

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A. Mira - Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique

Thème

Equations différentielles stochastiques et applications

Présenté par :
Abdelbaki Houa
Ouali Feriel

Devant le jury composé de :

K. Kheloufi	Professeur	U. de Béjaïa	Présidente
L. Bouraine	Professeur	U. de Béjaïa	Rapporteur
L. Baiche	MCB	U. de Béjaïa	Examinatrice

Année universitaire 2021/2022

Remerciements

Nous remercions Dieu de nous avoir aidé à accomplir ce travail.

Nos sincères remerciements et notre gratitude à notre promotrice Mme. BOURAINE Louiza qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils, ses dirigés et son soutien tout au long de ce travail.

Un grand merci aux membres du jury

à Mme. KHELOUFI Karima, pour l'honneur de présider le jury.

à Mlle. BAICHE Leila, pour son acceptation d'être membre du jury et d'examiner notre travail.

Nous tenons à remercier tous les enseignants du département de mathématiques.

Notamment M.BOURAINE qui nous a aidé à utiliser le logiciel Latex dans la rédaction de notre mémoire.

Merci à tous.

Table des matières

Table des figures	5
Notations	6
Introduction	7
1 Rappels de probabilités	10
1.1 Espace de probabilité	10
1.1.1 Tribu	10
1.1.2 Mesurabilité	11
1.1.3 Mesure de probabilité	11
1.2 Variables aléatoires	12
1.2.1 Variables aléatoires discrètes	12
1.2.2 Variables aléatoires continues	14
1.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire	15
1.4 Lois de probabilité usuelles	16
1.5 Indépendance	16
1.6 Espérance conditionnelle	17
1.6.1 Probabilité conditionnelle	17
1.6.2 Espérance conditionnelle	17
1.7 Vecteurs aléatoires	18
1.8 Convergence des suites de variables aléatoires	19
1.9 Processus stochastiques	21

1.9.1	Filtration	22
1.9.2	Processus gaussien	23
1.9.3	Processus croissant	24
1.10	Martingales	24
1.10.1	Martingales discrètes	24
1.10.2	Martingales continues	24
1.11	Quelques inégalités	25
1.12	Temps d'arrêt	26
2	Mouvement Brownien et Intégrale Stochastique	28
2.1	Mouvement Brownien	28
2.1.1	Historique	28
2.1.2	Propriétés	30
2.2	Intégrale Stochastique	35
2.2.1	Intégrale de Wiener	35
2.2.2	Intégrale stochastique générale	38
3	Equations différentielles stochastiques	48
3.1	Rappels	48
3.2	Equation différentielle stochastique	49
3.2.1	Résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS)	50
3.2.2	Equations différentielles stochastiques homogènes en temps	51
3.2.3	Equations non homogènes en temps	53
3.3	Exemples d'équations différentielles stochastiques	54
3.3.1	Equations linéaires :	54
3.3.2	Équations affines	56
3.3.3	Equation de Tanaka	56
3.3.4	Processus de Bessel	57

4 Etude numérique des EDS	59
4.1 Rappels sur l'intégration numérique des EDO	59
4.1.1 Méthode d'Euler	60
4.1.2 Méthodes de Runge-Kutta	61
4.2 Intégration numérique des EDSs	61
4.2.1 Méthode d'Euler	61
4.2.2 La méthode de Milstein	62
4.2.3 Méthode de Runge-Kutta	63
4.2.4 Stabilité d'une méthode	63
4.3 Simulation des EDSs	63
4.3.1 Etude du modèle de Black-Scholes	64
4.3.2 Applications	66
4.3.3 Algorithmes	67
4.3.4 Influence de la variation de pas sur la variation de la solution approchée	74
4.3.5 Approximation d'une EDO	75
Conclusion	78
Bibliographie	78

Table des figures

2.1	Trajectoires d'un mouvement brownien	30
4.1	Simulation avec la méthode d'Euler	68
4.2	Simulation avec la méthode Runge-Kutta	70
4.3	Simulation avec la méthode de Milstein	71
4.4	Simulation avec les trois méthode Euler,Rung-Kutta et Milestein	73
4.5	Variation de la solution approchée avec la variation de pas	75
4.6	Approximation d'une EDO par la méthode d'Euler	77

Notations

$\mathcal{P}(\Omega)$	Tribu discrète.
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	Tribus borélienne de \mathbb{R} .
\mathbb{P}	Mesure de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t), \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
v.a.r.	Variable aléatoire réelle.
\mathbb{N}	Ensemble des nombres naturel.
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{E}(X)$	Espérance mathématique de X .
$V(X)$	Variance de X .
p.s	presque sûrement.
$L^2(\mathbb{R}^+)$	L'ensemble des fonctions boréliennes de carré intégrable.
$(B_t), (M.B)$	Mouvement brownien.
$\mathcal{A}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$	Filtration naturelle.
$\mathcal{N}(0, 1)$	Loi normale centrée réduite.
$\ f\ _2$	La norme euclidienne.
Cov	Covariance.
EDO	Equation différentielle ordinaire.
EDS	Equation différentielle stochastique.

Introduction

Le calcul stochastique joue un rôle important dans différentes branches des sciences, comme les mathématiques financières, la mécanique, la chimie, la météorologie, sciences sociales et de technologie. Le besoin de modélisation pour gérer au mieux les risques, pour automatiser les tâches, bref pour "industrialiser" une activité au départ très artisanale, a trouvé des moyens de calcul très sophistiqués dans la théorie développée à partir des années 1930 par Kolmogorov, Itô et bien d'autres mathématiciens. En finance par exemple, le calcul stochastique a pris une place importante depuis le milieu des années 1970 et a poussé les mathématiciens à développer certaines de leurs théories pour le meilleur [16].

Les équations différentielles ordinaires gouvernent de nombreux phénomènes déterministes et sont des équations évolutives de type :

$$\dot{Y}(t) = g(t, Y(t)).$$

Cette équation représente un modèle d'un système physique $(Y(t))_{t \geq 0}$ qui évolue avec le temps t , selon le taux $g(t, Y(t))$.

Le concept des équations différentielles stochastiques (EDSs) généralise celui des équations différentielles ordinaires aux processus stochastiques prenant en compte un bruit blanc. Les EDSs permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion, [1]. Les domaines d'applications des EDSs sont vastes : physique, biologie, dynamique des populations, écologie, mathématiques financières, traitement du signal, théorie du contrôle...

Dans les équations différentielles stochastiques, la dynamique évolutive déterministe de

f est perturbée par un terme aléatoire (bruit) avec $g(t) = f(t) + \sigma(t)\xi_t$, ce qui donne :

$$\dot{Y}(t) = f(t) + \sigma(t)\xi_t,$$

d'où

$$dY(t) = f(t) dt + \sigma(t)\xi_t dt,$$

où ξ_t est une grandeur aléatoire. Dans beaucoup de situations, le processus $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un bruit blanc, c'est à dire un processus aléatoire stationnaire centré dont les variables aléatoires sont indépendantes identiquement distribuées de loi normale. En général, le terme "bruit" est modélisé formellement comme la dérivée du processus de Wiener (Mouvement brownien) (B_t) , c'est à dire $dB_t = \xi_t dt$. L'équation précédente avec la valeur initiale $Y(0) = y_0$, est écrite sous la forme :

$$dY_t = f(t, Y(t)) dt + \sigma(t, Y(t)) dB_t.$$

Le mouvement Brownien est un processus stochastique (fonction aléatoire du temps). Initialement introduit par le botaniste Brown au XIXème siècle pour modéliser les mouvements de grains de pollen en suspension dans l'eau, il représente de nos jours un processus gaussien incontournable notamment en calcul stochastique [11].

La formulisation théorique des EDSs s'est développée avec les travaux du mathématicien Japonais Itô, dans les années 1940, pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion de l'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques en particulier au mouvement brownien. A partir de l'intégration stochastique, on construit la théorie des EDSs.

Le premier objectif de notre travail est d'utiliser le calcul stochastique, plus précisément, d'utiliser les formules d'Itô pour la résolution des EDSs simples [16, 1]. Un autre objectif est d'implémenter des méthodes numériques pour pour l'EDS de Black Scholes et comparer les solutions approchées avec la solution exacte, puis comparer le comportement des solutions obtenues avec le cas déterministe.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente les notions basiques de la théorie des probabilités. Nous présentons une synthèse détaillée des espaces de probabilité ainsi que les espérance, processus stochastique, filtration, martingale, temps d'arrêt . . . , qui seront utilisées dans la suite .

Dans le deuxième chapitre, on donnera les principales propriétés du mouvement Brownien puis la définition de l'intégrale stochastique :

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

où (θ_t) est un processus bien spécifique. Puis nous aborderons certaines de ses propriétés très importantes.

Dans le chapitre trois, on commence par donner un rappel sur les EDO après nous définissons les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$dY(t) = f(t, Y(t)) dt + \sigma(t, Y(t)) dB_t.$$

On citera ensuite quelques théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution de l'EDS avec la condition initiale $Y(t_0) = y_0$, puis nous les appliquons à des équations différentielles stochastiques linéaires avec des exemples.

Dans le quatrième chapitre, on présente quelques méthodes de résolutions numériques des EDSs. Finalement, nous étudions en détail un modèle d'application en finance.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale et une liste de références bibliographiques.

Chapitre 1

Rappels de probabilités

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les principaux concepts et méthodes de la théorie des probabilités et processus stochastiques, utilisées dans ce mémoire. Pour plus d'informations et de détails le lecteur est renvoyé aux références (Calot 1967 [5], Foata et Fuchs, 2002 [10], Tassi, 2004 [21], Feller, 2008 [9], Berdjoudj, 2014 [3]).

1.1 Espace de probabilité

Soit Ω un espace fondamental associé à une expérience aléatoire.

1.1.1 Tribu

Définition 1.1. Une **tribu** (ou σ -algèbre) sur Ω est une famille \mathcal{A} de sous ensembles de Ω (appelés événements) tel que :

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$.
- iii) $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.1.

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est appelée *tribu grossière* et c'est la plus petite des tribus.
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est appelée *tribu discrète*. Cette tribu est très utilisée lorsque Ω est discret

(fini ou dénombrable).

- Soit A une partie de Ω . L'ensemble des parties $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu.

Proposition 1.1.

L'intersection de deux tribus est une tribu. L'union de deux tribus n'est pas, en général, une tribu.

Définition 1.2. Une **sous-tribu** de \mathcal{A} est une tribu \mathcal{F} telle que si $A \in \mathcal{F}$ alors $A \in \mathcal{A}$. On note $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.

Définition 1.3. Soit \mathcal{A} une partie de Ω . **La tribu engendrée** par \mathcal{A} est la plus petite tribu contenant \mathcal{A} . Cette tribu peut également être définie comme l'intersection de toutes les tribus contenant \mathcal{A} . On la note $\sigma(\mathcal{A})$.

Définition 1.4. On appelle **une tribu borélienne** de \mathbb{R} , toute tribu engendrée par la famille des ouverts de \mathbb{R} . On note cette tribu par $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Un élément de cette tribu sera appelée un borélien de \mathbb{R} .

1.1.2 Mesurabilité

Définition 1.5. Un **espace mesurable** est un espace muni d'une tribu et on le note (Ω, \mathcal{A}) .

Définition 1.6. Soit (Ω, \mathcal{A}) et (E, \mathcal{F}) deux espaces mesurables.

$f : \Omega \rightarrow E$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ -mesurable si :

$$\forall A \in \mathcal{F} : f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \text{où} \quad f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}.$$

Définition 1.7. Une fonction f est **borélienne** si elle est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Les fonctions continues sont boréliennes.

1.1.3 Mesure de probabilité

Une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.
- $\forall (A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Définition 1.8. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace de probabilité** ou **espace probabilisé**.

Exemple 1.2.

La mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, est la mesure de probabilité définie par :

$$\mathbb{P}([a, b]) = b - a, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1, \quad \text{pour } \Omega = [0, 1] \text{ et } \mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1]).$$

1.2 Variables aléatoires

Définition 1.9. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r), toute application mesurables X définie par :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Autrement dit : $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est appelé ensemble de définition de X .

1.2.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 1.10. Une v.a.r X est dite **discrète** si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

(Un ensemble dénombrable est un ensemble en bijection avec \mathbb{N}). X est donc discrète si

$X(\Omega)$ est de la forme $X(\Omega) = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$.

Exemple 1.3.

Dans le cas du jet de deux dés, la somme S des deux résultats obtenus est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble de définition est $X(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$.

Exemple 1.4.

On désigne par X le nombre d'apparitions du chiffre 3 lors de 4 jets d'un dé équilibré. X est une variable discrète dont l'ensemble de ses valeurs est :

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ qui est fini, avec $\Omega = \{(i, j, k, l), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6, 1 \leq k \leq 6, 1 \leq l \leq 6\}$.

Loi de probabilité

Définition 1.11. La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est entièrement déterminée par la donnée des probabilités \mathbb{P}_i des événements $\{X = x_i, x_i \in X(\Omega)\}$. On écrit

$$P_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) \text{ avec } \sum_{x_i \in X(\Omega)} P_X(x_i) = 1.$$

Exemple 1.5. Reprenons l'exemple 1.3, la loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(S = 12) = 1/36 \quad ; \quad \mathbb{P}(S = 3) = \mathbb{P}(S = 11) = 1/18$$

$$\mathbb{P}(S = 4) = \mathbb{P}(S = 10) = 1/12 \quad ; \quad \mathbb{P}(S = 5) = \mathbb{P}(S = 9) = 1/9$$

$$\mathbb{P}(S = 6) = \mathbb{P}(S = 8) = 5/36 \quad ; \quad \mathbb{P}(S = 7) = 1/6.$$

Fonction de répartition

Définition 1.12. On appelle fonction de répartition d'une v.a.r. discrète X , la fonction F_X , définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

telle que $F_X(x) = \sum_{i=1}^k P_X(x_i)$, avec $x_k \leq x < x_{k+1}$.

Proposition 1.2.

La fonction de répartition F d'une v.a.r. X satisfait les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) \leq 1$.
2. F_X est une fonction croissante sur \mathbb{R} .
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
4. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Exemple 1.6.

On lance successivement trois fois une pièce de monnaie non truquée. On considère la v.a.r. X : "nombre de faces amenées".

On a : Ω est l'ensemble des arrangements avec répétition de trois symboles parmi les deux (pile ou face). $\text{card}(\Omega) = 2^3 = 8$.

La loi de probabilité de X et sa fonction de répartition sont données dans la tableau suivant :

x_i	$P_X(x_i)$	F_X
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

1.2.2 Variables aléatoires continues

Définition 1.13. Une variable aléatoire réelle X définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite **continue** si l'ensemble des images $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$, (infini non dénombrable).

