République Algérienne Démocratique Et Populaire.
Ministère De l'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifiques.

Université Abderrahmane-Mira, Béjaia.
Faculté des Sciences Exactes.
Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Analyse Mathématique.

Par : Mohellebi Sara.

Systèmes elliptiques singuliers quasi-linéaires convectifs

Devant le jury composé de :

Présidente	H. Bechir	Professeur	U. A. Mira Béjaia.
Examinatrice	S. Medjbar	Maître de conférences	U. A. Mira Béjaia.
Encadreur	A. Moussaoui	Professeur	U. A. Mira Béjaia.

Année universitaire : 2021/2022.

Table des matières

Remerciements **3**

Dédicaces **4**

Introduction **5**

1 Rappels d'analyse fonctionnelle **7**
- 1.1 Notations. Espaces fonctionnels . . . 7
  - 1.1.1 Les espaces L^p . . . 8
  - 1.1.2 Espaces de Sobolev . . . 9
  - 1.1.3 Espaces de Hölder . . . 11
- 1.2 Notions sur les opérateurs . . . 12
  - 1.2.1 Définitions et propriétés . . . 12
  - 1.2.2 L'opérateur p-Laplacien . . . 13
- 1.3 Régularité . . . 14
- 1.4 Estimation a priori du gradient . . . 15
- 1.5 Principe de comparaison . . . 16
- 1.6 Le degré topologique . . . 17
  - 1.6.1 Le degré topologique de Brouwer . . . 17
  - 1.6.2 Le degré topologique de Leray-Schauder . . . 17
  - 1.6.3 Application . . . 18
- 1.7 Définitions et résultats supplémentaires . . . 19

2 Systèmes convectifs singuliers **20**
- 2.1 Estimation a priori du gradient . . . 21
- 2.2 Propriétés de comparaison . . . 24
- 2.3 Existence de solutions . . . 28
  - 2.3.1 Le résultat principal . . . 28
  - 2.3.2 L'opérateur $\mathcal{T}$ . . . 29
  - 2.3.3 Démonstration du résultat principal . . . 32

3 Systèmes convectifs fortement singuliers **33**
3.1 Propriétés de comparaison 34
3.1.1 Système régulier ($\alpha_1, \beta_2 > 0$) 37
3.1.2 Système singulier ($\alpha_1, \beta_2 < 0$) 38
3.2 Le résultat principal 40
3.2.1 L'opérateur $\mathcal{T}$ 40
3.2.2 Démonstration du résultat principal 44

Conclusion **45**

Bibliographie **45**

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon promoteur **M A.Moussaoui** d'avoir accepté de rapporter ce mémoire, de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir dirigé ce travail, pour son dévouement, sa disponibilité, il m'a prodigué les meilleurs conseils, et pour qui je témoigne mon profond respect.

J'adresse mes sincères remerciements à **Mme H.Bechir** pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant d'être président du jury de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à **Mlle S.Medjbar** d'avoir accepté de juger ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail:

À la mémoire de ma tante "Zahia", que Dieu l'accueille dans son vaste paradis.

À la mémoire de ma formidable enseignante Mme S.Tas, que Dieu l'accueille dans son vaste paradis.

À ceux qui m'ont donné la vie, le symbole de tendresse, qui se sont sacrifiés pour mon bonheur et ma réussite, à mes chers parents, que dieu les protège.

À toute ma famille, pour leurs soutien durant toutes mes études , leurs encouragements durant mon mémoire m'ont été indispensable.
À mes tantes Nadia, Farida, Lila, Linda, Samia, Nabila.
À mon frère koceila.

À mes amies, avec qui j'ai partagé les meilleurs moments dans mon parcourt universitaire: Wima, Nesrine, Noura, Hanane, Feriel.

À tous ceux qui sont chers, tous ce qui m'aiment, tous ceux que j'aime, je dédie ce travail.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter des résultats d'existence et de régularité des solutions positives pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires singuliers, associés à des termes de convections. Plus précisément, on considère le problème suivant:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u = f_1(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v = f_2(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \text{ dans } \Omega \\ u, v > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et dont les parties principales des équations sont gouvernées par l'opérateur aux dérivées partielles p_i-Laplacian Δ_{p_i} $(1 < p_i < \infty)$. Les fonctions non-linéaires $f_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ sont supposées de Carathéodory et vérifiant certaines conditions de croissance qui seront énoncées plus loin dans l'exposé.

L'approche utilisée est principalement basée sur le théorème du point fixe de Schauder (voir § 1, Théorème 1.26). Des estimations a priori sur les éventuelles solutions ainsi que sur leur gradient sont nécessaires afin d'etablir un contrôle sur ces dernières. Ces estimations sont obtenues en exploitant essentiellement les propriétés spectrales de l'opérateur p-Laplacien. Cela permet de construire un ensemble fermé, borné et convexe, fournissant une localisation d'un point fixe qui est en fait une solution du problème $(\mathcal{P})$.

Les problèmes quasi-linéaire convectifs sont impliqués dans divers processus non-linéaire qui se produisent dans de nombreux phénomènes naturels. En biologie et en physiologie, il apparaissent dans le transfert de chaleur des flux de gaz et de liquide dans les réacteurs cellulaires et les incubateurs ainsi que les systèmes de biomasse. Dans les procédés chimiques, il apparaissent dans les réactions catalytiques et non catalytiques dans les flux de réaction exothermiques et endothermiques et dans le traitement des polymères. En géologie, il sont impliqués dans le mouvement thermo-convectif des magmas, et dans la solidification de la fonte dans les chambres magmatiques et lors des éruptions volcaniques.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres, qu'on décrit brièvement:

Dans **le premier chapitre**, nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev. Nous présentons des propriétés sur les opérateurs, notamment l'opérateur p-Laplacien et nous exposons quelques notions sur la régularité et le principe du maximum . Par ailleurs, certaines définitions et résultats utiles sont également énoncés.

Le deuxième chapitre présente deux résultats portant sur les systèmes quasilinéaires convectifs et singuliers $(\mathcal{P})$. Le premier montre l'existence de solutions positive $(u, v) \in C_0^{1,\sigma}(\Omega) \times C_0^{1,\sigma}(\Omega)$, pour certain $\sigma \in (0, 1)$ pour le problème $(\mathcal{P})$. Le deuxième résultat donne une estimation a priori sur le gradient permettant d'établir un contrôle sur la solution.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions positives et régulières pour une classe de système convectifs $(\mathcal{P})$ fortement singuliers. Cela se traduit par le fait que les singularités apparaissent non seulement au niveau de la solution mais aussi dans le terme du gradient.

CHAPITRE 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions essentielles sur les espaces fonctionnels et tout particulièrement, les espaces de Lebesgue L^p et les espaces de Sobolev $W^{1,p}$ et nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats qui nous seront utiles par la suite. Nous abordons aussi la théorie du degré topologique en exposant d'une manière succincte quelques propriétés et résultats la concernant.

1.1 Notations. Espaces fonctionnels

Notations

Ici sont présentées quelques notations utilisées dans ce mémoire.

$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle d'un champ de vecteurs
$\frac{\partial}{\partial n}$	Dérivée normale extérieure d'un champ scalaire.
$\triangle$	Laplacien d'un champ de vecteurs.
∇	Gradient d'un champ de vecteurs.
$p.p.$	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$s_{\pm}$	$\max(\pm s, 0)$ de sorte que $s = s^{+} - s^{-}, s \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace des fonctions m fois continument différentiables.
$\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\underset{m\in\mathbb{N}}{\cap} \mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^N\right)$.
$C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}^N$.
$L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$	Espace de Lebegue équipé de la norme $\left\|\cdot\right\|_p$.
$W^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\left\|\cdot\right\|_{m,p}$.
int $C^1(\mathbb{R})_+$	Le cône des fonctions non négatives appartenant a int $C^1(\overline{\Omega})$.
$X \hookrightarrow Y$	L'injction continue.
div	Opérateur de divergence.

1.1.1 Les espaces $\mathbf{L}^p$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue et $p \in \mathbb{R}$ une constante réelle avec $1 \leq p < \infty$. On définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{est mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \exists c > 0 \ / \ |f(x)| \leq c \ \ \mu - pp \text{ sur } \Omega \},$$

où

$$\|f\|_\infty = \min \{ M \geq 0 : |f| \leq M \ \mu\text{-presque partout } \}.$$

désigne la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.
Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) \ dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intègrables sur Ω, c'est-à-dire

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : u \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega \right\}$$

Remarque 1.1 :
i) $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$
ii) L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p \right)$ *est de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$, *séparable pour* $1 \leq p < \infty$ *et réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Théorème 1.2 (convergence dominée [4]) *Soit* (f_n) *une suite de fonction de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que:*
a) $f_n(x) \longrightarrow f \quad p.p.sur \ \Omega$.
b) *Il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad p.p \quad sur \quad \Omega, \ \forall n.$$

Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Lemme 1.3 ([4]) *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$ *telles que*

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que:*
i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p sur* Ω.
ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$, *p.p. sur* Ω, *avec* $h \in L^p(\Omega)$.

Lemme 1.4 *Soit* $(p,q,r) \in [1,\infty]$ *tel que* $q < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Si $g \in L^q(\Omega)$ *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite bornée de* $L^p(\Omega)$ *qui converge presque partout sur* Ω *vers* f, *alors* $f_n g \longrightarrow fg$ *dans* $L^r(\Omega)$.

Inégalité de Hölder Soient $1 \leq p < \infty$ et q l'éxposant conjugué de p. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ sont deux fonctions mesurables sur un espace mesuré (Ω, Σ, μ), alors $fg \in L^1(\Omega)$, et

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Inégalité de Young Pour $1 < p < \infty$ et pour tout a et b positifs, on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit la fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p},$$
$$\|u\|_\infty = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

pour toute fonction u qui donne un sens à cette écriture.

On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables $u \in L^p(\Omega)$ telles que la dérivée au sens faible $D^\alpha u$, $0 \leq |\alpha| \leq \infty$ appartient à $L^p(\Omega)$ et l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ représente la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On associe à l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ et on a alors la proposition suivante:

Proposition 1.5 :
i) $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach*
ii) Pour $p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable*
iii) Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

Pour $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ définit comme suit:

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \ / \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m, \ D^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$H^m(\Omega)$ est un Banach muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2},$$

c'est un espace de Hilbert.

Théorème 1.6 (*[1]*) *Si* Ω *est un ouvert borné à frontière lipschitzienne (où si* $\Omega = \mathbb{R}^N$*) on a:*
i) Si $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.
ii) Si $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.
iii) pour tout $q \in]N, +\infty[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Si l'on suppose l'hypothèse "à frontière lipschitzienne", alors le dernier théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *Dans ce cas, et si* $N > 1$, *(iii) est même valable pour tout* $q \in [1, +\infty[$.

Remarque 1.7 *La continuité du prolongement* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *en* $L^r(\Omega)$, *pour* $1 \leq r \leq \frac{Np}{N-p}$, *garantit l'existence d'une constante* $c_r > 0$ *telle que :*

$$\|u\|_r \leq c_r \|u\|_{1,p}, \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.1}$$

Théorème 1.8 (*[1]*) *Soit* Ω *un ouvert borné à frontière lipschitzienne:*
1) Si $1 \leq p < \infty$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.
2) Si $1 < p < \infty$ *alors la trace* $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ *est compacte.*

Remarque 1.9 *La propriété (2) du théorème précédent est fausse si* $p = 1$ *car*

$$\gamma : W^{1,1}(\Omega) \longrightarrow L^1(\partial\Omega)$$

est surjective.

