

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
Université Abderrahmane Mira -Béjaia-



جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques

### Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : ABDOUNE Ouassila et IDIR Daia

### THÈME

## Méthodes de Moyennisation et Cycles Limites

Soutenu publiquement, le 29 / 06 / 2022 devant le jury composé de :

Président

Mr. Arezki KHELOUFI

Pr. Univ. A. Mira de Béjaia

Encadreur :

Mr. Rachid BOUKOUCHA

Dr. Univ. A. Mira de Béjaia

Examineur :

Mr. Mohammed Salah M'HAMDI Dr. Univ. A. Mira de Béjaia

Année Universitaire : 2021/2022

# Dédicaces

*Je dédie ce travail :*

*A mes chers parents qui m'ont toujours soutenue et encouragé durant ces années d'étude ;*

*A mes frères et sœurs (**Melaz, Khamssa, Zoubida, Kahina, KIKI, Salim, rahou**) qui ont partagé leurs conseils et leurs encouragements sans oublié mes nièces ;*

*A ma binôme (**Daia**) qui partage ce travail avec moi ;*

*A tous mes amies avec lesquelles j'ai partagé tous mes moments de joie et de bonheur ;*

*A tous la promotion analyse mathématique 2022.*

*OUASSILA.*

# Dédicaces

*Je dédie ce travail :*

*A ma mère qui m'a soutenue et encouragé durant ces années d'étude, a celle que je dois rendre mes meilleurs respects et mes sincères reconnaissances ;*

*A la mémoire de mon père (**Mohamed**), décider trop tôt, qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études ;*

*A mon grand-père maternelle (**Madjid**) qui m'a aidé durons mes études ;*

*A mes frères et sœurs (**Siham, Khalef, Sana, Koçeyla**) qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé sans oublié ma nièce (**Alice**) qui est ma source de bonheur et de joie ;*

*A ma binôme (**Ouassila**) qui partage ce travail avec moi ;*

*A tous mes amies avec lesquelles j'ai partagé tous mes moments de joie et de bonheur ;*

*A tous la promotion analyse mathématique 2022.*

*DAIA.*

# *Remerciements*

Nous tenons à remercier en premier lieu Dieu tout puissant pour nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

Nos sincères remerciements et notre profonde gratitude vont en premier lieu à notre promoteur Monsieur **Rachid BOUKOUCHA**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, notre promoteur de ce Mémoire qui est à l'origine de ce travail, pour nous avoir dirigé, orienté, soutenu et dont sa modestie, sa patience et sa disponibilité ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur **Arezki KHELOUFI**, Professeur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce Mémoire.

Nos très respectueux remerciements sont adressés à Monsieur **Mohammed Salah M'HAMDI**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ce Mémoire.

Enfin, merci à **Nos Parents** de nous avoir toujours encouragé, toujours cru à notre volonté de réussir et soutenu le long de notre cursus universitaire.

**Merci a tous...**

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b> |
| <b>1 Rappels et notions préliminaires</b>                                | <b>1</b> |
| 1.1 Introduction   | 2        |
| 1.2 Equations différentielles  | 2        |
| 1.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre                  | 2        |
| 1.2.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre | 2        |
| 1.2.3 Equation différentielle de Bernoulli                               | 4        |
| 1.2.4 Résolution d'une équation différentielle de Bernoulli              | 4        |
| 1.2.5 Equation de Riccati  | 4        |
| 1.2.6 Résolution d'une équation différentielle de Riccati                | 5        |
| 1.3 Systèmes différentiels polynômiaux                                   | 5        |
| 1.3.1 Système différentiel linéaire                                      | 6        |
| 1.3.2 Système dynamique  | 6        |
| 1.3.3 Champ de vecteurs  | 7        |
| 1.3.4 Solution et solution périodique                                    | 7        |
| 1.3.5 Portrait de phase  | 8        |
| 1.3.6 Flot   | 8        |
| 1.4 Etude des points singuliers  | 8        |

---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 1.4.1    | Stabilité de point d'équilibre . . . . .                       | 9         |
| 1.4.2    | Linéarisation et matrice Jacobienne . . . . .                  | 9         |
| 1.4.3    | Théorème de Hartman-Grobman . . . . .                          | 12        |
| 1.4.4    | Classification topologique des points singuliers . . . . .     | 13        |
| 1.5      | Courbes invariantes . . . . .                                  | 14        |
| 1.5.1    | Courbes non singulières . . . . .                              | 16        |
| 1.6      | Intégrabilité des systèmes différentiels . . . . .             | 16        |
| 1.6.1    | Intégrale première . . . . .                                   | 16        |
| 1.6.2    | Intégrale première de Darboux . . . . .                        | 17        |
| 1.6.3    | Intégrale première de Liouville . . . . .                      | 18        |
| 1.7      | Cycles limites . . . . .                                       | 18        |
| 1.7.1    | Types de cycles limites . . . . .                              | 18        |
| 1.7.2    | Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique . . . . . | 22        |
| <b>2</b> | <b>Méthode de moyennisation de premier ordre</b>               | <b>23</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .   | 24        |
| 2.1.1    | Théorème de moyennisation de Fatou . . . . .                   | 25        |
| 2.1.2    | Théorème de moyennisation du premier ordre . . . . .           | 28        |
| 2.2      | Exemples d'applications . . . . .                              | 29        |
| <b>3</b> | <b>Méthode de moyennisation du second ordre</b>                | <b>38</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .   | 39        |
| 3.2      | Théorème de moyennisation du second ordre . . . . .            | 39        |
| 3.3      | Exemples d'applications . . . . .                              | 40        |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                     | <b>52</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>52</b> |

# Introduction générale

La notion des équations différentielles est apparue à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle, à cette époque, les équations différentielles s'introduisent par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique comme : le mouvement du pendule circulaire, le problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation newtonienne,....etc.

La théorie des systèmes dynamiques est très vaste et très active en termes de recherche, un système est dit dynamique lorsqu'il évolue au cours du temps. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite l'évolution temporelle des systèmes physiques, économiques, chimiques sans pour autant faire référence à la théorie sous-jacente qui détermine leurs équations d'évolution. On représente cette évolution par des équations différentielles ou des applications. Le terme "système dynamique" est apparu au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Le premier objectif des chercheurs est l'étude des systèmes dynamiques, c'est à dire l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires. Un cycle limite pour un système différentiel planaire, est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques. Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude des cycles limites leur existence, leur stabilité.

En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. En utilisant la méthode de moyennisation, on réduit ce problème difficile des équations différentielles à la recherche des racines d'un système algébrique. La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes utilisées actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels.

En 1900 le mathématicien D. Hilbert posait les fameux 23 problèmes. En particulier dans le 16<sup>ème</sup> problème, il pose la question du nombre maximal et de la disposition des trajectoires périodiques isolées pour des systèmes différentiels polynômiaux de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de variables réelles  $(x, y)$  et à coefficients réels.

Ce problème est jusqu'à maintenant non résolu. Beaucoup de travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites.

Dans ce mémoire, on va appliquer la méthode de moyennisation dans le but de déterminer le nombre de solutions périodiques que peut avoir un système différentiel plan polynomial.

Ce mémoire est composé de trois chapitres : Dans le premier chapitre : on rappelle des notions générales. On introduira des définitions élémentaires tels que : le système dynamique, les points d'équilibre et leur nature, la linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre, les cycles limites.

Dans le second chapitre : nous présenterons la méthode de moyennisation de Fatou et le théorème de moyennisation de premier ordre et nous nous intéressons à l'existence de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  est un domaine borné et  $t \geq 0$ , et  $F(t, x)$  et  $G(t, x, \varepsilon)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques en  $t$ , et nous présenterons quelques exemples d'applications.

Dans le troisième chapitre : nous présenterons la méthode de moyennisation et le théorème de moyennisation de second ordre et nous nous intéressons à l'existence de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x, \varepsilon), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où  $F_1, F_2 : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $F_3 : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à  $t$  et  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et nous présenterons aussi quelques exemples d'applications.



# Chapitre 1

## Rappels et notions préliminaires

## 1.1 Introduction

Ce chapitre contient quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes différentiels polynômiaux, les systèmes dynamiques, le champ de vecteurs, les solutions et solutions périodiques, les points singuliers et leur classification, le portrait de phase, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points singuliers, les cycles limites et on termine par l'intégrabilité des systèmes différentiels.

## 1.2 Equations différentielles

### 1.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre

**Définition 1.1** On appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre" toute équation de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (1.1)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y' = a(x)y. \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) est dite aussi équation différentielle homogène associée à l'équation (1.1).

### 1.2.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

**Proposition 1.1** La solution générale  $y$  de (1.1) est la somme de la solution générale  $y_h$  de (1.2) et d'une solution particulière de (1.1).

$$y = y_p + y_h = y_p + c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R}.$$

**a) Résolution de l'équation homogène (1.2) :**

Soit l'équation (1.2)

$$y' = a(x)y.$$

Si  $y \neq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} (1.2) &\implies \frac{dy}{y} = a(x)dx, \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx, \\ &\implies \ln |y| = \int a(x)dx + k/k \in \mathbb{R}, \\ &\implies |y| = \exp\left(\int a(x)dx + k\right) / k \in \mathbb{R}, \\ &\implies y = c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

d'où

$$y_h = c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation (1.2).

**b) Recherche d'une solution particulière (Méthode de la variation de la constante) :**

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitives.