Densité de probabilité

Définition 1.14. On dit qu'une variable aléatoire continue X , admet **une densité de probabilité**, s'il existe une fonction f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. $f(t) \geq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Proposition 1.3.

1. La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue est toujours dérivable, $F'(x) = f(x)$.
2. F est croissante.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
4. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

1.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition 1.15. On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X , notée $\mathbb{E}(X)$ la quantité si elle existe, définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x), & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{X(\Omega)} x f_X(x) dx, & \text{si } X \text{ est continue,} \end{cases}$$

Elle représente la valeur moyenne prise par la variable X .

Remarque 1.1. Lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (respectivement $X(\Omega) = \mathbb{R}$), l'espérance existe si la série (respectivement l'intégrale ci-dessus) converge.

Proposition 1.4.

X, Y deux variables réelles admettent des espérances mathématiques, alors

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(a) = a.$
2. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}(aX + bY) = a \mathbb{E}(X) + b \mathbb{E}(Y),$ (l'espérance est linéaire).
3. $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}(X = x), & \text{si } X \text{ est discrète.} \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx, & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$

Avec φ une fonction borélienne.

4. si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y).$
5. $|\mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(|X|).$

Définition 1.16. La variance d'une v.a. X , noté $V(X)$ est définie par :

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}(X))^2] \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \end{aligned}$$

L'écart type de X est la racine carrée de sa variance $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$

Propriété 1.1.

1. $V(X) = 0 \iff X$ est constante.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X).$

1.4 Lois de probabilité usuelles

Il existe plusieurs lois de probabilités, les plus utilisées sont résumées dans les deux tableaux suivants :

- **Lois discrètes :**

Loi	Notation	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(p, n)$	np	$np(1-p)$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

- **Lois continues :**

Loi	Notation	Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{1}{b-a}$ pour $x \in [a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\varepsilon(\lambda), \lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(m, \sigma^2), \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

Remarque 1.2. Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors la variable aléatoire $Y = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ est dite v.a.r. normale centrée réduite.

1.5 Indépendance

Définition 1.17. [2]

- **Indépendance d'événements :** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. $A, B \in \mathcal{A}$ sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (ne pas confondre avec A, B disjoints : $A \cap B = \emptyset$).

- **Indépendance de tribus :** Une famille $(\mathcal{A}_j)_{1 \leq j \leq n}$ de sous tribus de \mathcal{A} est indépendante si :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_n), \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}.$$

Proposition 1.5.

une famille de sous tribus $(\sigma(A_1), \sigma(A_2), \dots, \sigma(A_n))$ sont indépendants si et seulement si (A_1, A_2, \dots, A_n) sont indépendants.

1.6 Espérance conditionnelle**1.6.1 Probabilité conditionnelle**

Soit B un événement de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(B) \neq 0$). Soit $A \in \mathcal{A}$. On définit la probabilité de A sachant B notée $\mathbb{P}(A | B)$, par :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$\mathbb{P}(A | B)$ est appelée **probabilité conditionnelle** de l'événement A sachant que B est réalisé.

1.6.2 Espérance conditionnelle

- **Conditionnement par rapport à un événement $B \in \mathcal{A}$.**

Soit X une v.a intégrable ($\mathbb{E}(|X|) < \infty$) :

$$\mathbb{E}(X | B) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_B)}{\mathbb{P}(B)},$$

avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et

$$\mathbf{1}_B = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Conditionnement par rapport à une variable aléatoire Y discrète :**

$\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A | Y) = \varphi(Y)$ où $\varphi(y) = \mathbb{P}(A | Y = y)$, $y \in Y(\Omega)$.

$\mathbb{E}(X | Y) = \psi(Y)$ où $\psi(y) = \mathbb{E}(X | Y = y)$, $y \in Y(\Omega)$.

avec : $\mathbb{P}(A | Y)$ et $\mathbb{E}(X | Y)$ sont des variables aléatoires.

- **Conditionnement par rapport à une variable aléatoire Y continue :**

$\mathbb{P}(A | Y) = \psi(Y)$ où $\psi(y) = \mathbb{P}(A | Y = y)$. Puisque on a $\mathbb{P}(Y = y) = 0$, on définit

alors :

Conditionnement par rapport à une tribu : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire telle que :

$\mathbb{E}(|X|) < \infty$ (intégrable) et \mathcal{F} une sous tribu de \mathcal{A} .

Définition 1.18. [18] On appelle espérance conditionnelle de X par rapport à \mathcal{F} , notée $\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ tout variable aléatoire Z telle que $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ et vérifiée :

- i) Z est une v.a. \mathcal{F} - mesurable.
- ii) $\mathbb{E}(XU) = \mathbb{E}(ZU)$, $\forall U$ une v.a. \mathcal{F} - mesurable .

Proposition 1.6. [18]

Soient X et Y deux v.a. intégrables et soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ on a :

1. $\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{F}) = a \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) + b \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$.
2. si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$.
3. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F})] = \mathbb{E}(X)$.
4. Si X est indépendante de \mathcal{F} on a $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ c'est à dire qu'en l'absence de toute information sur X , la meilleure estimation que l'on puisse faire sur X est son espérance.
5. Si X est \mathcal{F} -mesurable alors $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = X$. Cela traduit le fait que \mathcal{F} contient déjà toute information sur X .
6. Si X est \mathcal{F} -mesurable et $\mathbb{E}(|XY|) < +\infty$, alors $\mathbb{E}(XY | \mathcal{F}) = X \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$.
7. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ p.s.

1.7 Vecteurs aléatoires

Définition 1.19. Un vecteur aléatoire est un vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) composé de n variables aléatoires définies sur le même espace.

Autrement dit : c'est le vecteur V défini de Ω dans \mathbb{R}^n tel que :

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)),$$

où X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles.

★ Un couple aléatoire (X, Y) est discret si X et Y sont des v.a. discrètes.

★ Un couple aléatoire (X, Y) est continu si X et Y sont des v.a. continues.

Définition 1.20. Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de carré intégrable ($\mathbb{E}(X_i^2) < +\infty$), $\forall i = \overline{1, n}$. On appelle matrice de covariance de X , la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$\Gamma = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^t]$$

Définition 1.21. [11]

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est **un vecteur aléatoire gaussien** si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. gaussiennes i.e :

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=0}^n a_i X_i \text{ est une v.a.r. gaussienne.}$$

Proposition 1.7.

i) Si le vecteur (X_1, X_2) est gaussien, les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

ii) Tout vecteur de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est un vecteur gaussien.

iii) Si X, Y sont deux v.a. gaussiennes indépendantes alors $aX + bY$ est gaussienne pour tout a, b dans \mathbb{R} et le couple (X, Y) est gaussien. Ceci n'est pas vrai si X, Y ne sont pas indépendantes.

1.8 Convergence des suites de variables aléatoires

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles. Il existe diverses façons de définir la convergence de $(X_n)_n$. On considère dans la suite, une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles et une variable aléatoire X définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- **Convergence en probabilité (Convergence faible) :**

Définition 1.22. (X_n) converge en probabilité vers X si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0,$$

on note : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Exemple 1.7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, la suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par : $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

Cette suite converge en probabilité vers 0, en effet :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Théorème 1.1. (Loi faible des grands nombres)[3]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, la suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, identiquement distribuées de moyenne m et d'écart-type σ . Alors la variable aléatoire :

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} m.$$

• **Convergence presque sûre (Convergence forte) :**

Définition 1.23. (X_n) converge presque sûrement (p.s) vers X (ou avec une probabilité égale à 1) si :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X\right) = 1 \quad \text{ou bien} \quad \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \neq X\right) = 0,$$

et on note : $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Théorème 1.2. (Loi forte des grands nombres)[3]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, la suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, identiquement distribuées de moyenne m et d'écart-type σ . Alors la variable aléatoire :

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} m.$$

• **Convergence en moyenne d'ordre p :**

Si $\mathbb{E}(|X_n - X|^p)$ existe on a :

Définition 1.24. (X_n) converge en moyenne d'ordre p vers X si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0,$$

on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Remarque 1.3. 1. La convergence la plus utilisée est la convergence dans L^2 dite encore "convergence en moyenne quadratique", i.e :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^2) = 0,$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \mathbb{E}(|X_n - X|^2) < \epsilon.$$

2. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, $1 \leq p \leq \infty$ alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$, $1 \leq q \leq p$.

3. La convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité.

• **Convergence en loi (convergence faible) :**

Bien qu'elle soit la plus faible, elle est la plus utilisée en pratique car elle permet d'approximer la loi de X_n par celle de X .

Définition 1.25. La suite (X_n) converge en loi vers X de fonction de répartition F si la suite (F_n) de fonction de répartition des X_n converge vers F en tout point de continuité de F . On note : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Théorème 1.3. (Théorème central limite)[3] Soit une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes obéissant à la même loi de probabilité, de moyenne $\mu < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$.

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors :

$$Y_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{de loi } \mathcal{N}(0, 1)$$

1.9 Processus stochastiques

L'objectif de cette section est de donner un aspect général sur la théorie des processus stochastiques permettant d'étudier un phénomène aléatoire évoluant au cours du temps.

1.9.1 Filtration

Définition 1.26. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on appelle **Filtration** toute famille croissante $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de \mathcal{A} , tel que $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_s$ pour tout $t \leq s$.

- Une filtration \mathcal{F} est dite plus grosse que \mathcal{A} , si $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t, \forall t$.
- On appelle espace filtré, et l'on note $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t), \mathbb{P})$, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $(\mathcal{A}_t, t \geq 0)$.

Définition 1.27. [12]

Soit $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ une filtration, on dit qu'une filtration est continue à droite si :

$$\mathcal{A}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{A}_{t+\epsilon}, \forall t \geq 0.$$

On dit qu'une filtration est continue à gauche si :

$$\mathcal{A}_t = \sigma\left(\bigcup_{0 \leq s < t} \mathcal{A}_s\right), \forall t \geq 0.$$

Cette même filtration est dite complète par rapport à une mesure de probabilité \mathbb{P} si \mathcal{A}_0 contient l'ensemble des parties de A négligeables, c'est-à-dire de mesure nulle, pour \mathbb{P} .

Définition 1.28. [11]

Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est une famille de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeur dans un espace mesurable E (ensemble des états du processus). L'ensemble T des indices est l'espace des temps, $T \subset \mathbb{N}$ ou $T \subset \mathbb{R}^+$.

- Pour t fixé dans T , l'application $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Pour ω fixé dans Ω , l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ décrit **la trajectoire** du processus.

Remarque 1.4.

- 1) On distingue plusieurs types de processus stochastique suivant que T et E sont discrets ou continus.
- 2) Un processus stochastique est défini par la donnée $X = (\Omega, \mathcal{A}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ ou bien $X = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$.

Définition 1.29. [12]

La **filtration naturelle** d'un processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$, notée \mathcal{A}^X , est la famille croissante de tribus engendrées par $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$. C'est-à-dire :

$$\mathcal{A}^X = \{\mathcal{A}_t^X = \sigma(\{X(s), 0 \leq s \leq t\}), t \geq 0\}$$

Définition 1.30. Le processus stochastique X est dit **càdlàg** si pour chaque $\omega \in \Omega$ la trajectoire $X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gauche.

càglàd si pour chaque $\omega \in \Omega$ la trajectoire $X(\omega)$ est continue à gauche et admet une limite à droite.

Définition 1.31. Soit (X_t) un processus et (\mathcal{A}_t) une filtration de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est **adapté** à la filtration $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ si $\forall t \geq 0, X_t$ est \mathcal{A}_t -mesurable.

1.9.2 Processus gaussien

Définition 1.32. Un processus aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$ est dit **gaussien** si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes. **Autrement dit**, un processus $(X_t)_{t \in T}$ est un **processus gaussien** si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Définition 1.33. Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien réel ($E = \mathbb{R}$). Pour tous $s, t \in T$, on pose :

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t),$$

$$\sigma(s, t) = \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))].$$

La fonction $\sigma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **la covariance de processus gaussien** X .

1.9.3 Processus croissant

- Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est **croissant** si $X_0 = 0$ et $t \mapsto X_t$ est une fonction croissante : $X_t(\omega) \leq X_s(\omega) \forall t \leq s$ p.s.
- Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est dit à **variation bornée** sur $[0, t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq K.$$

(le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$).

- X est dit à **variation finie** sur $[0, t]$ si $\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| < +\infty$.

1.10 Martingales

1.10.1 Martingales discrètes

On se donne une filtration, i.e. une famille de sous tribus (\mathcal{F}_n) croissante ($\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). \mathcal{F}_0 contient les négligeables.

Définition 1.34. Une suites de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **\mathcal{F}_n -martingale** si :

- X_n est intégrable, c'est à dire $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- X_n est \mathcal{F}_n -mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$ (adaptée à la filtration \mathcal{F}_n).
- $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.35. Une famille de v.a. (X_n) est une **sur-martingale** (respectivement **sous-martingale**) si X_n est intégrable, \mathcal{F}_n -mesurable $\forall n \in \mathbb{N}$. Et $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$ (respectivement $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$).

1.10.2 Martingales continues

Soit (\mathcal{F}_t) une filtration i.e. une famille croissante de sous tribus ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$), $\forall s \leq t$.

Définition 1.36. [11] On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que (X_t) est :

1. Une martingale si : $\forall 0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s.$$

2. Une sur-martingale si : $\forall 0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s.$$

3. Une sous-martingale si : $\forall 0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

Proposition 1.8. [11]

1. M est une sur-martingale si et seulement si $-M$ est une sous-martingale.
2. Toute combinaison linéaire de martingales est une martingale.
3. Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de sur-martingales (resp. de sous-martingales) est une sur-martingale (resp. une sous-martingale).
4. Si M est une martingale (resp. une sous-martingale) et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante), alors le processus $(\varphi(M_t))_{t \in T}$ est une sous-martingale (resp. une sur-martingale). Par exemple si M est une martingale de carré intégrable, $|M|$ et M^2 sont des sous-martingales.

1.11 Quelques inégalités

Théorème 1.4. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) [2]

Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable c'est à dire $(\mathbb{E}(X^2) < +\infty, \mathbb{E}(Y^2) < +\infty)$.

Alors

i) XY est intégrable.

ii) $(\mathbb{E}(|XY|))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

Théorème 1.5. (Inégalité de Hölder) [11]

Si $X \in L^q$, $Y \in L^p$, tel que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \mathbb{E}[|X|^q]^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}[|Y|^p]^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.6. (*Inégalité triangulaire*) [2]

$\forall X, Y$ intégrables $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$ alors :

$$\mathbb{E}(|X + Y|) \leq \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|Y|).$$

Théorème 1.7. (*Inégalité de Doob*) [2]

Soit $(M_n; n \in \mathbb{N})$ une martingale réelle de carré intégrable. On a :

$$\mathbb{E}(\max_{0 \leq k \leq n} M_k^2) \leq 4\mathbb{E}(M_n^2).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(\sup_{k \in \mathbb{N}} M_k^2) \leq 4 \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(M_k^2).$$

1.12 Temps d'arrêt

Définition 1.37. [11]

Soit $(\mathcal{A}_t)_{t \in T}$ une filtration et $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \in T} \mathcal{A}_t)$ sa tribu terminale. Une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est appelée (\mathcal{A}_t) -temps d'arrêt si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $[\tau \leq t] \in \mathcal{A}_t$.