Lemme 1.10 ***(L'inégalité de Hardy-Sobolev*** *[2]) Soit Ω un domaine borné de ($\mathbb{R}^N$) de frontière régulière. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $1 < p < N$, alors*

$$\frac{u}{\phi_1^\tau} \in L^r(\Omega), \tag{1.2}$$

avec

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\tau}{N}$$

et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\frac{u}{\phi_1^\tau}\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

où $\phi_1 > 0$ est la fonction propre associée à la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

1.1.3 Espaces de Hölder

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe et $\alpha \in]0,1[$ un nombre fixé et soit Ω un ouvert quelconque non vide de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.11 *On désigne par*

- *$B(\overline{\Omega}; E)$, l'espace des fonctions bornèes, muni de la norme*

$$\|f\|_{B(\overline{\Omega};E)} = \sup_{x\in\Omega}\|f(x)\|_E.$$

- *$C(\overline{\Omega}; E)$ l'espace des fonctions continues et bornèes, muni de la norme*

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega};E)} = \|f\|_{B(\overline{\Omega};E)}.$$

- *$C^k(\overline{\Omega}; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues et bornèes, muni de la norme*

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega};E)} = \sum_{|\beta|\leq k}\|\partial^\beta f(x)\|_{B(\overline{\Omega};E)},$$

  où β un multi-indice.

- *$C^\infty(\overline{\Omega}; E)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiable.*

Définition 1.12 *Les espaces de Hölder des fonctions bornèes de Ω dans E, $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$ et $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont définis*

$$C^\alpha(\overline{\Omega}; E) = \left\{ f \in B(\overline{\Omega}; E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x-y|^\alpha} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega};E)} = \|f\|_{B(\overline{\Omega};E)} + [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega};E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(\overline{\Omega};E) = \left\{f \in C^k(\overline{\Omega};E) : \partial^\beta f(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega};E)\right\}, \qquad |\beta| = k,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\overline{\Omega};E)} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega};E)} + [\partial^\beta f(x)]_{C^\alpha(\overline{\Omega};E)}$$

où β un multi-indice.

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Définitions et propriétés

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace réel de Banach et soit X^* son dual topologique.

Définition 1.13 *Un opérateur $\mathcal{A} : X \to X^*$ est dit:*

- ***Borné*** *s'il transforme des ensembles bornés en ensemble borné.*
- ***Continu*** *si $\|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\|_{X^*} \to 0$ lorsque $\|x_n - x\|_X \to 0$.*
- ***Compact*** *si $\mathcal{A}(\overline{B}_X)$ est relativement compacte dans X^*, où B_X désigne la boule unité dans X.*
- ***Coercif*** *si*
$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle \mathcal{A}(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty.$$
- ***Monotone*** *si*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \qquad \forall u, v \in X.$$
- ***Strictement monotone*** *si*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0, \qquad \forall u, v \in X.$$
- ***fortement monotone*** *si il existe $c > 0$ telle que*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^2, \qquad \forall u, v \in X.$$

- ***Pseudo-monotone*** *si*

$$x_n \rightharpoonup x \ \textit{dans } X \quad \textit{et} \limsup_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$$

implique

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z\rangle \geq \langle \mathcal{A}(x), x - z\rangle, \ \textit{pour tout } z \in X.$$

- ***de type*** $(\mathbf{S})_+$ *si*

$$x_n \rightharpoonup x \ \textit{dans } X \quad \textit{et} \ \limsup_{n\to+\infty}\langle A(x_n), x_n - z\rangle \geq 0$$

implique

$$x_n \to x \quad \textit{dans} \quad X.$$

Théorème 1.14 *(**Minty-Browder**[4]) Soient E un espace de Banach réflexif et A: $E \longrightarrow E^*$ une application non-linéaire et continue telle que :*

$$< Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 >> 0, \quad \forall v_1, v_2 \in E, v_1 \neq v_2 \tag{1.3}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{< Av, v >}{\|v\|} = \infty \tag{1.4}$$

Alors, pour tout $f \in E^*$, il existe un unique $u \in E$ solution de l'équation

$$Au = f \tag{1.5}$$

Théorème 1.15 ([12]) *Si X est réflexif et $\mathcal{A} : X \to X^*$ borné, coercif et pseudo-monotone alors $\mathcal{A}(X) = X^*$.*

1.2.2 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien $(1 < p < \infty)$ est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par:

$$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour $p \neq 2$, l'opérateur Δ_p est dégénéré.

Si $p = 2$, il coïcide avec l'opérateur de Laplace usuel Δ.

Propriétés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné.

- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, monotone, coercif et de type $(S)_+$.
- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est uniformément continu sur tout ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
- $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ est continu.
- L'opérateur composé $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact, si $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.
- La première valeur propre $\lambda_{1,p} > 0$ de l'opérateur Δ_p est simple et isolée. La fonction propre $\phi_{1,p}$ correspondant à $\lambda_{1,p}$ est de signe constant et vérifie

$$\phi_{1,p} \in C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_{1,p}}{\partial \eta} < 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

  où η est le vecteur normal extérieure au domaine Ω.
- Toute fonction propre ϕ correspondant à une valeur propre $\lambda > \lambda_{1,p}$ de l'opérateur Δ_p est de signe changeant.

Théorème 1.16 *(**Lazer-Mackenna** [9])*

$$\int_\Omega \phi^r dx < \infty \tag{1.6}$$

si seulement si $r > -1$

1.3 Régularité

Théorème 1.17 *(**Lieberman** [10]) Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $|u| \leq M_0$, M_0 étant une constante positive, une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$|f(x,u)| \leq M, \quad \textit{pour tout } (x,u) \in \Omega \times [-M_0, M_0]. \tag{1.7}$$

Alors, il existe des constantes $R > 0$ et $\sigma \in (0,1)$ telles que

$$u \in \mathcal{C}^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \quad \textit{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\sigma}(\overline{\Omega})} < R.$$

Théorème 1.18 *(**Hai** [8])*
Soit $h \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ et supposons qu'il existe des constantes $\gamma \in (0,1)$ et $C > 0$ telles que

$$|h(x)| \leq \frac{C}{d^{\gamma}(x)} \quad \textit{pour p.p.} \quad x \in \Omega.$$

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u = h \ \textit{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Alors, il existe des constantes $\sigma \in (0,1)$ et $M > 0$, ne dépendant que de C, γ, Ω, telles que

$$u \in \mathcal{C}^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \quad \textit{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\sigma}(\overline{\Omega})} < M. \tag{1.8}$$

1.4 Estimation a priori du gradient

Théorème 1.19 *(**Cianchy-Mazya** [6])*
Soient Ω un domaine borné, convexe de $\mathbb{R}^N$ et une fonction $f \in L^q(\Omega)$ avec $q > N$. Alors, pour toutes solutions u du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f \ \textit{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \textit{dans } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

il existe une constante $C > 0$, indépendante de u, telle que

$$\|\nabla u\|_{L^{\infty}} \leq C \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^q(\Omega)}.$$

Théorème 1.20 *(**Bueno-Ercole** [5])*
Soit $g \in L^{\infty}(\Omega)$ et soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ la solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g \ \textit{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \textit{dans } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

Alors, il existe une constante $K(p) > 0$, dépendant uniquement de p, N et Ω, telle que:

$$\|\nabla u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq K(p)(\|g\|_{\infty})^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.11}$$

1.5 Principe de comparaison

Pour $f, g \in W^{-1,p'}(\Omega)$, soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ les solutions des problèmes de Dirichlet suivants:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p v = g(x) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 1.21 *:*

- *On dit que $f \leq g$ dans Ω si $\langle g - f, w \rangle \geq 0$ pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $w \geq 0$.*
- *On dit que $f \prec g$ dans Ω si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$f(x) + \varepsilon < g(x), \ \text{p.p. } x \in K.$$

- *On dit que $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ si $(u - v)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
- *On dit que $u \ll v$ si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ et*

$$u < v \ \text{dans } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} \ \text{sur } \partial\Omega.$$

Théorème 1.22 ([3], Principe de comparaison faible) *Si $f \leq g$ dans Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ dans Ω.*

Théorème 1.23 ([3], Principe de comparaison fort) *Pour $f, g \in L^\infty(\Omega)$ et $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, si $f \prec g$ et $v \gg 0$, alors $u \ll v$ dans Ω.*

Lemme 1.24 ([8]) *Soit $\epsilon > 0$ et soit les fonctions $h, \tilde{h} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, avec $h \neq 0, h \geq 0$, vérifiant*

$$max(|h(x)|, |\tilde{h}(x)|) \leq \frac{C}{d^\gamma(x)}.$$

Soient $u, u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ les solutions respectives des problèmes de Dirichlet suivants:

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u = h \ \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$-\Delta_p u_\epsilon = \begin{cases} h \ \text{dans} & d(x) > \epsilon \\ \tilde{h} \ \text{dans} & d(x) < \epsilon \end{cases}$$

Alors, pour ϵ suffisamment petit on a:

$$u_\epsilon \geq \frac{u}{2} \text{ dans } \Omega.$$

1.6 Le degré topologique

1.6.1 Le degré topologique de Brouwer

Soit Λ un ensemble défini par:

$$\Lambda = \left\{ (f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right),\ y \notin f(\partial\Omega) \right\}.$$

Il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant:

(i) **Normalisation:** Si $y \in \Omega$, alors $d(Id, \Omega, y) = 1$,

(ii) **Additivité**: Si $(f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin f(\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y),$$

(iii) **Invariance par homotopie**: Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ vérifie $\forall t \in [0,1],\ y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors $d(h(t,\cdot), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.

1.6.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Si E est un espace de Banach et

$$\Lambda = \left\{ (Id - f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } E,\ f : \overline{\Omega} \longrightarrow E \text{ compacte}, y \notin (Id - f)(\partial\Omega) \right\},$$

alors il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant:

(i) Si $y \in \Omega$, alors $d(I, \Omega, y) = 1$,

(ii) Si $(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que

$$y \notin (Id - f)(\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y),$$

(*iii*) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow E$ vérifie $\forall t \in [0,1]$, $y(t) \notin (Id - h(t,\cdot))(\partial\Omega)$, alors

$$d(Id - h(t,\cdot), \Omega, y(t)) \text{ est indépendant de } t.$$

(*iv*) Si $K \subset \Omega$ est un fermé de Ω et $y \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$ alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \backslash K, y).$$

Remarque 1.25 *La propriété importante du degré est:*
Si $(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda$ *et* $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$, *alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $x - f(x) = y$.

1.6.3 Application

Théorème 1.26 (point fixe de Schauder) *Soit* Ω *un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach* X *et* $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ *une application compacte. Alors* f *admet au moins un point fixe. De plus, le résultat reste vrai si* Ω *est seulement homéomorphe à un convexe, fermé borné.*

Démonstration. Sans perte de généralité, posons d'abord $\Omega = B(0,r)$.

S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$, il n'y a rien à montrer , sinon on peut définir pour $0 \leq t \leq 1$, $deg(f_1, \Omega, 0)$ avec

$$f_t(x) = x - tf(x) = (I - tf)(x)$$

En effet, si $tf(x) = x$ sur $\partial\Omega$, alors

$$r = \|x\| = |t|\|f(x)\| \Longrightarrow 1 = \|x/r\| = |t|\|f(x)/r\|,$$

donc

$$t = 1, \|f(x)\| = r = \|x\|,$$

d'où la contradiction avec l'hypothése.