On a :

$$y_h(x) = c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.2) avec  $c$  une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme

$$y(x) = c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right),$$

donc

$$y'(x) = c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right),$$

En remplaçant  $y$  et  $y'$  dans (1.1) on obtient :

$$\begin{aligned} c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) &= a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + b(x), \\ \implies c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) &= b(x), \\ \implies c'(x) &= b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right), \end{aligned}$$

par conséquent

$$c(x) = \int \left( b(x) \exp \left( - \int a(x) dx \right) \right) dx + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement la solution générale de (1.1) est

$$y(x) = \left( \int \left( b(x) \exp \left( - \int a(x) dx \right) \right) dx + \lambda \right) \exp \left( \int a(x) dx \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

### 1.2.3 Equation différentielle de Bernoulli

**Définition 1.2** On appelle "équation différentielle de Bernoulli" toute équation de la forme :

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0, \quad (1.3)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  et  $a, b$  sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 1.1** On sait déjà traiter les cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ , car (1.3) est alors une équation différentielle linéaire du premier ordre.

### 1.2.4 Résolution d'une équation différentielle de Bernoulli

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (1.3), on divise par  $y^\alpha$

$$(1.3) \iff \frac{y'}{y^\alpha} + a(x) \left( \frac{y}{y^\alpha} \right) + b(x) = 0,$$

puis on pose :  $z = \frac{y}{y^\alpha} = y^{1-\alpha}$  comme un changement de variable, et par consé-

quent :  $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$  d'où  $y' = \frac{y^\alpha}{1 - \alpha}z'$ .

En remplaçant  $y$  et  $y'$  dans (1.3) on obtient :

$$(1.3) \iff \frac{z'}{1 - \alpha} + a(x)z + b(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue  $z$ .

### 1.2.5 Equation de Riccati

**Définition 1.3** On appelle "équation différentielle de Riccati" toute équation de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad (1.4)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont trois fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.6 Résolution d'une équation différentielle de Riccati

Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Si on a  $y_p$  une solution particulière pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant le changement de variable :  $y = y_p + z$ , donc  $y' = y_p' + z'$ , En remplaçant  $y$  et  $y'$  dans (1.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
 (E) \quad & \iff y_p' + z = a(x)(y_p + z)^2 + b(x)(y_p + z) + c(x), \\
 & \iff y_p' + z = a(x)y_p^2 + 2a(x)y_pz + a(x)z^2 + b(x)y_p + b(x)z + c(x), \\
 & \iff y_p' + z = a(x)(y_p^2 + 2y_pz + z^2) + b(x)(y_p + z) + c(x), \\
 & \iff [y_p' - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x))] + z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2,
 \end{aligned}$$

on a :

$$y_p' - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)) = 0 \text{ car } y_p \text{ est une solution (1.4).}$$

Donc on aura :

$$z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli, comme on l'a vu plus haut.

## 1.3 Systèmes différentiels polynômiaux

**Définition 1.4** Un système différentiel du plan est un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réels. On dit aussi que (1.5) est un système différentiel polynômial réel.

Le degré  $m$  du système (1.5) est  $m = \max(\deg P, \deg Q)$ . Si  $P$  et  $Q$  ne dépendent pas de  $t$  alors le système (1.5) est autonome.

Sur la courbe  $P(x, y) = 0$ , dite **isocline verticale**, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des  $y$ , et sur la courbe  $Q(x, y) = 0$ , dite **isocline horizontale**, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des  $x$ .

Dans ce qui suit, on supposera que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$ .

### 1.3.1 Système différentiel linéaire

**Définition 1.5** *La forme générale d'un système linéaire de deux équations différentielles ordinaires est la suivante :*

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

ou encore sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

est une matrice à coefficients constants.

### 1.3.2 Système dynamique

**Définition 1.6** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie et continue telle que*

1.  $U(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue .
2.  $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue .
3.  $U(0, x) = x$ .
4.  $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

*La fonction  $U(t, x)$  est appelée la fonction d'évolution du système dynamique dans le temps.*

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

**Proposition 1.2** *Les systèmes dynamiques sont engendrés par les systèmes différentiels.*

### 1.3.3 Champ de vecteurs

Avant de commencer l'étude détaillée d'un système différentiel, il est très pratique de représenter graphiquement le champ de vecteurs qui nous donne des renseignements précieux sur les différentes formes des solutions possibles et leur comportement asymptotique.

**Définition 1.7** On appelle champ de vecteurs, une région de plan dans laquelle il existe en tout point  $M$  un vecteur  $\vec{V}(M, t)$ .

On suppose donné un champ de vecteurs de classe  $C^1$  dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire une application :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

où  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

**Remarque 1.2** Le champ de vecteurs associé au système (1.5) est noté par :

$$\chi = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

On peut l'écrire aussi :

$$\chi = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}.$$

### 1.3.4 Solution et solution périodique

**Définition 1.8** On dit que  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$  est une solution du système différentiel (1.5) si le champ de vecteurs  $\chi = (P, Q)$  est toujours tangent au plan de phase.

Autrement dit :

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

**Remarque 1.3** La solution  $(x(t), y(t))$  du système (1.5) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement et elle est dite globale si elle est définie sur  $I$  tout entier.

**Définition 1.9** On appelle solution périodique du système (1.5), toute solution  $(x(t), y(t))$  pour laquelle il existe un réel  $T > 0$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : x(t + T) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t + T) = y(t).$$

Le plus petit nombre  $T > 0$  qui convient s'appelle alors période de cette solution.

### 1.3.5 Portrait de phase

**Définition 1.10** Soit le système différentiel (1.5). Les solutions  $(x(t), y(t))$  de ce système représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites et les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes. La figure complète des orbites de ce système ainsi que ses points d'équilibre représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

### 1.3.6 Flot

**Définition 1.11** Soit  $E$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour  $M(x, y) \in E$ , soit  $\varphi_t(x, y)$  la position de point  $M(x, y)$  après un déplacement d'une durée  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

On appelle flot associé au problème (1.5) l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (t, (x, y)) &\longmapsto \varphi_t(x, y), \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\frac{d}{dt}\varphi_t(x, y) = (P(\varphi_t(x, y)), Q(\varphi_t(x, y)))$ ,
- $\varphi_0(x, y) = (x, y)$ ,
- $\varphi_{t+s}(x, y) = \varphi_t(\varphi_s(x, y))$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $t, s \in \mathbb{R}$ .

## 1.4 Etude des points singuliers

Parmi les solutions d'un système différentiel, on distingue les points singuliers (états stationnaires, points fixes ou points d'équilibre) qui jouent un rôle important dans la description des solutions du système.

**Définition 1.12** Un point singulier du système différentiel (1.5) est un point  $(x_0, y_0)$  tel que :

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

**Remarque 1.4** • Les points singuliers du système (1.5) sont des solutions périodiques constantes, et aussi des points d'intersection de deux isoclines (isocline verticale et isocline horizontale) de ce système.

- Un point qui n'est pas singulier est régulier.



### 1.4.1 Stabilité de point d'équilibre

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre du système (1.5), notons par :

$$X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$$

et

$$X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)).$$

**Définition 1.13** *Le point  $(x_0, y_0)$  est dit stable si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies (\forall t > 0, \|X(t) - X_0\| < \varepsilon).$$

**Définition 1.14** *Le point  $(x_0, y_0)$  est dit asymptotiquement stable ssi :*

- 1) *Il est stable.*
- 2) *Il existe  $\delta > 0$  tel qu'à chaque fois*

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta, \text{ on a } \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0$$

### Nature des points singuliers (Notion d'attracteur)

La question est de savoir est ce qu'un point singulier est attracteur ou non. Ceci signifie que l'on s'interroge pour savoir si une trajectoire de phase qui démarre d'un voisinage de ce point singulier sera attirée vers ce point (attracteur), tournera autour de ce point (cycle limite) ou diverge de ce point. Si la trajectoire converge vers le point singulier celui-ci est appelé attracteur asymptotiquement stable, si elle diverge de ce point, alors ce point est instable, et si elle tourne autour de point on dit qu'il est seulement stable.

### 1.4.2 Linéarisation et matrice Jacobienne

Nous nous intéressons ici à l'allure des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire au voisinage d'un de ses points singuliers.

Nous voyons qu'on peut presque toujours approximer le système non linéaire au voisinage d'un de ses points singuliers par un système linéaire, et constaterons à la fin que le point où les trajectoires de ces deux systèmes se ressemblent, l'orsqu'on ne s'éloigne pas trop de ce point singulier.

Supposons que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^2$ . Soit  $(x_0, y_0)$  un point singulier du système (1.5), on introduit donc les variables locales suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x_0, \\ v(t) = y(t) - y_0, \end{cases}$$

au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , puis on procède à un développement en série de Taylor du premier ordre des fonctions  $P$  et  $Q$  et on obtient :

$$\begin{cases} u' = x' = P(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ v' = y' = Q(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Mais comme on a :

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

d'où

$$\begin{cases} u' = u \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + v \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ v' = u \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + v \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce système (1.6) est un système linéaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

où

$$J = J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice  $J$  est dite la matrice jacobienne associée au système (1.5) au point singulier  $(x_0, y_0)$ .

Le système (1.6) obtenu est appelé le linéarisé du système (1.5) au voisinage du

point  $(x_0, y_0)$ .