On pose alors

$$\mathcal{A}_\tau = \{A \in \mathcal{A}_\infty, \forall t \in \mathbb{R}, A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{A}_t\}$$

\mathcal{A}_τ est une tribu. C'est la tribu des événements antérieurs au temps τ

Proposition 1.9.

Soient σ et τ deux \mathcal{A}_t -temps d'arrêt. Alors :

- i) τ est une variable aléatoire \mathcal{A}_τ -mesurable.
- ii) $\min(\sigma, \tau)$, $\max(\sigma, \tau)$ et $\sigma + \tau$ sont des \mathcal{A}_t -temps d'arrêt.
- iii) si $\sigma \leq \tau$, on a $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathcal{A}_\tau$.

Théorème 1.8. Si $(X_t, t > 0)$ est un processus adapté et à trajectoires continues, et si T est un temps d'arrêt. Alors on a :

$$\int_0^T \mathbb{E}(|X_t|) dt = \mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t| dt \right).$$

De plus, si cette quantité est finie, alors on a :

$$\int_0^T \mathbb{E}(X_t) dt = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_t dt \right).$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différents outils qui vont nous permettre d'introduire le mouvement Brownien dont nous parlerons dans le deuxième chapitre.

Chapitre 2

Mouvement Brownien et Intégrale Stochastique

Introduction

Ce chapitre est divisé en deux sections, Dans la première, nous nous concentrons sur la définition du mouvement Brownien et considérons ses propriétés de base. Dans la deuxième section, on va définir l'intégrale d'un processus par rapport au mouvement Brownien, si (B_t) était différentiable, alors l'intégrale n'aurait aucun problème. Mais, nous verrons que (B_t) n'est pas différentiable, donc cette intégrale ne peut être définie de manière habituelle. La construction de l'intégrale stochastique d'Itô se fera par étapes et ressemblera à la construction de l'intégrale de Riemann, où certaines restrictions seront nécessaires.

2.1 Mouvement Brownien

2.1.1 Historique

En 1828, Robert Brown a observé le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. Ce mouvement aléatoire, dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion, ou diffusion, du pollen dans l'eau. Par la suite, Delsaux (1877) explique ces changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau, ce type du mouvement est qualifié de " mouvement brownien". Louis Bachelier (1900), en étudiant les cours de la bourse, a mis

en évidence le caractère markovien du mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t et ne dépend pas de sa position avant t . En 1905, Albert Einstein, par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur, a déterminé la densité de transition du mouvement Brownien et relie par la suite le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. Ensuite, Smoluchowski (1906) a décrit ce mouvement comme une limite de promenades aléatoires.[11]

La première étude mathématique rigoureuse sur la continuité et la non-dérivabilité des trajectoires du mouvement Brownien est faite par Wiener (1923). De puis, le mouvement Brownien continu a passionner les probabilistes, tant pour l'étude de ses trajectoires que pour l'intégrale stochastique (Itô). Pour définir formellement le mouvement Brownien, soit un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel nous définissons le processus $(\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}$.

Définition 2.1. [1]

Un processus $B = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé **mouvement brownien** (M.B) standard si :

1. $B_0 = 0$ presque sûrement.
2. B est continu, c'est à dire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour presque tout ω (les trajectoires sont continues).
3. $\forall 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{A}_s^B = \sigma\{(B_s)_{s \leq t}\}$.
Autrement dit : B est à accroissements indépendants.
4. Les accroissements sont stationnaires $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Généralisation : Le processus (X_t) défini par $X_t = a + B_t$ est un Brownien issu de a . On dit que $X = (X_t)$ est mouvement Brownien de drift μ si :

$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où $B = (B_t)$ est un mouvement Brownien standard.

$$X_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(x + \mu t, \sigma^2 t).$$

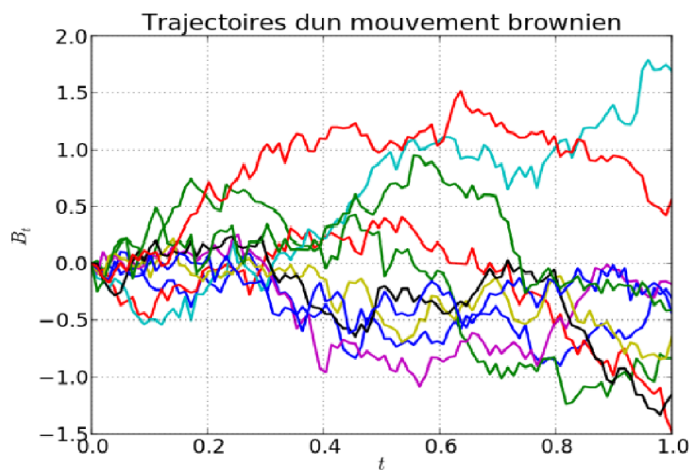


FIG. 2.1 – Trajectoires d'un mouvement brownien

Remarque 2.1.

- i) Un mouvement Brownien standard est un mouvement Brownien par rapport à sa filtration naturelle.
- ii) De cette définition, il suit que pour $t \geq s \geq 0$,

$$B_t - B_s \sim B_{t-s} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t - s)$$

C'est à dire :

$$\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0 \text{ et } \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s.$$

2.1.2 Propriétés

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{A}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle. Alors :

i) *Caractère gaussien du mouvement Brownien :*

Théorème 2.1. [11]

Soit $B = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement Brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes :

1. $B_0 = 0$ \mathbb{P} - p.s.
2. $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 < \dots < t_n$, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien centré.
3. $\forall s, t \geq 0$, $\mathbb{E}(B_s B_t) = \min(s, t)$.

c'est-à-dire B est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariance $\sigma(s, t) = \min(s, t)$.

Inversement, si un processus B vérifie les propriétés ci-dessus 1, 2, 3 et si on note $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle de la famille $(B_t)_{t \geq 0}$, alors :

$(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un mouvement Brownien (naturel).

Preuve 2.1. \Rightarrow 2) supposons que B soit un mouvement Brownien. Il n'y a que (2) et (3) à prouver. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t_1 < \dots < t_n$. Montrons par récurrence sur n que $a_1 B_{t_1} + \dots + a_n B_{t_n}$ est une variable aléatoire normale. Si $n = 1$ cela résulte de la définition (1.2) car $a_1 B_{t_1} = a_1 (B_{t_1} - B_0)$. Si on suppose l'assertion démontrée pour $(n-1)$, la variable aléatoire $a_1 B_{t_1} + \dots + a_n B_{t_n}$ est alors normale comme somme de deux variables aléatoires $a_1 B_{t_1} + \dots + (a_n + a_{n-1}) B_{t_{n-1}}$ et $a_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ qui sont normales et indépendantes, d'où (2) est vérifiée.

3) Prenons maintenant $0 \leq s \leq t$. Grâce à la définition du M.B on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_s B_t) &= \mathbb{E}(B_s B_t - B_s^2 + B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s (B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= \mathbb{E}(B_s) \mathbb{E}(B_t - B_s) + \text{var}(B_s - B_0) \\ &= 0 + s \\ &= \min(s, t). \end{aligned}$$

On obtient alors aussitôt (3) .

\Leftarrow Supposons que le processus B vérifie 1, 2, 3. D'après la définition du M.B $B_0 = 0$

est évidente. Soit $0 \leq s \leq t$. D'après (2), $B_t - B_s$ est une variable normale et centrée car chaque B_t est centrée. De plus (3) implique que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) &= \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_t^2) - 2\mathbb{E}(B_s B_t) \\ &= t + s - 2s \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Donc $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$. Finalement pour tous $0 \leq r \leq s \leq t$, d'après (3), on a

$$\mathbb{E}((B_t - B_s)B_r) = \min(t, r) - \min(s, r) = 0.$$

Comme le processus B est gaussien, les variables aléatoires $B_t - B_s$ et B_r sont indépendantes pour tout $r \leq s$, ce qui prouve que la variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{A}_s = \sigma(B_r, r \leq s)$. Cela montre que B est un mouvement Brownien pour sa filtration naturelle.

ii) Symétrie :

Le processus $\hat{B}_t = (-B_t)_{t \geq 0}$ est encore un mouvement Brownien.

iii) Changement d'échelle (scaling) :

Soit $\lambda > 0$. Le processus $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t \geq 0}$ avec $B_t^\lambda = (\frac{1}{\lambda})B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement Brownien.

iv) Inversion du temps :

le processus $\bar{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$, $\forall t \geq 0$, $\bar{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.

v) Propriété de Markov simple :

Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{A}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t = B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{A}_s .

vi) Trajectoire :

On admet que les trajectoires du mouvement Brownien sont continues et presque sûrement "nulle part différentiable".

vii) Propriétés de martingale :

Proposition 2.1. [11]

Tout mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale relativement à sa filtration i.e. : pour tout $s < t$, $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{A}_s) = B_s$.

Preuve 2.2.

montrer que $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale revient à montrer que $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{A}_s) = B_s$ pour tout $s < t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t | \mathcal{A}_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{A}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{A}_s) + \mathbb{E}(B_s | \mathcal{A}_s). \end{aligned}$$

D'une part, l'indépendance de $B_t - B_s$ et \mathcal{A}_s implique que :

$$\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{A}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0 .$$

D'autre part, B_s est \mathcal{A}_s - mesurable : $\mathbb{E}(B_s | \mathcal{A}_s) = B_s$. Alors

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{A}_s) = 0 + B_s = B_s. \text{ D'où } (B_t)_{t \geq 0} \text{ est une martingale.}$$

Corollaire 2.1. [11]

Si B est un mouvement Brownien, le processus $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{A}_s - martingale.

Preuve 2.3.

D'une part : $\mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{A}_s) = t - s$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{A}_s) &= \mathbb{E}(B_t^2 + B_s^2 - 2B_t B_s | \mathcal{A}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{A}_s) + \mathbb{E}(B_s^2 | \mathcal{A}_s) - 2\mathbb{E}(B_t B_s | \mathcal{A}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{A}_s) + B_s^2 - 2B_s \mathbb{E}(B_t | \mathcal{A}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{A}_s) + B_s^2 - 2B_s^2 \\ &= \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{A}_s) - B_s^2 \\ &= t - s. \end{aligned}$$

D'où : $\mathbb{E}(B_t^2 - t | \mathcal{A}_s) = B_s^2 - s$.

Proposition 2.2.

Soit B_t et B'_t deux M.B indépendants. Le produit $B_t B'_t$ est une martingale.

Preuve 2.4.

En effet pour tous $0 \leq s < t$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t B'_t | \mathcal{A}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s)(B'_t - B'_s)) + B_s \mathbb{E}(B'_t | \mathcal{A}_s) + B'_s \mathbb{E}(B_t | \mathcal{A}_s) - B_s B'_s. \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s) \mathbb{E}(B'_t - B'_s) + B_s B'_s + B'_s B_s - B_s B'_s. \\ &= B'_s B_s.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Théorème 2.2.

Pour toute fonction borélienne f :

$$\mathbb{E}(f(B_u) | \mathcal{A}_t) = \mathbb{E}(f(B_u) | \sigma(B_t)), \text{ pour } u > t.$$

Preuve 2.5. On a

$$\mathbb{E}(f(B_u) | \mathcal{A}_t) = \mathbb{E}(f(B_u + B_t - B_t) | \mathcal{A}_t) = \phi(u - t, B_t) \quad (2.1)$$

avec $\phi(u - t, x) = \mathbb{E}[f(B_u - B_t + x)] = \mathbb{E}[f(Y + x)]$ où Y a la même loi que

$$B_u - B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, u - t).$$

De même on a :

$$\mathbb{E}(f(B_u) | \sigma(B_t)) = \mathbb{E}(f(B_u + B_t - B_t) | \sigma(B_t)) = \phi(u - t, B_t) \quad (2.2)$$

D'après (2.1) et (2.2) on a le résultat.

Définition 2.2. [1]

Un mouvement Brownien d -dimensionnel standard est un processus $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$, avec les processus $B^i, 1 \leq i \leq d$, sont des mouvements Browniens standards indépendants à valeurs réelles avec :

- 1) $B_0 = 0$ \mathbb{P} - p.s.
- 2) $\forall 0 \leq s \leq t$, le vecteur aléatoire $B_t - B_s$ est indépendant de \mathcal{A}_s .
- 3) $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi gaussienne $\mathcal{N}_d(0, (t - s)I_d)$, où I_d est la matrice identité de \mathbb{R}^d .

2.2 Intégrale Stochastique

2.2.1 Intégrale de Wiener

Dans cette section, les fonctions et processus seront à valeurs réelles. On définit l'intégrale de Wiener sous la forme :

$$\int_0^{\infty} f(s) dB_s.$$

On note $L^2(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < \infty\}$, l'ensemble des fonctions boréliennes de carré intégrable. C'est un espace de Hilbert, au sens où toute suite de $L^2(\mathbb{R}^+)$ qui soit de Cauchy pour la norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^{+\infty} f^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

converge vers un élément unique de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Le cas des fonctions en escalier

Soit f une fonction en escalier de la forme : $f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$. L'intégrale de Wiener associée à f est définie par :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} f(s) dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Propriété 2.1. [13]

- D'après le caractère gaussien du Brownien et l'indépendance de ses accroissements, $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$\text{Var}[I(f)] = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 \text{Var}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^{+\infty} f^2(s) ds = \|f\|_2^2.$$

- L'application $f \mapsto I(f)$ est linéaire. En effet,

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g), \text{ pour toutes fonctions } f, g \text{ en escalier et tous } a, b \in \mathbb{R}.$$

- Si f et g sont deux fonctions en escalier, alors : $\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)g(s) ds$.

En effet on a :

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(f+g)] &= \text{Var}[I(f) + I(g)] \\ &= \text{Var}[I(f)] + \text{Var}[I(g)] + 2 \text{Cov}(I(f), I(g)) \\ &= \int_0^{+\infty} f^2(s) ds + \int_0^{+\infty} g^2(s) ds + 2 \mathbb{E}[I(f)I(g)] \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(f+g)] &= \int_0^{+\infty} (f+g)^2(s) ds \\ &= \int_0^{+\infty} f^2(s) ds + \int_0^{+\infty} g^2(s) ds + 2 \int_0^{+\infty} f(s)g(s) ds. \end{aligned}$$

Par identification

$$\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)g(s) ds.$$

Cette dernière égalité signifie que l'application $f \mapsto I(f)$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Omega)$

$$\|I(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

En effet : $\|I(f)\|_2^2 = \mathbb{E}[(I(f))^2] = \text{Var}[I(f)] = \int_0^{+\infty} f^2(s) ds = \|f\|_2^2$.