Enfin,

$$deg(f_t, \Omega, 0) = deg(f_0, \Omega, 0) = 1$$

et on conclut d'aprés la deuxiéme propriété du degré. ■

1.7 Définitions et résultats supplémentaires

Définition 1.27 (Fonction de Carathéodory) *On dit que $h : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si:*

(i) $x \mapsto h(x,s,t)$ est mesurable pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $(s,t) \mapsto h(x,s,t)$ est continue pour p.p $x \in \Omega$.

Définition 1.28 (Système variationnel) *Le système*

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = f_1(x,u_1,u_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} u_2 = f_2(x,u_1,u_2) & \text{dans } \Omega \\ u_1, u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

est dit variationnel si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- *Il existe une fonction différentiable $F(x,u,v)$ pour $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que*

  $$\tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial u} = f_1(x,u,v) \ \text{ et } \tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial v} = f_2(x,u,v).$$

  Dans ce cas, (1.12) est de type Gradient.

- *Il existe une fonction différentiable $H(x,u,v)$ pour $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que*

  $$\tfrac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = f_2(x,u,v) \ \text{ et } \tfrac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = f_1(x,u,v).$$

  Dans ce cas, (1.12) est de type Hamiltonien.

CHAPITRE 2

Systèmes convectifs singuliers

Dans ce chapitre, nous établissons l'existence de solutions régulières pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires et singuliers, impliquant des termes de convection. Plus précisement, nous considérons le système suivant:

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u = f_1(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v = f_2(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \text{ dans } \Omega \\ u, v > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \end{cases}
$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné avec une frontière régulière $\partial\Omega$ et Δ_{p_i} désigne l'opérateur p_i-Laplacien différentiel sur $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ avec $1 < p_i \leq N$, $i = 1, 2$. Dans ce qui suit, nous appellerons solution du problème (P) la paire $(u, v) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ avec $u, v \geq 0$ *p.p.* dans Ω, et satisfait:

$$
\begin{array}{l} \int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f_1(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \varphi \, dx, \\ \int_\Omega |\nabla v|^{p_2-2} \nabla v \nabla \psi \, dx = \int_\Omega f_2(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \psi \, dx, \end{array} \tag{2.1}
$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$.

Les non-linéairités $f_i : \Omega \times (0, +\infty)^2 \times \mathbb{R}^{2N} \to (0, +\infty)$, $i = 1, 2$, sont des fonctions de carathéodory (voir définition 1.27) et vérifient l'hypothèse de croissance suivante:

(H_f) Il existe des constantes $M_i, m_i > 0$, $\gamma_i, \theta_i \geq 0$, $r_i > N$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ telles que

$$
m_i s_1^{\alpha_i} s_2^{\beta_i} \leq f_i(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_i s_1^{\alpha_i} s_2^{\beta_i} + |\xi_1|^{\gamma_i} + |\xi_2|^{\theta_i}
$$

pour p.p. $x \in \Omega$, pour tout $s_1, s_2 > 0$, et tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$, avec

$$
|\alpha_i| + |\beta_i| < p_i - 1, \tag{2.2}
$$

$$-1/r_i \leq \alpha_i + \beta_i < \frac{p_i - 1}{r_i} \quad \text{et} \quad \max\{\gamma_i, \theta_i\} < \frac{p_i - 1}{r_i}, \text{ pour } i = 1, 2. \tag{2.3}$$

L'une des principales difficultés rencontrées dans l'étude du problème (P) est dû à la présence de termes singuliers, qui apparaissent sous l'hypothèse (H_f). Cela se traduit par le fait que les non-linéarités $f_1(x, u, v, \nabla u, \nabla v)$ et $f_2(x, u, v, \nabla u, \nabla v)$ explosent quand u ou v approchent 0, causé par le signe des exposants α_i et β_i qui peuvent éventuellement être négatifs.

Notre objectif est de montrer que le système (P) admet des solutions positives $(u, v) \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, pour certain $\sigma \in (0, 1)$. Notre approche est basée principalement sur le Théorème du point fixe de Schauder (voir 1.26). Des estimations a priori aussi bien sur les solutions du problème (P) que sur leur gradient sont nécessaires afin d'établir un contrôle sur ces derniers. Cela engendre un ensemble fermé, borné et convexe dont la construction est basée sur un choix spécifique et approprié de fonctions avec un ajustement adéquat de constantes. Cet ensemble a pour but de fournir une localisation d'un point fixe correspondant à un opérateur associé au problème (P). Il est important de noter que l'opérateur en question est construit de sorte que chacun de ses points fixes éventuels soit solution de (P).

2.1 Estimation a priori du gradient

On introduisons le système quasi-linéaire suivant:

$$(\mathrm{P}_h) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u = h_1(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v = h_2(x, u, v, \nabla u, \nabla v) \text{ dans } \Omega \\ u, v = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $h_i : \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant l'hypothèse suivante:

(H_h) : il existe des constantes $M > 0$, $r_i > N$ et $\mu_i < 0 \leq \gamma_i, \theta_i$ telle que

$$\max_{i=1,2} |h_i(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)| \leq M(d(x)^{\mu_i} + |\xi_1|^{\gamma_i} + |\xi_2|^{\theta_i}),$$

pour p.p. $x \in \Omega$, pour tout $s_i \in \mathbb{R}$, et tout $\xi_i \in \mathbb{R}^N$ telle que

$$\mu_i > -\frac{1}{r_i} \quad \text{et} \quad \max\{\gamma_i, \theta_i\} < \frac{p_i - 1}{r_i}, \text{ pour } i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Le résultat suivant fourni une estimation a priori du gradient des solutions (u,v) de (P_h).

Théorème 2.1 *Supposons que l'hypothèse* (H_h) *est vérifiée. Alors, il existe une constante* $k_p > 0$*, dépendant uniquement de* p_1, p_2 *et de* Ω*, telle que:*

$$\|\nabla u\|_\infty \leq k_p ||h_1(\cdot, u, v, \nabla u, \nabla v)||_{r_1}^{\frac{1}{p_1-1}}$$

et

$$\|\nabla v\|_\infty \leq k_p ||h_2(\cdot, u, v, \nabla u, \nabla v)||_{r_2}^{\frac{1}{p_2-1}}.$$

De plus, il existe des constantes $R > 0$ *et* $\sigma \in (0,1)$ *telles que toutes solutions* $(u,v) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ *du problème* (P_h) *appartenant à* $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ *satisfont l'estimation*

$$\|u\|_{C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})}, \|v\|_{C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})} < R. \tag{2.6}$$

Démonstration. Soit $(u,v) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ une solution de (P_h). En multipliant la première équation de (P_h) par u, en intégrant sur Ω et en utilisant (H_h), on obtient

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^{p_1} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega h_1(x, u, v, \nabla u, \nabla v) u \, \mathrm{d}x \\ &\leq M \textstyle\int_\Omega (d(x)^{\mu_1} + |\nabla u|^{\gamma_1} + |\nabla v|^{\theta_1}) u \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Puisque $\mu_1 > -1$, l'inégalité de Hardy-Sobolev voir Lemme 1.10 assure qu'il existe une constante positive C_1 telle que

$$\int_\Omega d(x)^{\mu_1} u \, \mathrm{d}x \leq C_1 \|\nabla u\|_{p_1}. \tag{2.8}$$

En utilisant (2.5), l'inégalité de Young (voir §1.1.1) et (1.1), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma_1} u \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^{p_1} \, \mathrm{d}x + c_\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma_1 p_1'} \, \mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon C_0 \|\nabla u\|_{p_1}^{p_1} + c_\varepsilon \|\nabla u\|_{p_1}^{\gamma_1 p_1'}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^{\theta_1} u \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^{p_1} \, \mathrm{d}x + c_\varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^{\theta_1 p_1'} \, \mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon C_0 \|\nabla u\|_{p_1}^{p_1} + c_\varepsilon \|\nabla v\|_{p_2}^{\theta_1 p_1'}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où $C_0, c_\varepsilon > 0$ sont des constantes avec c_ε dépendant de ε.

De même, en multipliant la seconde équation de (P_h) par v, en intégrant sur Ω, un argument similaire fournit

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^{p_2} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega h_2(x, u, v, \nabla u, \nabla v) v \, \mathrm{d}x \\ &\leq M \textstyle\int_\Omega (d(x)^{\mu_2} + |\nabla u|^{\gamma_2} + |\nabla v|^{\theta_2}) v \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.11}$$

avec

$$\int_\Omega d(x)^{\mu_2} v \, \mathrm{d}x \le C_2 \|\nabla v\|_{p_2}, \tag{2.12}$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^{\theta_2} v \, \mathrm{d}x \le \varepsilon \, \|\nabla v\|_{p_2}^{p_2} + c'_\varepsilon \, \|\nabla v\|_{p_2}^{\theta_2 p'_2}, \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma_2} v \, \mathrm{d}x \le \varepsilon \, \|\nabla v\|_{p_2}^{p_2} + c'_\varepsilon \, \|\nabla u\|_{p_1}^{\gamma_2 p'_2}. \tag{2.14}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où $c'_\varepsilon > 0$ est constant dépendant de ε.
D'autre part, puisque $r_i > N > \frac{p_i}{p_j}$, pour $i, j = 1, 2, i \neq j$, il résulte de (2.5), que

$$\max_{i=1,2}(\gamma_i p'_i) < p_1 \quad \text{et} \quad \max_{i=1,2}(\theta_i p'_i) < p_2. \tag{2.15}$$

En rassemblant (2.7)-(2.14), en tenant compte de (2.15) et en prenant ε suffisamment petit, il existe une constante $c_0 > 0$ indépendante de la solution (u, v), telle que

$$\|\nabla u\|_{p_1}, \|\nabla v\|_{p_2} \le c_0. \tag{2.16}$$

En combinant la dernière estimation avec (2.8) et en gardant à l'esprit la condition de croissance (H_h), il s'ensuit que

$$\|h_i(u, v, \nabla u, \nabla v)\|_{r_i} \le c_1, \tag{2.17}$$

où la constante $c_1 > 0$ est indépendante de la solution (u, v). Ici, l'utilisation de l'hypothèse $r_i > N$ cruciale, ce qui permet de se référer à l'estimation du gradient dans le théorème (1.19). En conséquence, en raison de (2.17), on déduit que

$$\|\nabla u\|_\infty \le k_p ||h_1(\cdot, u, v, \nabla u, \nabla v)||_{r_1}^{\frac{1}{p_1 - 1}} \tag{2.18}$$

et

$$\|\nabla v\|_\infty \le k_p ||h_2(\cdot, u, v, \nabla u, \nabla v)||_{r_2}^{\frac{1}{p_2 - 1}}, \tag{2.19}$$

où la constante $k_p > 0$ ne dépend que de p_1, p_2 et Ω.

Par ailleurs, d'après (H_h) et (2.17)-(2.19), on a

$$\begin{aligned}
&|h_i(x, u, v, \nabla u, \nabla v)| \le M \left(d(x)^{\mu_i} + |\nabla u|^{\gamma_i} + |\nabla v|^{\theta_i} \right) \\
&\le M \left(d(x)^{\mu_i} + \|\nabla u\|_\infty^{\gamma_i} + \|\nabla v\|_\infty^{\theta_i} \right) \\
&\le M \left(d(x)^{\mu_i} + (k_p c_1^{\frac{1}{p_1 - 1}})^{\gamma_i} + (k_p c_1^{\frac{1}{p_2 - 1}})^{\theta_i} \right) \\
&\le \hat{M} \left(d(x)^{\mu_i} + 1 \right) \ \text{dans } \Omega,
\end{aligned}$$

pour une constante $\hat{M} > 0$ indépendante de u et v. Ainsi, puisque $\mu_i > -1$, il est possible d'appliquer le théorème de régularité Théorème 1.18 qui montre que la solution (u,v) de (P_h) est bornée dans $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})\times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\sigma\in(0,1)$. Ceci achève la démonstration. ■

Dans le cas scalaire de (P_h), le Théorème 2.1 précédent établit une extension du Théorème 1.18 de régularité de Hai aux problèmes singuliers impliquant des termes de convection. Il est formulé comme suit.