**Définition 1.15** *Le point  $(x_0, y_0)$  est générique (simple) si :*

$$|J(x_0, y_0)| = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \neq 0$$

**Définition 1.16** *Un point singulier  $(x_0, y_0)$  du système (1.5) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice  $J(x_0, y_0)$  ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point singulier est dit non hyperbolique.*

- *Si au moins une des deux valeurs propres de la matrice  $J(x_0, y_0)$  est nulle, alors on dit que le point singulier est dégénéré.*
- *Si une seule valeur propre de la matrice  $J(x_0, y_0)$  est nulle, on dit dans ce cas que le point singulier est semi-hyperbolique.*
- *Si les deux valeurs propres de la matrice  $J(x_0, y_0)$  sont nulles, la singularité est dite non élémentaire.*

### Principe de linéarisation

Lorsque les valeurs propres de la matrice jacobienne d'un système différentiel en un point singulier ne sont ni nulles, ni imaginaires pures, alors les trajectoires de ce système au voisinage de ce point se comportent comme les trajectoires de son linéarisé au voisinage de l'origine.

**Exemple 1.1** *Considérons le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} x' = x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) - xy, \\ y' = xy - y. \end{cases} \quad (1.7)$$

*Ce système admet trois points d'équilibre :  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  et  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .*

*On va étudier le comportement des trajectoire de système (1.7) au voisinage de point  $(2, 0)$*

*la matrice jacobienne associée au système (1.7) au point  $(2, 0)$  est :*

$$J(2, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système linéarisé du système (1.7) au voisinage du point  $(2, 0)$  est donné par :

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = y. \end{cases}$$

Les valeurs propres de  $J(2, 0)$  sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 1$

On a  $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0$  et  $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , donc le point  $(2, 0)$  est hyperbolique.

L'utilisation du théorème de linéarisation indique qu'au voisinage du point  $(2, 0)$ , les trajectoires du système (1.7) se comportent comme les trajectoires de son linéarisé au voisinage de l'origine.

### 1.4.3 Théorème de Hartman-Grobman

Le théorème de Hartman-Grobman est un résultat très important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point singulier hyperbolique du système non linéaire (1.5) a la même structure qualitative du système linéarisé (1.6) au voisinage de l'origine et les deux systèmes sont topologiquement équivalents.

**Définition 1.17** Deux systèmes planaires définis sur deux ouverts  $U$  et  $V$  respectivement sont dits topologiquement (ou qualitativement) équivalents s'il existe une fonction  $H : U \rightarrow V$  bijective continue et possède une fonction réciproque continue (ie :  $H$  homéomorphisme) qui transforme les orbites du premier système en orbites du deuxième système en préservant leurs orientation dans le temps.

**Théorème 1.2** Supposons que la matrice jacobienne au point singulier  $(x_0, y_0)$  a deux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  telles que  $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0$  et  $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , alors les solutions du système (1.5) sont données approximativement par les solutions du système linéarisé (1.6) au voisinage du point singulier.

Autrement dit, le portrait de phase du système linéarisé (1.6) constitue, au voisinage de ce point singulier, une bonne approximation de celui du système (1.5).

Dans le cas où  $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ , ce procédé de linéarisation ne marche pas, c'est-à-dire si le point singulier  $(x_0, y_0)$  est un centre pour le système linéarisé (1.6), la détermination de sa nature dans le cas du système non linéaire (1.5) nécessite d'autres investigations : c'est le **problème du centre**.

### 1.4.4 Classification topologique des points singuliers

Le flot de (1.5) au voisinage d'un point singulier  $(x_0, y_0)$  est classé selon les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J(x_0, y_0)$ , son déterminant, ainsi que sa trace.

Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $J(x_0, y_0)$  sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 - tr(J)\lambda + \det(J) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = tr(J), \\ \text{et} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det(J), \end{cases}$$

et  $\Delta = (tr(J))^2 - 4 \det(J)$  le discriminant de ce polynôme.

Les différentes possibilités conduisent à définir les cas suivants :

\* **Point selle (Col)** : si  $\Delta > 0$  et  $\det(J) < 0$ , alors les valeurs propres de  $J$  sont réelles et de signes opposés et le flot est hyperbolique, on dit donc dans ce cas que l'origine est un col.

\* **Noeud (Node)** : si  $\Delta \geq 0$  et  $\det(J) > 0$ , alors les valeurs propres de  $J$  sont réelles et de même signe, on dit donc dans ce cas que l'origine est un noeud qui est attractif (stable) si  $tr(J) < 0$  et répulsif (instable) si  $tr(J) > 0$ .

\* **Foyer (Spiral)** : si  $\Delta < 0$  et  $tr(J) \neq 0$ , alors les valeurs propres de  $J$  sont complexes de partie réelle  $tr(J)/2$  et de partie imaginaire non nulle, on dit donc dans ce cas que l'origine est un foyer attractif (stable) si  $tr(J) < 0$  et répulsif (instable) si  $tr(J) > 0$ .

\* **Centre** : si  $\det(J) > 0$  et  $tr(J) = 0$ , alors les valeurs propres de  $J$  sont imaginaires pures  $\pm \lambda_i$  avec  $i = 1$  où  $i = 2$ ,  $\lambda > 0$ , on dit donc dans ce cas que l'origine est un centre.

On peut visualiser les résultats ci-dessus dans le plan  $(tr(J), \det(J))$ .

**Exemple 1.3** Soit le système :

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}xy, \\ y' = -\frac{3}{5}y + \frac{1}{5}xy. \end{cases} \quad (1.8)$$

Les points singulier de ce système sont  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  et  $(x_0, y_0) = (3, 2)$ .

La matrice jacobienne associée à ce système au point  $(3, 2)$  est :

$$J(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :  $\text{tr}(J) = 0$  et  $\det(J) = \frac{12}{25} > 0$ , donc le point singulier  $(3, 2)$  est un centre.

**Exemple 1.4** Considérons le système :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -y - \sin x. \end{cases} \quad (1.9)$$

Ce système modélise le comportement de mouvement d'une pendule.

Ce système admet une infinité de points singuliers :  $M_n = (n\pi, 0)$ , où  $n$  est un entier.

La matrice jacobienne associée à ce système au point  $M_n$  est :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Si  $n$  est pair, les valeurs propres de  $J_n$  sont complexes de partie réelle négative, les points singuliers  $M_n$  sont des foyers attractifs.

Si  $n$  est impair, les valeurs propres de  $J_n$  sont réelles de signes contraires, les points stationnaires  $M_n$  sont des cols.

## 1.5 Courbes invariantes

**Définition 1.18 (Ensembles invariants)** : Une partie  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  est dite positivement invariante si et seulement si :

$$\forall t > 0, \varphi_t(\Omega) \subset \Omega.$$

Elle est dite négativement invariante si et seulement si :

$$\forall t < 0, \varphi_t(\Omega) \subset \Omega,$$

et elle est dite invariante si elle est positivement invariante et négativement invariante. C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t(\Omega) \subset \Omega.$$

**Définition 1.19** On appelle courbe invariante du système (1.5) toute courbe d'équation  $U(x, y) = 0$  du plan de phase pour laquelle il existe une fonction  $K = K(x, y)$  appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que :

$$P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = K(x, y)U(x, y). \quad (1.10)$$

**Définition 1.20 (Courbe algébrique) :** Une courbe invariante  $U(x, y) = 0$  est dite algébrique de degré  $m$  si  $U(x, y)$  est un polynôme de degré  $m$ . Si non on dit qu'elle est non algébrique.

**Lemme 1.1** Soient  $f$  et  $g \in \mathbb{C}[x, y]$  de classe  $C^1$ . Alors pour le système différentiel polynômial (1.5),  $fg = 0$  est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur  $K_{fg}$  si et seulement si  $f = 0$  et  $g = 0$  sont des courbes algébriques invariantes avec les cofacteurs  $K_f$  et  $K_g$ , respectivement. De plus,  $K_{fg} = K_f + K_g$ .

**Théorème 1.5** On considère le système (1.5) et  $\Gamma(t)$  une orbite périodique de période  $T > 0$ . On suppose que  $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  est une courbe invariante avec

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega \mid U(x, y) = 0\},$$

et  $K(x, y) \in C^1$  est le cofacteur donné dans l'équation précédente, de la courbe invariante  $U(x, y) = 0$ . On suppose que  $p \in \Omega$  tel que  $U(p) = 0$  et  $\nabla U(p) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ , alors  $p$  est un point singulier du système (1.5), et

$$\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt = \int_0^T K(\Gamma(t)) dt.$$

**Exemple 1.6** Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = x^2 + y^2 - y - 2, \\ y' = Q(x, y) = x^2 + y^2 + x - 2. \end{cases} \quad (1.11)$$

La courbe  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$  est une courbe invariante de système (1.11). En effet

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= 2x(x^2 + y^2 - y - 2) + 2y(x^2 + y^2 + x - 2) \\ &= 2x^3 + 2xy^2 - 4x + 2x^2y + 2y^3 - 4y \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 2) = K(x, y)U(x, y) \end{aligned}$$

d'où la courbe  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$  est une courbe invariante de système (1.11) avec le cofacteur  $K(x, y) = 2x + 2y$ .

### 1.5.1 Courbes non singulières

**Définition 1.21** On dit que la courbe  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = 0\}$  est non singulière pour le système (1.5) si les points singuliers de ce système ne sont pas sur la courbe  $\Gamma$ .

## 1.6 Intégrabilité des systèmes différentiels

### 1.6.1 Intégrale première

L'intégrabilité d'un système différentiel repose sur l'existence d'intégrales premières, donc la question qui se pose : Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première ? ou si on a une classe des systèmes différentiels dépendent de paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première ? Malheureusement ces questions sont sans réponses satisfaisantes.

