamique.

Cette évolution est décrite par n équations différentielles munies de conditions initiales. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond à une variable d'état du système dynamique étudié, et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. Pour chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite.

1.1.3 Stabilité des points stationnaires :

I. Systèmes linéaires :

Nous allons commencer par l'étude de la stabilité des points stationnaires d'un système linéaire homogène de \mathbb{R}^2 [5].

Soit l'équation différentielle de \mathbb{R}^2 :

$$\dot{X} = AX \tag{1.5}$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice d'ordre deux, à coefficients dans \mathbb{R} .

La stabilité des points stationnaires du système (1.5) dépend de la nature des valeurs propres de la matrice A .

1^{er} cas : La matrice A admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 réelles .

- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors le point M est un nœud instable (répulsif).
- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors le point M est un nœud stable (attractif).
- si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors le point M est un col (aussi dit point selle).

2^{me} cas : La matrice A admet une valeur propre double λ réelle : Dans ce cas, le point M est un nœud instable (respectivement, stable) lorsque $\lambda > 0$ (respectivement, lorsque $\lambda < 0$).

3^{me} cas : la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*$.)

- Si $\alpha \neq 0$, alors le point stationnaire est un foyer répulsif (ou foyer instable) pour $\alpha > 0$, et est un foyer attractif (stable) pour $\alpha < 0$
- Si $\alpha = 0$, alors le point stationnaire est un centre.

II Système non linéaire :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\dot{X} = F(X) \tag{1.6}$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et $F(X) = (f(X), g(X))$ est une fonction vectorielle non linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qu'on suppose de classe C^1 (pour garantir l'existence et l'unicité des solutions). Soit $M = (x^*, y^*)$ un point stationnaire du système (1.6).

Afin d'étudier la stabilité du point stationnaire M , on linéarise le système (1.6) au voisinage de ce point. Pour cela on utilise le développement de Taylor, pour approcher ce système qui est non linéaire par un système linéaire [5]. C'est ainsi qu'on abouti à ce nouveau système :

$$\dot{H} = AH \tag{1.7}$$

Où A est la matrice jacobienne de F au point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$, et $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = x - x^*$ et $k = y - y^*$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Où

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(M), \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(M), \quad c = \frac{\partial g}{\partial x}(M), \quad d = \frac{\partial g}{\partial y}(M)$$

Le système (1.7) obtenu ici est dit le linéarisé du système (1.6).

1.1.4 Classification des points stationnaires selon la trace et le déterminant

Nous allons voir ici que la nature des points stationnaires (col, foyer, ...) d'un système linéaire homogène à coefficients constants de dimension deux ne dépend que de la trace et du déterminant de la matrice associée au linéarisé de ce système. Ensuite, on va exposer stabilité des points stationnaires du système (1.6) selon le signe de la trace de A et le signe de son déterminant [5] [7].

$$tr(A) = a + d$$

et

$$det(A) = ad - bc$$

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres du polynôme caractéristique de A . Notons

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + detA$$

et

$$\Delta = (tr(A))^2 - 4det(A)$$

On résume la classification des point stationnaire $M = (x^*, y^*)$ comme suit :

1) $\Delta > 0$ (c'est-à-dire les valeurs propres sont réelles) :

- si $det(A) > 0$, le point M st est un nœud, attractif si $tr(A) < 0$ et répulsif si $tr(A) > 0$.
- si $det(A) < 0$, l'origine est un col.
- 2) Si $\Delta < 0$ (c'est-à-dire que les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées), alors :
 - si $tr(A) < 0$, le point M est un foyer attractif.
 - si $tr(A) = 0$ (c'est-à-dire que les valeurs propres λ_1, λ_2 sont imaginaires pures), le point M est un centre pour le linéarisé.
 - si $tr(A) > 0$, le point M est un foyer répulsif.

Les résultats sont englobés dans la figure ci-dessous dans le plan $(tr(A), det(A))$.

les axes et la paraboles d'équation $\det(A) = \frac{\text{tr}(A)^2}{4}$ correspondant à $\Delta = 0$, délimitent les régions correspondantes aux différentes situations (1.1).

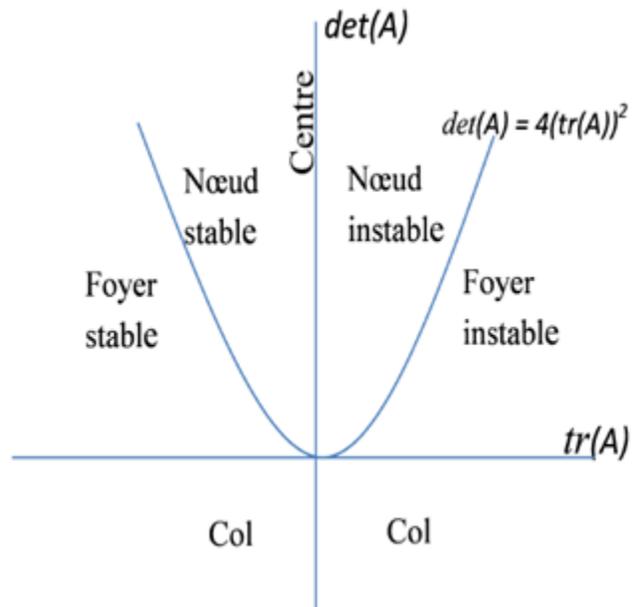


FIGURE 1.1 – Classification des points stationnaires selon Poincaré.

1.2 Modèle Lotka-Volterra :

1.2.1 Introduction

C'est durant la première moitié du *XXe* siècle, que l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction connue un essor considérable. C'est à cette époque que furent développés les premiers modèles basés sur des comportements de type compétition entre deux espèces. La paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions revient à *Alfred J. Lotka et Vito Volterra*.

Ce modèle joue un rôle considérable dans l'étude de la dynamique des populations, il se repose alors sur les hypothèses suivantes [4] :

- Le nombre de proies croît de manière exponentielle en absence des prédateurs, car on suppose que le seul facteur qui intervient dans leur croissance est la présence de prédateurs.
- L'effectif de la population prédateur décroît de manière exponentielle en absence de proies, car on suppose que le nombre de prédateurs est limité par la quantité de proies dont ils disposent.
- Le nombre de rencontre entre les proies et les prédateurs est proportionnel aux deux effectifs (proies et prédateurs) qu'on suppose aussi proportionnel au produit des deux effectifs.
- Le nombre de rencontre favorise les prédateurs et défavorise les proies, c'est-à-dire que le taux de disparition des proies et le taux de croissance des prédateurs se produisent par ces rencontres proies-prédateurs.

Basé sur ces hypothèses, le modèle *Lotka – Volterra* s'écrit sous la forme suivantes [8] [1] :

$$\begin{cases} \dot{U} = \alpha U - \beta UV \\ \dot{V} = -\gamma V + \delta UV \end{cases} \quad (1.9)$$

où α, β, γ et δ sont des réels positifs

α : représente le taux de croissance des proies en absence des prédateurs.

β : représente le taux de proies chassées par les prédateurs.

γ : représente le taux de mortalité naturelle des prédateurs en absence des proies.

δ : représente le taux de croissance des prédateurs qui n'est pas forcément égale au taux de proies chassées.

Après avoir factoriser le système (1.9) devient :

$$\begin{cases} \dot{U} = U(\alpha - \beta V) \\ \dot{V} = V(\delta U - \gamma) \end{cases} \quad (1.10)$$

Tenter de trouver une solution explicite vire vers l'échec. Pour cela on opte pour l'étude qualitative du système (1.10), afin de prédire le comportement des solutions.

On trouve ci-dessous le graphe dans la figure (1.2), représentant les composantes $U(t)$ et $V(t)$ de la solution du système (1.10) en fonction du temps. La proportion de prédateurs par rapport aux

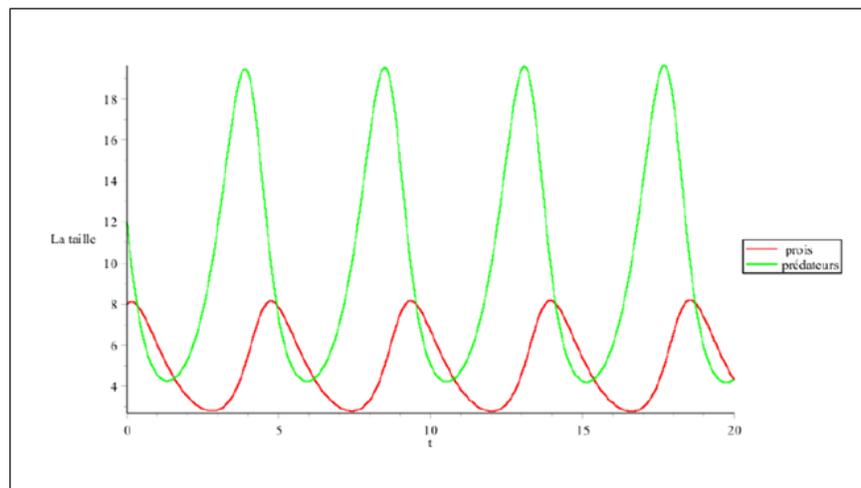


FIGURE 1.2 – Évolution simultanée des effectifs de proies et de prédateurs.

proies diminue et la population de proies augmente. Lorsqu'il y a beaucoup de proies, le nombre de prédateurs augmente systématiquement. Ce comportement cyclique résultant se répète et est représenté comme la plus grande trajectoire fermée de la figure. Au cas de légères perturbations dans le système (pour modéliser d'autres facteurs, par exemple dans ce présent mémoire), le comportement qualitatif change.

Ainsi le portrait de phase qui résume cela est donné par [8] :

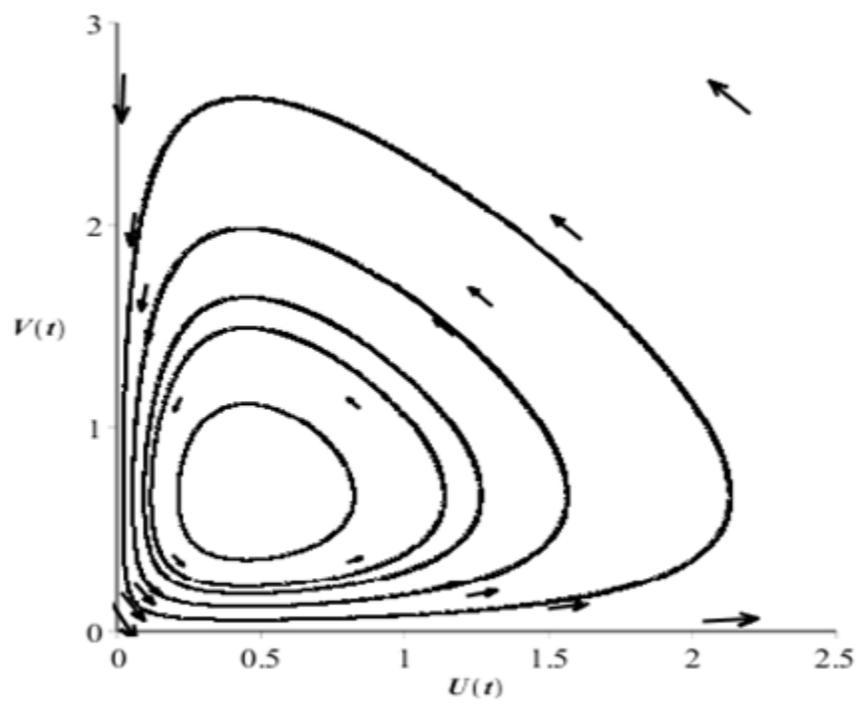


FIGURE 1.3 – Portrait de phase du modèle Lotka-Volterra dans le 1^{er} quadrant du plan.

2.1 Présentation du modèle

Le modèle mathématique utilisé dans cette étude a été inspiré du modèle classique de Lotka-Volterra. Pour but de simulation de la dynamique des prédateurs et de celle des proies, le modèle Lotka Volterra a été modifié d'une manière appropriée pour construire le modèle de dynamique de populations d'individus infectés, et de ceux en bonne santé lors de la propagation de l'épidémie COVID-19, suivant [7] :

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = ah(t) - bh(t)i(t) + ei(t) \\ \dot{i}(t) = bh(t)i(t) + i(t)(c - d - e) \end{cases} \quad (2.1)$$

où a, b, c, d, e sont des paramètres réels positifs.

- $h(t)$: La fonction qui représente la population d'individus en bonne santé en fonction du temps.
- $i(t)$: La fonction qui représente la population d'individus infectés en fonction du temps.
- a : Le taux d'immigration des individus sains.
- b : Le taux d'infection qui est égal à $(1 - \text{taux de protection})$.
- c : Le taux d'immigration des individus infectés.

- d : Le taux de mortalité.
- e : Le taux de guérison.

Pour une étude mathématique plus simple du modèle (2.1), il est plus commode d'utiliser x et y à la place de h et i . Posons alors :

$$h(t) = x(t) \text{ et } i(t) = y(t)$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - bxy + ey; \\ \dot{y}(t) = bxy + (c - d - e)y. \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour des raisons biologiques, on ne considère que $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

2.2 Étude qualitative du modèle

On étudie qualitativement le modèle (2.2) suivant les différentes situations données par les valeurs variées des paramètres.