Corollaire 2.2 *Pour $1<p\leq N$ et $M>0$, soit $h:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory satisfaisant*

$$|h(x,s,\xi)|\leq M(d(x)^{\mu}+|\xi|^{\gamma}),$$

pour p.p. $x\in\Omega$, pour tout $s\in\mathbb{R}$, et tout $\xi\in\mathbb{R}^N$ avec

$$r>N \text{ and } -\frac{1}{r}<\mu<0\leq\gamma<\frac{p-1}{r}.$$

Alors, il existe des constantes $R>0$ et $\sigma\in(0,1)$ telle que toutes solutions $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u=h(x,u,\nabla u) \text{ dans } \Omega\\ u=0 \quad \text{ dans } \partial\Omega,\end{cases}$$

appartient à $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ et vérifie

$$\|u\|_{C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})}<R.$$

De plus, il existe une constante $k_p>0$, dépendante que de p et de Ω, telle que:

$$\|\nabla u\|_{\infty}\leq k_p\|h(\cdot,u,\nabla u)\|_r^{\frac{1}{p-1}}.$$

2.2 Propriétés de comparaison

Soit $y_i,z_i\in C^1(\overline{\Omega})$ les solutions des problèmes de Dirichlet suivants:

$$-\Delta_{p_i}y_i(x)=1+d(x)^{\alpha_i+\beta_i} \text{ dans } \Omega,\ y_i(x)=0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.20}$$

et

$$-\Delta_{p_i}z_i(x)=\begin{cases} d(x)^{\alpha_i+\beta_i} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta\\ -1 & \text{dans } \Omega_\delta\end{cases},\ z_i(x)=0 \text{ dans } \partial\Omega, \tag{2.21}$$

où

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : d(x) < \delta\}, \tag{2.22}$$

avec $\sigma > 0$ est une constante supposée suffisamment petite, et les exposants α_i, β_i satisfont la condition suivante:

$$-1 < \alpha_i + \beta_i < p_i - 1, \text{ pour } i = 1, 2. \tag{2.23}$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev donnée par le Théorème 1.10 garantit que les membres de droite de (2.20) et (2.21) appartiennent, respectivement, à $W^{-1,p'_i}(\Omega)$, $i = 1, 2$. Par conséquent, le Théorème 1.14 de Minty-Browder assure l'existence d'un unique y_i et z_i dans (2.21) et (2.20). De plus, le Théorème 1.18 de Hai, étant applicable du fait que $\alpha_i + \beta_i > -1$, implique que les solutions y_i et z_i $(i = 1, 2)$ sont dans $C^1(\overline{\Omega})$.

Le lemme suivant fourni des propriétés importantes relatives à y_i et z_i qui sont très utiles dans la suite de l'exposé.

Lemme 2.3 *Il existe des constantes positives c_0 et c_1 telle que*

$$c_0 d(x) \leq z_i(x) \leq y_i(x) \leq c_1 d(x), \quad \textit{pour tout } x \in \Omega, \ i = 1, 2. \tag{2.24}$$

Démonstration. De (2.20) et (2.21), on remarque bien évidemment que $z_i(x) \leq y_i(x)$ pour tout $x \in \Omega$, pour $i = 1, 2$. Par ailleurs, le principe du maximum fort (voir Lemme 1.24) implique que $c_0 d(x) \leq z_i(x)$ en Ω, pour $\delta > 0$ suffisamment petit dans (2.21). Ainsi, la preuve est complétée en montrant la dernière inégalité dans (2.24). Soit $w_i \in C^1(\overline{\Omega})$ l'unique solution du problème de Dirichlet homogène suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_i} w_i = w_i^{-\gamma} \text{ dans } \Omega \\ w_i > 0 \ \text{ dans } \Omega \\ w_i = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.25}$$

où

$$\underset{i=1,2}{max} |\alpha_i + \beta_i| < \gamma < 1, \tag{2.26}$$

ce qui est possible compte tenu de (2.23). Il est bien connu que

$$c_2 d(x) \leq w_i(x) \leq c_3 d(x), \text{ i=1,2 }, \tag{2.27}$$

où c_2, c_3 sont des constantes positives. Compte tenu de (2.26), on peut trouver une constante $L > 0$ telle que

$$\underset{i=1,2}{max}(1 + d(x)^{\alpha_i+\beta_i})d(x)^{\gamma} \leq L \text{ dans } \overline{\Omega}. \tag{2.28}$$

D'après (2.20), (2.27) et (2.28), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} -\Delta_{p_i} y_i(x) &= (1 + d(x)^{\alpha_i+\beta_i}) \leq Ld(x)^{-\gamma} \\ &\leq L(c_3 w_i)^{-\gamma} = -\Delta_{p_i}((Lc_3{}^{-\gamma})^{\frac{1}{p_i-1}} w_i(x)) \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

Alors, le principe de comparaison faible (voir Théorème 1.22) donne

$$y_i(x) \leq (Lc_3{}^{-\gamma})^{\frac{1}{p_i-1}} w_i(x) \leq L^{\frac{1}{p_i-1}} c_3{}^{1-\frac{\gamma}{p_i-1}} d(x) \text{ dans } \Omega,$$

ce qui achève la preuve . ■

On définit les fonctions suivantes

$$(\underline{u}, \underline{v}) = C^{-1}(z_1, z_2) \quad \text{et} \quad (\overline{u}, \overline{v}) = C(y_1, y_2), \tag{2.29}$$

où $C > 1$ est une constante. Le lemme suivant montre que les fonctions introduites dans (2.29) sont comparables.

Lemme 2.4 *$\underline{u} \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq \overline{v}$ dans Ω.*

Démonstration.
D'après (2.24) et (2.29) et pour $C > 1$ suffisamment grand on a:

$$\underline{u} = C^{-1}z_1 \leq C^{-1}y_1 \leq Cy_1 = \overline{u}$$

et

$$\underline{v} = C^{-1}z_2 \leq C^{-1}y_2 \leq Cy_2 = \overline{v}$$

■

Dans ce qui suit, nous montrons des propriétés de comparaison qui sont fondamentales dans l'application du Théorème du point fixe de Schauder.

Proposition 2.5 :
Supposons que (2.2) et (2.23) soient vérifiés et qu'il existe des constantes réelles $\gamma_i, \theta_i \geq 0$ telles que

$$\max\{\gamma_i, \theta_i\} < p_i - 1, \quad \textit{pour } i = 1, 2. \tag{2.30}$$

Alors, pour $C > 0$ suffisamment grand dans (2.29), les inégalités suivantes sont satisfaites:

$$-\Delta_{p_1}\underline{u} \leq m_1 w_1^{\alpha_1} w_2^{\beta_1} \quad \textit{dans } \Omega,$$

$$-\Delta_{p_2}\underline{v} \leq m_2 w_1^{\alpha_2} w_2^{\beta_2} \quad \textit{dans } \Omega,$$

$$-\Delta_{p_1}\overline{u} \geq M_1 w_1^{\alpha_1} w_2^{\beta_1} + 2C^{\max\{\gamma_1,\theta_1\}} \quad \textit{dans } \Omega$$

et

$$-\Delta_{p_2}\overline{v} \geq M_2 w_1^{\alpha_2} w_2^{\beta_2} + 2C^{\max\{\gamma_2,\theta_2\}} \quad \textit{dans } \Omega,$$

pour tout $(w_1, w_2) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

Démonstration. De (2.29) et sur la base du Lemme 2.3, pour tout $(w_1, w_2) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, on a

$$\begin{aligned}
w_1^{\alpha_i} w_2^{\beta_i} \quad &\geq \quad \begin{cases} \underline{u}^{\alpha_i}\underline{v}^{\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i > 0 \\ \overline{u}^{\alpha_i}\underline{v}^{\beta_i} & \text{si } \alpha_i < 0 < \beta_i \\ \underline{u}^{\alpha_i}\overline{v}^{\beta_i} & \text{si } \beta_i < 0 < \alpha_i \\ \overline{u}^{\alpha_i}\overline{v}^{\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i < 0 \end{cases} \\
&\geq \quad \begin{cases} (C^{-1}c_0 d(x))^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i > 0 \\ (Cc_1)^{\alpha_i}(C^{-1}c_0)^{\beta_i} d(x)^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \alpha_i < 0 < \beta_i \\ (C^{-1}c_0)^{\alpha_i}(Cc_1)^{\beta_i} d(x)^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \beta_i < 0 < \alpha_i \\ (Cc_1)^{\alpha_i+\beta_i} d(x)^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i < 0 \end{cases} \\
&\geq \quad \tilde{c}_0 C^{-(|\alpha_i|+|\beta_i|)} d(x)^{\alpha_i+\beta_i}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

et

$$\begin{aligned}
w_1^{\alpha_i} w_2^{\beta_i} \quad &\leq \quad \begin{cases} \overline{u}^{\alpha_i}\overline{v}^{\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i > 0 \\ \underline{u}^{\alpha_i}\overline{v}^{\beta_i} & \text{si } \alpha_i < 0 < \beta_i \\ \overline{u}^{\alpha_i}\underline{v}^{\beta_i} & \text{si } \beta_i < 0 < \alpha_i \\ \underline{u}^{\alpha_i}\underline{v}^{\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i < 0 \end{cases} \\
&\leq \quad \begin{cases} (Cc_1 d(x))^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i > 0 \\ (C^{-1}c_0)^{\alpha_i}(Cc_1)^{\beta_i} d(x)^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \alpha_i < 0 < \beta_i \\ (Cc_1)^{\alpha_i}(C^{-1}c_0)^{\beta_i} d(x)^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \beta_i < 0 < \alpha_i \\ (C^{-1}c_0)^{\alpha_i}(C^{-1}c_0)^{\beta_i} d(x)^{\alpha_i+\beta_i} & \text{si } \alpha_i, \beta_i < 0 \end{cases} \\
&\leq \quad \tilde{c}_1 C^{|\alpha_i|+|\beta_i|} d(x)^{\alpha_i+\beta_i},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

où $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1 > 0$ sont des constantes dépendantes uniquement de $c_0, c_1, \alpha_i, \beta_i$. D'après

(2.2), (2.29), (2.21), (2.20) et (2.30), on obtient:

$$\begin{aligned} -\Delta_{p_1}\underline{u} &= C^{-(p_1-1)}\begin{cases} d(x)^{\alpha_1+\beta_1} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \\ -1 & \text{dans } \Omega_\delta \end{cases} \\ &\leq \tilde{c}_0 m_1 C^{-(|\alpha_1|+|\beta_1|)} d(x)^{\alpha_1+\beta_1} \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} -\Delta_{p_2}\underline{v} &= C^{-(p_2-1)}\begin{cases} d(x)^{\alpha_2+\beta_2} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \\ -1 & \text{dans } \Omega_\delta \end{cases} \\ &\leq \tilde{c}_0 m_2 C^{-(|\alpha_2|+|\beta_2|)} d(x)^{\alpha_2+\beta_2} \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} -\Delta_{p_1}\overline{u} &= C^{p_1-1}\left(1 + d(x)^{\alpha_1+\beta_1}\right) \\ &\geq \tilde{c}_1 M_1 C^{|\alpha_1|+|\beta_1|} d(x)^{\alpha_1+\beta_1} + 2C^{\max\{\gamma_1,\theta_1\}} \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{2.35}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta_{p_2}\overline{v} &= C^{p_2-1}(1 + d(x)^{\alpha_2+\beta_2}) \\ &\geq \tilde{c}_1 M_2 C^{|\alpha_2|+|\beta_2|} d(x)^{\alpha_2+\beta_2} + 2C^{\max\{\gamma_2,\theta_2\}} \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.36}$$

pour $C > 1$ suffisamment grand. Par conséquent, en combinant (2.31)-(2.36), on déduit que les estimations énoncées sont satisfaites. ■

2.3 Existence de solutions

2.3.1 Le résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre est formulé comme suit:

Théorème 2.6 *Sous l'hypothèse* (H_f), *le système* (P) *admet une solution positive* (u, v) *dans* $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, *pour certain* $\sigma \in (0, 1)$.