**Définition 1.22** On appelle *intégrale première* du système (1.5) une fonction  $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  constante sur les courbes solutions  $(x(t), y(t))$  de ce système. c'est-à-dire :

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = P(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \equiv 0, \quad (1.12)$$

sur les points de  $\Omega$ .

**Définition 1.23** Le système (1.5) est dit *intégrable* sur un ouvert  $\Omega$ , s'il admet une intégrale première sur  $\Omega$ .

**Définition 1.24** Le système (1.5) est dit *hamiltonien* s'il existe une fonction  $H = H(x, y)$  de classe  $C^1$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = P(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ y' = Q(x, y) = - \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{array} \right.$$

**Exemple 1.7** Soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax - bxy, \\ y' = cxy - dy, \end{array} \right. \quad (1.13)$$



défini sur  $\Omega = (]0, +\infty[) \times (]0, +\infty[)$  avec  $a, b, c$  et  $d \in \mathbb{R}$ .

On prouve que la fonction

$$\begin{aligned} H : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\longrightarrow cx + by - d \ln x - a \ln y, \end{aligned}$$

est une intégrale première du système (1.13). En effet :

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = c - \frac{d}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = b - \frac{a}{y}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dH(x, y)}{dt} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \\ &= \left(c - \frac{d}{x}\right) (ax - bxy) + \left(b - \frac{a}{y}\right) (cxy - dy), \\ &= axc - ad - cbxy + byd + cxyb - cxa - dyb + da \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le système (1.13) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = cx + by - d \ln x - a \ln y.$$

**Définition 1.25** Une fonction élémentaire est une fonction construite par des fonctions rationnelles, ainsi que les fonctions obtenues à partir de ces fonctions rationnelles par compositions successives avec les fonctions exponentielle et logarithme.

**Définition 1.26** Une fonction de Liouville est une fonction construite par des fonctions élémentaires et leurs quadratures. On note que la classe de toutes les fonctions élémentaires est une sous-classe particulière de la classe de toutes les fonctions de Liouville.

### 1.6.2 Intégrale première de Darboux

Une intégrale première  $H$  est dite intégrale première de Darboux si :

$$H = f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p} \exp\left(\frac{h}{g}\right),$$

où  $f_i, g$  et  $h$  sont des polynômes dans  $\mathbb{C}[x, y]$ .

Le problème de démontrer qu'un système différentiel polynomial a une intégrale première de Darboux est en général ouvert.

### 1.6.3 Intégrale première de Liouville

Une intégrale première est appelée intégrale première Liouvillienne si elle peut être obtenue par les quadratures de fonctions élémentaires.

L'étude des intégrales premières liouvilliennes est un problème classique de la théorie d'intégrabilité des équations différentielles qui revient à Liouville.

## 1.7 Cycles limites

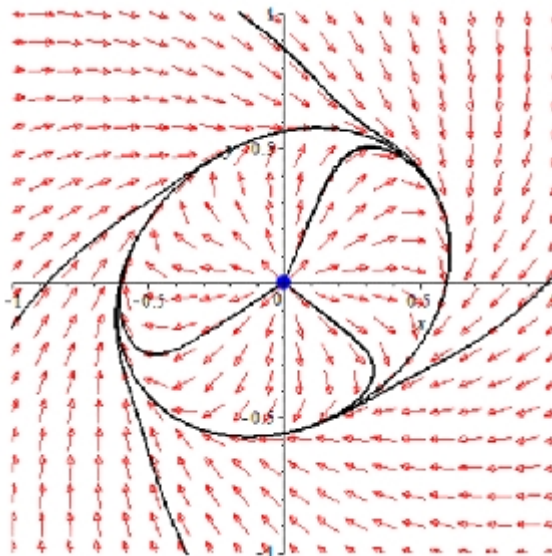
Un des comportements possibles pour une trajectoire d'un système différentiel est de tendre vers une orbite fermée : dans le cas d'un système planaire, cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un cycle limite.

**Définition 1.27** *Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques. Isolée signifie qu'au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermée.*

### 1.7.1 Types de cycles limites

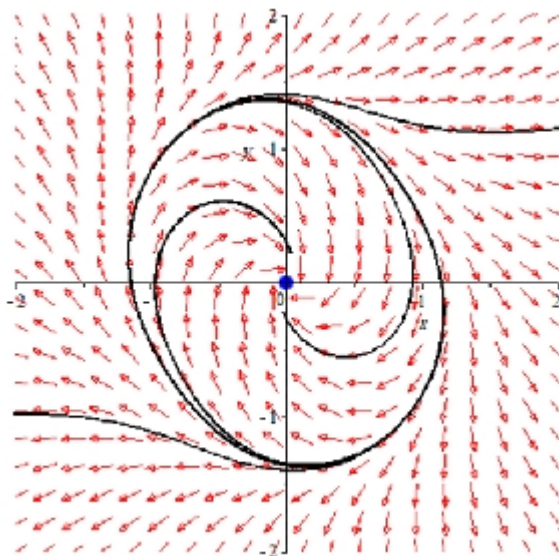
Il existe trois types de cycles limites, cycle limite stable, cycle limite instable et cycle limite semi stable.

**Définition 1.28** *Le cycle limite est dit attractif (ou stable) s'il existe un voisinage de ce cycle tel que les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle quand  $t \rightarrow +\infty$ .*



*Cycle limite stable*

**Définition 1.29** *Le cycle limite est dit répulsif (ou instable) s'il existe un voisinage de ce cycle tel que les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle quand  $t \rightarrow -\infty$ .*

*Cycle limit instable*

**Définition 1.30** *Le cycle limite est dit semi-stable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle d'un coté et s'en s'éloignent de l'autre coté quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Exemple 1.8** *Soit le système :*

$$\begin{cases} x' = y + ax(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x + ay(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $a \in \mathbb{R}$ .

En coordonnée polaires  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ , le système (1.14) devient

$$\begin{cases} r' = ar(1 - r^2), \\ \theta' = -1, \end{cases}$$

L'étude du système (1.14) montre que le cercle de rayon  $r = 1$  (correspondant à  $r' = 0$ ) est un cycle et l'étude de la stabilité de ce cycle révélera s'il s'agit d'un cycle limite ou pas. En effet :

· Si  $a > 0$ , on a  $r' > 0$  pour  $0 < r < 1$  et  $r' < 0$  pour  $r > 1$

Le cercle de rayon  $r = 1$  est un cycle limite stable de ce système.

· Si  $a < 0$ , on a  $r' < 0$  pour  $0 < r < 1$  et  $r' > 0$  pour  $r > 1$

Il s'agit bien, dans ce cas d'un cycle limite instable pour le cercle de rayon  $r = 1$ .

**Exemple 1.9** Soit le système

$$\begin{cases} x' = x - 4x^5 + 12x^4y - 20x^3y^2 + 20x^2y^3 - 12xy^4 + 4y^5, \\ y' = y - 4x^5 + 4x^4y - 4x^3y^2 - 4x^2y^3 + 4xy^4 - 4y^5. \end{cases} \quad (1.15)$$

Le système (1.15) admet un cycle limite hyperbolique et stable.

**Démonstration :**

Le système (1.15) en coordonnées polaire  $(r, \theta)$  s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} r' = r - 4 \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) r^5, \\ \theta' = -4 \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) r^4. \end{cases} \quad (1.16)$$

Prenons  $\theta$  comme une nouvelle variable, le système (1.16) devient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\beta}{\lambda} r + \frac{-\delta}{\lambda \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta\right)^m \left(c + \frac{1}{2}d \sin 2\theta\right)^p} r^{2n-2m-2p+1}.$$

Cette équation est de Bernoulli.

Le système (1.15) possède un cycle limite en coordonnées polaire  $(r, \theta)$  donné comme suit :

$$r(\theta, r_*) = e^{\theta} \sqrt[4]{\left(r_*^4 - 4 \int_0^\theta \left(\frac{\exp(-4w)}{(2 - \sin 2w)^2}\right) dw\right)},$$

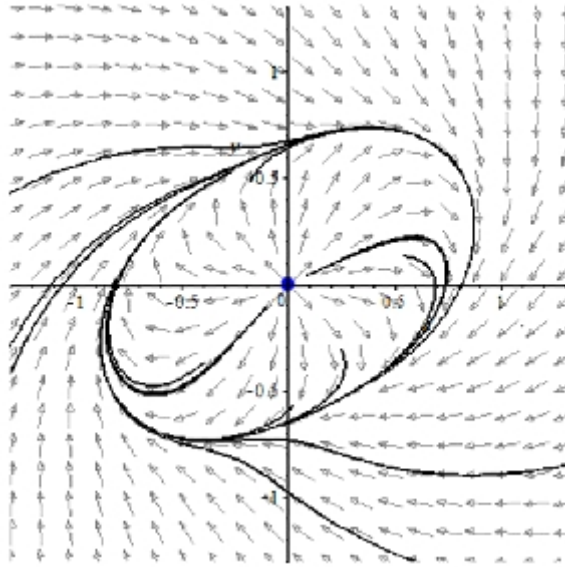
où  $\theta \in \mathbb{R}$ , et l'intersection avec l'axe  $OX_+$  et le point  $r_*$  donné par :

$$r_* = \exp(2\pi) \sqrt[4]{\frac{4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\exp(-4w)}{(2 - \sin 2w)^2}\right) dw}{\exp(8\pi) - 1}} \simeq 0.81628$$

De plus,

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(8\pi) > 1$$

D'où ce cycle limite hyperbolique et stable (Voir la figure suivante).