On parle alors de la propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener, ce qui signifie :

$$\langle I(f), I(g) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

- Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ la variable $I(f)$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(s) ds$ appartenant à l'espace gaussien engendré par $(B_t, t \geq 0)$ et elle vérifie pour tout t :

$$\mathbb{E} \left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s) dB_s \right) = \int_0^t f(s) ds. \quad (2.3)$$

Remarquons que

$$\mathbb{E} \left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s) dB_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t dB_s \int_{\mathbb{R}^+} f(s) dB_s \right).$$

Cette propriété est en fait une caractérisation de l'intégrale stochastique au sens où si pour tout t , $\mathbb{E}(ZB_t) = \int_0^t f(s) ds$, alors $Z = \int_0^{+\infty} f(s) dB_s$.

Cas général

Proposition 2.3. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $\exists (f_n)$ une suite de fonctions en escaliers qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ vers f :

$$\int_0^{+\infty} |f_n - f|^2(x) dx \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Dans ce cas la suite (f_n) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

La suite F_n de v.a. définie par $F_n = \int_0^{+\infty} f_n(s) dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. En effet :

$$\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n, m \longrightarrow +\infty, \quad \text{donc convergente.}$$

On pose par définition :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} f(s) dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s) dB_s.$$

Proposition 2.4.

Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, on définit

$$\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0,t[}(s) f(s) dB_s.$$

Théorème 2.3. [1]

Pour tout $t \in [0, T]$, et pour toute $f \in L^2([0, T])$, soit $M_t = \int_0^t f(s) dB_s$. Alors

(a) (M_t) est une martingale continue :

$$\mathbb{E}(M_t) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}(M_t) = \int_0^t f^2(s) ds.$$

(b) (M_t) est un processus gaussien, à accroissements indépendants, de covariance :

$$\text{Cov}(M_t, M_s) = \int_0^{t \wedge s} f^2(u) du.$$

(c) Le processus $\left(M_t^2 - \int_0^t f^2(s) ds, t \geq 0 \right)$ est une martingale.

(d) $\forall f, g \in L^2([0, T])$;

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t f(u) dB_u \int_0^s g(u) dB_u \right) = \int_0^{t \wedge s} f(u)g(u) du.$$

Théorème 2.4. (Formule d'intégration par parties) [13]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien réel. Alors

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On peut aussi écrire cette formule

$$d(B_t f(t)) = f(t) dB_t + B_t f'(t) dt.$$

Preuve 2.6.

D'après (2.3), il suffit de vérifier que

$$\mathbb{E}[B_u I_t(f)] = \mathbb{E} \left[B_u \left(f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds \right) \right]$$

pour tout $u \leq t$. En utilisant la formule d'intégration par parties classique, on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[B_u \left(f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds \right) \right] &= u f(t) - \int_0^t f'(s)(s \wedge u) ds \\ &= u f(t) - \left(u \int_u^t f'(s) ds + \int_0^u f'(s)s ds \right) \\ &= u f(u) - \int_0^u f'(s)s ds \\ &= \int_0^u f(s) ds \\ &= \mathbb{E}[B_u I_t(f)]. \end{aligned}$$

2.2.2 Intégrale stochastique générale

On cherche maintenant à définir la v.a.

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

quand $(\theta_s, 0 \leq s \leq t)$ est un processus stochastique. Le caractère aléatoire de $\theta = (\theta_s, 0 \leq s \leq t)$ va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener. On note $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien B .

Définition 2.3. On dit que $(\theta_t, t \geq 0)$ est un bon processus s'il est \mathcal{A}_t -adapté, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s^2 ds \right) < +\infty,$$

pour tout $t > 0$.

Comme dans le cas de l'intégrale de Wiener, la construction de $I_t(\theta)$ se fait par discrétisation.

Cas des processus étagés

Définition 2.4. On dit qu'un processus θ est étagé s'il existe une suite de réels t_j , $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit \mathcal{A}_{t_j} -mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}[$, soit :

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) \mathbf{1}_{]t_j, t_{j+1}[}(s).$$

Définition 2.5. Pour tout processus élémentaire θ , on définit l'intégrale d'Itô de θ par rapport au mouvement brownien B par :

$$\int_0^t \theta_s(\omega) dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Cas général

On peut prolonger l'intégrale de Wiener à une classe de processus plus grande.

Soit $\Lambda = \{X \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+) : \text{càglad, de carré intégrable}\}$ c'est à dire que X est adapté, continue à gauche, admet une limite à droite, \mathcal{A}_t -adapté et $\|X\|^2 = \mathbb{E}(\int_0^{+\infty} X_s^2 ds) \leq \infty$ $(\Lambda, \|X\|)$ est un espace complet. Pour définir $\int_0^{+\infty} X_s dB_s$ pour $X \in \Lambda$, on approche X

par les processus étagés : Soit $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ avec

$$X_n = \sum_{j=1}^n Y_j \mathbf{1}_{]t_j, t_{j+1}]}, \quad Y_j \text{ est } \mathcal{A}_{t_j} \text{-mesurable}$$

$$\int_0^t X_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n Y_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

$$D'où : \mathbb{E} \left(\int_0^t X_s dB_s \right) = 0 \text{ et } \text{Var} \left(\int_0^t X_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t X_s^2 ds \right).$$

$$\text{On note } \int_0^t X_s dB_s = \int_0^\infty X_s \mathbf{1}_{]0, t]}(s) dB_s.$$

$$\text{Si } X \text{ est étagé : } \int_0^t X_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} X_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}).$$

Plus généralement si τ est un temps d'arrêt, le processus $\mathbf{1}_{]0, \tau]}(t)$ est adapté et

$$\int_0^{t \wedge \tau} X_s dB_s = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{]0, \tau]}(s) dB_s.$$

Propriété 2.2. [11]

L'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires satisfait les propriétés suivantes :

1. Linéarité : $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, θ_s, η_s deux processus stochastiques :

$$\int_0^t (C_1 \theta_s + C_2 \eta_s) dB_s = C_1 \int_0^t \theta_s dB_s + C_2 \int_0^t \eta_s dB_s$$

2. Additivité : Pour $0 \leq u < t \leq T$:

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \int_0^u \theta_s dB_s + \int_u^t \theta_s dB_s$$

3. $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ est continue p.s.

4. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus \mathcal{A} -adapté.

5. $\mathbb{E}(\int_0^t \theta_s dB_s) = 0$ et $\text{Var}(\int_0^t \theta_s dB_s) = \mathbb{E}(\int_0^t \theta_s^2 ds)$

6. Pour tout $t \leq T$:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s \right) \left(\int_0^t \eta_s dB_s \right) \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s \eta_s ds \right)$$

Preuve 2.7.

1. La linéarité :

$$\begin{aligned}
\int_0^t (C_1 \theta_s + C_2 \eta_s) dB_s &= \int_0^t \left(C_1 \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j 1_{]t_j, t_{j+1}[}(t) + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j 1_{]t_j, t_{j+1}[}(t) \right) dB_t \\
&= C_1 \int_0^t \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j 1_{]t_j, t_{j+1}[}(t) dB_t + C_2 \int_0^t \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j 1_{]t_j, t_{j+1}[}(t) dB_t \\
&= C_1 \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \\
&= C_1 \int_0^t \theta_s dB_s + C_2 \int_0^t \eta_s dB_s
\end{aligned}$$

2. L'additivité est évidente.

3. La continuité de l'intégrale stochastique est liée à la continuité des trajectoires du M.B.

4. La v.a. $\int_0^t \theta_s dB_s$ est \mathcal{A}_t -mesurable comme somme des v.a. \mathcal{A}_t -mesurables. Donc l'intégrale stochastique est un processus \mathcal{A} -adapté.

5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s dB_s \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [\theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [\mathbb{E} (\theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{A}_{t_j})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [\theta_j \mathbb{E} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{A}_{t_j})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [\theta_j \mathbb{E} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Var} \left(\int_0^t \theta_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 \right) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E} (\theta_i \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})).$$

Soit $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ donc

$$\mathbb{E} (\theta_i \theta_j \Delta B_i \Delta B_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{E}(\theta_j^2)(t_{j+1} - t_j) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left(\int_0^t \theta_s dB_s \right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} (\theta_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\theta_j^2) \mathbb{E} ((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\theta_j^2) (t_{j+1} - t_j) \\
 &= \mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s^2 ds \right).
 \end{aligned}$$

6. En utilisant l'égalité $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s \right) \left(\int_0^t \eta_s dB_s \right) \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s \eta_s ds \right).$$

Proposition 2.5. (Propriété de Martingales) [1]

Soit $M_t = \int_0^t \theta_s dB_s$ où $\theta \in \Lambda$. Alors

- (a) Le processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale à trajectoires continues.
- (b) Le processus $N = (N_t)_{t \geq 0}$ avec $N_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$ est une martingale.

Processus d'Itô

On va introduire une nouvelle classe de processus, par rapport à laquelle une intégrale stochastique sera définie : il s'agit de la famille des processus d'Itô. Cette classe permet d'établir plusieurs formules pratiques qui forment la base du calcul différentiel et de l'intégral stochastique.

Définition 2.6. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni de la filtration (\mathcal{A}_t) et $(B_t)_{t \geq 0}$ un \mathcal{A}_t -mouvement Brownien. On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.4)$$

où X_0 est un processus adapté, H_s et K_s sont des processus adaptés continus tels que presque sûrement :

$$\int_0^T |K_s| ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T |H_s|^2 ds < \infty.$$

L'équation (2.4) est notée sous forme différentielle par

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = x.$$

En d'autres termes, un processus d'Itô est un processus (X_t) qui peut se décomposer sous la forme $X_t = M_t + V_t$, où

- (M_t) est une martingale continue de carré intégrable par rapport à une filtration (\mathcal{A}_t) .
- (V_t) est un processus continu, \mathcal{A}_t -adapté, à variation bornée, et tel que $V_0 = 0$.

Remarque 2.2. La décomposition d'un processus d'Itô est unique au sens où si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s.$$

Alors

$$\begin{cases} X_0 = X'_0 \\ K_t = K'_t \\ H_t = H'_t, \end{cases}$$

Définition 2.7. (Le processus de variation quadratique)

Soit $X = (X_t)$ un processus d'Itô défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

on appelle **processus de variation quadratique** de X (ou le crochet de X) noté

$$\langle X \rangle = \{ \langle X \rangle_t : 0 \leq t \leq T \},$$

le processus défini par :

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Exemple 2.1.

Le mouvement Brownien est un processus d'Itô puisque

$$B_t = \int_0^t 1 dB_s.$$

Par conséquent,

$$\langle B \rangle_t = \int_0^t 1^2 ds = t. \quad (\text{Le crochet du Brownien}).$$

Définition 2.8. (Le processus de covariance quadratique)

Soit (X_t) et (Y_t) deux processus d'Itô tels que

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t \quad \text{et} \quad dY_t = K'_t dt + H'_t dB_t,$$

alors le processus $\langle X, Y \rangle_t$ défini pour tout $t \in [0, T]$ par

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

est appelé la **covariance quadratique** de (X_t) et (Y_t) .

Formules d'Itô**Théorème 2.5. (Première formule d'Itô) [11]**

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien par rapport à la filtration $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ et $f \in C^2(\mathbb{R})$ (f, f', f'' sont continues). On suppose de plus que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t (f'(B_s))^2 ds \right) < +\infty, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Alors, $\forall t \geq 0$

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds. \quad (p.s)$$

Sous sa forme différentielle, la formule précédente s'écrit :

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt.$$

Remarque 2.3. Vu que $(f'(B_t), t \geq 0)$ est un processus continu et adapté à (\mathcal{A}_t) et que la condition (2.5) sur l'espérance est satisfaite, $\int_0^t f'(B_s) dB_s$ est bien définie. $\int_0^t f''(B_s) ds$ l'est aussi car l'application $s \mapsto f''(B_s)$ est continue.

Le terme $\int_0^t f''(B_s) ds$ (absent dans le calcul différentiel classique) est appelé **terme d'Itô**.

Exemple 2.2.

Pour $f(x) = x^2$ alors

$$f(B_t) = B_t^2 \quad \text{et} \quad f(B_0) = B_0^2 = 0,$$

et

$$f'(B_s) = 2B_s \quad \text{et} \quad f''(B_s) = 2,$$

la condition (2.5) est vérifiée. En effet

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (2B_s)^2 ds\right) = 2t^2 < +\infty, \text{ pour } t \text{ fixé.}$$

En remplaçant dans la formule d'Itô, nous obtenons

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds = 2 \int_0^t B_s dB_s + t.$$

$$\text{Ce qui implique } \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Remarque 2.4. $\left(B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s dB_s, t \geq 0\right)$ est une martingale.

Théorème 2.6. (Deuxième formule d'Itô) [2]

Soit (B_t) un mouvement Brownien construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t), \mathbb{P})$ avec

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto f(t, x) \end{aligned}$$

une fonction de $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ $\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ existent et sont continues) telle que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) \right)^2 ds \right] < \infty, \quad \forall t > 0.$$

Alors

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds \quad p.s$$

qui s'exprime dans sa forme différentielle comme

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t) dt.$$

Théorème 2.7. (Cas multidimensionnel) [1]

Soit (B_t) un mouvement Brownien et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors

$$f(B_t) = f(B_0) + \sum_{i=0}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s) dB_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(B_s) d\langle B_i, B_j \rangle_s.$$

Intégration par parties

Proposition 2.6.

Soient (X_t) et (Y_t) , deux processus d'Itô. Nous avons :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s,$$

avec $\langle X, Y \rangle_t$ est la covariance quadratique de (X_t) et (Y_t)

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

On peut écrire aussi sous la forme

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Preuve 2.8.

Il suffit d'appliquer la formules d'Itô aux processus : (X_t^2) , (Y_t^2) , $(X + Y)_t^2$

$$\text{On a : } dX_t^2 = 2X_t dX_t + d\langle X \rangle_t,$$

$$dY_t^2 = 2Y_t dY_t + d\langle Y \rangle_t,$$

$$d(X_t + Y_t)^2 = 2(X_t + Y_t)(dX_t + dY_t) + d\langle X + Y \rangle_t,$$

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2} (d(X_t + Y_t)^2 - dY_t^2 - dX_t^2) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2} (d\langle X + Y \rangle_t - d\langle X \rangle_t - d\langle Y \rangle_t) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.

Soient les processus (X_t) et (Y_t) définis par : $X_t = e^{B_t}$ et $Y_t = e^{-\frac{t}{2}}$.