La preuve du Théorème 2.6 est essentiellement basée sur l'application du théorème du point fixe de Schauder. Cela consiste à construire un ensemble fermé, borné et convexe dans lequel un point fixe d'un opérateur continu et compact est localisé. Par ailleurs, il est important de noter que l'ensemble en question doit être invariant par cet opérateur. À cet effet, en utilisant les fonctions introduites dans (2.29), on définit l'ensemble

$$\mathcal{O}_C := \left\{ \begin{array}{c} (\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in C_0^1(\overline{\Omega})^2 : \underline{u} \leq \mathrm{u} \leq \overline{u},\ \underline{v} \leq \mathrm{v} \leq \overline{v} \text{ dans } \Omega \\ et\ \|\nabla \mathrm{u}\|_\infty, \|\nabla \mathrm{v}\|_\infty \leq C. \end{array} \right\},$$

L'ensemble $\mathcal{O}_C$ est non-vide, fermé, borné et convexe dans $C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$.

2.3.2 L'opérateur $\mathcal{T}$

Soit l'opérateur $\mathcal{T} : \mathcal{O}_C \to C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ défini par

$$\mathcal{T}(w_1, w_2) = (u, v), \tag{2.37}$$

pour tout $(w_1, w_2) \in \mathcal{O}_C$, où (u, v) est la solution du problème

$$(\mathrm{P}_w) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u = f_1(x, w_1, w_2, \nabla w_1, \nabla w_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v = f_2(x, w_1, w_2, \nabla w_1, \nabla w_2) & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est important de noter que les solutions du problème (P_w) coïncident avec les points fixes de l'opérateur $\mathcal{T}$.

Lemme 2.7 *L'opérateur T est bien défini.*

Démonstration. D'après (H_f) et en utilisant la définition de $\mathcal{O}_C$, pour tout $w_1, w_2 \in \mathcal{O}_C$, on a:

$$\begin{aligned} & m_i w_1^{\alpha_i} w_2^{\beta_i} \leq f_i(x, w_1, w_2, \nabla w_1, \nabla w_2) \\ & \leq M_i w_1^{\alpha_i} w_2^{\beta_i} + |\nabla w_1|^{\gamma_i} + |\nabla w_2|^{\theta_i} \\ & \leq M_i w_1^{\alpha_i} w_2^{\beta_i} + \|\nabla w_1\|_\infty^{\gamma_i} + \|\nabla w_2\|_\infty^{\theta_i} \\ & \leq M_i w_1^{\alpha_i} w_2^{\beta_i} + 2C^{\max\{\gamma_i, \theta_i\}} \text{ dans } \Omega, \text{ pour } i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Donc, de (2.32) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & f_i(x, w_1, w_2, \nabla w_1, \nabla w_2) \\ & \leq M_i \tilde{c}_1 C^{|\alpha_i| + |\beta_i|} d(x)^{\alpha_i + \beta_i} + 2C^{\max\{\gamma_i, \theta_i\}} \text{ dans } \Omega, \text{ pour } i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Étant donné que $\alpha_i + \beta_i > -1$, l'inégalité de Hardy-Sobolev fournie par le Théorème 1.10, garantit que

$$f_i(x, w_1, w_2, \nabla w_1, \nabla w_2) \in W^{-1, p_i'}(\Omega), \text{ pour } i = 1, 2. \tag{2.40}$$

Par ailleurs, selon que le signe de $\alpha_i + \beta_i$ est positif $(\alpha_i + \beta_i \geq 0)$ où négative $(\alpha_i + \beta_i \in (-1, 0))$, les Théorèmes 1.17 et 1.18 de régularité impliquent que la solution $(u, v) \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, avec $\sigma \in (0, 1)$. En plus, il existe une constante $R > 0$, indépendante de la solution (u, v) telle que

$$\|u\|_{C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})}, \|v\|_{C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})} < R. \tag{2.41}$$

Par conséquent, le Théorème 1.14 de Minty-Browder garantit l'unique solvabilité de

(u, v) dans (P_w) et de ce fait, l'opérateur $\mathcal{T}$ est bien définie.

■

Lemme 2.8 *L'opérateur T est continu et compact.*

Démonstration. On considère la suite $(w_{1,n}, w_{2,n}) \in \mathcal{O}_C$ telle que

$$(w_{1,n}, w_{2,n}) \longrightarrow (w_1, w_2), \text{ dans } C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}). \tag{2.42}$$

On pose

$$\mathcal{T}(w_{1,n}, w_{2,n}) = (u_n, v_n), \tag{2.43}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \langle -\Delta_{p_1} u_n, \varphi \rangle = \int_\Omega f_1(w_{1,n}, w_{2,n} \nabla w_{1,n}, \nabla w_{2,n}) \varphi \, \mathrm{d}x, \\ \langle -\Delta_{p_2} v_n, \psi \rangle = \int_\Omega f_2(w_{1,n}, w_{2,n} \nabla w_{1,n}, \nabla w_{2,n}) \psi \, \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{2.44}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$. En testant (2.44) avec $(\varphi, \psi) = (u_n - u, v_n - v)$, le Théorème 1.2 de convergence dominée, qui est applicable grâce à (2.39) et (2.23), implique que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle -\Delta_{p_1} u_n, u_n - u \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle -\Delta_{p_2} v_n, v_n - v \rangle = 0. \tag{2.45}$$

Il est important d'observer que l'intégrabilité des fonctions

$$d(x)^{\alpha_1 + \beta_1}(u_n - u) \text{ et } d(x)^{\alpha_2 + \beta_2}(v_n - v), \tag{2.46}$$

est fournie par l'application de l'inégalité de Hardy-Sobolev (voir Lemme 1.10) sous l'hypothèse (2.23). Donc, de la propriété S_+ de l'opérateur $-\Delta_{p_i}$ sur $W_0^{1,p_i}(\Omega)$, on déduit que

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ dans } W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega). \tag{2.47}$$

En passant à la limite dans (2.44), on conclut que

$$(u, v) = \mathcal{T}(w_1, w_2). \tag{2.48}$$

Par ailleurs, d'après (2.41), nous savons que la suite $\{(u_n, v_n)\}$ est bornée dans $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\sigma \in (0, 1)$. Donc, étant donné que l'injection $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \subset C_0^1(\overline{\Omega})$ est compacte et compte tenu de (3.35), on peut extraire une sous-suite, encore notée $\{(u_n, v_n)\}$, telle que

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ dans } C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega}), \tag{2.49}$$

ce qui montre que l'opérateur $\mathcal{T}$ est continue.
A présent, on montre que $\mathcal{T}$ est compact. A cet effet, à travers (2.41), on observe que $\mathcal{T}(\mathcal{O}_C)$ est borné dans $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$. Alors, de la compacité de l'injection $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \subset C_0^1(\overline{\Omega})$, on conclut que $\mathcal{T}(\mathcal{O}_C)$ est un sous ensemble relativement compact de $C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$. Ceci achève la démonstration. ■

Lemme 2.9 *$\mathcal{O}_C$ est invariant par $\mathcal{T}$.*

Démonstration. Soit $(w_1, w_2) \in \mathcal{O}_C$ et notons $(u, v) = \mathcal{T}(w_1, w_2)$. En utilisant (P_w) et en combinant la Proposition 2.5 avec (2.38), le principe de comparaison faible donné par le Théorème 1.22 implique

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \ \text{ et } \ \underline{v} \leq v \leq \overline{v} \text{ dans } \Omega. \tag{2.50}$$

D'autre part , sur la base de (2.39) et (2.3), le Théorème 2.1 entraine que

$$\|\nabla u\|_\infty, \|\nabla v\|_\infty \leq k_p \max_{i=1,2} ||f_i(\cdot, u, v, \nabla u, \nabla v)\|_{r_i}^{\frac{1}{p_i-1}}, \tag{2.51}$$

pour une certaine constante positive k_p ne dépendant que de p_i et Ω. En exploitant à nouveau (2.39) on obtient

$$\begin{aligned} &||f_i(\cdot, w_1, w_2, \nabla w_1, \nabla w_2)\|_{r_i} \\ &\leq M_i \tilde{c}_1 C^{|\alpha_i|+|\beta_i|} \left(\int_\Omega d(x)^{r_i(\alpha_i+\beta_i)} \, \mathrm{d}x\right)^{1/r_i} + 2|\Omega|^{1/r_i} C^{\max\{\gamma_i, \theta_i\}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

En gardant à l'esprit (2.3), le Théorème 1.16 de Lazer-Mackenna montre que l'intégrale

$$\left(\int_\Omega d(x)^{r_i(\alpha_i+\beta_i)} \, \mathrm{d}x\right)^{1/r_i} \tag{2.53}$$

est bornée et donc, il existe une constante $\mu > 0$ telle que

$$\left(\int_\Omega d(x)^{r_i(\alpha_i+\beta_i)} \, \mathrm{d}x\right)^{1/r_i} < \mu. \tag{2.54}$$

Alors, d'après (2.52), (2.2) et (2.3), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &||f_i(\cdot, w_1, w_2, \nabla w_1, \nabla w_2)\|_{r_i} \\ &\leq M_i \tilde{c}_1 C^{|\alpha_i|+|\beta_i|} \mu + 2|\Omega|^{1/r_i} C^{\max\{\gamma_i, \theta_i\}} \leq (k_p^{-1} C)^{p_i-1}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

pour $C > 1$ suffisamment grand. Ainsi, de (2.51), on conclut que

$$\|\nabla u\|_\infty, \|\nabla v\|_\infty \leq C. \tag{2.56}$$

Finalement, en rassemblant (2.50) et (2.56), on déduit que $(u, v) \in \mathcal{O}_C$ et donc, l'inclusion $\mathcal{T}(\mathcal{O}_C) \subset \mathcal{O}_C$ est vérifiée. ■

2.3.3 Démonstration du résultat principal

Démonstration.