Cycle limite de système (1.15)

**Théorème 1.10** Soit  $\gamma(t)$  une orbite périodique du système (1.5) de période  $T$ .  
Alors

$\gamma$  est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0$$

$\gamma$  est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0$$

$\gamma$  peut être un cycle limite stable, cycle limite instable ou semi-stable ou il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = 0$$

**Définition 1.31** Si la quantité  $M = \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$  est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

où  $\operatorname{div}(\gamma(t))$  est la divergence du système (1.5), définie par :

$$\operatorname{div}(\gamma(t)) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \gamma(t).$$

**Exemple 1.11** Soit le système :

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.17)$$

Par passage au coordonnées polaires avec  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  le système (1.17) devient

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

· Si  $r' = 0$  alors  $r = 0$  où  $r = 1$

pour  $r = 0$  on a :  $(0, 0)$  est un point stationnaire du système (1.17).

pour  $r = 1$  on a  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos t, \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0. \end{aligned}$$

D'où le système (1.17) admet un cycle limite hyperbolique stable.

## 1.7.2 Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique

Soit  $U(x, y) = 0$  une courbe algébrique invariante associée au système (1.5).

**Définition 1.32** Un cycle limite algébrique de degré  $r$  est un ovale d'une courbe algébrique invariante distincte  $U(x, y) = 0$  de degré  $r$ .

**Définition 1.33** Un cycle limite est dit non-algébrique quand il n'est pas inclus dans une courbe algébrique  $U(x, y) = 0$ .

**Théorème 1.12** Les systèmes quadratiques n'ont pas de cycles limites algébriques de degré 3.

## Chapitre 2

# Méthode de moyennisation de premier ordre

## 2.1 Introduction

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques, cette méthode donne une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique et celle de son système différentiel moyenné. Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de moyennisation de premier ordre appliquée aux systèmes différentiels contenant un petit paramètre  $\varepsilon$  de la forme :

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

où  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$

**Définition 2.1** *On considère la fonction*

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto f(t, x), \end{aligned}$$

*qui est continue et  $T$  périodique en variable  $t$ .*

*On appelle  $f^0$  la fonction moyennée de  $f$  définie comme suit :*

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

**Définition 2.2** *Soit*

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto f(t, x), \end{aligned}$$

*une fonction continue.*

*On dit que  $f$  a une moyenne notée  $f^0$  si la limite*

$$f^0(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(s, x) ds,$$

*existe et*

$$\left\| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(s, x) ds - f^0(x) \right\| \leq k\delta(T), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

*avec  $k \geq 0$  et  $\delta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  est une fonction strictement décroissante continue et bornée telle que  $\delta(T) \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow +\infty$ .*



### 2.1.1 Théorème de moyennisation de Fatou

Considérons le problème à valeur initial suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

On suppose que  $f(t, x)$  est  $T$  périodique en  $t$  et on introduit la moyenne

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

Considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f^0(y), \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Théorème 2.1** Soient les problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.2) avec  $t \geq 0$  et  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ .

Supposons que

1.  $f, g, \frac{d}{dx}f$  sont continues et bornées par une constante  $M$  indépendante de  $\varepsilon$  dans  $[0, +\infty) \times D$ .

2.  $g$  est Lipschitzienne en  $x \in D$ .

3.  $f(t, x)$  est  $T$  périodique en  $t$  et  $T$  est indépendante de  $\varepsilon$ .

4.  $y(t)$  est contenue dans un intérieur de  $D$ . Alors, on a :  $x(t) - y(t)$  est de l'ordre  $O(\varepsilon)$  pendant un temps d'échelle  $\frac{1}{\varepsilon}$ , où la solution  $y(t)$  représente une approximation de  $x(t)$ .

**Lemme 2.1 (Gronwall).** Supposons que pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

$$\Phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \Phi(s) ds + \delta_3,$$

où  $\Phi(t)$  est une fonction continue,  $\Phi(t) \geq 0 \quad \forall t : t_0 \leq t \leq t_0 + T$  et  $\delta_1, \delta_2$  et  $\delta_3$  sont des constantes avec  $\delta_1 > 0, \delta_2 \geq 0$  et  $\delta_3 \geq 0$ . Alors

$$\Phi(t) \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ .

**Preuve.**

Les hypothèses (1) et (2) nous assurent l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.2) sur l'échelle du temps  $\frac{1}{\varepsilon}$

Posons :

$$u(t, y) = \int_{t_0}^t (f(s, y) - f^0(y)) ds.$$

On a :

$$\|u(t, y)\| \leq 2MT \text{ pour } t \geq t_0 \text{ et } y \in D.$$

Maintenant, nous introduisons

$$z(t) = y(t) + \varepsilon u(t, y(t)),$$

Comme  $y(t) \subset D, \forall t \geq t_0$ , on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + \varepsilon \|u(t, y(t))\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT. \end{aligned}$$

Notons que

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} &= \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) \\ &\quad - \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)). \end{aligned}$$

Remplaçons  $\frac{dy}{dt}$  par  $\varepsilon f^0(y)$ , on aura

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon f(t, z(t)) + R,$$

où

$$R = \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) f^0(y) - \varepsilon f(t, y(t)) - \varepsilon f(t, z(t)).$$

On a :

$$\|f^0(y)\| \leq M \text{ et } \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right\| \leq 2MT.$$

D'après la continuité et lipchitzienne de la fonction  $f$  nous avons

$$\begin{aligned} \|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| &\leq L \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \varepsilon L \|u(t, y(t))\| \\ &\leq 2\varepsilon LMT. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante  $k$  telle que :

$$\|R\| \leq L\varepsilon^2.$$

C'est clair que :

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + k\varepsilon\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t))\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0) \\ &\leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0). \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L} (t - t_0) - \varepsilon \frac{k}{L}.$$

Par conséquent

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left( \frac{k}{L} e^{\varepsilon L} (t - t_0) - \frac{k}{L} + 2MT \right).$$

Si  $\varepsilon L(t - t_0)$  est borné par une constante indépendante de  $\varepsilon$ , on aura l'approximation

$$x(t) = y(t) - O(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

■

### 2.1.2 Théorème de moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $F(t, x)$  et  $G(t, x, \varepsilon)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques en  $t$  (où  $t \geq 0$ ).

Le système moyenné associé au système (2.3) est

$$\begin{cases} y' = \varepsilon f^0(y), \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $f^0$  la fonction moyennée de  $f$  définie comme suit :

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds.$$

**Théorème 2.2** Soit le système (2.3), on suppose que  $F$ ,  $G$ ,  $D_x F$ ,  $D_x^2 F$  et  $D_x G$  sont continues et bornées par une constante  $M$  dans  $[0, +\infty) \times D$  avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .

Supposons aussi que  $F$  et  $G$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ , où  $T$  indépendante de  $\varepsilon$ . Alors on a :

(1) Si le point  $p$  est un point critique pour le système moyenné (2.4) tel que :

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0,$$

alors pour  $|\varepsilon| > 0$ , suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  du système (2.3) telle que  $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(2) Si le point critique  $y = p$  du système moyenné (2.4) est hyperbolique, alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $x(t, \varepsilon)$  du système (2.3) est unique, hyperbolique et de même stabilité que  $p$ .

## 2.2 Exemples d'applications

**Exemple 2.3** Soit l'équation de Van Der Pol

$$x'' + x = \varepsilon (1 - x^2) x'. \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) possède un seul cycle limite, de plus ce cycle limite est instable.

**Démonstration :**

L'équation (2.5) s'écrit sous la forme d'un système à deux équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \varepsilon (1 - x^2) y. \end{cases} \quad (2.6)$$

En coordonnées polaires  $r = r \cos \theta$  et  $\theta = r \sin \theta$ , le système (2.6) devient :

$$\begin{cases} r' (\cos \theta) - (r \sin \theta) \theta' = (r \sin \theta), \\ r' (\sin \theta) + (r \cos \theta) \theta' = - (r \cos \theta) + \varepsilon (1 - (r \cos \theta)^2) (r \sin \theta). \end{cases}$$

La solution pour  $r', \theta'$  est

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r (\sin^2 \theta) (1 - r^2 \cos^2 \theta), \\ \theta' = -1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta). \end{cases} \quad (2.7)$$

Prenant  $\theta$  la nouvelle variable donc de système (2.7) on a :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (\sin^2 \theta) (1 - r^2 \cos^2 \theta)}{-1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta)}. \quad (2.8)$$

D'après cette relation de développement limité :

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + O(z^2), \quad |z| < 1.$$

L'équation (2.8) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta) + O(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

On note que l'équation (2.9) est sous la forme standard (2.3), ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant :

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = -r (1 - r^2 \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta).$$

On a :

$$f^0(r) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (1 - r^2 \cos^2 s) (\sin^2 s) ds = \frac{1}{8} r (r^2 - 4).$$

$f^0(r)$  a une unique racine positive  $r = 2$ . Puisque  $\det \left( \frac{df^0}{dr}(2) \right) = 1 \neq 0$ , par l'hypothèse (1) du théorème l'équation de Van Der Pol a pour  $|\varepsilon| \neq 0$  un cycle limite d'amplitude  $r = 2$ . De plus, puisque  $\det \left( \frac{df^0}{dr}(2) \right) = 1 > 0$  par l'hypothèse (2) du théorème, ce cycle limite est instable.

**Exemple 2.4** Soit l'équation différentielle de second ordre

$$x'' + x = \varepsilon (a + 2bx + 3cx^2) x' \quad (2.10)$$

où  $ac < 0$ .

L'équation (2.10) possède un seul cycle limite, de plus si  $a < 0$  ce cycle limite est stable et si  $a > 0$  ce cycle limite est instable.