2.2.1 Taux d'immigration non nuls

Il s'agit d'étudier le modèle dans le cas où $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

Stabilité des points d'équilibre

Proposition 2.2.1. *Dans le cas où $a \neq 0$ et $c \neq 0$, le modèle (2.2) admet deux points d'équilibre :*

$$P_0 = (0, 0) \text{ et } P_1 = \left(\frac{d + e - c}{b}, \frac{-a(d + e - c)}{b(c - d)} \right)$$

Si $(c - d) < 0$ Le point P_0 est un point selle et le point P_1 est un nœud attractif ou un foyer attractif.

- *Un seul point d'équilibre P_0 si $(c - d) > 0$ qui est un point selle.*
- *Un seul point d'équilibre P_0 pour $(c - d) = 0$ qui est point selle.*

Démonstration.

1) Les points d'équilibres :

Les points d'équilibres du modèle (2.2) satisfont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases}$$

Ceci implique :

$$\begin{cases} ax - bxy + ey = 0 \\ y(bx + c - d - e) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

La première équation du système(2.3) donne :

$$y = \frac{-ax}{e - bx} \quad (2.4)$$

Et la seconde équation donne :

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{d + e - c}{b} \quad (2.5)$$

En remplaçant $y = 0$ dans la première équation du système (2.3),on obtient :

$$x = 0$$

De même, si on remplace x par $\frac{d + e - c}{b}$ dans la première équation du système (2.3), on obtient :

$$y = \frac{-a(d + e - c)}{b(c - d)}$$

Ainsi, notons :

$$P_0 = (0, 0), P_1 = \left(\frac{d + e - c}{b}, \frac{-a(d + e - c)}{b(c - d)} \right)$$

Le point P_0 est toujours un points d'équilibre pour le système (2.2).

Ici on retiendra que les points d'équilibres positifs, c'est à dire les points d'équilibres dont les abscisse et les ordonnées sont positives.

Afin de discuter le nombre de points d'équilibres du système (2.2) et leurs stabilité, on distingue trois cas :

$$(c - d) < 0 :$$

Dans ce cas,

$$d + e - c > e$$

Ce qui donne que,

$$d + e - c > 0$$

Donc, P_1 est un point d'équilibres du modèle (2.2), et ce dernier admet deux points d'équilibres dans ce cas.

2) La stabilité des points d'équilibres du système (2.2)

La nature des points d'équilibres du système (2.3) dépend du signe des valeurs propres de la matrice jacobienne aux points P_0 et P_1 .

La matrice jacobienne du système (2.2) en un point (x, y) est donnée par :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} a - bx & -bx + e \\ by & bx + (c - d - e) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Ainsi, la matrice jacobienne de (2.2) au point P_0 s'écrit :

$$J_{(P_0)} = \begin{pmatrix} a & e \\ 0 & (c - d - e) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La matrice (2.7) est diagonale, donc admet les deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = a > 0,$$

et

$$\lambda_2 = c - d - e < 0.$$

Par conséquent P_0 est un col (ou point selle). Il est instable.

La matrice jacobienne au point p_1 est donnée par :

$$J_{(P_1)} = \begin{pmatrix} \frac{ae}{c-d} & c-d \\ \frac{-a(d+e-c)}{c-d} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice (2.8) est donné par :

$$P_\lambda = \lambda^2 - \lambda \frac{ae}{c-d} + a(d+e-c)$$

Le discriminant du polynôme caractéristique P_λ est donné par :

$$\Delta = \left[\left(\frac{ae}{c-d} \right)^2 - 4a(d+e-c) \right]$$

La trace de la matrice (2.8) est exprimée par :

$$tr(J_{P_\lambda}) = \frac{ae}{c-d}$$

Le déterminant de la matrice (2.8) est exprimé par :

$$det(J_{P_1}) = a(d+e-c)$$

Dans ce cas là on a la $tr(J_{(P_1)})$ et le $det(J_{P_1})$ qui sont positifs cela engendre que le point P_1 est soit un nœud attractif pour Δ positif ou un foyer attractif pour Δ négatif.

Isoclines du système (2.2)

- **Isocline verticale** : c'est la zone sur laquelle s'annule la composante \dot{x} . C'est-à-dire

$$y = \frac{-ax}{e-bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b}$$

- **Isocline horizontale** : c'est la zone sur laquelle s'annule la composante \dot{y} . C'est à dire :

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{d+e-c}{b}$$

Ainsi, l'isocline horizontale du système (2.2) est constituée de la réunion de l'axe des abscisses ($y = 0$) avec la droite d'équation :

$$x = \frac{d+e-c}{b}$$

Direction du champ de vecteurs du système (2.2)

• Direction du champ de vecteurs sur l'isocline verticale :

Au points du plan $x = 0$, on a $\dot{y} \leq 0$. Donc le champ de vecteurs sur l'axe des abscisses est vertical et dirigé vers le bas.

De même pour la deuxième courbes constituant l'isocline

$$y = \frac{-ax}{e - bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b} \quad (2.9)$$

En remplaçant dans la deuxième équation du système (2.2), la valeur de y par $\frac{-ax}{e - bx}$, on obtient :

$$\dot{y} = y(bx + c - d - e).$$

Puisque $y > 0$, alors pour que \dot{y} soit négatif il faut et il suffit qu'on ait :

$$x < \frac{c + d - e}{b}.$$

Donc, le champ de vecteurs sur la courbe est donnée par :

$$y = \frac{-ax}{e - bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b}$$

est vertical et dirigé vers le bas dans la partie du plan

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x < \frac{c + d - e}{b}\},$$

et est dirigé vers le haut dans le reste du plan.

• Direction du champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :

Pour $y = 0$, on a $\dot{x} \geq 0$. Donc le champ de vecteurs sur la droite ($y = 0$) est horizontal et dirigé vers la droite.

De même pour la seconde courbe constituant l'isocline horizontale :

$$x = \frac{e + d - c}{b} \quad (2.10)$$

Pour avoir,

$$\dot{x} > 0$$

Il faut que

$$ax + y(e - bx) > 0.$$

C'est-à-dire,

$$y(e - bx) > -ax$$

Puisque $y > 0$, alors :

$$x < \frac{e}{b}$$

De la même façon, en prenant en considération que $y > 0$,

$$\dot{x} < 0 \iff x > \frac{e}{b}$$

C'est ainsi que, le champ de vecteurs sur cette partie (2.10) de l'isocline horizontale prend une allure horizontale qui est dirigée vers la gauche dans la partie du plan

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, y > \frac{-ax}{e - bx}, \text{ et } x < \frac{e}{b}\}$$

et vers la droite dans l'autre partie du plan.

. Direction du champ de vecteurs sur le reste du 1^{er} quadrant du plan :

On a :

$$\dot{x} > 0 \iff ax + y(e - bx) > 0$$

Donc,

$$y(e - bx) > -ax$$

Comme $y > 0$,

$$x < \frac{e}{b}$$

Ainsi,

$$\dot{x} < 0 \iff x > \frac{e}{b}$$

D'où le champ de vecteurs est dirigé vers la droite sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x < \frac{e}{b} \text{ et } y > 0\}$$

et est dirigé vers la gauche sur le reste du quadrant du plan. D'autre part, on a :

$$\dot{y} > 0 \iff bxy + (c - d - e)y > 0.$$

C'est-à-dire

$$y(bx + c - d - e) > 0$$

Donc

$$y > 0 \quad x > \frac{d + e - c}{b}$$

De même,

$$\dot{y} < 0 \iff bxy + (c - d - e)y < 0$$

Comme $y > 0$, ceci signifie que :

$$x < \frac{d + e - c}{b}$$

D'où le champ de vecteur est dirigé vers le haut sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad x > \frac{d + e - c}{b} \text{ et } y > 0\}$$

et est dirigé vers le bas sur le reste du quadrant du plan.

4) Représentation du champ de vecteurs du système (2.2) par la figure (2.1) :

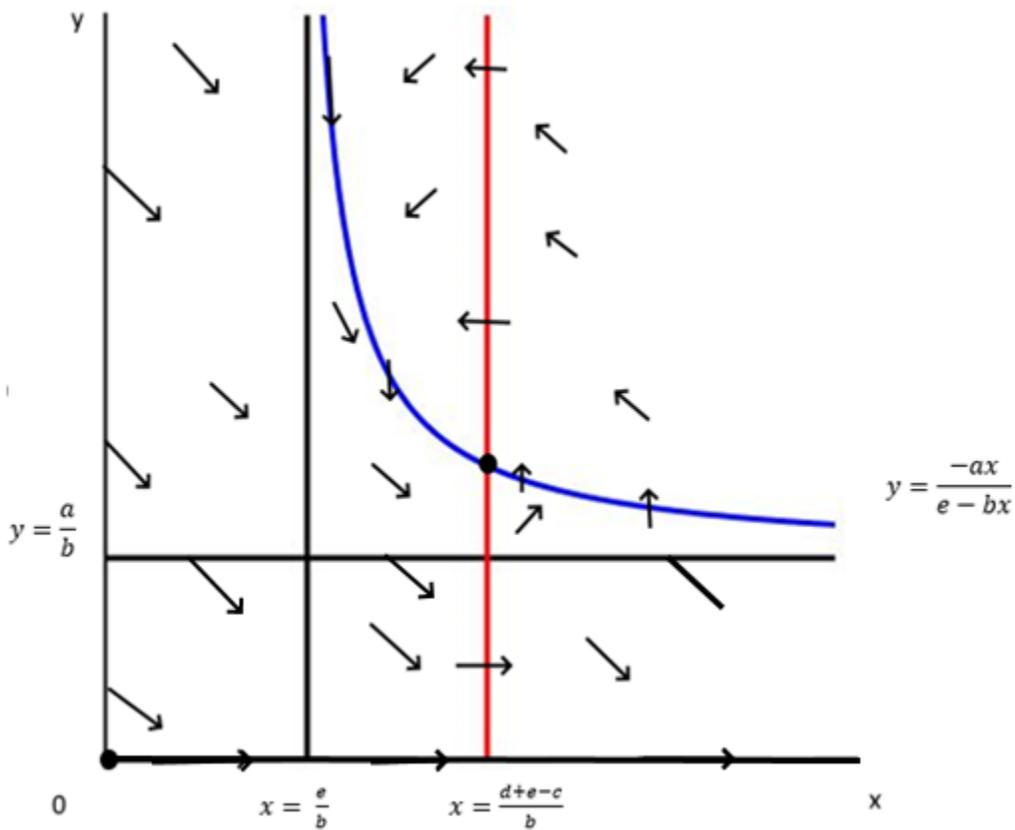


FIGURE 2.1 – Champ de vecteurs du système (2.2) dans le premier quadrant du plan, pour $(c-d) < 0$.

2^{me} cas $(c-d) > 0$:

On a :

$$P_1 = \left(\frac{d+e-c}{b}, \frac{-a}{b} \cdot \frac{d+e-c}{c-d} \right)$$

Dans ce cas, $d - c + e$ peut être, soit positif, soit négatif, ou nul.

- Si $d - c + e = 0$, alors le point P_1 coïncide avec le point P_0 , dans ce cas le système (2.2) admet l'origine qui est un col comme le seul point d'équilibre.
- Soit $d - c + e > 0$: Alors, l'ordonnée du point P_1 est négative, et comme seul les points de coordonnées positives ont un intérêt biologique, on ne retiendra pas le point P_1 dans ce cas, et donc le modèle (2.2) admet l'origine qui est un col comme seul point d'équilibre.

Ainsi on a qu'un seul point d'équilibre :

$$P_0 = (0, 0).$$

2) Les isoclines du système (2.2) :

. Isocline verticale :

On a,

$$\dot{x} = 0 \iff ax + ey - bxy = 0$$

Donc l'isocline verticale est la courbe d'équation :

$$y = \frac{-ax}{e - bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b}.$$

. Isocline horizontale :

On a,

$$\dot{y} = 0 \iff y(bx + c - d - e) = 0$$

Alors,

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e + d - c}{b}.$$

Ainsi l'isocline horizontale du système (2.2) est constituée de la réunion de l'axe des abscisses ($y = 0$) et la droite d'équation $x = \frac{e + d - c}{b}$.

3) Le champ de vecteurs du système (2.2) :

. Le champ de vecteurs sur l'isocline verticale :

En procédant de la même manière qu'au premier cas on aboutit à un champ de vecteurs vertical, dirigé vers bas sur l'axe des y et dirigé vers le haut sur la courbe :

$$y = \frac{-ax}{e - bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b} \tag{2.11}$$

. Le champ de vecteurs sur le reste du plan :

$$\dot{x} > 0 \iff ax - bxy + ey > 0$$

C'est-à-dire,

$$x < \frac{e}{b} \text{ et } y > \frac{-ax}{e - bx}$$

Le champ de vecteurs sera diriger vers la droite dans la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x > \frac{e}{b} \text{ et } y < \frac{-ax}{e - bx}\} \cup \{x < \frac{e}{b} \text{ et } y > \frac{-ax}{e - bx}\},$$

et il sera dirigé vers la gauche dans le reste du premier quadrant. De même,

$$\dot{y} > 0 \iff y(bx + c - d - e) > 0$$

C'est-à-dire Puisque $y > 0$,

$$x > \frac{d - c + e}{b}$$

Le champ de vecteurs sera donc dirigé vers le haut dans la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x > \frac{d - c + e}{b}\}$$

et, vers le bas dans le reste du premier quadrant du plan.