D'après les Lemmes 2.7, 2.8 et 2.9, l'opérateur $\mathcal{T} : \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C$ est continu, compact et applique l'ensemble $\mathcal{O}_C$ dans lui même. Par conséquent, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder qui établie l'existence de $(u, v) \in \mathcal{O}_C$ satisfaisant

$$(u, v) = \mathcal{T}(u, v). \tag{2.57}$$

Compte tenu des définitions de l'opérateur $\mathcal{T}$ et de l'ensemble $\mathcal{O}_C$, nous déduisons que (u, v) est une solution régulière du problème (P). En plus, (u, v) est positive du fait que les fonctions $\overline{u}$ et $\underline{v}$ sont positives. Ceci complète la preuve théorème. ■

CHAPITRE 3

Systèmes convectifs fortement singuliers

Dans ce chapitre, nous prouvons l'existence et la régularité des solutions pour un système elliptique quasi-linéaire avec des termes de convections qui peuvent être singuliers aussi bien au niveau de la solution et de son gradient. Plus précisément, nous considérons le système suivant:

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = g_1(x,u,v,\nabla u,\nabla v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v = g_2(x,u,v,\nabla u,\nabla v) \text{ dans } \Omega \\ u,v>0 \quad \text{dans } \Omega \\ u,v=0 \quad \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$.
Dans ce qui suit, nous appellerons solution du problème (P) la paire $(u,v) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ avec $u,v \geq 0$ *p.p.* dans Ω, et satisfait:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega g_1(x,u,v,\nabla u,\nabla v)\varphi \, dx, \\ &\textstyle\int_\Omega |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \psi \, dx = \int_\Omega g_2(x,u,v,\nabla u,\nabla v)\psi \, dx, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$.
On suppose que:

$$g_1, g_2 : (0,+\infty)^2 \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})^2 \to (0,+\infty)$$

sont des fonctions continues vérifiant les conditions de croissances suivantes:
$((\mathrm{H}_g))$: Pour tout $s_1, s_2 > 0$ et $(\xi_1,\xi_2) \in (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, avec $m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$

$$m_1(s_1+|\xi|)^{\alpha_1}(s_2+|\xi_2|)^{\beta_1} \leq g_1(s_1,s_2,\xi_1,\xi_2) \leq M_1(s_1+|\xi_1|)^{\alpha_1}(s_2+|\xi_2|)^{\beta_1} \tag{3.2}$$

et

$$m_1(s_1 + |\xi|)^{\alpha_2}(s_2 + |\xi_2|)^{\beta_2} \leq g_2(s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_1(s_1 + |\xi_1|)^{\alpha_2}(s_2 + |\xi_2|)^{\beta_2} \quad (3.3)$$

avec $\alpha_2\beta_1 < 0$ et $\alpha_1\beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\alpha_1\beta_2 > 0 \quad (3.4)$$

et

$$|\alpha_1| - \beta_1 < p - 1 \quad et \quad |\beta_2| - \alpha_2 < q - 1 \quad (3.5)$$

L'une des principales difficultés rencontrées dans l'étude du problème (P) est dû à la présence de termes fortement singuliers, qui apparaissent sous l'hypothèse (H_g). Cela se traduit par le fait que les non-linéarité $g_1(u, v, \nabla u, \nabla v)$ et $g_2(u, v, \nabla u, \nabla v)$ explosent quand les solutions u ou v, et leur gradients ∇u ou ∇v à la fois approchent 0, causé par le signe des exposants α_i et β_i qui peuvent éventuellement être négatifs.

Notre objectif est de montrer que le système (P) admet des solutions positives $(u, v) \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, pour certain $\sigma \in (0, 1)$. Notre approche est basée principalement sur le Théorème du point fixe de Schauder (voir Théorème 1.26). Des estimations a priori aussi bien sur les solutions du problème (P) que sur leur gradient sont nécessaires afin d'établir un contrôle sur ces derniers. Cela engendre un ensemble fermé, borné et convexe construit sur la base d'un choix spécifique et approprié de fonctions avec un ajustement adéquat de constantes. Cet ensemble a pour but de fournir une localisation d'un point fixe correspondant à un opérateur associé au problème (P). Il est important de noter que l'opérateur en question est construit de sorte que chacun de ses points fixes éventuels soit solution de (P).

3.1 Propriétés de comparaison

On considère les fonctions propres $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ associées, respectivement, aux premières valeurs propres $\lambda_{1,p}$ et $\lambda_{1,q}$ des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W_0^{1,q}(\Omega)$ et on pose

$$R = max\{\| \phi_{1,p}\|_q, \| \phi_{1,q}\|_q\}. \quad (3.6)$$

On rappelle du chapitre 1 que les fonctions $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ appartiennent à $C_0^1(\overline{\Omega})$ et vérifient

$$\frac{\partial \phi_{1,p}}{\partial \nu} < 0 \quad et \quad \frac{\partial \phi_{1,q}}{\partial \nu} < 0 \quad dans \quad \partial\Omega. \quad (3.7)$$

En plus, on a:

$$\phi_{1,p}, \phi_{1,q} > 0 \quad dans \quad \Omega \quad et \quad |\nabla\phi_{1,p}|, |\nabla\phi_{1,q}| > 0 \quad dans \quad \partial\Omega. \tag{3.8}$$

Alors, il est possible de trouver des constantes $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ telles que:

$$\phi_{1,p} + |\nabla\phi_{1,p}| \geq \mu_1 \quad et \quad \phi_{1,q} + |\nabla\phi_{1,q}| \geq \mu_2 \quad dans \quad \overline{\Omega}. \tag{3.9}$$

Soient ξ_1 et ξ_2 dans $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, pour certain $\sigma \in (0,1)$, l'unique solutions des problèmes de Dirichlet suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p \xi_1 = 1 \text{ dans } \Omega \\ \xi_1 = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} -\Delta_p \xi_2 = 1 \text{ dans } \Omega \\ \xi_2 = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Ils existent des constantes positives C_1 et C_2 telles que:

$$\begin{cases} \xi_1(x) \geq C_1 \phi_{1,p}(x) \text{ en } \Omega \\ \xi_2(x) \geq C_2 \phi_{1,q}(x) \quad \text{sur}\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

Dans ce qui suit, on note

$$L_1 = max\{\|\xi_1\|_{C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})}, K(p)\} \quad et \quad L_2 = max\{\|\xi_2\|_{C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})}, K(q)\} \tag{3.12}$$

où $K(p)$ et $K(q)$ sont des constantes positives données par le Théorème 1.20 (voir chapitre 1 §4) .

On définit les fonctions suivantes

$$(\underline{u}, \underline{v}) = (C^{-(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} \phi_{1,p}, C^{-(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} \phi_{1,q}) \tag{3.13}$$

et

$$(\overline{u}, \overline{v}) = (C^{(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} \xi_1, C^{(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} \xi_2) \tag{3.14}$$

où $C > 1$ est une constante et

$$\theta(\alpha_1, \beta_2) = \frac{-1}{2}(1 + Sgn(\alpha_1, \beta_2)) \tag{3.15}$$

avec

$$Sgn(\alpha_1, \beta_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_1, \beta_2 > 0, \\ -1 & \text{si } \alpha_1, \beta_2 < 0. \end{cases}$$

Le résultat suivant montre que les fonctions introduites dans (3.13) et (3.14) sont comparables.

Lemme 3.1 *$\underline{u} \leq \overline{u}$ et $\underline{v} \leq \overline{v}$ dans Ω*

Démonstration. pour (3.15), et pour $C > 1$, d'après (3.13), (3.14) et (3.11), il résulte que:

$$\begin{aligned}\underline{u}(x) = C^{-(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}\phi_{1,p}(x) \leq C^{(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}C_1\phi_{1,p}(x) \\ \leq C^{(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}\xi_1(x) = \overline{u}(x) \text{ pour tout } x \in \Omega\end{aligned} +$$

et

$$\begin{aligned}\underline{v}(x) = C^{-(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}\phi_{1,p}(x) \leq C^{(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}C_1\phi_{1,q}(x) \\ \leq C^{(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}\xi_2(x) = \overline{v}(x) \text{ pour tout } x \in \Omega.\end{aligned}$$

■

En utilisant les fonctions (3.13) et (3.14), on introduit les ensembles suivants:

$$\mathcal{K}_{1,C} = \left\{ \text{y} \in C_0^1(\overline{\Omega}) : \begin{array}{c} \underline{u} \leq \text{y} \leq \overline{u}, \text{ dans } \Omega, \|\nabla y\|_\infty \leq C^{(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}L_1 \text{ dans } \Omega \\ et \ \frac{-\partial y}{\partial \nu} \geq C^{-(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}|\nabla\phi_{1,p}| \text{ dans } \partial\Omega \end{array} \right\} \tag{3.16}$$

et

$$\mathcal{K}_{2,C} = \left\{ \text{y} \in C_0^1(\overline{\Omega}) : \begin{array}{c} \underline{v} \leq \text{y} \leq \overline{v}, \text{ dans } \Omega, \|\nabla y\|_\infty \leq C^{(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}L_2 \text{ dans } \Omega \\ et \ \frac{-\partial y}{\partial \nu} \geq C^{-(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}|\nabla\phi_{1,q}| \text{ dans } \partial\Omega \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

Compte tenu de (3.9), pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$, on a:

$$y_1 + |\nabla y_1| \geq \left\{ \begin{array}{c} |\nabla y_1| = \frac{-\partial y_1}{\partial \nu} \geq C^{-(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}|\nabla\phi_{1,p}| \text{ dans } \partial\Omega \\ \underline{u} = C^{-(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}\phi_{1,p} \text{ dans } \Omega \end{array} \right.$$

$$\geq C^{-(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}min\{\mu_1, \mu_2\} \tag{3.18}$$

et

$$y_2 + |\nabla y_2| \geq \left\{ \begin{array}{c} |\nabla y_2| = \frac{-\partial y_2}{\partial \nu} \geq C^{-(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}|\nabla\phi_{1,q}| \text{ dans } \partial\Omega \\ \underline{u} = C^{-(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}\phi_{1,q} \text{ sur } \Omega \end{array} \right.$$

$$\geq C^{-(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}min\{\mu_1, \mu_2\} \tag{3.19}$$

Dans ce qui suit, nous montrons des propriétés de comparaison qui sont fondamentales dans l'application du Théorème du point fixe de Schauder. Nous distinguerons deux cas relatifs aux signes des exposants α_1 et β_2.

3.1.1 Système régulier ($\alpha_1, \beta_2 > 0$)

Proposition 3.2 *Supposons que les conditions (3.2)-(3.5) sont vérifiées telles que* $\alpha_1, \beta_2 > 0$. *Alors, pour* $C > 1$ *suffisamment grand dans (3.13) et (3.14), on a :*

$$-\Delta_p \underline{u} \leq m_1(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_1}(\overline{v} + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{\beta_1} \text{ dans } \Omega \tag{3.20}$$

$$-\Delta_q \underline{v} \leq m_2(\overline{u} + L_2 C^{\frac{1}{p-1}})^{\alpha_2}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_2} \text{ dans } \Omega \tag{3.21}$$

$$-\Delta_p \overline{u} \geq M_1(\overline{u} + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_1} \text{ dans } \Omega \tag{3.22}$$

$$-\Delta_q \overline{v} \geq M_2(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_2}(\overline{v} + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{\beta_2} \text{ dans } \Omega \tag{3.23}$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$.

Démonstration. De (3.6) , (3.12)-(3.9) et (3.5), pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$, on a:

$$\begin{aligned}
&(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{-\alpha_1}(\overline{v} + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{-\beta_1}(-\Delta_p \underline{u}) \\
&= (\underline{u} + |\nabla y_1|)^{-\alpha_1}(C^{\frac{1}{q-1}}\xi_2 + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{-\beta_1} C^{\frac{-(p-1)}{q-1}} \phi_{1,p}^{p-1} \\
&\leq \underline{u}^{-\alpha_1}(C^{\frac{1}{q-1}}\xi_2 + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{-\beta_1} C^{\frac{-(p-1)}{q-1}} \phi_{1,p}^{p-1} \\
&\leq C^{\frac{-(p-1)+\alpha_1}{q-1} - \frac{\beta_1}{q-1}} min\{\mu_1, \mu_2\}^{-\alpha_1}(2L_2)^{-\beta_1}\phi_{1,p}^{p-1} \\
&\leq C^{\frac{\alpha_1 - \beta_1 - p+1}{q-1}} min\{\mu_1, \mu_2\}^{-\alpha_1}(2L_2)^{-\beta_1} R^{p-1} \leq m_1 \text{ dans } \Omega
\end{aligned}$$

pour $C > 1$ assez grand. Par conséquent, (3.20) est vérifiée.
De (3.5), (3.6), (3.12)-(3.14), et (3.19) et pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(\overline{u} + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{-\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{-\beta_1}(-\Delta_p \overline{u}) \\
&= C^{\frac{p-1}{p-1}}(C^{\frac{1}{p-1}}\xi_1 + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{-\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{-\beta_1} \\
&\geq C^{\frac{p-1}{p-1}}(C^{\frac{1}{p-1}}\xi_1 + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{-\alpha_1}\underline{v}^{-\beta_1} \\
&\geq C^{\frac{p-1-\alpha_1+\beta_1}{p-1}}(2L_1)^{-\alpha_1} min\{\mu_1, \mu_2\}^{-\beta_1} \geq M_1 \text{ dans } \Omega,
\end{aligned}$$

à condition que $C > 1$ soit suffisamment grand, ce qui montre (3.21).