**Démonstration :**

L'équation (2.10) s'écrit sous la forme d'un système à deux équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \varepsilon (a + 2bx + 3cx^2) y. \end{cases} \quad (2.11)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , ce système devient de la forme suivante :

$$\begin{cases} r' (\cos \theta) - (r \sin \theta) \theta' = (r \sin \theta), \\ r' (\sin \theta) + (r \cos \theta) \theta' = -(r \cos \theta) + \varepsilon (a + 2b(r \cos \theta) + 3c(r \cos \theta)^2) (r \sin \theta). \end{cases}$$

La solution pour  $r', \theta'$  est

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r (a \sin^2 \theta + 2br \cos \theta \sin^2 \theta + 3cr^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta), \\ \theta' = -1 + \varepsilon (a \cos \theta \sin \theta + 2br \cos^2 \theta \sin \theta + 3cr^2 \cos^3 \theta \sin \theta). \end{cases}$$

Prenant  $\theta$  comme la nouvelle variable donc le système devient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (a \sin^2 \theta + 2br \cos \theta \sin^2 \theta + 3cr^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{-1 + \varepsilon (a \cos \theta \sin \theta + 2br \cos^2 \theta \sin \theta + 3cr^2 \cos^3 \theta \sin \theta)}.$$

D'après cette relation de développement limité :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + O(z^2), |z| < 1.$$

L'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (a \sin^2 \theta + 2br \cos \theta \sin^2 \theta + 3cr^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + O(\varepsilon^2)$$

On note que l'équation est sous la forme standard, ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = -r (a \sin^2 \theta + 2br \cos \theta \sin^2 \theta + 3cr^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta).$$

On a :

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (a \sin^2 s + 2br \cos s \sin^2 s + 3cr^2 \cos^2 s \sin^2 s) ds \\ &= \frac{-r}{2\pi} \left( a \left( \int_0^{2\pi} (\sin^2 s) ds \right) + 2br \left( \int_0^{2\pi} (\cos s \sin^2 s) ds \right) + 3cr^2 \left( \int_0^{2\pi} (\cos^2 s \sin^2 s) ds \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2}r \left( a + \frac{3}{4}cr^2 \right) \end{aligned}$$

$$f^0(r) = 0 \quad a \text{ une unique racine positive } r = \sqrt{\frac{-4a}{3c}} \quad \text{car } ac < 0.$$

On a

$$\left( \frac{df^0}{dr}(r) \right) = -\frac{1}{2}a - \frac{9}{8}cr^2$$

D'où

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{df^0}{dr} \left( \sqrt{\frac{-4a}{3c}} \right) \right) &= -\frac{1}{2}a - \frac{9}{8}c \left( \frac{-4a}{3c} \right) \\ &= -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}(a) \\ &= a \neq 0 \end{aligned}$$

par l'hypothèse (1) du théorème l'équation a pour  $|\varepsilon| \neq 0$  une orbite périodique

$$\text{d'amplitude } r = \sqrt{\frac{-4a}{3c}}.$$

De plus,

si  $a < 0$  on trouve  $\det \left( \frac{df^0}{dr} \left( \sqrt{\frac{-4a}{3c}} \right) \right) = a < 0$  par l'hypothèse (2) du théorème, ce cycle limite est stable.

et si  $a > 0$  on trouve  $\det \left( \frac{df^0}{dr} \left( \sqrt{\frac{-4a}{3c}} \right) \right) = a > 0$  par l'hypothèse (2) du théorème, ce cycle limite est instable.

**Exemple 2.5** Soit le système différentiel de Linéard

$$\begin{cases} x' = y - \varepsilon (a_1 x + \dots + a_n x^n), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $\varepsilon$  est suffisamment petit et  $a_n \neq 0$ .

Le système (2.12) admet au maximum  $\left[ \frac{n-1}{2} \right]$  cycles limites. (où  $\left[ \frac{n-1}{2} \right]$  la partie entière de  $\frac{n-1}{2}$ ).

**Démonstration :**

On écrit le système (2.12) en coordonnées polaires, on obtient :

$$\begin{cases} r' = -\varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} a_k r^k (\cos \theta)^{k+1} \\ \theta' = -1 + \varepsilon (\sin \theta) \sum_{k=1}^{k=n} a_k r^{k-1} (\cos \theta)^k, \end{cases}$$

Par l'addition terme à terme on obtient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} a_k r^k (\cos \theta)^{k+1}}{-1 + \varepsilon (\sin \theta) \sum_{k=1}^{k=n} a_k r^{k-1} (\cos \theta)^k},$$

équivalent :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} a_k r^k (\cos \theta)^{k+1} + O(\varepsilon^2).$$

On sait que :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + O(z^2), |z| < 1.$$



On note que cette équation est sous la forme standard (2.3), ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = - \sum_{k=1}^{k=n} a_k r^k (\cos \theta)^{k+1}.$$

On a :

$$f^0(r) = \frac{-1}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^{k=n} a_k r^k \right) \int_0^{2\pi} (\cos s)^{k+1} ds = \frac{-\varepsilon}{2\pi} \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{k=n} a_k b_k r^k \right) = P(r),$$

où  $b_k = \int_0^{2\pi} (\cos s)^{k+1} ds \neq 0$  si  $k$  est impair et  $b_k = 0$  si  $k$  est pair.

Le polynôme  $P(r)$  admet au maximum  $\left[ \frac{n-1}{2} \right]$  racines positive, de plus on peut choisir les coefficients  $a_k$  avec  $k$  soit impair tel que le polynôme  $P(r)$  admet exactement  $\left[ \frac{n-1}{2} \right]$  racines positive.

**Exemple 2.6** Soit le système différentiel de suivant :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \varepsilon (9y - x^2y + x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2.13)$$

Le système (2.13) admet un seul cycle limite, de plus ce cycle limite est instable.

### Démonstration

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , ce système devient de la forme

$$\begin{aligned} r' (\cos \theta) - (r \sin \theta) \theta' &= (r \sin \theta) \\ r' (\sin \theta) + (r \cos \theta) \theta' &= -(r \cos \theta) + \varepsilon (9(r \sin \theta) - (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta) + (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) \end{aligned}$$

La solution pour  $r', \theta'$  est

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r (9 \sin^2 \theta + r \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta), \\ \theta' = -1 + \varepsilon (9 \cos \theta \sin \theta + r \cos^3 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta - r^2 \cos^3 \theta \sin \theta) \end{cases}$$

Prenant  $\theta$  comme la nouvelle variable donc le système devient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (9 \sin^2 \theta + r \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{-1 + \varepsilon (9 \cos \theta \sin \theta + r \cos^3 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta - r^2 \cos^3 \theta \sin \theta)}.$$

On sait que :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + O(z^2), |z| < 1.$$

Donc l'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (9 \sin^2 \theta + r \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + O(\varepsilon^2)$$

On note que l'équation est sous la forme standard, ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant

$$x = r, t = \theta, T = 2\pi \text{ et } F(r, \theta) = -r (9 \sin^2 \theta + r \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta).$$

On a :

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (9 \sin^2 \theta + r \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{-r}{2\pi} \left( 9 \left( \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta) d\theta \right) + r \left( \int_0^{2\pi} (\sin^3 \theta) d\theta \right) \right) \\ &\quad + \frac{-r}{2\pi} \left( r \left( \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \right) - r^2 \left( \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta \right) \right) \\ &= \frac{1}{8} r^3 - \frac{9}{2} r \end{aligned}$$

$f^0(r) = 0$  a une unique racine positive  $r = 6$ .

On a

$$\left( \frac{df^0}{dr}(r) \right) = \frac{3}{8} r^2 - \frac{9}{2}$$

D'où

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{df^0}{dr}(6) \right) &= \frac{3}{8} (6)^2 - \frac{9}{2} \\ &= 9 \neq 0 \end{aligned}$$

par l'hypothèse (1) du théorème l'équation a pour  $|\varepsilon| \neq 0$  une orbite périodique d'amplitude  $r = 6$ .

De plus, on a  $\det \left( \frac{df^0}{dr}(6) \right) = 9 > 0$  par l'hypothèse (2) du théorème, ce cycle limite est instable.

**Exemple 2.7** Soit le système

$$\begin{cases} x' = -y + \varepsilon(-x + x^2y), \\ y' = x + \varepsilon(-y + yz + z^2), \\ z' = \varepsilon(y + x^2 + yz - 1). \end{cases} \quad (2.14)$$

Le système (2.14) possède un seul cycle limite, de plus ce cycle limite est instable.