3) Représentation du champ de vecteurs du système (2.2) par la figure (2.2) :

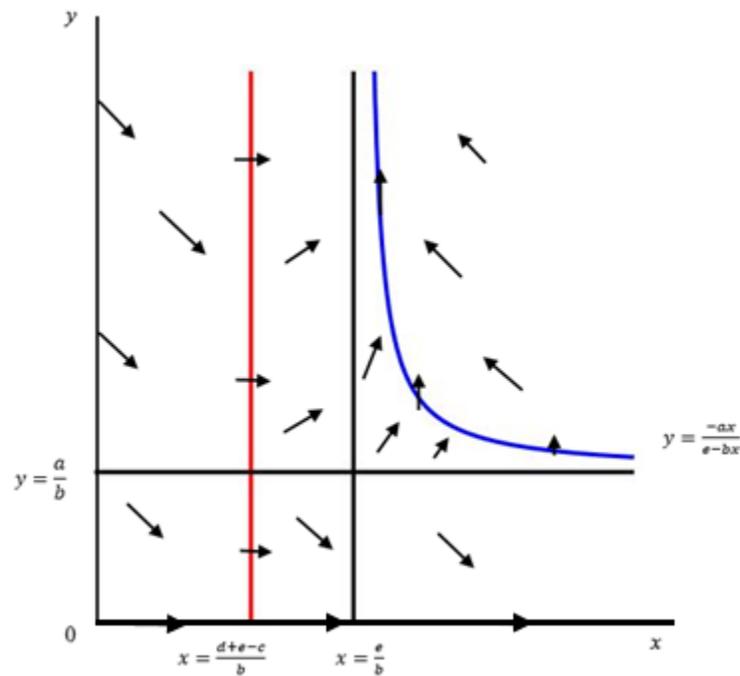


FIGURE 2.2 – Champ de vecteurs du système (2.2) dans le premier quadrant du plan dans le cas $c - d > 0$ et $d - c + e > 0$.

- Soit maintenant $d - c + e < 0$: L'abscisse du point P_1 est négative, et on ne considère que P_0 comme point d'équilibre du système (2.2) dans ce cas. De la même manière précédente on arrive aux isoclines :

- **Isocline verticale** : C'est la zone où s'annule la composante \dot{x} . On a

$$\dot{x} = 0 \iff ax + y(e - bx) = 0$$

Donc est la courbe d'équation :

$$y = \frac{-ax}{e - bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b}.$$

- **Isocline horizontale** : On a

$$\dot{y} = 0 \iff y(x - c - d - e) = 0$$

C'est-à-dire,

$$y = 0 \text{ ou } x = d - c + e$$

Comme $d - c + e < 0$, alors l'isocline horizontale est l'axe des abscisses ($y = 0$).

- **1) La stabilité du point d'équilibre du système (2.2) dans ce cas :**

D'après les valeurs propres de la matrice jacobienne au point P_0 (2.7), on a :

$$\lambda_1 = a > 0$$

et,

$$\lambda_2 = d + e - c > 0$$

Donc P_1 est un nœud répulsif.

- **2) Le champ de vecteurs sur les isoclines :**

- **Le champ de vecteurs sur l'isocline verticale** : Le champ de vecteurs est vertical, dirigé vers le haut sur la courbe d'équation (2.11).

• **Le champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :**

Le champ de vecteurs sur l'axe des abscisses ($y = 0$) dans le premier quadrant du plan est dirigé vers la droite.

• **3) Le champ de vecteurs sur le reste du plan :**

On a pour

$$\dot{x} > 0$$

le champ est dirigé vers la droite sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x > \frac{e}{b} \text{ et } y < \frac{-ax}{e - bx}\} \cup \{x < \frac{e}{b} \text{ et } y > \frac{-ax}{e - bx}\}$$

et il sera dirigé vers la gauche dans le reste du premier quadrant du plan. D'autre part

$$\dot{y} > 0 \iff y(bx + c - d - e) > 0$$

C'est-à-dire,

$$y > 0 \text{ et } x > \frac{d + e - c}{b}.$$

Ainsi, le champ de vecteurs est dirigé vers le haut sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, y > 0 \text{ et } x > \frac{d + e - c}{b}\}$$

l'étude de $\dot{y} < 0$ est négligeable dans ce cas car comme mentionner précédemment, pour des raisons biologiques on ne considère que le premier quadrant positif.

• **4) Représentation du point d'équilibre P_0 et du champs de vecteurs pour $d + e - c < 0$:**

3^{me} cas : $(c - d) = 0$:

Dans le cas où $c - d = 0$, le système (2.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - bxy + ey; \\ \dot{y}(t) = y(bx - e). \end{cases} \quad (2.12)$$

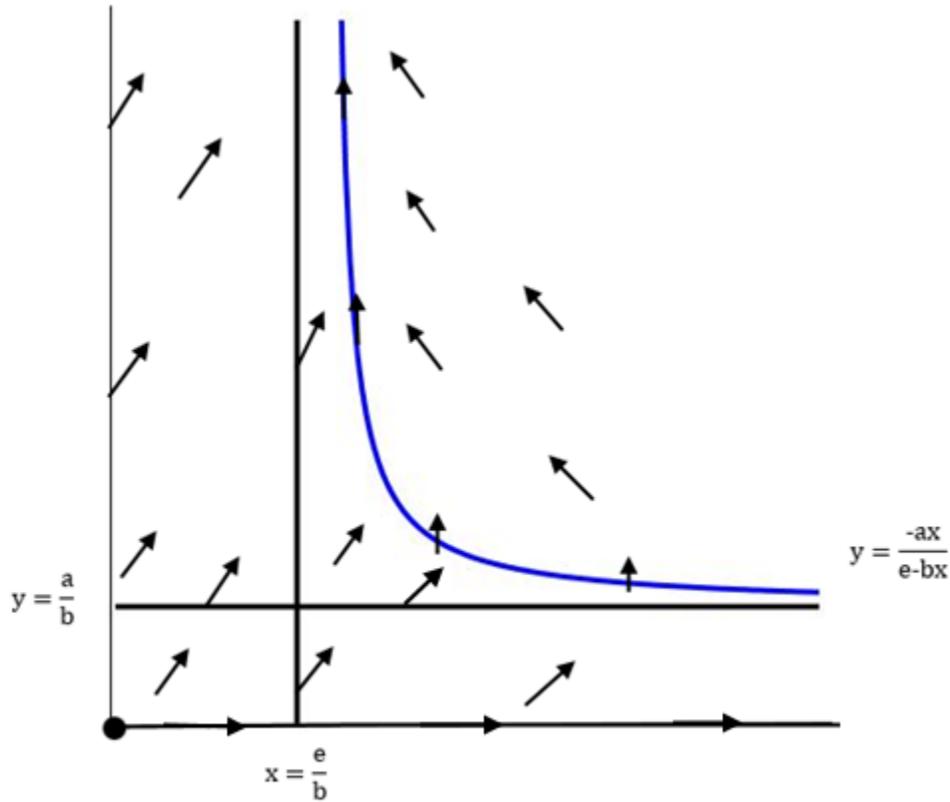


FIGURE 2.3 – Champ de vecteurs du système (2.2) dans le premier quadrant du plan dans le cas $c - d > 0$ et $d - c + e < 0$.

1) Les points d'équilibre du système (2.12) :

On a,

$$\dot{x} = 0 \iff y = \frac{-ax}{e - bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b}$$

D'autre part,

$$\dot{y} = 0 \iff y(bx - e) = 0$$

Donc,

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e}{b}$$

En remplaçant $y = 0$, dans $y = \frac{-ax}{e - bx}$, on obtient $x = 0$. Dans ce cas l'unique point d'équilibre est $P_0 = (0, 0)$.

2) La nature du point d'équilibre :

Soit J la matrice jacobienne associée au système (2.12) donnée par :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} a - by & -by + e \\ by & bx - e \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La matrice jacobienne au point P_0 est donnée par :

$$J_{P_0} = \begin{pmatrix} a & e \\ 0 & -e \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

La matrice (2.14) est diagonale, alors les valeurs propres de cette dernière sont les éléments de sa diagonale :

$$\lambda_1 = a > 0$$

$$\lambda_2 = -e < 0$$

ce qui conclut que P_0 est un col.

3) Les isoclines du système (2.12) :

• **Isocline verticale :**

On a,

$$\dot{x} = 0 \iff ax + ey - bxy = 0$$

Donc l'isocline verticale du système (2.12) est la courbe d'équation :

$$y = \frac{-ax}{e - bx} \text{ avec } x \neq \frac{e}{b}$$

• **Isocline horizontale :**

On a,

$$\dot{y} = 0 \iff y(bx - e) = 0$$

Alors

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e}{b}$$

L'isocline horizontale du système (2.12), est donc la réunion de l'axe des abscisses ($y = 0$) avec la

droite $x = \frac{e}{b}$.

4) Le champ de vecteurs du système (2.12) :

• le champ de vecteurs sur l'isocline verticale :

Le champ de vecteurs est horizontal dirigé vers la droite l'axe des y et sur la courbe d'équation,

$$y = \frac{-ax}{e - bx}, \quad x \neq \frac{e}{b}. \quad (2.15)$$

• le champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :

Le champ de vecteurs est horizontal et dirigé vers la droite sur l'isocline :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x = \frac{e}{b}\}. \quad (2.16)$$

• Le champ de vecteurs sur le reste du plan :

On a,

$$\dot{x} > 0 \iff ax - bxy + ey > 0$$

C'est à dire, le champ de vecteurs sera dirigé vers la droite dans la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x > \frac{e}{b} \text{ et } y < \frac{-ax}{e - bx}\} \cup \{x < \frac{e}{b} \text{ et } y > \frac{-ax}{e - bx}\}$$

et il sera dirigé vers la gauche dans le reste du premier quadrant du plan. D'autre part

$$\dot{y} > 0 \iff y(bx - e) > 0$$

Puisque $y > 0$,

$$x > \frac{e}{b}$$

le champ de vecteurs sera donc, dirigé en haut dans la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x > \frac{e}{b} \text{ et } y > 0\}.$$

et sera dirigé vers le bas dans le reste du premier quadrant du plan.

Représentation des points d'équilibre et du champ de vecteurs du système (2.12) par la figure (2.4) :

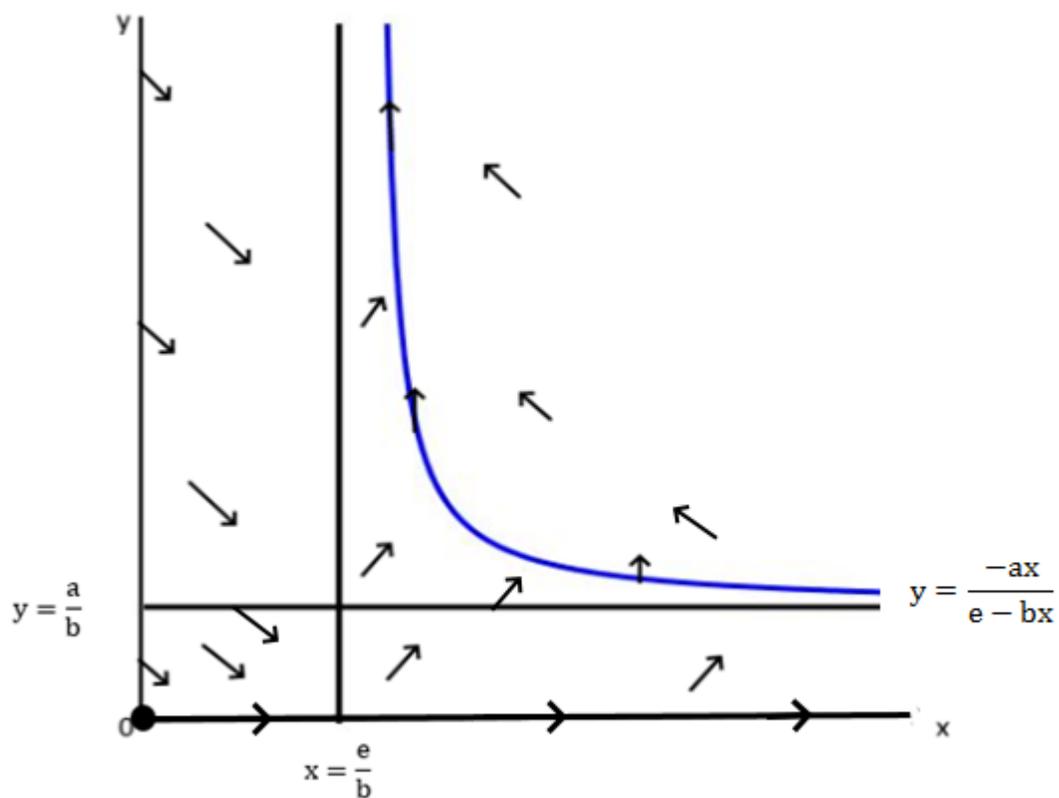


FIGURE 2.4 – Champ de vecteurs du système (2.12) dans le premier quadrant du plan.