D'après (3.5), (3.10), (3.12), (3.15), (3.14) et (3.19), étant donné que $\beta_1 < 0$, pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$, on obtient

$$(\overline{u} + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{-\alpha_1}(\underline{v} + \nabla y_2)^{-\beta_1}(-\Delta_p \overline{u})$$

$$= C^{\frac{p-1}{p-1}}(C^{\frac{1}{p-1}}\xi_1 + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{-\alpha_1})(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{-\beta_1}$$

$$\geq C^{\frac{p-1}{p-1}}(C^{\frac{1}{p-1}}\xi_1 + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{-\alpha_1})\underline{v}^{-\beta_1}$$

$$\geq C^{\frac{-\alpha_1 - \beta_1 + p - 1}{p-1}}(2L_2)^{-\alpha_1} min\{\mu_1, \mu_2\}^{-\beta_1} \geq M_1 \text{ en } \Omega$$

pour tout $C > 1$ suffisamment grand, ce qui prouve (3.22).
D'après (3.5), (3.10), (3.12), (3.15), (3.14) et 3.18, étant donné que $\alpha_2 < 0$, pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$, on dérive

$$(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{-\alpha_2}(\overline{v} + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{-\beta_2}(-\Delta_q \overline{v})$$

$$= C^{\frac{q-1}{q-1}}(\underline{u} + |\nabla y_1|)(C^{\frac{1}{q-1}}\xi_2 + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{-\beta_2})$$

$$\geq C^{\frac{q-1}{q-1}}\underline{u}^{-\alpha_2}(C^{\frac{1}{q-1}}\xi_2 + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{-\beta_2})$$

$$\geq C^{\frac{q-1+\alpha_2-\beta_2}{q-1}} min\{\mu_1, \mu_2\}^{-\alpha_2}(2L_2)^{-\beta_2} \geq M_2 \text{ dans } \Omega.$$

pour toute constante $C > 1$ suffisamment grande. Par conséquent, nous déduisons (3.23). La preuve est ainsi achevée. ■

3.1.2 Système singulier ($\alpha_1, \beta_2 < 0$)

La proposition suivante traite le cas $\alpha_1, \beta_2 < 0$, qui peut se produire sous la condition (3.3).

Proposition 3.3 *Supposons que les conditions (3.2), (3.3), et (3.5) sont satisfaites avec $\alpha_1, \beta_2 < 0$. Alors, pour tout $C > 1$ assez grand dans (3.13) et (3.14), on a*

$$-\Delta_p \underline{u} \leq m_1(\overline{u} + L_1 C)^{\alpha_1}(\overline{v} + L_2 C)^{\beta_1} \text{ dans } \Omega \tag{3.24}$$

$$-\Delta_p \underline{v} \leq m_2(\overline{u} + L_1 C)^{\alpha_2}(\overline{v} + L_2 C)^{\beta_2} \text{ dans } \Omega \tag{3.25}$$

$$-\Delta_p \overline{u} \geq M_1(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_1} \text{ dans } \Omega \tag{3.26}$$

$$-\Delta_q \overline{v} \geq M_2(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_2}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_2} \text{ dans } \Omega \tag{3.27}$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$.

Démonstration.
De (3.5), (3.6) et (3.12)-(3.14), on a

$$(\overline{u} + L_1C)^{-\alpha_1}(\overline{v} + L_2C)^{-\beta_1}(-\Delta_p\underline{u})$$

$$\begin{aligned} &= (C\xi_1 + L_1C)^{-\alpha_1}(C\xi_2 + L_2C)^{-\beta_1}C^{-p+1}\phi_{1,p}^{p-1} \\ &\leq C^{-p+1-\alpha_1-\beta_1}(2L_1)^{-\alpha_1}(2L_2)^{-\beta_1}\phi_{1,p}^{p-1} \\ &\leq C^{-p+1-\alpha_1-\beta_1}2^{-\alpha_1-\beta_1}L_1^{-\alpha_1}L_2^{-\beta_1}R^{p-1} \leq m_1 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

avec $C > 1$ suffisamment grand, ce qui donne (3.24).
En utilisant (3.5), (3.6) et (3.12)-(3.14), on obtient:

$$(\overline{u} + L_1C)^{-\alpha_2}(\overline{v} + L_2C)^{-\beta_2}(-\Delta_p\underline{v})$$

$$\begin{aligned} &= (C\xi_1 + L_1C)^{-\alpha_2}(C\xi_2 + L_2C)^{-\beta_2}C^{-q+1}\phi_{1,q}^{q-1} \\ &\leq C^{-q+1-\alpha_2-\beta_2}2^{-\alpha_2-\beta_2}L_1^{-\alpha_2}L_2^{-\beta_2}R^{q-1} \leq m_2 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

pour $C > 1$ suffisamment grand, ce qui montre (3.25).
D'après (3.6), (3.10), (3.15) et (3.14)-(3.19), pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$, on obtient

$$\begin{aligned} &(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{-\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{-\beta_1}(-\Delta_p\overline{u}) \\ &= C^{p-1}(\underline{v} + |\nabla y_1|)^{-\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_1|)^{-\beta_1} \\ &\geq C^{p-1}\underline{u}^{-\alpha_1}\underline{v}^{-\beta_2} \\ &\geq C^{p-1+\alpha_1+\beta_1}min\{\mu_1, \mu_2\}^{-\alpha_1-\beta_1} \geq M_1 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

pour tout $C > 1$ suffisamment grand. Par conséquent, l'estimation (3.26) est vérifiée.
D'après (3.6), (3.10), (3.15) et (3.14)-(3.19), pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$, nous dérivons

$$\begin{aligned} &(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{-\alpha_2}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{-\beta_2}(-\Delta_p\overline{v}) \\ &= C^{q-1}(\underline{u} + |\nabla y_1|)^{-\alpha_2}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{-\beta_2} \\ &\geq C^{q-1}\underline{u}^{-\alpha_2}\underline{v}^{-\beta_2} \\ &\geq C^{q-1+\alpha_2+\beta_2}min\{\mu_1, \mu_2\}^{-\alpha_2-\beta_2} \geq M_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

pour $C > 1$ suffisamment grand, ce qui fourni (3.27). Ceci complète la preuve. ■

3.2 Le résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre est formulé comme suit:

Théorème 3.4 *Sous l'hypothèse* (H_g)*, le système (P) admet une solution régulière* (u,v) *dans* $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ *pour certain* $\sigma \in (0,1)$.

La preuve du Théorème (3.4) est essentiellement basée sur l'application du théorème du point fixe de Schauder. Cela consiste à construire un ensemble fermé, borné et convexe dans lequel un point fixe d'un opérateur continu et compact est localisé. Par ailleurs, il est important de noter que l'ensemble en question doit être invariant par cet opérateur. A cet effet, en utilisant les ensembles introduits dans (3.16) et (3.17), on définit, pour tout $C > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{D}_{\mathcal{C}} := \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}.$$

3.2.1 L'opérateur $\mathcal{T}$

Soit l'opérateur $\mathcal{T} : \mathcal{D}_C \to C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ défini par

$$\mathcal{T}(y_1, y_2) = (u, v), \tag{3.28}$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{D}_C$, où (u,v) est la solution du problème

$$(\mathrm{P}_y) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = g_1(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = g_2(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est important de noter que les solutions du problème (P_y) coïncident avec les points fixes de l'opérateur $\mathcal{T}$.

Lemme 3.5 *L'opérateur* $\mathcal{T}$ *est bien défini.*

Démonstration. Pour $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{1,C}$ et $C > 1$ suffisamment grand, de (3.2), (3.4), (3.5) et (3.12)-(3.19), on obtient les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} g_1(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) &\le M_1 (y_1 + |\nabla y_1|)^{\alpha_1} (y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_1} \\ &\le M_1 \begin{cases} (\overline{u} + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{\alpha_1} (y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_1} \text{ si } \alpha_1 > 0 \\ (y_1 + |\nabla y_1|)^{\alpha_1} (y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_1} \text{ si } \alpha_1 < 0 \end{cases} \\ &\le M_1 \begin{cases} C^{\frac{\alpha_1 - \beta_1}{p-1}} (2L_1)^{\alpha_1} min\{\mu_1, \mu_2\}^{\beta_1} \text{ si } \alpha_1 > 0 \\ C^{-\alpha_1 - \beta_1} min\{\mu_1, \mu_2\}^{\alpha_1 + \beta_1} \text{ si } \alpha_1 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\leq \begin{cases} C \text{ si } \alpha_1 > 0 \\ C^{p-1} \text{ si } \alpha_1 < 0 \end{cases} = C^{(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)+1}} \text{ dans } \Omega \tag{3.29}$$

De même, de (3.3)-(3.5) et (3.12)-(3.19), pour $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{1,C}$ et $C > 1$ suffisamment grand, on déduit que:

$$\begin{aligned} g_2(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) &\leq M_2(y_1 + |\nabla y_1|)^{\alpha_2}(y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_2} \\ &\leq M_2 \begin{cases} (y_1 + |\nabla y_|)^{\alpha_2}(\overline{v} + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{\beta_2} \text{ si } \beta_2 > 0 \\ (y_1 + |\nabla y_|)^{\alpha_2}(y_2 + |\nabla y_2)^{\beta_2} \text{ si } \beta_2 < 0 \end{cases} \\ &\leq M_2 \begin{cases} C^{\frac{\beta_2-\alpha_2}{q-1}} min\{\mu_1, \mu_2\}^{\alpha_2}(2L_2)^{\beta_2} \text{ si } \beta_2 > 0 \\ C^{-\alpha_2-\beta_2} min\{\mu_1, \mu_2\}^{\alpha_2+\beta_2} \text{ si } \beta_2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\leq \begin{cases} C \text{ si } \beta_2 > 0 \\ C^{q-1} \text{ si } \beta_2 < 0 \end{cases} = C^{(q-1)^{\theta\alpha_1,\beta_2+1}} \text{ dans } \Omega \tag{3.30}$$

En particulier, (3.29) et (3.30) impliquent que:

$$g_1(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) \in W^{-1,p'}(\Omega) \text{ et } g_2(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) \in W^{-1,q'}(\Omega)$$

Donc, le Théorème 1.14 de Minty-Browder garantit l'unique solvabilité de (u, v) dans (P_y). Sur la base de (3.29) et (3.30), le théorème 1.17 de régularité de Lieberman implique que $(u, v) \in C^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, avec $\sigma \in (0, 1)$ et il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}, \|v\|_{C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})} < M, \tag{3.31}$$

pour tout $(u, v) = \mathcal{T}(y_1, y_2)$ avec $(y_1, y_2) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{1,C}$. ■