**Démonstration :**

En coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases}$$

le système (2.14) devient

$$\begin{cases} r' = \varepsilon(-r + r^3 \cos^3 \theta \sin \theta + z^2 \sin \theta + rz \sin^2 \theta), \\ \theta' = 1 + \frac{1}{r} \varepsilon(rz \cos \theta \sin \theta + z^2 \cos \theta - r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta), \\ z' = \varepsilon(-1 + r \sin \theta + rz \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta), \end{cases}$$

Pour écrire le système (2.14) sous la forme standard pour appliquer la méthode de moyennisation on considère  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante. D'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(-r + r^3 \cos^3 \theta \sin \theta + z^2 \sin \theta + rz \sin^2 \theta), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(-1 + r \sin \theta + rz \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta), \end{cases} \quad (2.15)$$

Le système (2.15) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où  $F_1, F_2$  sont périodiques de période  $2\pi$ , Calculons maintenant le système moyenné, on obtient

$$\begin{aligned}
f_1(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, s, \varepsilon) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-r + r^3 \cos^3 s \sin s + z^2 \sin s + rz \sin^2 s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( - \int_0^{2\pi} r ds + r^3 \int_0^{2\pi} (\cos^3 s \sin s) ds + z^2 \int_0^{2\pi} (\sin s) ds + rz \int_0^{2\pi} (\sin^2 s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} r (z - 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, s, \varepsilon) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-1 + r \sin s + rz \sin s + r^2 \cos^2 s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( - \int_0^{2\pi} 1 ds + r \int_0^{2\pi} (\sin s) ds + rz \int_0^{2\pi} (\sin s) ds + r^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} r^2 - 1.
\end{aligned}$$

On a le système suivant :

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2} r (z - 2) = 0, \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2} r^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

On résout le système (2.16), on obtient les deux racines

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2),$$

$$(r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2),$$

Comme  $r > 0$ , la solution  $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$  est la seule qui fournisse un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

$$\begin{aligned}
D(r_1, z_1) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(r_1, z_1)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial (r(z-2))}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial (r(z-2))}{\partial z} \\ \frac{\partial (\frac{1}{2}r^2 - 1)}{\partial r} & \frac{\partial (\frac{1}{2}r^2 - 1)}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\sqrt{2}, 2)} \\
&= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial (r(z-2))}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial (r(z-2))}{\partial z} \\ \frac{\partial (\frac{1}{2}r^2 - 1)}{\partial r} & \frac{\partial (\frac{1}{2}r^2 - 1)}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\sqrt{2}, 2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix}_{(\sqrt{2}, 2)} \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème, le système (2.14) a pour  $|\varepsilon|$  suffisamment petit un seul cycle limite. De plus la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix},$$

calculée au point  $(\sqrt{2}, 2)$  admet les deux valeurs propres  $\pm 1$  (réelles de signe différent). Donc le point singulier est un point selle qui est toujours instable. Alors, le cycle limite est instable.

## Chapitre 3

# Méthode de moyennisation du second ordre

### 3.1 Introduction

Lorsque le champ de vecteurs est suffisamment différentiable, on peut passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux. Considérons les deux problèmes aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} x' = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x, \varepsilon), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $F_1, F_2 : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $F_3 : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à  $t$  et  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{cases} y' = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 [f^{10}(y) + g^0(y)], \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $f^0, f^{10}, g^0$  sont des fonctions moyennées correspondantes à  $F_1, f_1$  et  $F_2$  respectivement, et

$$f_1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} \left[ \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x) \right] - \frac{\partial y_1}{\partial x} f^0(x),$$

et  $z(x)$  est une fonction de classe  $C^1$  dont la moyenne est nulle.

### 3.2 Théorème de moyennisation du second ordre

**Théorème 3.1** *Soit*

$$f_1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y_1(t, x) - \frac{\partial y_1}{\partial x} f^0(x),$$

où

$$y_1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x),$$

et  $z(x)$  est une fonction de classe  $C^1$  dont la moyenne est nulle.

*Supposons que :*

(a)  $\frac{\partial F_1}{\partial x}, F_2$  et  $F_3$  sont Lipchitziennes relativement à  $x$  et continues dans leur domaine de définition.

(b)  $|F_3(t, x, \varepsilon)|$  est bornée par une constante  $M$  positive dans :

$$\left[0, \frac{M}{\varepsilon}\right) \times D \times (0, \varepsilon_0].$$

(c)  $T$  est indépendante de  $\varepsilon$ .

(d)  $y(t) \in D$  pendant un temps d'échelle  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y_1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

sur l'échelle du temps  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

**Corollaire 3.2** Si les hypothèses du théorème sont satisfaites et de plus

$$f^0(y) = 0.$$

Alors

1) Si  $p$  est un point d'équilibre du système moyenné (3.2) tel que

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))_{y=p} \neq 0.$$

Alors, il existe une solution  $T$ -périodique  $\Phi(t, \varepsilon)$  du système (3.1) telle que  $\Phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2) Si  $\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))_{y=p}$  est négative, la solution périodique  $\Phi(t, \varepsilon)$  du système (3.1) est asymptotiquement stable pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Si

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))_{y=p}$$

est positive, cette solution est instable.

### 3.3 Exemples d'applications

**Exemple 3.3** Considérons système suivant :

$$\begin{cases} x' = -y + \varepsilon(x^2 - 4x^2y), \\ y' = x + \varepsilon^2(y^2x + y^5x - 2y + 6y^3 - y^5), \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) admet deux cycle limites, l'un stable et l'autre instable.

**Démonstration :**



En coordonnées polaires  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

le système (3.3) devient :

$$\begin{cases} r' = \varepsilon (r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta) + \\ \varepsilon^2 (6r^3 \sin^4 \theta - 2r \sin^2 \theta - r^5 \sin^6 \theta + r^3 \cos \theta \sin^3 \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta) \\ \theta' = 1 + \varepsilon (4r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta \sin \theta) + \\ \varepsilon^2 (6r^2 \cos \theta \sin^3 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta - r^4 \cos \theta \sin^5 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^5 \theta) \end{cases}$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta, \\ F_2(r, \theta) &= 6r^3 \sin^4 \theta - 2r \sin^2 \theta - r^5 \sin^6 \theta + r^3 \cos \theta \sin^3 \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème, on calcule la fonction moyennée

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta) d\theta \right) - \frac{2r^3}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta \sin \theta) d\theta \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$\begin{aligned}
g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (6r^3 \sin^4 \theta - 2r \sin^2 \theta - r^5 \sin^6 \theta + r^3 \cos \theta \sin^3 \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta) d\theta \\
&= \frac{3r^3}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\sin^4 \theta) d\theta \right) - \frac{r}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta) d\theta \right) - \frac{r^5}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\sin^6 \theta) d\theta \right) + \\
&\quad \frac{r^3}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin^3 \theta) d\theta \right) + \frac{r^6}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin^6 \theta) d\theta \right) \\
&= r \left( -\frac{5}{16}r^4 + \frac{9}{4}r^2 - 1 \right).
\end{aligned}$$

et

$$f^{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta,$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta) \\
&= 2r \cos^3 \theta - 12r^2 \cos^3 \theta \sin \theta,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta F_1(r, s) ds &= \int_0^\theta (r^2 \cos^3 s - 4r^3 \cos^3 s \sin s) ds \\
&= r^2 \left( \int_0^\theta (\cos^3 s) ds \right) - 4r^3 \left( \int_0^\theta (\cos^3 s \sin s) ds \right) \\
&= r^2 \left( \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta \right) - 4r^3 \left( \frac{5}{32} - \frac{1}{32} \cos 4\theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ((2r \cos^3 \theta - 12r^2 \cos^3 \theta \sin \theta) \cdot \\
&\quad (r^2 (\frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta) - 4r^3 (\frac{5}{32} - \frac{1}{32} \cos 4\theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta))) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2r^3 (\cos^3 \theta) (\frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta) - 12r^5 (\cos^3 \theta \sin \theta) (\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8})) + \\
&\quad r^4 (2 (\cos^3 \theta) (\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8}) - 12 (\cos^3 \theta \sin \theta) (\frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta)) d\theta \\
&= \frac{r^3}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta) (\frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta) \right) - \frac{6r^5}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta \sin \theta) (\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8}) \right) \\
&\quad + \frac{r^4}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} (2 (\cos^3 \theta) (\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8})) \right) - \\
&\quad \frac{r^4}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} ((\cos^3 \theta \sin \theta) (\frac{9}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 3\theta)) \right) = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f^{10}(r) + g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
&= r \left( -\frac{5}{16} r^4 + \frac{9}{4} r^2 - 1 \right).
\end{aligned}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation

$$r \left( -\frac{5}{16} r^4 + \frac{9}{4} r^2 - 1 \right) = 0$$

et on obtient deux racines positives :  $r_1 = \frac{1}{5} \sqrt{90 + 10\sqrt{61}}$  et  $r_2 = \frac{1}{5} \sqrt{90 - 10\sqrt{61}}$ .

Etant

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} (f^{10}(r) + g^0(r)) &= \frac{d}{dr} \left( -\frac{5}{16} r^5 + \frac{9}{4} r^3 - r \right) \\
&= -\frac{25}{16} r^4 + \frac{27}{4} r^2 - 1
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} (f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) &= -\frac{25}{16} \left( \frac{1}{5} \sqrt{90 + 10\sqrt{61}} \right)^4 + \frac{27}{4} \left( \frac{1}{5} \sqrt{90 + 10\sqrt{61}} \right)^2 - 1 \\ &= -26.258 \neq 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} (f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) &= -\frac{25}{16} \left( \frac{1}{5} \sqrt{90 - 10\sqrt{61}} \right)^4 + \frac{27}{4} \left( \frac{1}{5} \sqrt{90 - 10\sqrt{61}} \right)^2 - 1 \\ &= 1.8584 \neq 0\end{aligned}$$

Donc il existe deux cycles limites, et d'après l'hypothèse (2) du corollaire on a :

$$\frac{d}{dr} (f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) = -26.258 < 0$$

Alors, le premier cycle limite est stable d'amplitude  $r_1 = \frac{1}{5} \sqrt{90 + 10\sqrt{61}}$

$$\frac{d}{dr} (f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) = 1.8584 > 0$$

donc le deuxième cycle limite est instable d'amplitude  $r_2 = \frac{1}{5} \sqrt{90 - 10\sqrt{61}}$ , pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

**Exemple 3.4** Considérons système suivant :

$$\begin{cases} x' = -y + \varepsilon(x^2 - 4x^2y) + \varepsilon^2(y^2 - xy), \\ y' = x + \varepsilon^2(y^3x^2 + y^5x - 4y + 6y^3 - y^5), \end{cases} \quad (3.5)$$

Le système (3.5) admet deux cycle limites, l'un stable et l'autre instable.