□

2.2.2 Taux d'immigration nuls

On suppose dans ce partie que $a = c = 0$.

Stabilité des points d'équilibre

Proposition 2.2.2. *Dans le cas où $a = 0$ et $c = 0$, le modèle (2.2) devient :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -bxy + ey; \\ \dot{y}(t) = bxy + y(-d - e). \end{cases} \quad (2.17)$$

Alors, le système (2.22) admet la droite $P = (x, 0)$ comme point d'équilibre qui est des point non hyperboliques.

Démonstration.

1) **Les points d'équilibre du système (2.22) :**

Les points d'équilibres du système (2.22) satisfont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Ceci implique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(-bx + e) = 0 \\ \dot{y}(t) = y(bx - d - e) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

La première équation du système (2.24) donne :

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e}{b}$$

et la seconde équation donne :

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e + d}{b}$$

D'où on abouti à deux points d'équilibre pour le système (2.22) :

$$P_0 = \left(\frac{e}{b}, 0\right), P_1 = \left(\frac{e + d}{b}, 0\right)$$

2) Stabilité des points d'équilibre du système (2.22) :

La matrice jacobienne associée au système (2.22) en un point (x,y) s'écrit :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -by & -bx + e \\ by & bx - d - e \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Ainsi, la matrice jacobienne en un point $P = (x^*, 0)$ de la droite $y = 0$ est donnée par :

$$J_{(P)} = \begin{pmatrix} 0 & -bx^* + e \\ 0 & bx^* - d - e \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

La matrice $J(P)$ est diagonale, donc admet les coefficients de la diagonale comme valeurs propres :

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = bx^* - d - e$$

D'où le point P est élémentaire si $bx^* - d - e \neq 0$, et non élémentaire dans le cas contraire.

Dans ce qui suit nous allons tracer le champ de vecteurs du système (2.22). Pour cela nous allons d'abord déterminer les isoclines, puis étudier le sens du champ de vecteurs dans le quadrant du plan :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; x \geq 0 \ y \geq 0\}.$$

□

Isoclines du système (2.22) :

- **Isocline verticale** : c'est la zone géométrique où s'annule \dot{x} .

C'est-à-dire,

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e}{b}$$

Donc l'isocline verticale est la réunion de l'axe des abscisses $y = 0$ avec la droite d'équation

$$x = \frac{e}{b}.$$

- **Isocline horizontales** : c'est la zone géométrique où s'annule \dot{y} :

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{d+e}{b}$$

Donc l'isocline verticale est la réunion de l'axe des abscisses $y = 0$ avec la droite d'équation $x = \frac{e+d}{b}$.

Direction du champ de vecteurs du système (2.22) :

• **Le champ de vecteurs sur l'isocline verticale :**

Sur la droite d'équation $x = \frac{e}{b}$ on a le champ de vecteurs est dirigé vers le bas.

• **Le champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :**

Sur la droite d'équation $x = \frac{e+d}{b}$ le champ de vecteurs est horizontal et dirigé vers la gauche

• **Le champ de vecteurs sur le reste du quadrant du plan :**

On a,

$$\dot{x} > 0 \iff y(-bx + e) > 0$$

puisque $y > 0$, alors :

$$x < \frac{e}{b}$$

Donc, le champ de vecteur est dirigé vers la droite sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; x < \frac{e}{b} \text{ et } y > 0\}$$

est dirigé vers la gauche sur la partie restée du plan.

De même

$$\dot{y} > 0 \iff y(bx - d - e) > 0$$

Comme $y > 0$, alors

$$x > \frac{e+d}{b}$$

Donc, le champ de vecteurs est dirigé vers le haut sur la partie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; x > \frac{e+d}{b} \text{ et } y > 0\}$$

et est dirigé vers le bas sur le reste du plan.

Représentation graphique des champs de vecteurs du système (2.22) dans le 1^{er} quadrant de plan figure (2.6) :

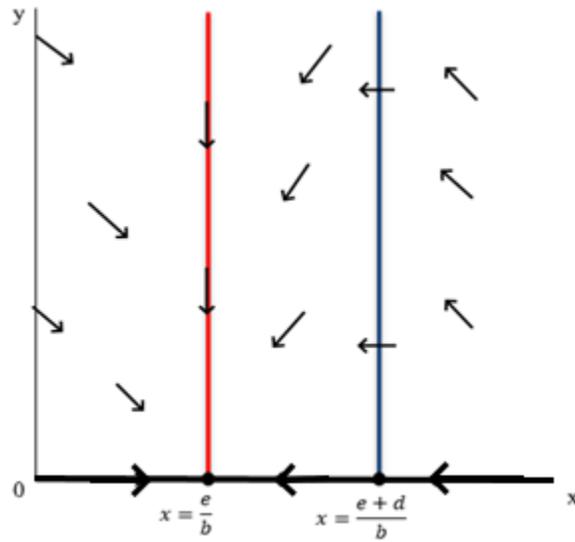


FIGURE 2.5 – Champ de vecteurs et points d'équilibre du système (2.22) dans le premier quadrant du plan.

2.2.3 Taux d'immigration nuls

On suppose dans ce partie que $a = c = 0$.

Stabilité des points d'équilibre

Proposition 2.2.3. *Dans le cas où $a = 0$ et $c = 0$, le modèle (2.2) devient :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -bxy + ey; \\ \dot{y}(t) = bxy + y(-d - e). \end{cases} \quad (2.22)$$

Alors, le système (2.22) admet la droite $P = (x, 0)$ comme point d'équilibre qui est des point non hyperboliques.

Démonstration. **1) Les points d'équilibre du système(2.22) :**

Les points d'équilibres du système (2.22) satisfont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Ceci implique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(-bx + e) = 0 \\ \dot{y}(t) = y(bx - d - e) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

La première équation du système (2.24) donne :

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e}{b}$$

et la seconde équation donne :

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e + d}{b}$$

D'où on abouti à deux points d'équilibre pour le système (2.22) :

$$P_0 = \left(\frac{e}{b}, 0\right), P_1 = \left(\frac{e + d}{b}, 0\right)$$

2) Stabilité des points d'équilibre du système (2.22) :

La matrice jacobienne associée au système (2.22) en un point (x,y) s'écrit :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -by & -bx + e \\ by & bx - d - e \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Ainsi, la matrice jacobienne en un point $P = (x^*, 0)$ de la droite $y = 0$ est donnée par :

$$J_{(P)} = \begin{pmatrix} 0 & -bx^* + e \\ 0 & bx^* - d - e \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

La matrice $J(P)$ est diagonale, donc admet les coefficients de la diagonale comme valeurs propres :

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = bx^* - d - e$$

D'où le point P est élémentaire si $bx^* - d - e \neq 0$, et non élémentaire dans le cas contraire.

Dans ce qui suit nous allons tracer le champ de vecteurs du système (2.22). Pour cela nous allons d'abord déterminer les isoclines, puis étudier le sens du champ de vecteurs dans le quadrant du plan :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; x \geq 0 \ y \geq 0\}$$

□

Isoclines du système (2.22) :

- **Isocline verticale** : c'est la zone géométrique où s'annule \dot{x} .

C'est-à-dire,

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e}{b}$$

Donc l'isocline verticale est la réunion de l'axe des abscisses $y = 0$ avec la droite d'équation $x = \frac{e}{b}$.

- **Isocline horizontales** : c'est la zone géométrique où s'annule \dot{y} .

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{d+e}{b}$$

Donc l'isocline verticale est la réunion de l'axe des abscisses $y = 0$ avec la droite d'équation $x = \frac{e+d}{b}$.

Direction du champ de vecteurs du système (2.22) :

• **Le champ de vecteurs sur l'isocline verticale :**

Sur la droite d'équation $x = \frac{e}{b}$ on a le champ de vecteurs est dirigé vers le bas.

• **Le champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :**

Sur la droite d'équation $x = \frac{e+d}{b}$ le champ de vecteurs est horizontal et dirigé vers la gauche

• **Le champ de vecteurs sur le reste du quadrant du plan :**

On a,

$$\dot{x} > 0 \iff y(-bx + e) > 0$$

puisque $y > 0$, alors :

$$x < \frac{e}{b}$$

Donc, le champ de vecteur est dirigé vers la droite sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; x < \frac{e}{b} \text{ et } y > 0\}$$

est dirigé vers la gauche sur la partie restée du plan.

De même

$$\dot{y} > 0 \iff y(bx - d - e) > 0$$

Comme $y > 0$, alors

$$x > \frac{e+d}{b}$$

Donc, le champ de vecteurs est dirigé vers le haut sur la partie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; x > \frac{e+d}{b} \text{ et } y > 0\}$$

et est dirigé vers le bas sur le reste du plan.

Représentation graphique des champs de vecteurs du système (2.22) dans le 1^{er} quadrant de plan figure (2.6) :

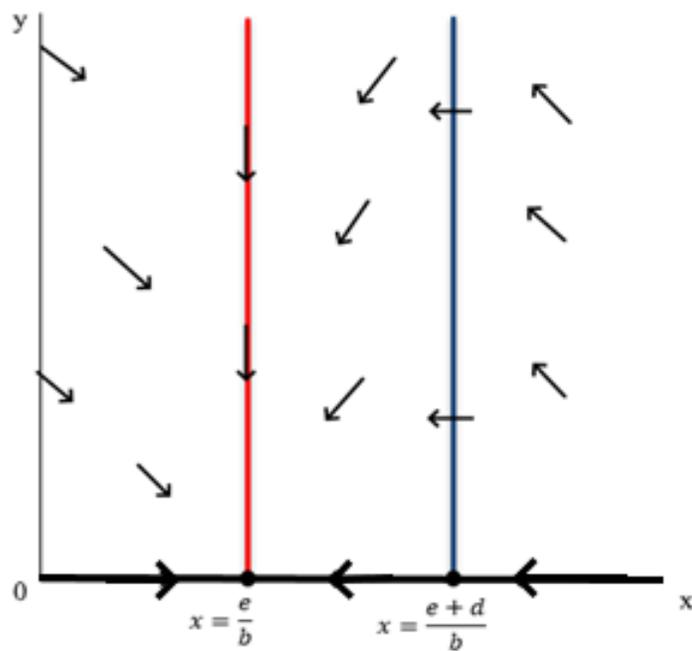


FIGURE 2.6 – Champ de vecteurs et points d'équilibres du système (2.22) dans le premier quadrant du plan.

2.2.4 Taux d'immigration d'individus infectés nul

On considère ici que $c = 0$ et $a \neq 0$.

Stabilité des points d'équilibre

Proposition 2.2.4. *Pour le cas où $a \neq 0$ et $c = 0$ le système (2.2) devient :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - bxy + ey; \\ \dot{y}(t) = bxy + y(-d - e). \end{cases} \quad (2.27)$$

Le système (2.27) admet deux points d'équilibre :

- $P_0 = (0, 0)$ qui est instable.
- $P_1 = \left(\frac{d+e}{b}, \frac{a(d+e)}{d-b}\right)$, qui est un point asymptotiquement stable.

Démonstration.

1) Les points d'équilibre du système (2.27) :

On a

$$\dot{x} = 0 \iff ax - bxy + ey = 0$$

c'est-à-dire,

$$y = \frac{-ax}{e - bx}$$

On a aussi

$$\dot{y} = 0 \iff y(bx + -d - e) = 0$$

c'est-à-dire,

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{d+e}{b}$$

Donc on a deux points d'équilibre :

$$P_0 = (0, 0) \text{ et } P_1 = \left(\frac{d+e}{b}, \frac{a(d+e)}{d-b}\right)$$

2) Stabilité des points d'équilibre :

La matrice jacobienne associée au système (2.27) en un point (x, y) s'écrit :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} a - by & -bx + e \\ by & bx - d - e \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Ainsi, la matrice jacobienne au point P_0 est donnée par :

$$J_{P_0} = \begin{pmatrix} a & e \\ 0 & -d - e \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

La matrice (2.29) est diagonale, donc admet deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = a > 0,$$

et

$$\lambda_2 = -d - e < 0.$$

D'où le point P_0 est un col, donc instable.

D'autre part la matrice jacobienne de P_1 s'écrit :

$$J_{P_1} = \begin{pmatrix} \frac{-ae}{d} & -d \\ \frac{a(d+e)}{d} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice (2.30) est :

$$P_\lambda = [\lambda^2 + \frac{ae}{d}\lambda + ad + ae]$$

Le discriminant de P_λ est :

$$\Delta = \left(\frac{ae}{d}\right)^2 - 4ad + ae$$

La trace de la matrice (2.30) est exprimée par :

$$tr(J_{P_1}) = \frac{-ae}{d} < 0$$

Le déterminant de la matrice (2.30) est donné par :

$$\det(J_{P_1}) = a(d + e) > 0$$

Ainsi selon les valeurs des paramètres a, e et d le point P_0 est un nœud attractif si $\Delta > 0$, et est un foyer attractif si $\Delta < 0$. □

Isoclines du système (2.27) :

- **L'isocline verticale :**

L'isocline verticale est la courbe d'équation :

$$y = \frac{-ax}{e - bx}$$

- **L'isocline horizontale :**

L'isocline horizontale est la réunion de l'axe des abscisses $y = 0$ avec la droite d'équation

$$x = \frac{d + e}{b}.$$

Direction du champ vecteurs du système (2.27) :

- **Le champ de vecteurs sur l'isocline verticale :**

Le champ de vecteurs est vertical dirigé vers le bas sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \frac{e}{b} < x < \frac{e + d}{b} \text{ et } y > \frac{a}{b}\}$$

et il est vertical dirigé vers le haut sur l'autre partie de l'isocline verticale.