Lemme 3.6 *L'opérateur $\mathcal{T}$ est continu et compact.*

Démonstration. On considère la suite $(y_{1,n}, y_{2,n}) \in \mathcal{K}_{1,C} \times \mathcal{K}_{2,C}$ telle que

$$(y_{1,n}, y_{2,n}) \to (y_1, y_2) \text{ dans } C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega}). \tag{3.32}$$

On pose

$$(u_n, v_n) = \mathcal{T}(y_{1,n}, y_{2,n}),$$

ce qui est équivalent à:

$$\textstyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega g_1(y_{1,n}, y_{2,n}, \nabla y_{1,n}, \nabla y_{2,n}) \varphi \, dx, \tag{3.33}$$

$$\textstyle\int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla \psi \, dx = \int_\Omega g_2(y_{1,n}, y_{2,n}, \nabla y_{1,n}, \nabla y_{2,n}) \psi \, dx, \tag{3.34}$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$.
En testant (3.33) et (3.34) avec $(\varphi,\psi) = (u_n - u, v_n - v)$, le Théorème 1.2 de convergence dominée de Lebesgue, applicable grâce à (3.29) et (3.30), implique que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle -\Delta_{p_1} u_n, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle -\Delta_{p_2} v_n, v_n - v\rangle = 0.$$

La propriété S_+ des opérateurs $-\Delta_p$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $-\Delta_q$ sur $W_0^{1,q}(\Omega)$ impliquent

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u,v) \text{ dans } W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega). \tag{3.35}$$

Par conséquent, en passant à la limite dans (3.33) et (3.34), on obtient

$$(u,v) = \mathcal{T}(y_1,y_2). \tag{3.36}$$

Par ailleurs, en utilisant (3.31), il s'ensuit que la suite $\{(u_n,v_n)\}$ est bornée dans $C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour certain $\sigma \in (0,1)$. Donc, étant donné que l'injection $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \subset C_0^1(\overline{\Omega})$ on peut extraire une sous-suite (encore noté (u_n,v_n)) telle que

$$(u_n,v_n) \to (u,v) \text{ dans } C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega}). \tag{3.37}$$

Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{T}$ est continue.
On montre que $\mathcal{T}$ est un opérateur compact. En se basant sur (3.31), on a que $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ est borné dans $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$, Alors, en invoquant une nouvelle fois la compacité de l'injection de $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \subset C_0^1(\overline{\Omega})$, on déduit que $T(\mathcal{D})$ est un sous-ensemble relativement compact de $C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$. Ceci montre que l'opérateur $\mathcal{T}$ est compact. ■

Lemme 3.7 *$\mathcal{D}_C$ est invariant par $\mathcal{T}$.*

Démonstration. On note

$$T(y_1,y_2) = (u,v). \tag{3.38}$$

De la définition de $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ et de $\mathcal{T}$, en conjonction avec (H_g), (P_y), (3.12), (3.15), (3.20)-(3.23) et (3.24)-(3.27), on obtient

$$-\Delta_p u = g_1(y_1,y_2,\nabla y_1,\nabla y_2) \leq M_1(y_1 + |\nabla y_1|)^{\alpha_1}(y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_1}$$

$$\leq M_1 \left\{ \begin{array}{c} (\overline{u} + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_1} \text{ si } \alpha_1 > 0 \\ (\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_1}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_1} \text{ si } \alpha_1 < 0 \end{array} \right. \leq -\Delta_p \overline{u} \text{ dans } \Omega$$

$$-\Delta_q v = g_2(y_1,y_2,\nabla y_1,\nabla y_2) \leq M_2(y_1 + |\nabla y_1|)^{\alpha_2}(y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_2}$$

$$\leq M_2 \begin{cases} (\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_2}(\overline{v} + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{\beta_2} \text{ si } \beta_2 > 0 \\ (\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_2}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_2} \text{ si } \beta_2 < 0 \end{cases} \leq -\Delta_p \overline{v} \text{ dans } \Omega$$

$$-\Delta_p u = g_1(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) \geq m_1(y_1 + |\nabla y_1|)^{\alpha_1}(y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_1}$$

$$\geq m_1 \begin{cases} (\underline{u} + |\nabla y_1|)^{\alpha_1}(\overline{v} + L_2 C^{\frac{1}{q-1}})^{\beta_1}) \text{ si } \alpha_1 > 0 \\ (\overline{u} + L_1 C)^{\alpha_1}(\overline{v} + L_2 C)^{\beta_2} \text{ si } \alpha_2 < 0 \end{cases} \leq -\Delta_p \underline{u} \text{ dans } \Omega \tag{3.39}$$

$$-\Delta_q v = g_2(y_1, y_2, \nabla y_1, \nabla y_2) \geq m_2(y_1 + |\nabla y_1|)^{\alpha_2}(y_2 + |\nabla y_2|)^{\beta_2}$$

$$\geq m_1 \begin{cases} (\overline{u} + L_1 C^{\frac{1}{p-1}})^{\alpha_2}(\underline{v} + |\nabla y_2|)^{\beta_2}) \text{ si } \beta_2 > 0 \\ (\overline{u} + L_1 C)^{\alpha_2}(\overline{v} + L_2 C)^{\beta_2} \text{ si } \beta_2 < 0 \end{cases} \leq -\Delta_p \underline{u} \text{ dans } \Omega \tag{3.40}$$

En testant l'inégalité ci-après

$$-\Delta_p u \leq -\Delta_p \overline{u} \text{ dans } \Omega$$

par $(u - \overline{u})^+ = max\{0, u - \overline{u}\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et en intégrant sur Ω, on a

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{u>\overline{u}}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - \nabla \overline{u}^{p-2}\nabla \overline{u}, \overline{u} - \nabla \overline{u})_{\mathbb{R}^N}\, dx \\ &= \langle -\Delta_p u + \Delta_p \overline{u}, (u - \overline{u})^+ \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

La stricte monotonie de l'application $\xi \longmapsto |\xi|^{p-2}\xi$ sur $\mathbb{R}^N$ permet de conclure que l'ensemble $\{u > \overline{u}\} = \{x \in \Omega / u(x) > \overline{u}(x)\}$ est de mesure nulle, ce qui montre que

$$u(x) \leq \overline{u}(x) \ \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On raisonne de la même manière et en faisant intervenir les opérateur $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$, appliqués aux estimations présentées ci-dessus, on obtient

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad et \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v} \ \text{ dans } \ \Omega. \tag{3.41}$$

D'autre part, en utilisant (P_y), (3.30) et en tenant compte de (1.10) et (1.11), on déduit que

$$\|\nabla u\|_\infty \leq K(p) C^{(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} \text{ et } \|\nabla v\|_\infty \leq K(p) C^{(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}}.$$

D'après (3.12), ceci entraine que

$$\|\nabla u\|_\infty \leq L_1 C^{(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} \quad et \quad \|\nabla v\|_\infty \leq L_2 C^{(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} \tag{3.42}$$

Le principe de comparaison (voir §1.5 dans le chapitre 1), appliqué à (3.39) et (3.40) donne

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \quad et \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} \leq \frac{\partial \underline{v}}{\partial \nu} \text{ dans } \Omega \tag{3.43}$$

En rappelant les propriétés des fonctions propres $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ fournies par § 1.2.2 (voir le chapitre 1) et en tenant compte de (3.13) et (3.43) alors

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq -\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} = |\nabla \underline{u}| = C^{-(q-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} |\nabla \phi_{1,p}| \text{ dans } \Omega \tag{3.44}$$

et

$$-\frac{\partial v}{\partial \nu} \geq -\frac{\partial \underline{v}}{\partial \nu} = |\nabla \underline{v}| = C^{-(p-1)^{\theta(\alpha_1,\beta_2)}} |\nabla \phi_{1,q}| \text{ dans } \Omega \tag{3.45}$$

En combinant (3.41), (3.43), (3.44) et (3.45), on conclut que $(u, v) \in \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$, ce qui prouve que l'inclusion $T(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ est vraie. ■

3.2.2 Démonstration du résultat principal

Démonstration. D'après les Lemmes 3.5, 3.6 et 3.7, l'opérateur $\mathcal{T} : \mathcal{D}_C \to \mathcal{D}_C$ est continu, compact et applique l'ensemble $\mathcal{D}_C$ dans lui même. Par conséquent, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder qui établie l'existence de $(u, v) \in \mathcal{D}_C$ satisfaisant

$$(u, v) = \mathcal{T}(u, v). \tag{3.46}$$

Compte tenu des définitions de l'opérateur $\mathcal{T}$ et de l'ensemble $\mathcal{D}_C$, nous déduisons que (u, v) est une solution régulière du problème (P). En plus, (u, v) est positive du fait que les fonctions $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont positives. Ceci achève la preuve. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons montré l'existence de solutions positives pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires présentant éventuellement des singularités à l'origine. Notre approche est basée essentiellement sur le Théorème du point fixe de Schauder. Cette dernière est appliquée à l'aide d'un choix adéquat d'ensemble, construit sur la base de fonctions comparables aux fonctions propres correspondantes aux premières valeurs propres des Δ_{p_1} et Δ_{p_2}

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York / San Francisco / London, 1975.

[2] C.O. Alves & F.J.S.A. Correa, *On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators*, Appl. Math. Comput. 185 (2007), 727-736.

[3] D. Arcoya & D. Ruiz, The Ambrosetti-Prodi Problem for the p-Laplace Operator, *Comm. Partial Diff. Eqts.* 31 (2006), 849–865.

[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Theorie et Applications. Masson, Paris (1983).

[5] H. Bueno & G. Ercole, *A quasilinear problem with fast growing gradient*, Appl. Math. Lett. 26 (2013), 520-523.

[6] A. Cianchi & V. Maz'ya, *Global gradient estimates in elliptic problems under minimal data and domain regularity*, Commun. Pure Appl. Anal. 14 (2015), 285-311.

[7] J. Giacomoni, I. Schindler & P. Takac, *Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 6 (2007), 117-158.

[8] D. D. Hai, *On a class of singular p-Laplacian boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 383 (2011), 619-626.

[9] A. C. Lazer & P. J. Mckenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proc. American Math. Soc. 3 (111) 1991, 721-730.

[10] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 12 (1988), 1203-1219.

[11] D. Motreanu, A. Moussaoui & Z. Zhang, *Positive solutions for singular elliptic systems with convection term*, J. Fixed Point Theory Appl. 19 (3) (2017), 2165-2175.

[12] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A, Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, New York, 1990.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de présenter des résultats d'existence et de régularité des solutions positives pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires singuliers, associés à des termes de convections.
L'approche utilisée est principalement basée sur le théorème du point fixe de Schauder. Des estimations a priori sur les éventuelles solutions ainsi que sur leur gradient sont nécessaires afin d'établir un contrôle sur ces dernières. Ces estimations sont obtenues en exploitant essentiellement les propriétés spectrales de l'opérateur p-Laplacien. Cela permet de construire un ensemble fermé, borné et convexe, fournissant une localisation d'un point fixe qui est en fait une solution du problème considéré.
Dans ce travail, On présente deux résultats portant sur les systèmes quasi-linéaires convectifs et singuliers. Le premier montre l'existence de solutions positive $(u, v) \in C_0^{1,\sigma}(\Omega) \times C_0^{1,\sigma}(\Omega)$, pour certain $\sigma \in (0, 1)$. Le deuxième résultat donne une estimation a priori sur le gradient permettant d'établir un contrôle sur la solution. Puis on consacre à l'étude de l'existence de solutions positives et régulières pour une classe de système convectifs fortement singuliers. Cela se traduit par le fait que les singularités apparaissent non seulement au niveau de la solution mais aussi dans le terme du gradient.