D'après la formule d'Itô on a :

$$dX_t = X_t dB_t + \frac{1}{2} X_t dt.$$

$$dY_t = -\frac{1}{2} Y_t dt.$$

On pose $Z_t = X_t Y_t$ on aura $Z_t = e^{B_t - \frac{t}{2}}$, nous obtenons de la formule d'intégration par parties que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + 0,$$

avec $\langle X, Y \rangle_t = 0$ puisque (Y_t) est à variation bornée. Nous avons donc :

$$Z_t = 1 + \int_0^t X_s \left(-\frac{1}{2} Y_s\right) ds + \int_0^t Y_s \left(\frac{1}{2} X_s\right) ds + \int_0^t X_s Y_s dB_s,$$

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dB_s.$$

Donc

$$dZ_t = Z_t dB_t \quad \text{et} \quad Z_0 = 1.$$

Conclusion

Un exemple particulièrement important de processus stochastiques est le mouvement Brownien que nous avons étudié en détail au cours de ce chapitre sans oublier l'intégrale stochastique pour pouvoir définir les équations différentielles stochastiques dont nous parlerons dans la suite.

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons définir les équations différentielles stochastiques, leurs solutions et étudions l'existence et l'unicité de ces solutions. Ces équations permettent de tenir compte d'un bruit aléatoire dans l'évolution d'un phénomène. En particulier, elles fournissent des modèles en physique, biologie (génétique, dynamique des populations), économie et finance.

3.1 Rappels

Une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre 1 avec une condition initiale, sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est un système de type :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

L'étude mathématique des équations différentielles ordinaires est d'une importance considérable pour les applications notamment en physique, s'est développée au début du 19-ème siècle avec la théorie des fonctions spéciales. Ces dernières peuvent être vues

comme la généralisation de la fonction exponentielle, laquelle est solution de

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

En général, il est impossible de donner une solution explicite à une EDO. On peut cependant chercher à savoir s'il existe une solution, et si elle est unique.

3.2 Equation différentielle stochastique

Définition 3.1. Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de l'équation (3.1) avec un terme aléatoire modélisant un « bruit » autour du phénomène déterministe décrit par (3.1). La perturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien, où l'on considère

$$\begin{cases} dY_t = f(t, Y_t) dt + \sigma dB_t \\ Y_0 = y \end{cases} \quad (3.3)$$

Soit, sous forme intégrale (la seule qui ait un sens mathématique, puisque le Brownien n'est pas dérivable) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_s) ds + \sigma B_t, \quad \forall t \geq 0,$$

où σ dépend du temps (σ_t) ou bien de la valeur Y_t en t ($\sigma(Y_t)$) ou encore être constante σ .

Remarque 3.1.

Mais pour σ dépend du temps t et de l'inconnue Y_t i.e $\sigma(t, Y_t)$. Dans ce cas l'EDS s'écrit sous la forme :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s,$$

avec f est appelé la dérivé et σ est le coefficient de diffusion (l'intensité du bruit).

3.2.1 Résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS)

Définition 3.2. Soit f et σ deux fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration (\mathcal{A}_t) et un \mathcal{A}_t -mouvement Brownien B sur cet espace. Une solution de l'EDS (3.3) est un processus Y continu, \mathcal{A}_t -adapté tel que les intégrales $\int_0^t f(s, Y_s) ds$ et $\int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s$ ont un sens et l'égalité

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s,$$

est satisfaite pour tout t \mathbb{P} -p.s.

Définition 3.3. (Types de solution) [2]

Le caractère aléatoire d'équation différentielle stochastique impose plusieurs notions d'existence et d'unicité. On dit qu'il y a :

1. Existence d'une **solution faible** si pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution Y de (3.3).
2. **Existence et unicité d'une solution faible** si tous les processus Y solutions de l'équation différentielle stochastique ont même loi.
3. **Existence d'une solution forte** si (3.3) admet une solution Y qui se trouve dans le même espace filtré avec (\mathcal{A}_t) , alors toute solution forte est aussi une solution faible.
4. **Unicité forte** pour (3.3) si pour tout mouvement Brownien B , deux solutions fortes associées à B sont indistinguables. c'est-à-dire pour toutes solutions $Y_1(t), Y_2(t)$ on a $\mathbb{P}(Y_1(t) = Y_2(t), \forall t \geq 0) = 1$.
5. **Unicité trajectorielle** si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et le mouvement Brownien B étant fixés, deux solutions Y et Y' de (3.3) telles que $Y_0 = Y'_0$ p.s sont indistinguables c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y_t = Y'_t, \forall t \geq 0) = 1$.

Définition 3.4. L'équation différentielle stochastique est dite bien posée si, pour toute condition initiale $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, elle admet une solution faible qui est unique dans le sens de la loi de probabilité.

3.2.2 Equations différentielles stochastiques homogènes en temps

Étant donné un mouvement Brownien (B_t) et des fonctions $f, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche les conditions d'existence d'un processus (Y_t) tel que :

$$dY_t = f(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dB_t, t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad Y_0 = y_0,$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$ est la condition initiale, le terme $f(Y_t)$ est appelé la dérive, alors que $\sigma(Y_t)$ est la diffusion. Décrivons d'abord la classe des fonctions Lipschitzienne.

Définition 3.5. [13]

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne, s'il existe une constante $K \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

Si f est une fonction lipschitzienne, alors f est uniformément continue, et donc continue sur \mathbb{R} .

Si f est continûment dérivable de dérivée f' bornée, alors f est lipschitzienne. En effet :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}} |f'(z)| |x - y| = K |x - y|$$

où $K = \sup_{z \in \mathbb{R}} |f'(z)| < +\infty$.

Le résultat suivant établit des conditions suffisantes d'existence et d'unicité d'un processus solution de l'équation homogène en temps.

Théorème 3.1. (Condition suffisante) [8]

Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien adapté à une filtration $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et f, σ lipschitziennes. Alors il existe un unique processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, continu et adapté à $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$

tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on ait presque sûrement :

$$Y_t = y_0 + \int_0^t f(Y_r) dr + \int_0^t \sigma(Y_r) dB_r. \quad (3.4)$$

De plus, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} Y_t^2) < \infty.$$

Proposition 3.1.

La solution (Y_t) de l'équation (3.4) est un processus d'Itô.

Preuve 3.1.

Remarquons d'abord que Y_t peut s'écrire sous la forme

$$Y_t = M_t + V_t,$$

où

$$M_t = y_0 + \int_0^t \sigma(Y_r) dB_r \quad \text{et} \quad V_t = \int_0^t f(Y_r) dr.$$

Comme Y_t est adapté et que σ est lipschitzienne, l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \sigma(Y_r) dB_r$$

a un sens, par conséquent, (M_t) est une martingale continue de carré intégrable.

Ensuite, puisque l'application $t \mapsto Y_t$ et f sont continues, nous en déduisons que le processus (V_t) est continûment dérivable, il est donc continu et à variation bornée. Ainsi, (Y_t) est un processus d'Itô.

Définition 3.6. Une solution faible de l'équation

$$dY_t = f(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dB_t, t \geq 0 \quad \text{et} \quad Y_0 = y_0,$$

est un processus continu tel que les processus (M_t) et (N_t) sont définis respectivement par les martingales :

$$M_t = Y_t - Y_0 - \int_0^t f(Y_u) du \quad \text{et} \quad N_t = M_t^2 - \int_0^t \sigma^2(Y_u) du.$$

À remarquer que le mouvement Brownien (B_t) n'est pas présent dans la définition d'une solution faible. De plus, une solution faible est une solution en loi. En d'autres termes, sous certaines conditions, nous avons l'unicité de la solution faible en loi. Dans ce cadre, il existe un autre concept d'unicité appelé solution faible au sens de la trajectoire, c'est-à-dire qu'étant données deux solutions faibles X et Y avec une même condition initiale, les processus X et Y sont indistinguables.

3.2.3 Equations non homogènes en temps

Étant donné un mouvement Brownien (B_t) et des fonctions $f, \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche les conditions d'existence d'un processus (Y_t) telle que :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s.$$

Théorème 3.2. [8]

On suppose qu'il existe deux constantes M_1, M_2 telles que les fonctions f et σ satisfont :

$$|f(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq M_1(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

$$\text{et : } |f(t, x) - f(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq M_2 |x - y|, \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Alors, il existe une unique solution (X_t) continue par rapport à la variable $t \in [0, \infty[$ qui vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^s |X_t|^2 dt\right) \leq \infty, \quad \forall s \in [0, \infty[.$$

Remarque 3.2. Il est bien de noter que deux processus $(X_1(t))$ et $(X_2(t))$ stochastiquement équivalents possèdent des intégrales stochastiques

$$\int_0^t X_1(s) dB_s, \quad \int_0^t X_2(s) dB_s,$$

presque sûrement égales, d'où il vient que, tout processus stochastiquement équivalent à la solution de l'EDS (3.1) est lui-même solution de cette équation.

3.3 Exemples d'équations différentielles stochastiques

Les EDSs affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDSs affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel.

Dans cette section, on étudie certaines EDS dont les solutions sont explicites.

3.3.1 Equations linéaires :

★ **Ornstein-Uhlenbeck[1] :**

Pour $f(t, x) = -ax$ avec ($a > 0$) et $\sigma(x) = \sigma$. Il s'agit de l'équation de **Langevin** :

$$dY_t = -aY_t dt + \sigma dB_t, \quad Y_0 = y. \quad (3.5)$$

La solution est donnée sous la forme suivante :

$$Y_t = Y_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s. \quad (3.6)$$

En effet,

$$Y_t = Y_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s.$$

Sans le terme σdB_t , l'équation $dY_t = -aY_t dt$ se résout immédiatement en

$Y_t = C(t) e^{-at}$. Pour tenir compte du terme σdB_t , on fait « varier la constante C » :

$$dY_t = dC(t) e^{-at} - a C(t) e^{-at} dt \text{ or que : } dY_t = -a Y_t dt + \sigma dB_t,$$

ensuite par identification : $dC(t) = \sigma e^{at} dB_t$

$$\text{D'où : } C(t) = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s.$$

Par conséquent : l'expression (3.6) est obtenue.

★ **Equation de Hull-White, Vasicek :**

Considérons le processus Y à valeurs dans \mathbb{R} solution de :

$$dY_t = r(\theta - Y_t) dt + \sigma dB_t, \quad Y_0 = y,$$

où r , σ , θ sont des constantes, B est un \mathcal{A}_t -mouvement Brownien. En posant

$$Z_t = Y_t - \theta,$$

par la formule d'Itô nous avons

$$\begin{aligned} dZ_t &= dY_t \\ &= r(\theta - Y_t) dt + \sigma dB_t \\ &= -rZ_t dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Le processus Z est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la solution sous forme intégrale est donnée par :

$$Z_t = Z_0 e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dB_s.$$

En remplaçant Z_t par $Y_t - \theta$, nous obtenons :

$$Y_t - \theta = (Y_0 - \theta) e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dB_s.$$

Donc :

$$Y_t = Y_0 e^{-rt} + \theta(1 - e^{-rt}) + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dB_s.$$

★ **Equation de Black et Scholes[1]** :

C'est le cas particulier où $f(t, y) = ay$ et $\sigma(t, y) = \sigma(y)$, c'est à dire :

$$dY_t = aY_t dt + \sigma Y_t dB_t, \quad Y_0 = 1, \quad (3.7)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ fixés.

Cette EDS est d'une grande importance en finance, elle modélise l'évolution d'un cours Y soumis à un taux d'intérêt déterministe " a " appelé **coefficient de dérivé** (il traduit la tendance générale du processus) et à une perturbation stochastique $\sigma Y_t dB_t$. Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ est appelé **volatilité** (il traduit la variabilité du processus).

Noter que la partie déterministe (aY_t) de l'accroissement de Y_t et sa partie aléatoire σY_t sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante Y_t en t (ce qui est typique des modèles de croissance).

La solution de (3.7) est donnée par :

$$Y_t = Y_0 e^{(a - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, t \geq 0$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et Y_0 une variable aléatoire.

Ce processus solution est appelé le **mouvement brownien géométrique**. Il est caractérisé par :

- Le processus $(X_t e^{-bt}, t \geq 0)$ est une martingale.
- Ce processus est appelé aussi processus log-normal car :

$$\ln X_t = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t + \ln X_0 \rightsquigarrow \mathcal{N}((b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \ln X_0, \sigma^2 t).$$

3.3.2 Équations affines

On suppose que $f(t, x) = a_t x + c_t$ et $\sigma(t, x) = \sigma_t x + \delta_t$, c'est à dire qu'on considère l'EDS affine générale :

$$dY_t = Y_t(a_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t. \quad (3.8)$$

Elle a une solution construite à partir de la solution Z de l'EDS linéaire associée $dZ_t = Z_t(a_t dt + \sigma_t dB_t)$ de condition initiale $Z_0 = 1$, ie :

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds\right).$$

3.3.3 Equation de Tanaka

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} dY_t = \text{sign}(Y_t) dB_t \\ Y_0 = y \end{cases}$$

telle que :

$$\text{sign}(Z) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z \geq 0 \\ -1 & \text{si } Z < 0 \end{cases} ,$$

d'où

$$Y_t = \begin{cases} B_t & \text{si } Z \geq 0 \\ -B_t & \text{si } Z < 0 \end{cases} ,$$

La fonction $g(z) = \text{sign}(Z)$ n'est pas continue, on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipshitz. Cette équation n'a pas une solution forte mais elle admet une unique solution faible .

3.3.4 Processus de Bessel

Soit $b \geq 0$, on considère l'EDS :

$$\begin{cases} dY_t = \frac{b}{Y_t} dt + dB_t, t \geq 0 \\ Y_0 = 1 \end{cases}$$

Il existe une unique solution forte à cette équation, appelée processus de Bessel.

$f(y) = \frac{b}{y}$ n'est pas lipschitzienne en 0 ($f'(0) = -\infty$), on déduit que les conditions d'existence et d'unicité du théorème (3.1) sont suffisantes mais pas nécessaires.

Exemple 3.1.

- *Il existe des équations qui ont plus d'une solution. Soit l'EDS :*

$$\begin{cases} dY_t = 3Y_t^{\frac{2}{3}} dt \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

cette équation a plus d'une solution, pour tout b , le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ vérifie :

$$\begin{cases} dY_t = (t - b)^3 & \text{si } t > b \\ 0 & \text{si } t \leq b \end{cases}$$

est une solution de l'équation.

La condition de lipschitz garantie l'unicité de la solution, notons que la fonction $b(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ n'est pas lipschitzienne-continue au point $y = 0$.