- **direction du champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :**

Pour $y = 0$, on a $\dot{x} > 0$. Donc le champ de vecteurs est dirigé vers la droite sur l'axe des abscisses.

De la même manière, pour la droite d'équation $x = \frac{d + e}{b}$, le champ de vecteurs est dirigé vers la gauche sur la partie du plan :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, y > \frac{-ax}{e - bx}, \text{ et } x < \frac{e}{b}\}$$

et est dirigé vers la droite sur l'autre partie.

• **Direction du champ de vecteurs sur le reste du 1^{er} quadrant :**

On a,

$$\dot{x} > 0 \iff ax - bxy + ey > 0$$

Puisque $y > 0$, alors

$$x < \frac{e}{b}$$

Donc le champ de vecteurs est dirigé vers la droite sur la partie du plan :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x < \frac{e}{b} \text{ et } y < \frac{-ax}{e - bx}\}$$

et est dirigé vers la gauche sur la partie restante du plan.

D'autre part,

$$\dot{y} > 0 \iff bxy - dy - ey > 0$$

puisque $y > 0$, alors :

$$x > \frac{d+e}{b}$$

D'où le champ est dirigé vers le haut sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x > \frac{d+e}{b} \text{ et } y > 0\}$$

et est dirigé vers le bas sur le reste du quadrant.

Représentation graphique du champ de vecteurs du système (2.27) dans le 1^{er} quadrant du plan figure(2.7) :

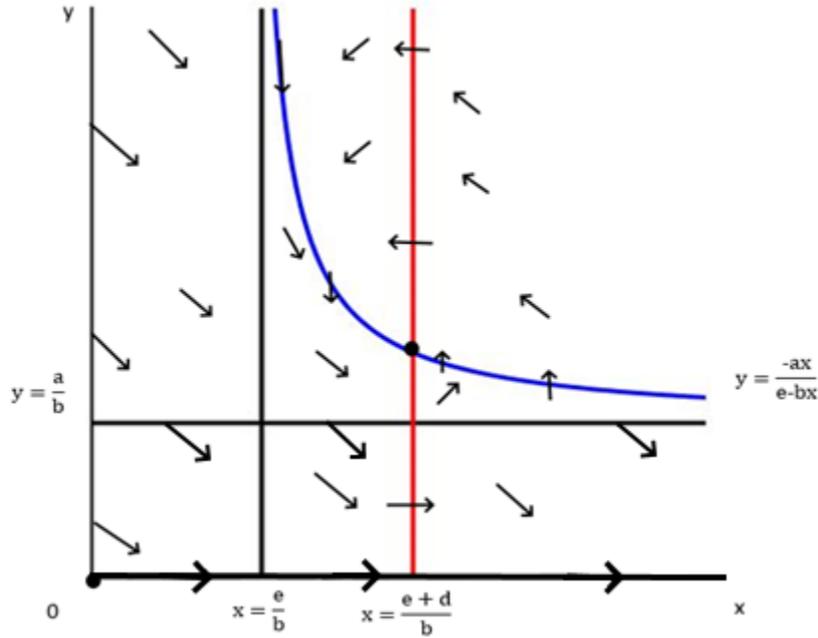


FIGURE 2.7 – Champ de vecteurs, points d'équilibres et isoclines du système (2.27) dans le premier quadrant du plan.

2.2.5 Taux d'immigration d'individus sains nul :

On considère dans cette partie que $a = 0$ et $c \neq 0$

Proposition 2.2.5. *Dans le cas où $a = 0$ et $c \neq 0$, le système (2.2) devient :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -bxy + ey; \\ \dot{y}(t) = bxy + y(c - d - e). \end{cases} \quad (2.31)$$

- Si $(c - d) = 0$ alors, les points d'équilibres du système (2.31) sont tous les points des deux droites $x = \frac{e}{b}$ et $y = 0$.
- Si $(c - d) \neq 0$, alors les points d'équilibre du système (2.31) sont tous les points de l'axe des abscisses.

Tous les points d'équilibre du système (2.31) sont non-hyperboliques.

Démonstration.

1) **Les points d'équilibres du système (2.27) :**

On a,

$$\dot{x} = 0 \iff y(e - bx) = 0$$

C'est-à-dire

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e}{b}$$

De même,

$$\dot{y} = 0 \iff y(bx + c - d - e) = 0$$

C'est à dire

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{e + d - c}{b}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(x, 0)$ est un point d'équilibre du système (2.31).

Si $(c - d) = 0$, alors, $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $(\frac{e}{b}, y)$ est un point d'équilibre du système (2.31).

2) **Stabilité des points d'équilibre du système (2.31) :**

La matrice jacobienne du système (2.27) en un point (x,y) est donnée par :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -by & -bx + e \\ by & bx + c - d - e \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

La matrice jacobienne du système (2.31) au point P_0 s'écrit alors :

$$J_{P_0} = \begin{pmatrix} 0 & -bx + e \\ 0 & bx + c - d - e \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Comme (2.33) est une matrice diagonale donc admet les éléments de la diagonale comme valeurs propres :

$$\lambda_1 = 0, \text{ et } \lambda_2 = (c - d - e) + bx$$

ce qui constitue un point d'équilibre non-hyperbolique.

La matrice jacobienne du système (2.31) au point $P = (\frac{e}{b}, y)$, lorsque $(c - d) = 0$ est :

$$J_{P_1} = \begin{pmatrix} -by & 0 \\ by & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice (2.34) :

$$P_{J_P} = \lambda^2 - by \lambda$$

Ses racines sont :

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -by$$

ce qui est un point non-hyperbolique.

Si $(c - d) = 0$ alors $P_0 = P_1$. □

Isoclines du système (2.31) :

- **L'isocline verticale du système (2.31) :** C'est la zone géométrique où s'annule \dot{x} .

$$\dot{x} = 0 \iff -bxy + ey = 0$$

C'est à dire,

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{e}{b}$$

D'où, l'isocline verticale est la réunion de l'axe des abscisses $y = 0$ avec la droite d'équation

$$x = \frac{e}{b}$$

- **L'isocline horizontale du système (2.31) :** C'est la zone géométrique où s'annule \dot{y} .

$$\dot{y} = 0 \iff bxy + (c - d - e)y = 0$$

Alors,

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{e + d - c}{b}$$

D'où, l'isocline horizontale est la réunion de l'axe des abscisses $y = 0$ avec la droite d'équation

$$x = \frac{e + d - c}{b}.$$

Direction du champ de vecteurs du systèmes (2.31) dans le 1^{er} quadrant du plan :

• **Le champ de vecteurs sur l'isocline verticale :**

Le champ de vecteurs sur l'isocline d'équation $x = \frac{e}{b}$ est dirigé vers le haut.

• **Le champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :**

Sur la droite d'équation $y = 0$ le champ est horizontal dirigé vers la droite sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x < \frac{e}{b}\}$$

et est horizontal dirigé vers la gauche sur l'autre partie du quadrant.

Sur la droite d'équation $x = \frac{e + d - c}{b}$ le champ de vecteurs est horizontal dirigé vers la droite.

• **Le champ de vecteurs sur le reste du 1^{er} quadrant du plan :**

On a

$$\dot{x} > 0 \iff -bxy + ey = 0$$

Puisque $y > 0$, alors

$$x < \frac{e}{b}$$

Ainsi, le champ de vecteur est horizontal dirigé vers la droite sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; x < \frac{e}{b} \text{ et } y > 0\}$$

et est horizontal de direction gauche sur le reste du premier quadrant du plan. D'autre part, on a :

$$\dot{y} > 0 \iff y(bx + c - d - e) > 0$$

Puisque, $y > 0$,

$$x > \frac{e + d - c}{b}$$

Donc, le champ de vecteurs est vertical dirigé vers le haut sur la partie :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; x > \frac{e + d - c}{b}, y > 0\}$$

et est vertical dirigé vers le bas sur le reste du premier quadrant du plan.

Représentation graphique des points d'équilibre et des champ de vecteurs du système

(2.31) (figure (2.8)) :

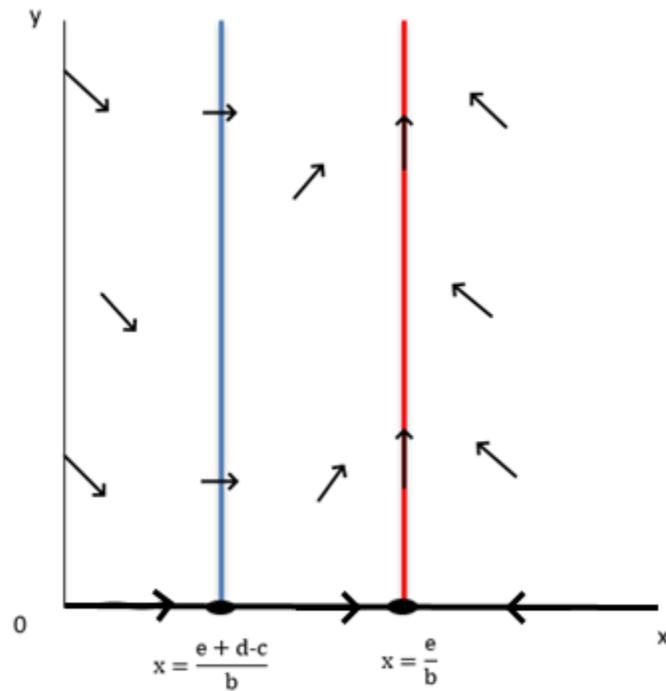


FIGURE 2.8 – Champ de vecteurs et points d'équilibres du système (2.31) dans le premier quadrant du plan.

CHAPITRE 3

SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU MODÈLE ÉPIDÉMIOLOGIQUE AU TEMPS DU COVID - 19

Ce qui suivra sera la simulation de certains résultats en utilisant différentes valeurs des paramètres du modèle (2.31). Nous avons le tracé et le portrait de phase pour chacun des cas.

Nous commencerons avec un nombre égal de population saine et infectée. L'axe des abscisses du tracé réfère la variation du temps en jours et l'axe des ordonnées reflète le pourcentage de la population.

Dans l'interprétation des figures $h(t)$ désigne $x(t)$ et $i(t)$ désigne $y(t)$.

3.1 Simulation numérique où le taux d'immigration des individus sains est nul.

3.1.1 Premier cas

On entame dans ce cas la simulation des résultats avec les valeurs des paramètres suivantes [7] :

$$a = 0, b = 0.3, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.5$$

ainsi le système (2.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.3xy + 0.5y \\ \dot{y}(t) = 0.3xy - 0.5y \end{cases} \quad (3.1)$$

D'après l'étude qualitative précédente qui a été faite sur le système (2.31), On aperçoit que le système (3.1) possède un seul point d'équilibre :

$$P_0 = \left(\frac{0.5}{0.3}, 0\right)$$

qui est une singularité non élémentaire.

Voici ci-dessous le graphe (3.1) qui illustre la simulation numérique des variations des fonctions $h(t)$ et $i(t)$:

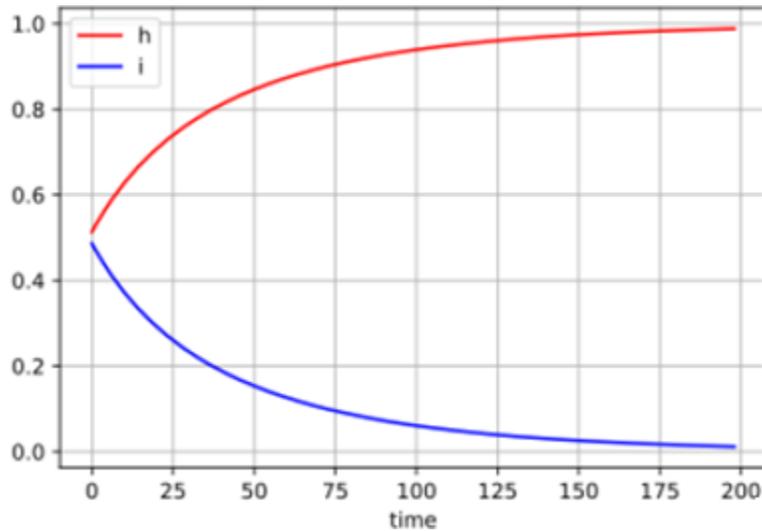


FIGURE 3.1 – la dynamique des fonctions $h(t)$ et $i(t)$ en fonction pour : $a = 0, b = 0.3, 0.5, d = 0.5, e = 0.5$

Interprétation graphique :

Dans le graphe (3.1), la courbe en bleu représente la fonction $i(t)$ qui est le taux des individus infectés, et la courbe en rouge représente la fonction $h(t)$ qui est le taux des individus sains. Pour les valeurs des paramètres prise dans ce cas :

$$a = 0, b = 0.3, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.5$$

On constate que la fonction $i(t)$ est décroissante, qui réfère en réalité à la diminution du taux d'individus infectés vers 0 après 200 jours.

La représentation du portrait de phase du système (3.1) est illustré par la figure (3.2) :

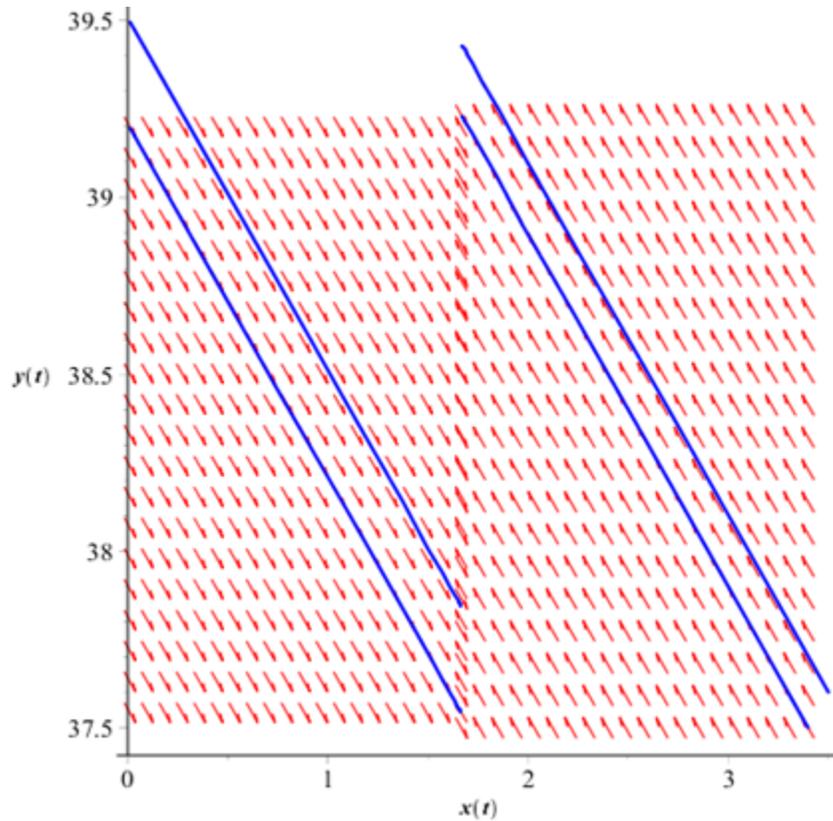


FIGURE 3.2 – le portrait de phase du système (3.1)

On voit clairement sur le portrait de phase, la droite $x(t) = \frac{5}{3}$ qui est une droite de points d'équilibre pour le système (3.1), attirant plusieurs trajectoires, prouvant la stabilisation du nombre d'individus infectés, après un certain temps. Les autres trajectoires décroissent en y , prouvant la régression du nombre d'individus infectés.

3.1.2 Deuxième cas

Pour les valeurs des paramètres suivantes :

$$a = 0, b = 0.1, c = 0.5, d = 0.5 \text{ et } e = 0.5,$$

on abouti à un cas proche du cas précédant avec une diminution du taux d'infection b de 0.5 à 0.1. C'est le cas du système (2.31) étudié dans le chapitre 2 ; il s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.1xy + 0.5y \\ \dot{y}(t) = 0.1xy - 0.5y \end{cases} \quad (3.2)$$

Le système (3.2) admet deux droites de points d'équilibre, il s'agit de la droite $y = 0$ et la droite $x = 5$. qui est une singularité non élémentaire.

Les variations des nombres d'individus infectés et sains en fonction du temps sont illustrées sur la figure (3.3).

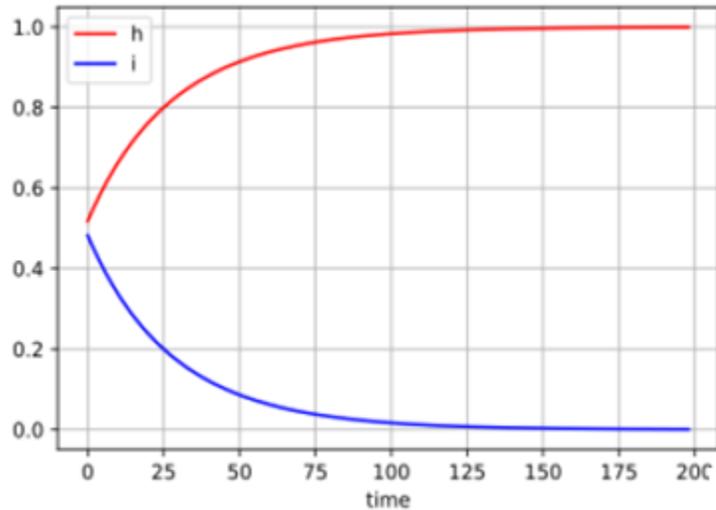


FIGURE 3.3 – La dynamique des fonctions $h(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps, avec : $a = 0, b = 0.1, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.5$

Interprétation graphique :

Dans le graphe (3.3), pour les valeurs des paramètres prise dans ce cas :

$$a = 0, b = 0.1, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.5,$$

la dynamique de la population saine qui est représentée par la courbe en rouge et celle de la dynamique de population infectée qui est représentée en bleu. On constate qu'en augmentant le taux de protection, c'est-à-dire en diminuant le taux d'infection b , la population infectée atteint 0 en seulement 130 jours.

Le portrait de phase du système (3.2) est représenté sur la figure (3.4)

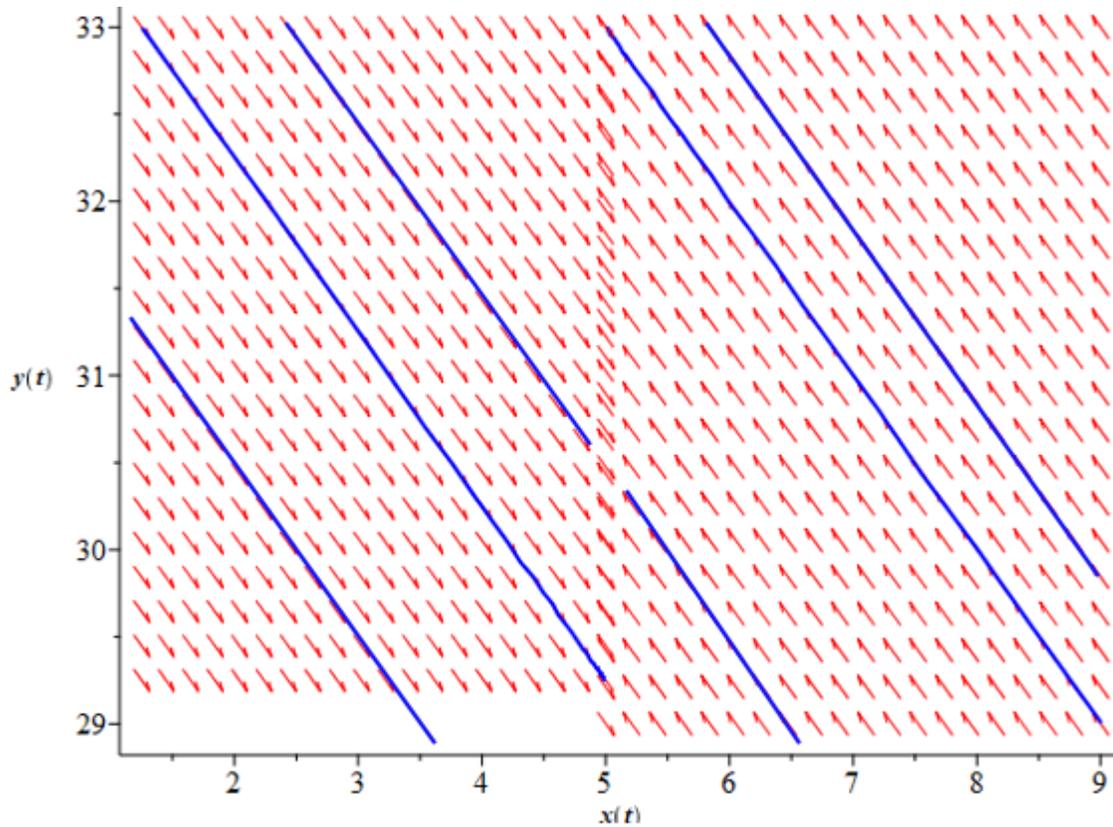


FIGURE 3.4 – le portrait de phase du système (3.2), pour : $a = 0, b = 0.1, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.5$

Sur la figure (3.4), on constate que les trajectoires sur le portrait de phase sont en forme de droites parallèles. Dans le cas où le taux d'immigration des individus sains est nul et le taux d'infection réduit pour les mêmes conditions initiales que dans la figures , cela entraine la diminution de la population infectée en fonction du temps jusqu'à 0.

3.1.3 Troisième cas

Choisissons dans ce cas les valeurs des paramètres :

$$a = 0, b = 0.1, c = 0.5, d = 0.5 \text{ et } e = 0.7.$$

On a $c - d = 0$, le système (2.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.1xy + 0.7y \\ \dot{y}(t) = 0.1xy - 0.7y \end{cases} \quad (3.3)$$

Rappelons qu'à travers l'étude qualitative qui a été faite dans le chapitre précédent sur le système (2.2), le système (3.3) admet ces deux droites d'équations, $x = 7$ et $y = 0$ comme points d'équilibre, qui est non-hyperbolique. Les courbes représentant la variations des nombres d'individus sains et infectés en fonction du temps, sont illustrées sur la figure (3.5) :

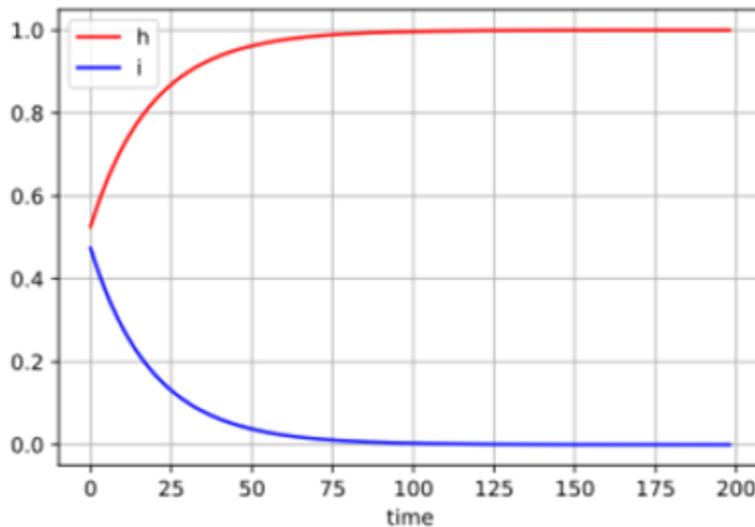


FIGURE 3.5 – la dynamique des fonctions $h(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps, avec : $a = 0, b = 0.1, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.7$

Interprétation graphique :

Dans la figure (3.5), on aperçoit la dynamique des populations saine et infectée représentée avec les fonctions $h(t)$ (ie $x(t)$) et $i(t)$ (ie $y(t)$) respectivement. La population infectée représentée par la courbe en bleu atteint 0, en près de 80 jours, et cela est dû à l'augmentation du taux de protection, dont les gestes barrières, la réduction des sorties et des regroupements, la fermetures des centres de loisirs,... ou à l'augmentation du taux de guérison.

D'autre part, trouvons ci-dessous le portrait de phase figure ((3.6)) illustrant ce cas :
 Le même constat peut être fait sur la figure (3.6) nous présente des segments de droites parallèles.

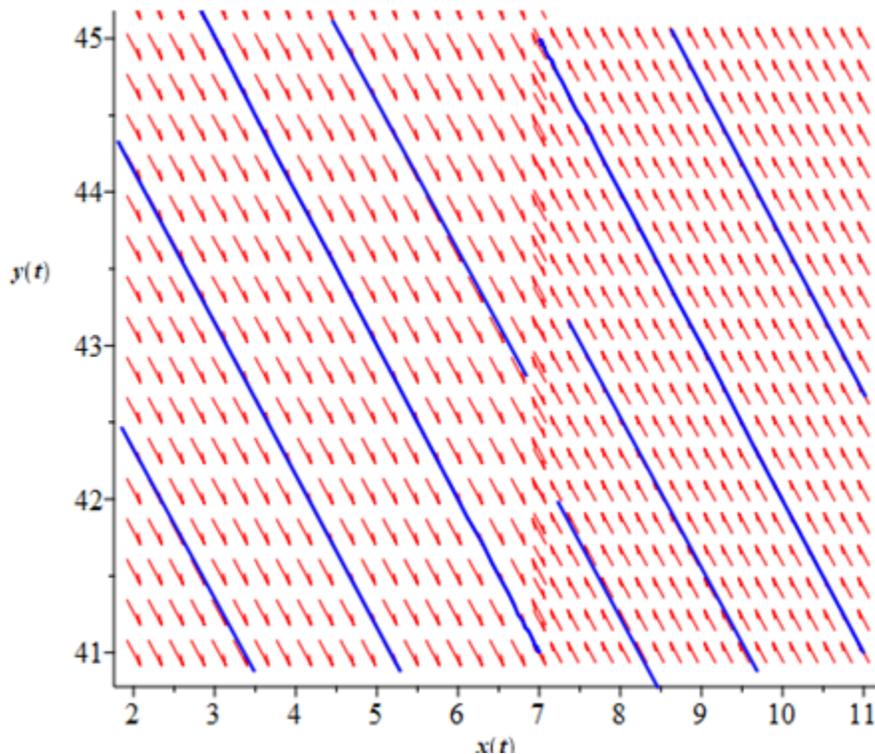


FIGURE 3.6 – Portrait de phase dy système (3.3), pour : $a = 0, b = 0.1, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.7$

Dans le cas où le taux d'immigration des individus sains est nul est le taux d'infection en baisse, la population des individus infectés diminuent en fonction du temps.