- *Soit l'équation :*

$$\begin{cases} dY_t = \sin(Y_t) dt + \cos(Y_t) dB_t \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

$f(y) = \sin(y)$ et $\sigma(y) = \cos(y)$ sont lipschitziennes car les dérivées f' et σ' sont bornées donc il existe une unique solution de l'équation ci-dessus.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité deux types différents d'EDS : homogène et non homogène dont la vérification de l'existence et de l'unicité des solutions est possible. Mais la résolution analytique de ces équations n'est pas évidente, c'est pourquoi nous allons introduire des méthodes d'approximation pour pouvoir donner le comportement de la solution.

Chapitre 4

Etude numérique des EDS

Considérons l'équation différentielle stochastique $dY_t = f(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dB_t$. Nous avons vu que lorsque f et σ sont continues en (t, y) et lipschitziennes en y , alors cette équation possède une unique solution forte $(Y_t)_{t \geq 0}$. Mais il est souvent difficile d'obtenir une expression analytique pour cette solution. Il est donc important de développer des méthodes numériques afin de simuler des approximations de la solution de telles équations. Les schémas numériques utilisés pour les équations différentielles ordinaires peuvent, en général, être adaptés au cas aléatoire.

On va voir que l'on peut adapter les méthodes d'intégration des EDO pour la résolutions numérique des EDSs mais que l'ordre des méthodes (c'est à dire leur vitesse de convergence) pour un même type d'approche est plus faible que pour les EDO. On commencera par définir les trois méthodes suivantes : la méthode d'Euler, Milstein et la méthode de Runge-Kutta, cette dernière est moins utilisée que les deux autres méthodes pour les EDSs. On terminera par un exemple d'application.

4.1 Rappels sur l'intégration numérique des EDO

Les principales méthodes de résolution numérique des EDO sont séparées en deux grands types :

- **Les méthodes à un pas :**

Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète y_{n+1} au noeud x_{n+1} fait intervenir la

valeur y_n obtenue à l'abscisse précédente. Les principales méthodes sont :

- Méthodes d'Euler explicite et implicite.
- Méthode d'Euler améliorée.
- Méthode d'Euler-Cauchy.
- Méthode de Crank-Nicholson.
- Méthodes de Runge et Kutta.

• **Les méthodes à pas multiples**

Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète y_{n+1} au noeud x_{n+1} fait intervenir plusieurs valeurs $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$ obtenues aux abscisses précédentes. Les principales méthodes sont :

- Méthode de Nystrom ou saute-mouton.
- Méthodes d'Adams-Bashforth-Moulton.
- Méthodes de Gear.

4.1.1 Méthode d'Euler

Soit l'EDO de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$ avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Le but est d'obtenir une approximation de la solution en $t = t_1 = t_0 + h$.

Algorithme d'Euler :

Etant donné un pas h , une condition initiale (t_0, y_0) , et un nombre maximal d'itérations n .

pour tout $0 \leq i \leq n$:

$$\begin{cases} \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + hf(t_i, \hat{y}_i) \\ t_{i+1} = t_i + h \\ \hat{y}_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Remarque 4.1.

Pour intégrer des EDOs, la méthode la plus simple est la méthode d'Euler qui est basée, sur les approximations successives de y_i , avec un pas fixé h . Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa précision.

4.1.2 Méthodes de Runge-Kutta

Ce sont des méthodes d'ordre élevé, qui sont calquées sur les méthodes de Taylor du même ordre. L'algorithme, noté *RK2*, s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + hf(t_i, \hat{y}_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_i, \hat{y}_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, \hat{y}_i)}{\partial y} f(t_i, \hat{y}_i) \right) \\ \hat{y}_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

Avec $t_{i+1} = t_i + h$.

4.2 Intégration numérique des EDSs

4.2.1 Méthode d'Euler

Le schéma d'Euler appliqué à l'intégration numérique de l'EDS est donné sous le nom de la méthode d'Euler Maruyama qui consiste à calculer une approximation de Y_t sur une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ de l'EDS suivante (voir [6]) :

$$dY_t = f(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dB_t$$

Conduit à l'approximation :

$$\begin{cases} \hat{Y}_{i+1} = \hat{Y}_i + hf(t_i, \hat{Y}_i) + \sigma(t_i, \hat{Y}_i) \Delta B_i \\ \hat{Y}_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $i = \overline{1, n}$, $h = \frac{T}{n}$ et $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ représentent les accroissements d'un processus de Wiener $B = \{B_t, t > 0\}$ pour lequel $\Delta B_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, h)$.

En remarquant que ΔB_i est égale à $\sqrt{h} \varepsilon_i$ en loi, où les ε_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, l'approximation d'Euler d'un processus de diffusion ($Y(t)$) dont la représentation est celle du l'EDS est de la forme :

$$\hat{Y}_{i+1} = \hat{Y}_i + hf(t_i, \hat{Y}_i) + \sigma(t_i, \hat{Y}_i) \sqrt{h} \varepsilon_i.$$

Ordre de la méthode

Dans le cas stochastique, on décrit classiquement les performances d'une méthode au moyen de l'erreur moyenne absolue définie par :

$$E_{T,h} = \mathbb{E}[|Y_T - \hat{Y}_T|].$$

Si $\lim_{h \rightarrow 0} E_{T,h} = 0$ on dira que le schéma de discrétisation envisagé converge fortement. Cette convergence forte sera dite d'ordre γ si $E_{T,h} \leq Ch^\gamma$ pour un certain $C > 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$.

On peut démontrer que la méthode d'Euler appliquée aux EDSs est fortement convergente, d'ordre $\gamma = \frac{1}{2}$. On remarque ici que l'ordre de la méthode d'Euler est deux fois plus faible dans le cas stochastique que dans le cas déterministe.

4.2.2 La méthode de Milstein

L'approximation de Taylor fournie ci dessus n'est que d'ordre 1/2 du fait que le terme en $\sigma(t, Y_t)\Delta B_t$ de l'équation (4.1) est d'ordre 1/2 car $\mathbb{E}[(\Delta B_t)^2] = h$. Il faut donc, pour obtenir une méthode fortement convergente d'ordre 1 pousser plus loin le développement du terme $\sigma(t, X_t) dB_t$ de l'EDS en intégrant le terme d'ordre 1 en $(\Delta B_t)^2$. On obtient alors la méthode de Milstein dont le schéma s'écrit comme suit (voir [6]) :

$$\begin{cases} \hat{Y}_{i+1} = \hat{Y}_i + f(t_i, \hat{Y}_i)h + \sigma(t_i, \hat{Y}_i)\Delta B_i + \frac{1}{2}\sigma(t_i, \hat{Y}_i)\frac{d\sigma}{dy}(t_i, \hat{Y}_i)((\Delta B_i)^2 - h) \\ \hat{Y}_0 \text{ donné.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Le schéma de Milstein est un raffinement de la méthode d'Euler et sa formule provient des approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{i+1} &\approx \hat{Y}_i + f(t_i, \hat{Y}_i)h + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\sigma(t_i, \hat{Y}_i) + \frac{d\sigma}{dy}(t_i, \hat{Y}_i)\sigma(t_i, Y_i)(B_u - B_{t_i})]dB_u \\ &\approx \hat{Y}_i + f(t_i, \hat{Y}_i)h + \sigma(t_i, \hat{Y}_i)\Delta B_i + \frac{1}{2}\sigma(t_i, \hat{Y}_i)\frac{d\sigma}{dy}(t_i, \hat{Y}_i)((\Delta B_i)^2 - h) \end{aligned}$$

sachant que d'après la formule d'Itô : $d(\frac{1}{2}B_t^2) = B_t dB_t + \frac{1}{2} dt$

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2} \int_0^t d(B_s^2) - \frac{1}{2} \int_0^t 1 ds \\ &= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t \\ &= \frac{1}{2} (B_t^2 - t). \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (B_u - B_{t_i}) dB_u &= \left[\frac{1}{2}(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \frac{1}{2}h \right] - B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &= \frac{1}{2}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - h]. \end{aligned}$$

4.2.3 Méthode de Runge-Kutta

Un inconvénient des méthodes de Taylor et qu'elles mettent en oeuvre des dérivées des termes de dérive et de diffusion f et σ . En fait, il existe des méthodes de type Runge-Kutta, qui ne nécessitent pas d'effectuer de telles dérivations. Indiquons ici sans justification la forme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1.5 (voir [6]) :

$$\begin{cases} \hat{Y}_{i+1} = \hat{Y}_i + f(t_i, \hat{Y}_i)h + \sigma(t_i, \hat{Y}_i)\Delta B_i + \frac{1}{2}(\sigma(t_i, \hat{Y}_i') - \sigma(t_i, \hat{Y}_i)) \frac{((\Delta B_i)^2 - h)}{\sqrt{h}} & \text{avec} \\ \hat{Y}_i' = \hat{Y}_i + f(t_i, \hat{Y}_i)h + \sigma(t_i, \hat{Y}_i)\sqrt{h} \\ \hat{Y}_0 & \text{donné.} \end{cases} \quad (4.3)$$

On pourra trouver d'autres méthodes d'ordres plus élevés pour la résolution des EDSs.

4.2.4 Stabilité d'une méthode

C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées reste bornée. La stabilité contrôle l'erreur qui augmente au cours du calcul.

4.3 Simulation des EDSs

L'intérêt pratique de la simulation d'équations différentielles stochastiques est très important, car la résolution analytique n'est pas toujours facile. Cela rend difficile l'étude de l'évolution dynamique d'un phénomène. Aujourd'hui, le développement de l'outil informatique motive les scientifiques pour mettre au point des schémas numériques pour la résolution approchée des EDSs.

4.3.1 Etude du modèle de Black-Scholes

Le modèle classique de Black-Scholes est donné par :

$$\begin{cases} W_t = e^{rt} \\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t . \end{cases} ,$$

avec S_t, W_t deux actifs, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, r le taux d'intérêt et $B = (B_t)$ un mouvement Brownien sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Afin de respecter la tradition financière nous appelons W l'actif non risqué et S l'actif risqué qui seront définis sur une période $[0, T]$.

Intuitivement le rendement ou taux de variation de l'actif dS_t/S_t n'est rien d'autre que la quantité μdt à laquelle on ajoute une perturbation aléatoire σdB_t . L'amplitude de cette perturbation est mesurée par σ , paramètre difficile à calculer et très important qu'on appelle la volatilité de l'actif S_t . Le coefficient μ est appelé la dérive.

Commençons par l'étude d'existence et d'unicité de la solution [8]

- **Recherche d'une solution**

On va rechercher formellement une solution de l'équation :

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ S_0 &= x_0 > 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

C'est à dire un processus adapté vérifiant

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s.$$

On pose $Y_t = \ln(S_t)$ et on considère $f(x) = \ln(x)$. Même si f ne satisfait pas aux hypothèses de la formule d'Itô on va l'utiliser pour "deviner" la solution. On vérifiera par la suite qu'il s'agit bien d'une solution.

On a $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Par la formule d'Itô on trouve :

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{S_s^2} d\langle S \rangle_s.$$

avec :

$$\begin{aligned}
 d\langle S \rangle_s &= dS_s \times dS_s \\
 &= (\mu S_s ds + \sigma S_s dB_s)(\mu S_s ds + \sigma S_s dB_s) \\
 &= \sigma^2 S_s^2 ds
 \end{aligned}$$

et comme S_t vérifie l'équation (4.4) on obtient

$$\begin{aligned}
 \ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dB_s \\
 &= \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t.
 \end{aligned}$$

D'où

$$S_t = x_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t \right] \quad (4.5)$$

• Vérification

On va à présent vérifier que la formule (4.5) est bien une solution de l'équation (4.4).

On pose $f(t, x) = x_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x \right]$. Ainsi $S_t = f(t, B_t) = x_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t \right]$.

La fonction f est suffisamment différentiable on a $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)f(t, x)$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sigma f(t, x)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \sigma^2 f(t, x)$. On applique la formule d'Itô à $f(t, B_t)$:

$$\begin{aligned}
 dS_t = df(t, B_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t) d\langle B \rangle_t \\
 &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)f(t, B_t) dt + \sigma f(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 f(t, B_t) dt \\
 &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)S_t dt + \sigma S_t dB_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t dt \\
 &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.
 \end{aligned}$$

Donc le processus S , \mathcal{A} -adapté est bien solution de l'EDS.

• Unicité de la solution

Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais,

dans notre cas, nous pouvons également la démontrer. Supposons que Y_t soit une autre solution de (4.4). Pour $t > 0$ on définit $Z_t = \frac{1}{S_t}$. Par la formule d'Itô on a

$$\begin{aligned} dZ_t = d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{2} \frac{2}{S_t^3} d\langle S \rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t} (\mu dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{S_t^3} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= (\sigma^2 - \mu) \frac{1}{S_t} dt - \sigma \frac{1}{S_t} dB_t. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la formule d'intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) = d\left(Y_t \times \frac{1}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t} d(Y_t) + d\langle Y_t, \frac{1}{S_t} \rangle \\ &= Y_t [(\sigma^2 - \mu) \frac{1}{S_t} dt - \sigma \frac{1}{S_t} dB_t] + \frac{1}{S_t} [\mu Y_t dt + \sigma Y_t dB_t] \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc :

$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0 dB_s = 1$. Ce qui permet de conclure que les processus Y et S sont égaux presque sûrement et l'EDS admet une unique solution.

4.3.2 Applications

Pour illustrer les schémas présentés, nous essayons de voir la variation de la qualité des simulations suite à la variation du nombre de simulations du pas de discrétisation. Il est à noter que nous travaillons avec un pas de discrétisation fixe et nous regardons l'effet de la variation de certains paramètres en utilisant les schémas présentés. Pour un $NBT = 100$ simulations avec un pas de discrétisation fixe $h = \frac{T}{NBT}$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.2$ et $S_0 = 100$. Pour ce faire, et pour optimiser les programmes, nous allons plutôt utiliser les fonctions logarithmes pour détailler le calcul. L'approximation de la solution exacte devient :

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &= \ln[S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t)] \\ &= \ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \end{aligned}$$

Or que, pour obtenir les solutions exactes au point $t = (n + 1)h$, nous avons,

$$\begin{aligned}\ln(S_{n+1}) &= \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(n+1)h + \sigma B_{n+1} \\ &= \ln(S_0) + \sum_{i=0}^n \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma(B_{i+1} - B_i) \right].\end{aligned}$$

on aura

$$S_{n+1} = S_0 \exp \left(\sum_{i=0}^n \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma(B_{i+1} - B_i) \right] \right)$$

Dans un premier temps nous testons la sensibilité de l'équation par rapport au nombre de séries simulées dans le schéma d'Euler, de Milstein et de Runge-Kutta. A chaque fois nous traçons le graphe de la solution exacte et de son approximation avec une méthode parmi les trois méthodes. Les figures si dessous représentent une illustration des solutions exactes et approchées et permettent de voir la fluctuation de la variable étudiée.