3.2 Taux d'immigrations sont nuls :

3.2.1 Quatrième cas

Considérons les valeurs des paramètres suivantes :

$$a = 0, b = 0.1, c = 0, d = 0.5, e = 0.7.$$

On constate que $a = 0, c = 0$, par conséquent le système (2.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.1xy + 0.7y \\ \dot{y}(t) = 0.1xy - 1.2y \end{cases} \quad (3.4)$$

On a vu au chapitre 2 que système admet les droites d'équations $y = 0, x = 7$ et $y = 0, x = 12$. Présentons ci-dessous le graphe(3.7) illustrant la variation de $h(t)$ et de $i(t)$ en fonction du temps dans ce cas :

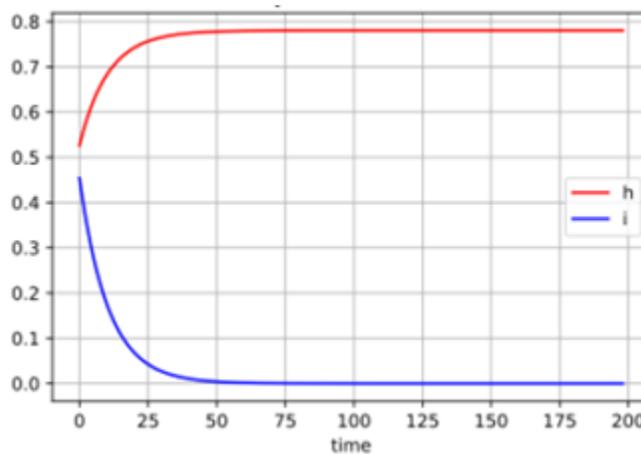


FIGURE 3.7 – Dynamique des fonctions $h(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps, quand : $a = 0, b = 0.1, c = 0, d = 0.5$ et $e = 0.7$

Interprétation graphique

Augmenter le taux de protection (les gestes barrières, le confinement,...) ou de guérison et réduire le taux d'immigration à 0 (interdiction de voyage et du tourisme, confinement total pour la population,...), nous rendent de résultats meilleures car en seulement 60 jours la population infectée représentée en courbe bleue, atteint 0.

Voici ci-dessous le portrait de phase figure((3.8)) illustrant ce cas :

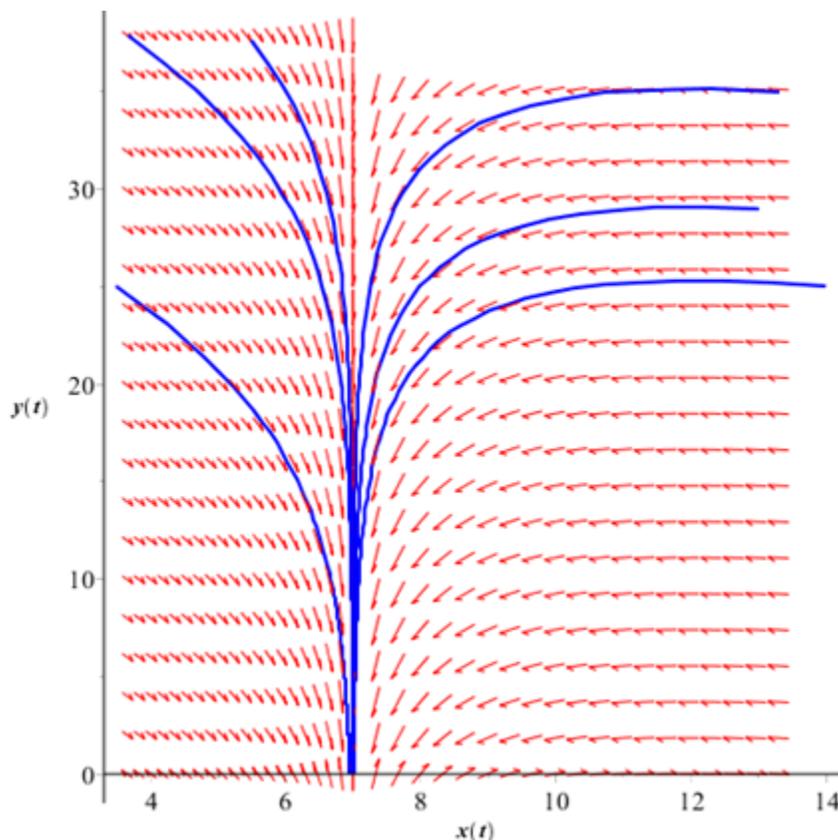


FIGURE 3.8 – Portrait de phase du système (3.4), pour : $a = 0, b = 0.1, c = 0, d = 0.5$ et $e = 0.7$.

Interprétation graphique du portrait de phase du système (3.4) :

Ce portrait de phase nous décrit la convergence rapide du système vers l'état d'équilibre sur $x(t) = 7$ qui est une droite de points d'équilibre et se stabilise sur la droite de points d'équilibre $x(t) = 12$. Cela est dû à l'annulation des taux d'immigration des individus sains et infectés (a, c).

3.2.2 Cinquième cas

On considère dans ce cas :

$$a = 0.05, b = 0.3, c = 0.6, d = 0.5 \text{ et } e = 0.5$$

Le système (2.2) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.05x - 0.3xy + 0.5y \\ \dot{y}(t) = 0.3xy - 0.4y \end{cases} \quad (3.5)$$

On a $c - d > 0$, donc l'étude qualitative dans ce cas s'identifie à celle effectuée sur le système (2.2) où $(c - d) > 0$. Par conséquent, le système (3.5) admet un nœud répulsif comme point d'équilibre, donné par :

$$P_0 = (0, 0)$$

Trouvons ci-dessous le graphe (3.9) illustrant ce cas :

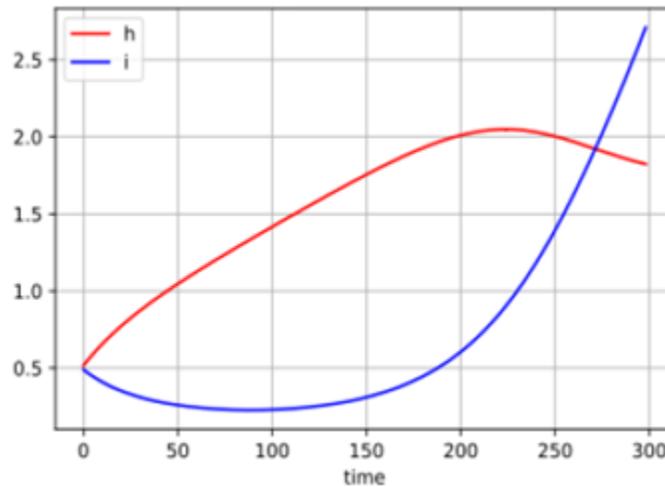


FIGURE 3.9 – Dynamique des fonctions $h(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps, avec : $a = 0.5, b = 0.3, c = 0.6, d = 0.5$ et $e = 0.5$

Interprétation graphique

Dans ce cas pour les valeurs des paramètres choisies, Nous remarquons l'augmentation du taux d'immigration conduit à l'instabilité du système. Par ailleurs les valeurs propres du systèmes sont respectivement 0 et 0.2280. On constate que les valeurs propres positives rendent le système instable, donc le nombre de jours augmente jusqu'à 300 jours.

On voit facilement qu'il y ait initialement une diminution de la population d'individus infectés présenté avec la courbe en bleu, puis la valeur augmente de manière exponentielle avec le temps.

Voici ci-dessous le portrait de phase du système (3.5) représentant ce cas :

Le portrait de phase sur la figure (3.10) montre la perturbation du système due à l'augmentation

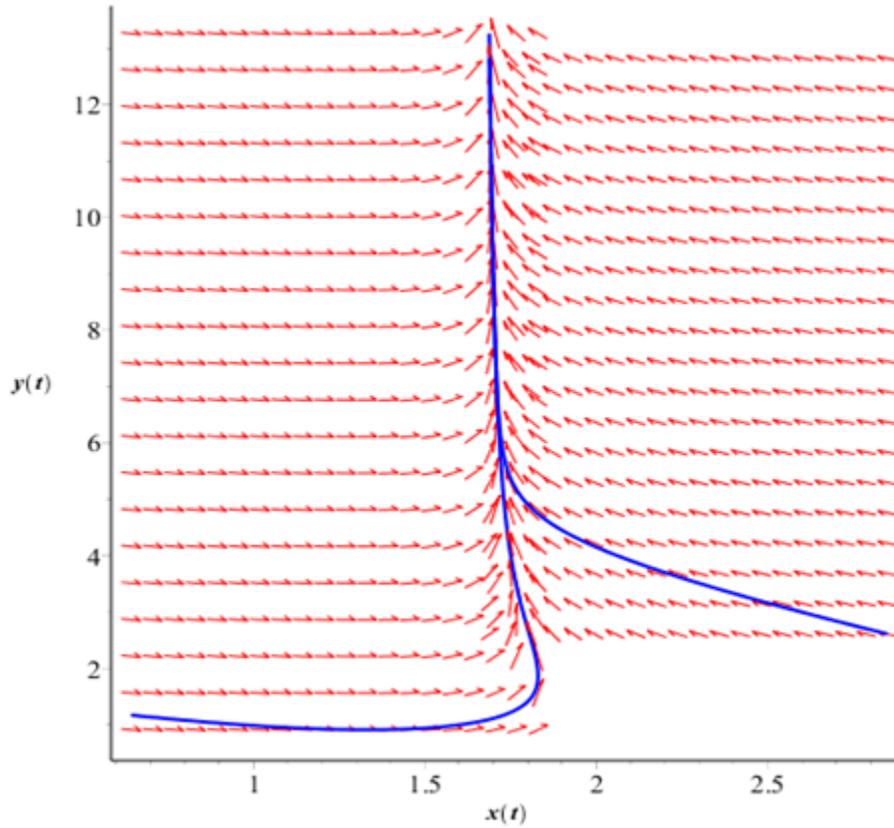


FIGURE 3.10 – Portrait de phase du système (3.5)

du taux d'immigration des individus infectés et cela cause l'augmentation du nombre des jours, car en effet la population des individus infectés 0 qu'après un large temps de 300jours.

La nature du point d'équilibre qui est un nœud répulsif est bien reflété sur le portrait de phase.

3.2.3 Sixième cas

Notons les valeurs des paramètres :

$$a = 0.05, b = 0.3, c = 0.2, d = 0.5 \text{ et } e = 0.5.$$

Le système (2.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.05x - 0.3xy + 0.5y \\ \dot{y}(t) = 0.3xy - 0.8y \end{cases} \quad (3.6)$$

Puisque $c - d < 0$, cela nous donne, d'après l'étude qualitative effectuée sur le système (2.2), le système (3.6) admet respectivement un col et un foyer attractif aux points d'équilibre suivant :

$$P_0 = (0, 0), P_1 = \left(\frac{0.8}{0.3}, \frac{0.04}{0.09} \right)$$

Trouvons ci-dessous le graphe (3.11) représentant ce cas.

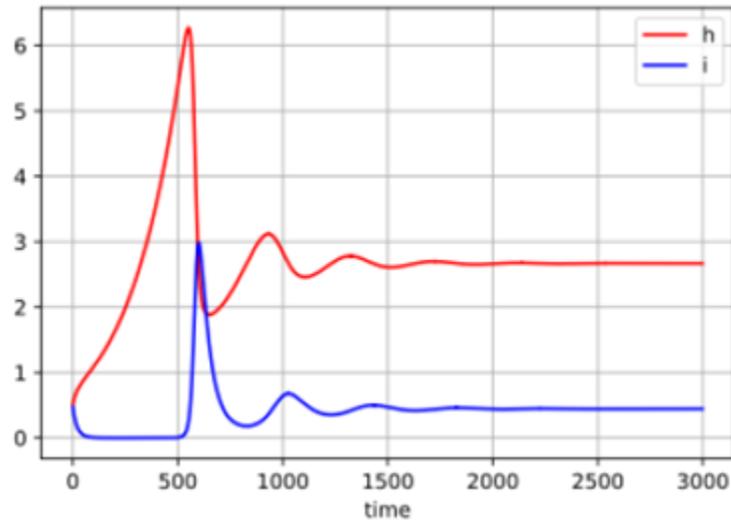


FIGURE 3.11 – la dynamique des fonctions $h(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps, avec : $a = 0.05, b = 0.2, c = 0.5, d = 0.5, e = 0.5$

Interprétation graphique

La dynamique de la population saine $h(t)$ et infectée $i(t)$ dans la figure (3.11) montre que le nombre de jours où la population infectée tend vers 0 a connu une augmentation remarquable, voire jusqu'à 3000 jours. Nous apercevons également des fluctuations dans la dynamique avant que les états stables ne soient atteints (après environs 1250 jours).

Voici le portrait de phase (3.12) illustrant ce cas :

Le portrait de phase montre la convergence du système vers l'état stationnaire. Ainsi, en diminuant

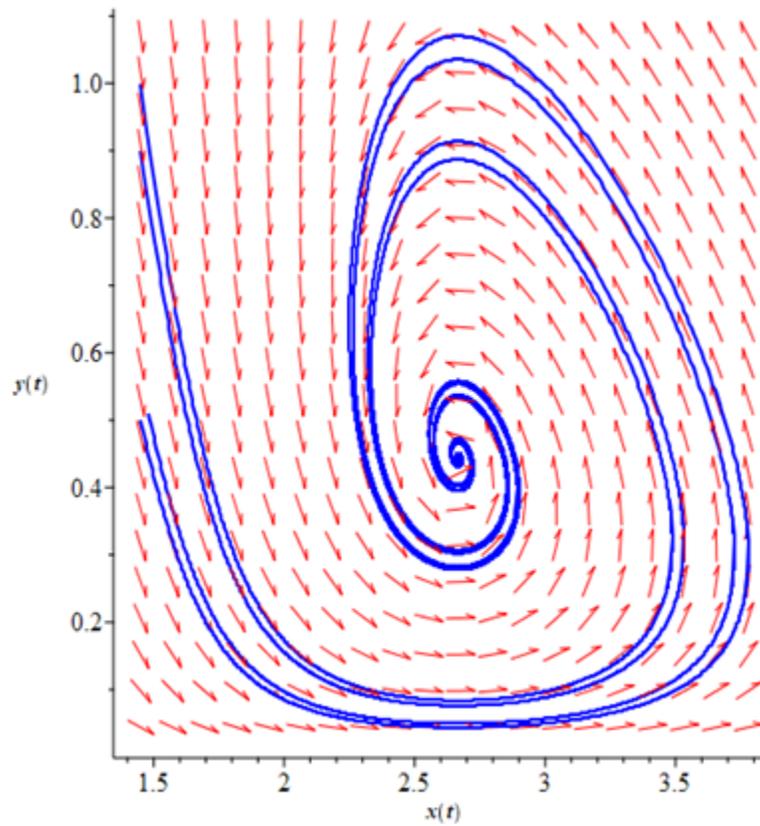


FIGURE 3.12 – le portrait de phase pour : $a = 0.05, b = 0.3, c = 0.2, d = 0.5, e = 0.5$

le taux d'immigration des individus infectés (c), le système devient stable et tend vers un état d'équilibre.

LES PROGRAMMES UTILISÉS POUR LES DIFFÉRENTES FIGURES

On présente dans cet annexe quelques programmes maple qu'on avait utilisé pour obtenir certaines figures de ce mémoire.

Le programme qui a permis de tracer le portrait de la figure (3.2)

```

> with(DEtools) : with(plots) :
Q := phaseportrait([D(x)(t)=-0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t)=0.3·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0)
= 0.011, y(0) = 39.5]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t),
y(t)], labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
U := phaseportrait([D(x)(t) =
-0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t)=0.3·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0)=3.5, y(0)=37.6]],
stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)], labelfont=[TIMES,
BOLDITALIC, 10]) :
V := phaseportrait([D(x)(t)=-0.3·x(t)·y(t) + 0.5
·y(t), D(y)(t)=0.3·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0)=0.010, y(0)=39.2]], stepsize=0.05, scene
=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)], labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
S := phaseportrait([D(x)(t)=-0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t)=0.3·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500,
[[x(0)=3.45, y(0)=37.5]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t),
y(t)], labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :

plots[display](S, Q, U, V);

```

FIGURE 3.13 – Le programme qui a permis de tracer le portrait de la figure (3.2)

Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.4)

Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.4)

Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.6)

```

> with(DEtools) : with(plots) :
Q := phaseportrait([D(x)(t)=-0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3 ·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0 ..500, [[x(0)
= 0.011 , y(0) = 39.5]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels = [x(t),
y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
U := phaseportrait([D(x)(t) =
-0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3 ·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0 ..500, [[x(0) = 3.5, y(0) = 37.6]],
stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES,
BOLDITALIC, 10]) :
V := phaseportrait([D(x)(t)=-0.3·x(t)·y(t) + 0.5
·y(t), D(y)(t) = 0.3 ·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0 ..500, [[x(0) = 0.010, y(0) = 39.2]], stepsize = 0.05, scene
= [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
S := phaseportrait([D(x)(t)=-0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3 ·x(t)·y(t) - 0.5·y(t)], [x(t), y(t)], t=0 ..500,
[[x(0) = 3.45 , y(0) = 37.5]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels = [x(t),
y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]) :

plots[display](S, Q, U, V);

```

FIGURE 3.14 – Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.6)

Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.8)

```

> with(DEtools) : with(plots) :
Q := phaseportrait([D(x)(t)=-0.1·x(t)·y(t) + 0.7·y(t), D(y)(t) = 0.1·x(t)·y(t) - 1.2·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0)
= 3.66, y(0) = 37.9]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)],
labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
U := phaseportrait([D(x)(t)=-0.1
·x(t)·y(t) + 0.7·y(t), D(y)(t) = 0.1·x(t)·y(t) - 1.2·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0) = 5.5, y(0) = 37.6]], stepsize
= 0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)], labelfont=[TIMES,
BOLDITALIC, 10]) :
V := phaseportrait([D(x)(t)=-0.1·x(t)·y(t) + 0.7
·y(t), D(y)(t) = 0.1·x(t)·y(t) - 1.2·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0) = 13, y(0) = 29]], stepsize=0.05, scene=[x(t),
y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)], labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) : A :=
phaseportrait([D(x)(t)=-0.1·x(t)·y(t) + 0.7·y(t), D(y)(t) = 0.1·x(t)·y(t) - 1.2·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0)
= 3.5, y(0) = 25]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)],
labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
S := phaseportrait([D(x)(t)=-0.1·x(t)·y(t) + 0.7·y(t), D(y)(t) = 0.1·x(t)·y(t) - 1.2·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0)
= 13.3, y(0) = 35]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)],
labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
P := phaseportrait([D(x)(t)=-0.1·x(t)·y(t) + 0.7·y(t), D(y)(t) = 0.1·x(t)·y(t) - 1.2·y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0)
= 14, y(0) = 25]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels=[x(t), y(t)],
labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :

plots[display](A, P, Q, V, U, S);

```

FIGURE 3.15 – Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.8)

Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.10)

```

> with(DEtools) : with(plots) :
Q := phaseportrait([D(x)(t)=-0.05·x(t) - 0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3·x(t)·y(t) - 0.4·y(t)], [x(t), y(t)], t=0
..500, [[x(0) = 0.024, y(0) = 1]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels
=[x(t), y(t)], labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
U :=
phaseportrait([D(x)(t) = 0.05·x(t) - 0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = -0.3·x(t)·y(t) - 0.4·y(t)], [x(t), y(t)], t=0
..500, [[x(0) = 0.07, y(0) = 2]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels
=[x(t), y(t)], labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
V :=
phaseportrait([D(x)(t) = 0.05·x(t) - 0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3·x(t)·y(t) - 0.4·y(t)], [x(t), y(t)], t=0
..500, [[x(0) = 1.4, y(0) = 0.5]], stepsize=0.05, scene=[x(t), y(t)], linecolor=blue, thickness=2, color=red, labels
=[x(t), y(t)], labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
plots[display](Q);

```

FIGURE 3.16 – Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.10)

Le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.11)

```

with(DEtools): with(plots):
Q := phaseportrait([D(x)(t) = 0.05·x(t) - 0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3·x(t)·y(t) - 0.8·y(t)], [x(t), y(t)], t = 0
..500, [[x(0) = 1.4481, y(0) = 0.9]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels
= [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
U :=
phaseportrait([D(x)(t) = 0.05·x(t) - 0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3·x(t)·y(t) - 0.8·y(t)], [x(t), y(t)], t = 0..500,
[[x(0) = 1.481, y(0) = 0.51]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels
= [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
V :=
phaseportrait([D(x)(t) = 0.05·x(t) - 0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3·x(t)·y(t) - 0.8·y(t)], [x(t), y(t)], t = 0
..500, [[x(0) = 1.45, y(0) = 0.5]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels
= [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
S := phaseportrait([D(x)(t) = 0.05·x(t) - 0.3·x(t)·y(t) + 0.5·y(t), D(y)(t) = 0.3·x(t)·y(t) - 0.8·y(t)], [x(t), y(t)], t = 0
..500, [[x(0) = 1.449, y(0) = 1]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = blue, thickness = 2, color = red, labels
= [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
plots[display](S, Q, U, V);

```

FIGURE 3.17 – le programme qui a permis de tracer le portrait de phase de la figure (3.11)

Conclusion

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée essentiellement pour étudier des phénomènes réels qui évoluent au cours du temps. Le but de cette théorie est de modéliser des processus qui évoluent dans le temps et d'étudier leur comportement. Cette étude doit permettre de prédire le comportement du système et de le réguler afin d'obtenir les résultats désirés. La théorie des systèmes dynamiques a son origine dans les travaux de Poincaré, à la fin du *XIX* siècle, sur le problème des Trois corps. Poincaré a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système, d'utiliser des arguments topologiques et géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions, considérées comme orbites (ou trajectoires) dans l'espace de phases. Une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire.

Le contenu de ce mémoire porte sur la modélisation de certains phénomènes réels qui sont connus dans la littérature, sous forme de systèmes dynamiques, plus précisément de systèmes différentiels. Le modèle étudié ici concerne l'étude qualitative du modèle épidémiologique au temps du COVID-19 est présenté par un système autonome de deux équations différentielles ordinaires avec des conditions initiales.

L'étude réalisée au cours de ce travail sur des systèmes non linéaires est focalisée sur l'étude d'équilibres et le comportement des trajectoires et leurs stabilité. Ces résultats sont illustrés par des simulations numériques qu'on a effectué sous Maple.

Il serait intéressant d'étudier la stabilité de l'équilibre d'un système composé de deux proies dynamiques et de leur prédateur commun. C'est-à-dire, de faire une étude qualitative sur un modèle mathématique de dimension trois, pour analyser la stabilité des points d'équilibre et le comportement asymptotique de ce système en utilisant un ensemble d'outils mathématiques adéquats.

- [1] S-A. Adédjouma, V. Adanhounme,& T-K. Dagba, *Etude qualitative de la dynamique des populations : modèle de Lotka-Volterra*, Bulletin de la recherche Agronomique de Bénin N61, Septembre 2008.
- [2] P. Auger, C. lett & J-C. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie*, Dunod, Paris, 2010.
- [3] R-D. Demasse, C. Selinger & M-T. Sofonea, *Epidemiologie mathématique et modélisation de la pandémie de Covide-19 : enjeux et diversité*, Novembre 2020.
- [4] J. Istas, *Mathematical modeling for the life sciences* , Springer-Verlag, 2000.
- [5] G-C. Layek, *An Introduction to dynamical systems and chaos* , Springer, India, 2000.
- [6] S. Nag, *A mathematical model in the time Covid-19*, March 2020.
- [7] J-L. Pac, *Systèmes dynamiques : cours et exercices corrigés*, 2^{ème} édition, Dunod, 2016.
- [8] A.Shair & I.Stamova, *Lotka–Volterra and Related Systems*, 2^{ème} édition, DEGRUYTER, 2013.

Résumé

L'objectif des recherches effectuées dans ce mémoire est de pouvoir montrer l'utilité et l'importance des mathématiques pour l'étude des phénomènes réelles issus de la modélisation en systèmes dynamiques.

L'étude principale réalisée tout au long de ce travail est le traitement d'un modèles épidémiologique représenté par un systèmes autonome deux équations différentielles ordinaires. Á fin de pouvoir mené à la recherche des points d'équilibre, à l'étude de la stabilité et voir le comportement des solutions du système différentiel autonome au voisinage de point d'équilibre, il est nécessaire d'en rappelé les diverses notions mathématiques pour l'étude menée.

abstract

The objective of the research carried out in this dissertation is to be able to show the usefulness and importance of mathematics for the study of real phenomena resulting from modeling in dynamic systems.

The main study carried out throughout this work is the treatment of an epidemiological model represented by an autonomous system of two ordinary differential equations. In order to be able to search for equilibrium points, to study stability and to see the behavior of the solutions of the autonomous differential system in the vicinity of the equilibrium point, it is necessary to recall the various mathematical notions for the study conducted.