4.3.3 Algorithmes

Algorithme d'Euler :

```

fonction [ S1,S ] = Euler(mu,sigma,T,n,S0)
t=linspace(0,T,n); % Intervalle de temps
h = T/n; % Pas de discrétisation
delta = sqrt(h) * randn(n);
S = ones(1,n);
S1(1) = S0;
R = 0;
for i = 2 : n + 1
S1(i) = S1(i - 1) + mu * S1(i - 1) * h + S1(i - 1) * sigma * delta(i);
R = R + (mu - 1/2 * sigma^2) * h + sigma * h * delta(i);
S(i) = S0 * exp(R);
end
plot(t, S, t, S1);
xlabel('temps');
```

```

ylabel('prix des actifs');
legend(solution approchée par la méthode d'Euler,solution exacte);
title(simulation avec la méthode d'Euler);
end

```

Cet algorithme nous permettra de tracer le graphe suivant :

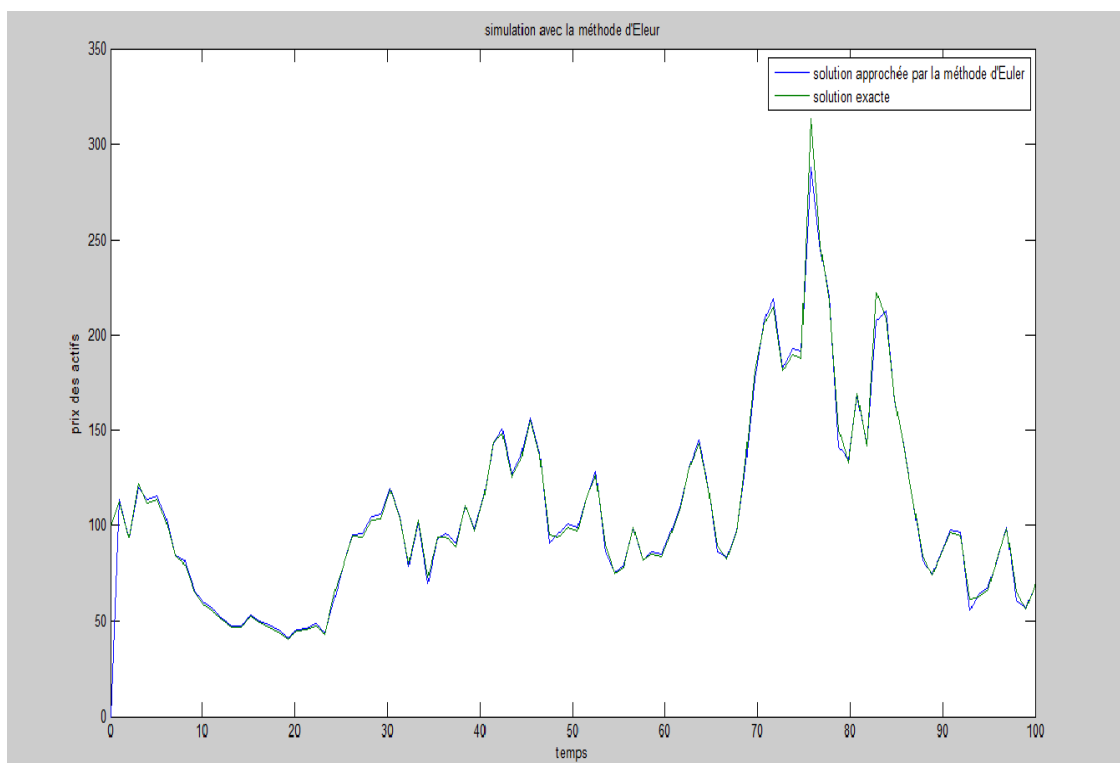


FIG. 4.1 – Simulation avec la méthode d'Euler

L'approximation par la méthode d'Euler est proche de la solution exacte. En effet, la simulation avec la méthode d'Euler est d'ordre $\frac{1}{2}$ ce qui explique le fait que les deux graphes sont proches.

Algorithme de Rung-Kutta

```

fonction [ S1,S2 ] = Rung-Kutta(mu,sigma,T,n,S0)
t=linspace(0,T,n);
h = T/n;
delta = sqrt(h) * randn(n);

```

```
S2 = ones(1, n);
S1 = ones(1, n);
S2(1) = S0;
S1(1) = S0;
R = 0;
for i = 2 : n
    S1(i) = S1(i-1) + mu*S1(i-1)*h + S1(i-1)*sigma*delta(i) + 1/2*(sigma*(S1(i-1) +
mu*S1(i-1)*h + sigma*S1(i-1)*sqrt(h)) - sigma*S1(i-1))*(((delta(i))^2 - h)/sqrt(h));
    R = R + (mu - (1/2) * sigma^2) * h + sigma * h * delta(i);
    S2(i) = S0 * exp(R);
end
plot(t, S1, t, S2);
xlabel('temps');
ylabel('prix des actifs');
legend('solution approchée de Runge-Kutta ', 'solution exacte');
title('simulation avec la méthode de Runge-Kutta');
end
```

Ce qui donne le graphe suivant :

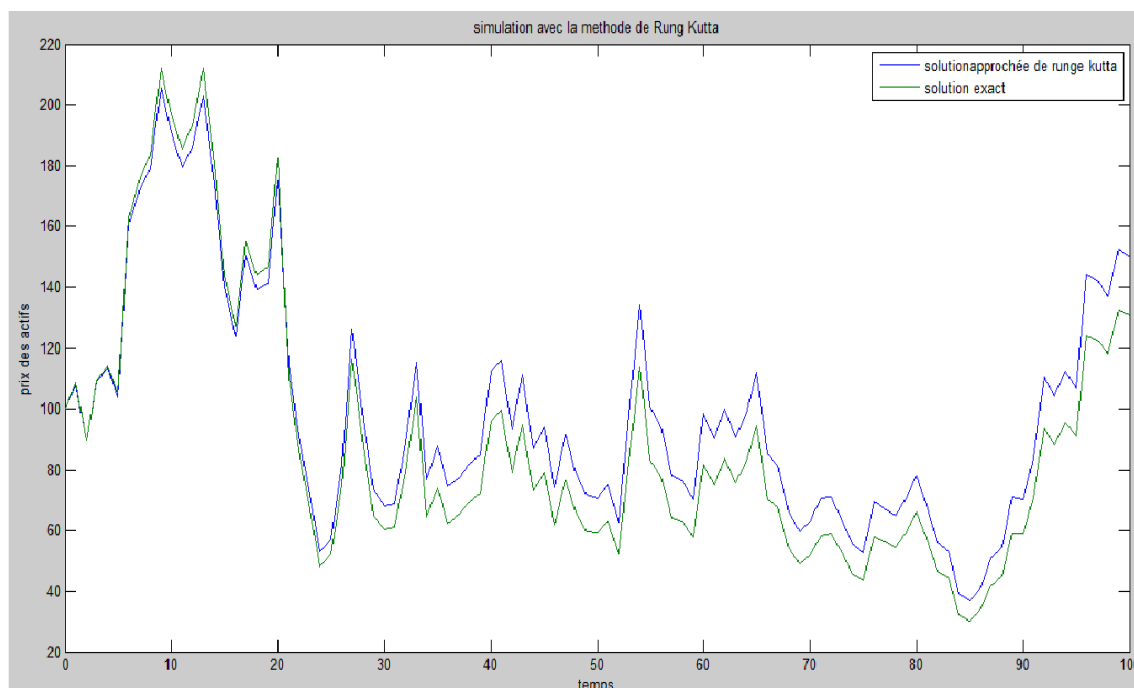


FIG. 4.2 – Simulation avec la méthode Runge-Kutta

Remarquons que pour la méthode de Runge-Kutta les deux courbes sont écartées, ce qui explique le fait que la méthode de Runge-Kutta ne doit pas être utilisée car elle n'est généralement pas cohérente avec le calcul stochastique d'Itô et les EDSs, (voir le livre de Kloeden [14]).

Algorithme de Milstein

```

fonction [ S,S1 ] = Milstein(mu,sigma,T,n,S0)
t=linspace(0,T,n);
h = T/n;
delta = sqrt(h) * randn(1,n);
S = ones(1,n);
S1 = ones(1,n);
S(1) = S0;
S1(1) = S0;

```

```
R = 0;
for i = 2 : n
S1(i) = S1(i - 1) + mu * S1(i - 1) * h + S1(i - 1) * sigma * delta(i) + 1/2 * sigma^2 * S1(i - 1) * (delta(i)^2 - h);
R = R + (mu - 1/2 * sigma^2) * h + sigma * h * delta(i);
S(i) = S0 * exp(R);
end plot(t, S, t, S1)
xlabel('temps');
ylabel('prix des actifs');
legend('solution approchée de Milstein ', 'solution exacte');
title('Simulation avec la méthode de Milstein');
end
```

Ce qui nous donne le graphe suivant :

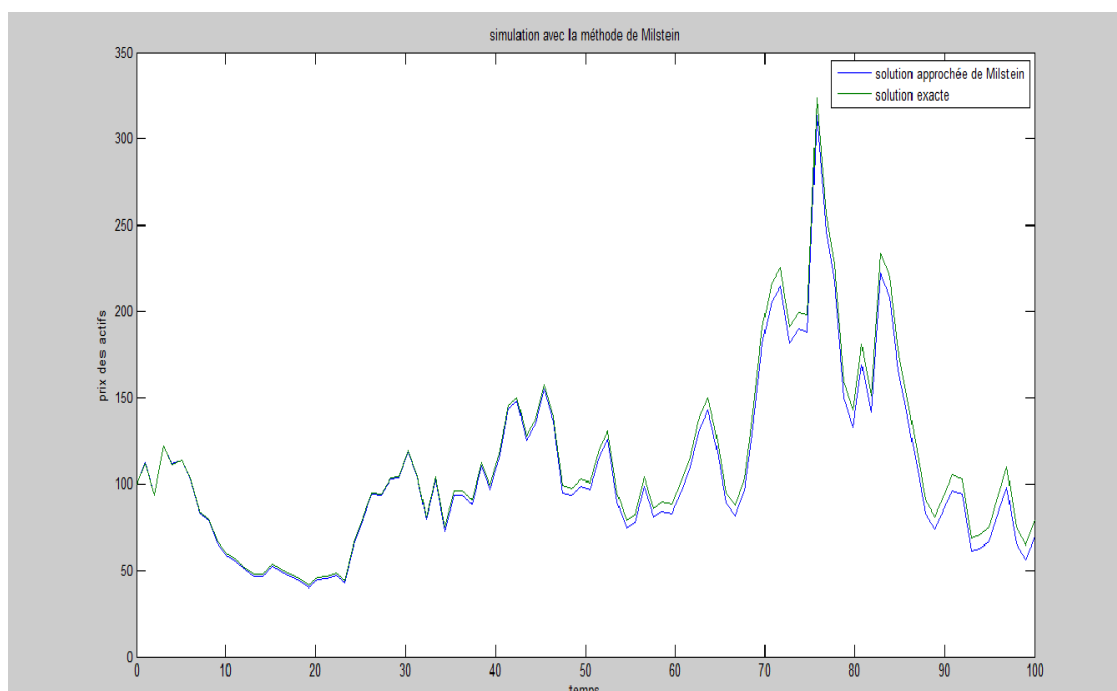


FIG. 4.3 – Simulation avec la méthode de Milstein

Pour cette méthode, le graphe approximé par la méthode de Milstein est plus proche de la solution exacte, que pour le graphe tracé par la méthode de Runge-Kutta. Ce qui explique le graphe ci-dessus et le fait que la méthode de Runge-Kutta est moins utilisable pour les EDSs.

Algorithme des trois méthodes

```

function [ S,S1,S2,S3 ] = les3methode(mu,sigma,T,n,S0)
t=linspace(0,T,n);
h = T/n;
delta = sqrt(h) * randn(1, n);
S = ones(1, n);
S1 = ones(1, n);
S2 = ones(1, n);
S3 = ones(1, n);
S(1) = S0;
S1(1) = S0;
S2(1) = S0;
S3(1) = S0;
R = 0;
for i = 2 : n
S(i) = S(i - 1) + mu * S(i - 1) * h + S(i - 1) * sigma * delta(i) + 1/2 * (sigma * (S(i - 1) + mu * S(i - 1) * h + sigma * S(i - 1) * sqrt(h)) - sigma * S(i - 1)) * (delta(i)^2 - h) / sqrt(h);
S1(i) = S1(i - 1) + mu * S1(i - 1) * h + S1(i - 1) * sigma * delta(i);
R(i) = R(i - 1) + (mu - 1/2 * sigma^2) * h + sigma * h * delta(i);
S2(i) = S0 * exp(R(i));
S3(i) = S3(i - 1) + mu * S3(i - 1) * h + S3(i - 1) * sigma * delta(i) + 1/2 * sigma^2 * S3(i - 1) * (delta(i)^2 - h);
end
plot(t, S1, 'R*', t, S, t, S2, t, S3)

```

```
xlabel('temps');  
ylabel('prix des actifs');  
legend('solution d" Euler', 'solution approchée de Runge-Kutta', 'solution exacte', 'solution  
Milstein')  
title('simulation avec les méthodes : Euler, Runge-Kutta et Milstein');  
end
```

Le graphe de ces trois méthodes est présenté dans la figure suivante :

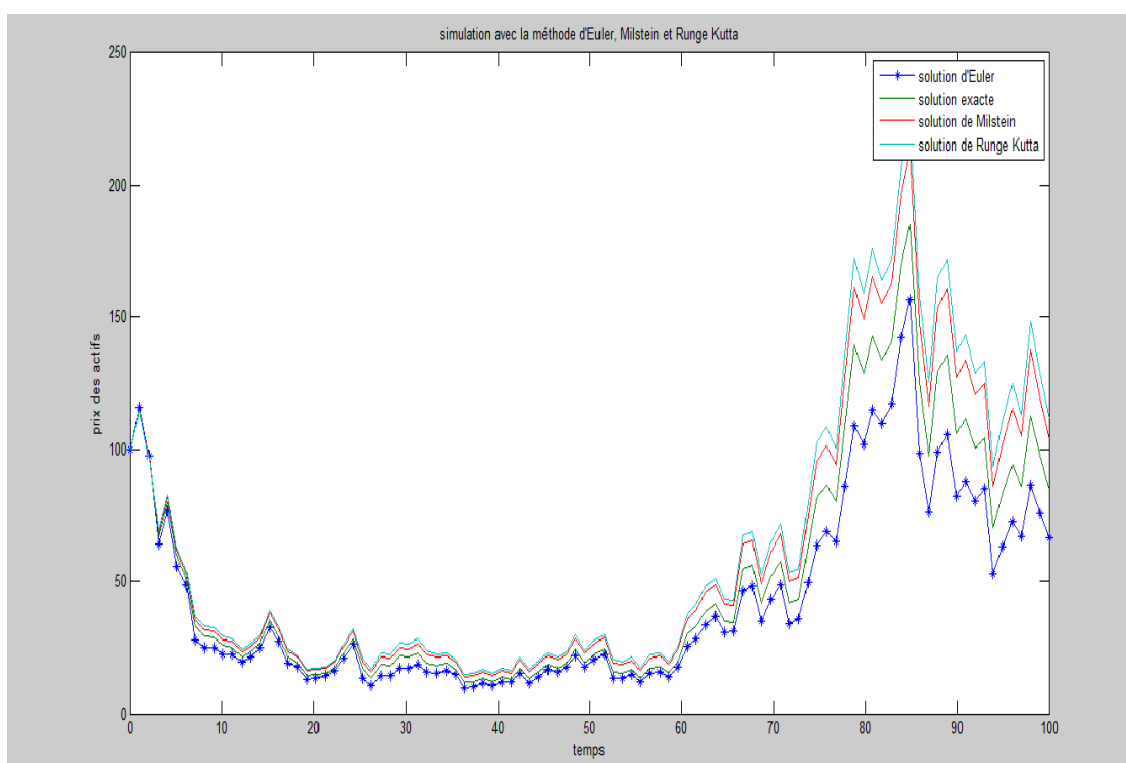


FIG. 4.4 – Simulation avec les trois méthode Euler, Rung-Kutta et Milestein

On déduit d'après le graphe que l'approximation la plus proche de la solution exacte est l'approximation d'Euler (elle converge plus rapidement par rapport aux autres méthodes), ensuite celle de Milstein et enfin l'approximation par la méthode de Runge-Kutta. Ce qui prouve notre étude et explique le résultat obtenu dans le graphe précédent.

4.3.4 Influence de la variation de pas sur la variation de la solution approchée

Pour l'étude de la variation de pas sur la solution approchée, on va l'illustrer sur la méthode d'Euler par l'algorithme suivant :

Algorithme

```

function [ S ] = Euler(mu,sigma,T,S0)
t=linspace(0,T,n); % Intervalle de temps
S = ones(1,n);
S(1) = S0;
R = 0;
for j = 2 : 3;
h = 21-j; % Pas de discrétisation
delta = sqrt(h) * randn(n);
for i = 2 : n + 1
S1(i) = S1(i - 1) + mu * S1(i - 1) * h + S1(i - 1) * sigma * delta(i);
R = R + (mu - 1/2 * sigma2) * h + sigma * h * delta(i);
S(i) = S0 * exp(R);
end
plot(t,S1)hold on
end
plot(t, S)hold on
xlabel('temps');
ylabel('prix des actifs');
legend(solution approchée par la méthode d'Euler,solution exacte)
title(simulation avec la methode d'Euler);
end

```

Les graphes suivants nous donnent la variation de la solution approchée avec trois pas différents et la solution exacte : D'après le graphe FG.(4.5) on voit clairement que plus le

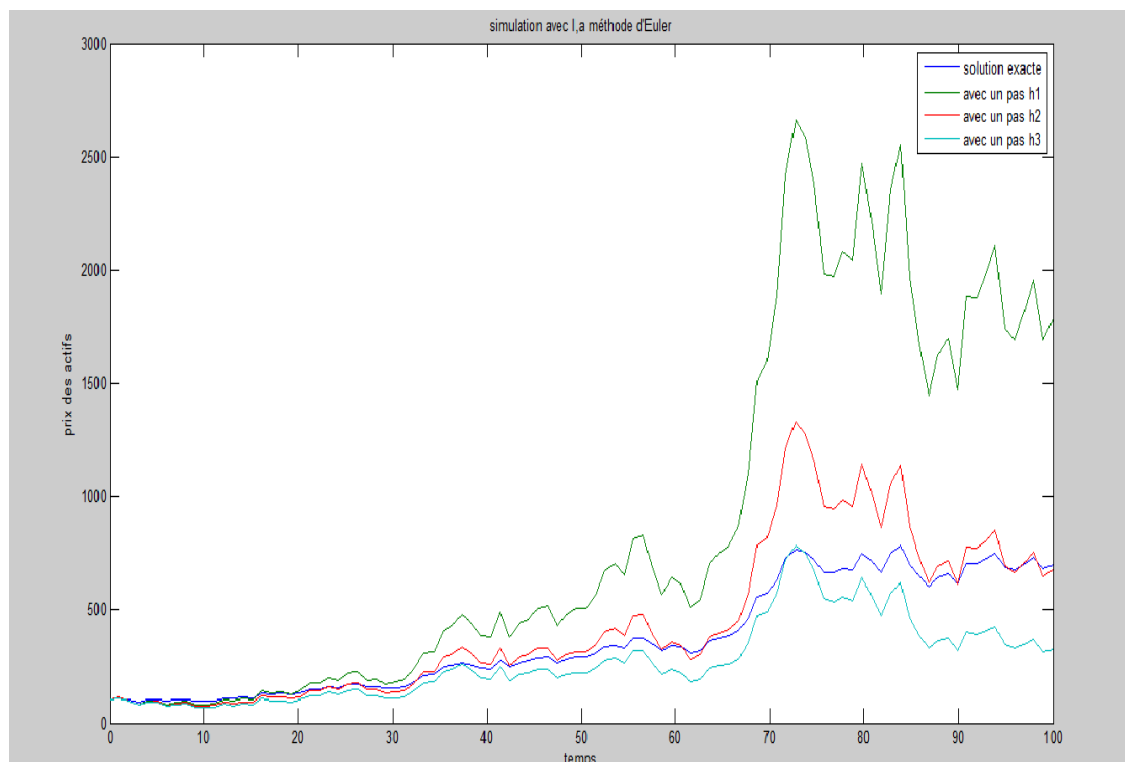


FIG. 4.5 – Variation de la solution approchée avec la variation de pas

pas est petit plus la solution approchée converge vers la solution exacte. D'où pour une meilleure approximation, on doit prendre un pas petit. Avec $h_1 > h_2 > h_3$.

4.3.5 Approximation d'une EDO

Pour étudier l'efficacité de la méthode d'Euler, dans ce qui suit on donne un algorithme d'approximation d'une EDO.

Par la méthode d'Euler

Pour approximer une EDO on utilise l'algorithme suivant :

```
function [ X,Y,S ] = Euler( f,a,b,Y0,n )
```

```
syms x y
```

```
X = linspace(a, b, n); % le vecteur temps;
```

```
S=ones(1,n);
```

```
h = (b - a)/n; % le pas de discrétisation Y(1)=Y0;
```

```
X(1)=a;  
S(1)=Y0;  
for i=1 :n  
Y(i + 1) = Y(i) + h * subs(f, x, y, X(i), Y(i));  
S(i) = exp(-X(i)) + X(i);  
X(i + 1) = X(i) + h;  
end plot(X, Y, X, exp(X) - X);  
legend('solution approchée par la méthode d" Euler', 'solution exacte');  
title('simulation par la méthode d" Euler');  
end
```

Ce qui donne le graphe suivant :

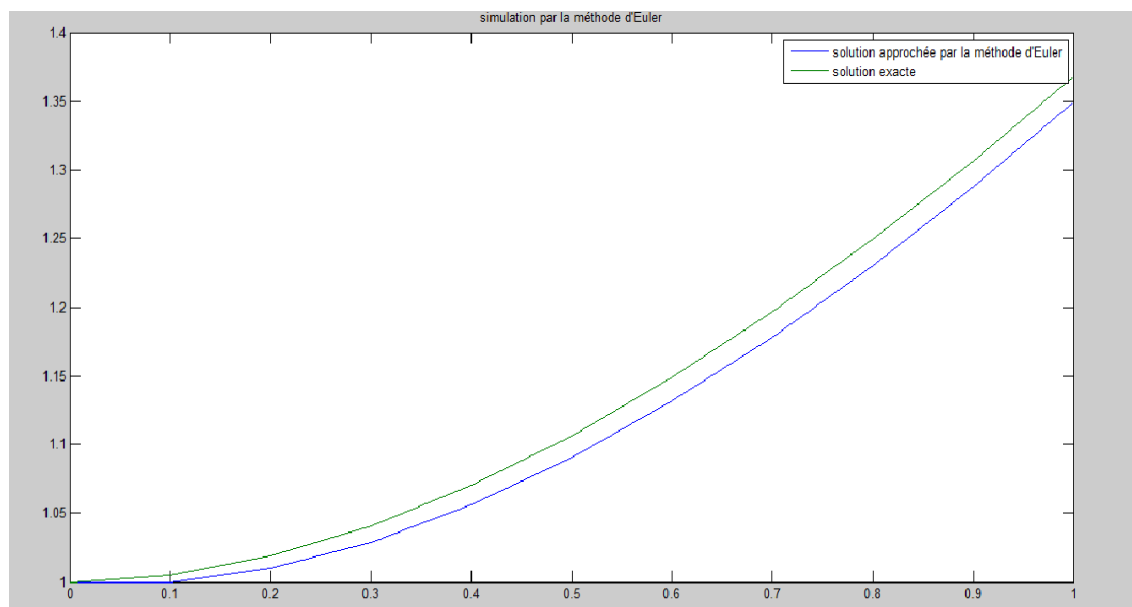


FIG. 4.6 – Approximation d’une EDO par la méthode d’Euler

On conclut que pour la même méthode appliquer à deux équations différentielles différentes (ordinaire et stochastique), elle donne des meilleurs résultats dans le cas stochastique que dans le cas ordinaire.

Conclusion

L’approximation des EDSs par les différentes méthodes, nous a permis de donner une idée sur la solution approchée. La comparaison avec la solution exacte (dans le cas d’existence) a été effectuée. Mais on peut toujours calculer numériquement une solution d’une EDS, après démonstration de l’existence.

Conclusion

L'étude détaillée d'une équation différentielle stochastique nécessite certaines notions de base concernant les processus stochastiques. Dans ce mémoire, nous avons mis en place tous les outils qui permettent d'aborder ce sujet.

On a étudié quelques notions relatives aux EDSs et à leurs intégration exacte (formule d'Itô) ou approchée (méthodes numériques) en fonction de M.B. Cette approche est utile en particulier pour obtenir des approximations numériques des trajectoires des EDSs, par exemple par simulation d'Euler, de Milstein et de Runge-Kutta. On a terminé ce travail par une application, où on a approximé le modèle de Black-Scholes par les trois méthodes citées précédemment. Les méthodes d'Euler et de Milstein sont les plus fiables pour l'approximation des EDSs contrairement à la méthode de Runge-Kutta qui est moins utilisée pour les EDSs mais très utilisée pour les EDO.

Bibliographie

- [1] P. Baldi, *Stochastic Calculus An Introduction Through Theory and Exercises*, Springer, (2017).
- [2] L. Berdjoudj, *Mouvement Brownien et Calcul Stochastique*, Polycopié de cours Master 1 PSA. Université de Bejaia, (2020).
- [3] L. Berdjoudj, *Statistique Inférentielle*, Polycopié de cours. Université de Bejaia, (2014).
- [4] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley, (1995).
- [5] G. Calot, *Cours de Calcul des Probabilités*, Dunod, (1967).
- [6] T. Chonavel, *Introduction aux Equations Differentielles Stochastiques (EDS)*, Polycopié de cours. Université de Brest, (2013).
- [7] F. Comets and T. Meyre, *Calcul Stochastique et Modèles de diffusions, 3ème Edition : Cours et exercices corrigés*, Dunod, (2020).
- [8] L.C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, (2013).
- [9] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Application*, vol.2. John Wiley Sons, (2008).
- [10] D. Foata and A. Fuchs, *Processus stochastiques : de Poisson, chaines de Markov et martingales*, Dunod, (2002).
- [11] L. Gallardo, *Mouvement Brownien et Calcul d'Itô. Avec Exercices Corrigés*, Editions Hermann, (2008).

-
- [12] C. Jacky et G. Isabelle, *Contributions au calcul des variations et au Principe du Maximum de Pontryagin en calculs time scale et fractionnaire*, Thèse de doctorat, Université de pau, (2013).
- [13] M. Jeanblanc, T. Simon, *Element de Calcul Stochastique*, IRBID, (2005).
- [14] P. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, (1992).
- [15] S. Le Digabel, *Vecteurs Aléatoires Discrets*, École Polytechnique de Montréal, (2017).
- [16] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations : An introduction with applications*, Springer (2003).
- [17] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer Verlag, (1999).
- [18] I. Sabir, *Probabilités non commutatives et calcul de malliavin*, Mémoire Magister. Université Ferhat Abbas-Setif-1, (2013).
- [19] G. Saporta, *Probabilités, Analyse des Donnée et Statistique*, Editions Technip, (2006).
- [20] H. Tabti, *Cours probabilités*, Polycopié de cours Master L2 STID. Université de Bejaia (2019/2020).
- [21] P. Tassi, *Méthodes Statistiques*, Edition Economica, (2004).

Résumé

Le but de ce travail est l'étude des équations différentielles stochastiques, qui motivèrent les premiers travaux d'Itô sur l'intégrale stochastique. Dans un premier temps, nous avons passé en revue les notions fondamentales des processus stochastiques, en particulier le mouvement Brownien, ainsi que les principaux théorèmes du calcul stochastique. Dans un second temps, après les définitions générales sur les équations différentielles stochastiques, nous avons traité le cas Lipschitzien, dans lequel les résultats forts d'existence et d'unicité des solutions sont présentés. Enfin, pour illustrer l'étude numérique des EDSs, on s'est intéressé à l'équation de Black and Scholes, pour laquelle on a appliqué les trois méthodes Euler, Runge Kutta et Milstein. On constate que les méthodes qui sont efficace pour les EDO ne sont pas forcément efficace pour les EDSs et comme exemple la méthode de Runge Kutta qui est moins fiable pour les EDSs que pour les EDO.

Mots clefs : Processus stochastiques, Mouvement Brownien, Intégrale stochastique, Formules d'Itô, Equation différentielle stochastique, méthodes numériques, simulation.

Abstract

The aim of this work is the study of stochastic differential equations, which motivated Itô's early work on the stochastic integral. In a first step, we reviewed the fundamental notions of stochastic processes, in particular the Brownian motion, as well as the main theorems of stochastic calculus. In a second step, after the general definitions of stochastic differential equations, we treated the Lipschitzian case, in which the strong results of existence and uniqueness of solutions are presented. Finally, to illustrate the numerical study of SDEs, we focused on the Black and Scholes equation, for which we applied the three numerical methods of Euler, Runge Kutta and Milstein. It is noted that the methods which are effective for the EDOs are not necessarily effective for the EDSs and as an example the Runge Kutta method which is less reliable for the EDSs than for the EDOs.

Key words : Stochastic processes, Brownian motion, Stochastic integral, Itô formulas, Stochastic differential equation, numerical methods, simulation.