**Démonstration :**

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} r' = \varepsilon(r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta) + \varepsilon^2(6r^3 \sin^4 \theta - 4r \sin^2 \theta - r^5 \sin^6 \theta + \\ r^2 \cos \theta \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^4 \theta) \\ \theta' = 1 + \varepsilon(4r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta \sin \theta) + \varepsilon^2(r \cos \theta \sin^2 \theta - r \sin^3 \theta - \\ 4 \cos \theta \sin \theta + 6r^2 \cos \theta \sin^3 \theta - r^4 \cos \theta \sin^5 \theta + r^4 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^5 \theta) \end{cases}$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta, \\ F_2(r, \theta) &= 6r^3 \sin^4 \theta - 4r \sin^2 \theta - r^5 \sin^6 \theta + r^2 \cos \theta \sin^2 \theta - \\ &\quad r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème, on calcule la fonction moyennée

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta) d\theta \right) - \frac{2r^3}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta \sin \theta) d\theta \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$\begin{aligned} g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (6r^3 \sin^4 \theta - 4r \sin^2 \theta - r^5 \sin^6 \theta + r^2 \cos \theta \sin^2 \theta - \\ &\quad r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^6 \cos \theta \sin^6 \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin^4 \theta) d\theta \\ &= \frac{3r^3}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \right) - \frac{2r}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \right) - \frac{r^5}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \sin^6 \theta \right) + \frac{r^2}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta \right) \\ &\quad - \frac{r^2}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \right) + \frac{r^6}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^6 \theta \right) + \frac{r^5}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^4 \theta \right) \\ &= r \left( -2 + \frac{9}{4}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right). \end{aligned}$$

et

$$f^{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos^3 \theta - 4r^3 \cos^3 \theta \sin \theta) \\ &= 2r \cos^3 \theta - 12r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\theta F_1(r, s) ds &= \int_0^\theta (r^2 \cos^3 s - 4r^3 \cos^3 s \sin s) ds \\ &= r^2 \left( \int_0^\theta (\cos^3 s) ds \right) - 4r^3 \left( \int_0^\theta (\cos^3 s \sin s) ds \right) \\ &= r^2 \left( \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta \right) - 4r^3 \left( \frac{5}{32} - \frac{1}{32} \cos 4\theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta \right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( (2r \cos^3 \theta - 12r^2 \cos^3 \theta \sin \theta) \right. \\
&\quad \left. \left( r^2 \left( \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta \right) - 4r^3 \left( \frac{5}{32} - \frac{1}{32} \cos 4\theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta \right) \right) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2r^3 (\cos^3 \theta) \left( \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta \right) - \\
&\quad 12r^5 (\cos^3 \theta \sin \theta) \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8} \right) + \\
&\quad r^4 (2 (\cos^3 \theta) \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8} \right) - \\
&\quad 12 (\cos^3 \theta \sin \theta) \left( \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta \right)) d\theta \\
&= \frac{r^3}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta) \left( \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta \right) d\theta \right) - \\
&\quad \frac{6r^5}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos^3 \theta \sin \theta) \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8} \right) d\theta \right) + \\
&\quad \frac{r^4}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( 2 (\cos^3 \theta) \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{5}{8} \right) \right) d\theta \right) - \\
&\quad \frac{6r^4}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( (\cos^3 \theta \sin \theta) \left( \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{12} \sin 3\theta \right) \right) d\theta \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f^{10}(r) + g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
&= r \left( -2 + \frac{9}{4} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right).
\end{aligned}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation

$$r \left( -2 + \frac{9}{4}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right) = 0$$

et on obtient deux racines positives :  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 2\sqrt{2}$ .

Etant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (f^{10}(r) + g^0(r)) &= \frac{d}{dr} \left( -2r + \frac{9}{4}r^3 - \frac{1}{4}r^5 \right) \\ &= -2 + \frac{27}{4}r^2 - \frac{5}{4}r^4, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) &= -2 + \frac{27}{4}(1)^2 - \frac{5}{4}(1)^4 \\ &= \frac{7}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) &= -2 + \frac{27}{4}(2\sqrt{2})^2 - \frac{5}{4}(2\sqrt{2})^4 \\ &= -28 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc il existe deux cycles limites, et d'après l'hypothèse (2) du corollaire on a :

$$\frac{d}{dr} (f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) = \frac{7}{2} > 0$$

Alors, le premier cycle limite est instable d'amplitude  $r_1 = 1$  et

$$\frac{d}{dr} (f^{10}(r_2) + g^0(r_2)) = -28 < 0$$

donc le deuxième cycle limite est stable d'amplitude  $r_2 = 2\sqrt{2}$ , pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

**Exemple 3.5** Considérons système suivant :

$$\begin{cases} x' = -y + \varepsilon(y^2 - 2x^2 + 8xy) + \varepsilon^2 ax, \\ y' = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay, \end{cases} \quad (3.6)$$

Si  $a > 0$  le système (3.6) admet un seul cycle limite stable et si  $a < 0$  le système (3.6) n'admet pas cycle limite.



**Démonstration :**

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r^2 (5 \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \cos^3 \theta + 8 \cos^2 \theta \sin \theta) + \varepsilon^2 ar \\ \theta' = 1 + \varepsilon r (6 \cos^2 \theta \sin \theta - 8 \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^3 \theta) \end{cases}$$

$$\frac{1}{1 - \varepsilon z} = 1 + \varepsilon z + O(\varepsilon^2)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= r^2 (\cos \theta) (5 - 7 \cos^2 \theta + 8 \cos \theta \sin \theta), \\ F_2(r, \theta) &= ar - r^3 (5 \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \cos^3 \theta + 8 \cos^2 \theta \sin \theta) \\ &\quad (6 \cos^2 \theta \sin \theta - 8 \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème, on calcule la fonction moyennée

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} ((\cos \theta) (5 - 7 \cos^2 \theta + 8 \cos \theta \sin \theta)) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$\begin{aligned} g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (ar) d\theta - \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} (5 \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \cos^3 \theta + 8 \cos^2 \theta \sin \theta) \\ &\quad (6 \cos^2 \theta \sin \theta - 8 \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= r(a - r^2) \end{aligned}$$

et

$$f^{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (\cos \theta) (5 - 7 \cos^2 \theta + 8 \cos \theta \sin \theta)) \\ &= 2r (\cos \theta) (5 - 7 \cos^2 \theta + 8 \cos \theta \sin \theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\theta F_1(r, s) ds &= \int_0^\theta (r^2 (\cos s) (5 - 7 \cos^2 s + 8 \cos s \sin s)) ds \\ &= r^2 \left( \frac{8}{3} - 2 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin \theta - \frac{2}{3} \cos 3\theta - \frac{7}{12} \sin 3\theta \right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta \\ &= \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 (\cos \theta) (5 - 7 \cos^2 \theta + 8 \cos \theta \sin \theta)) \\ &\quad \left( \frac{8}{3} - 2 \cos \theta - \frac{1}{4} \sin \theta - \frac{2}{3} \cos 3\theta - \frac{7}{12} \sin 3\theta \right) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{10}(r) + g^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\ &= r (a - r^2). \end{aligned}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation

$$r (a - r^2) = 0$$

et on obtient une racine positive :  $r_1 = \sqrt{a}$ .

*Etant*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} (f^{10}(r) + g^0(r)) &= \frac{d}{dr} (r(a - r^2)) \\ &= a - 3r^2,\end{aligned}$$

*nous obtenons*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} (f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) &= a - 3(\sqrt{a})^2 \\ &= -2a \neq 0\end{aligned}$$

*Si  $a > 0$ , et d'après l'hypothèse (2) du corollaire on a :*

$$\frac{d}{dr} (f^{10}(r_1) + g^0(r_1)) = -2a < 0$$

*donc, le cycle limite est stable d'amplitude  $r_1 = \sqrt{a}$ , pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.*

*Si  $a < 0$ , alors l'équation  $f^{10}(r) + g^0(r) = 0$  n'a pas de racine simple positive.*

*Donc le système différentiel n'a pas de cycle limite.*

# Conclusion générale

L'importance de déterminer le nombre de cycles limites fait l'objet de la deuxième partie du 16ème problème de Hilbert. L'application de la méthode de moyennisation pour étudier les cycles limites des systèmes différentiels dépendant d'un paramètre, s'avère ces dernières années très fructueuse, elle a donné de bons résultats et a été appliquée par différents Mathématiciens.

Ce mémoire porte sur un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir les cycles limites. Un outil très important a été utilisé pour étudier les cycles limites des systèmes différentiels dépendant d'un paramètre est la théorie de moyennisation.

# Bibliographie

- [1] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON, AND A. L. MAIER, Qualitative theory of second order dynamical systems, Wiley, New York, (1973).
- [2] A. BENDJEDDOU AND R. BOUKOUCHA, Explicit expression for a first integral for some classes of polynomial differential systems, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. **3**(1), (2015) 110 – 115.
- [3] A. Bendjeddou, R. Boukoucha, Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 61(2016), No. 1, 77-85.
- [4] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems, Journal of Nonlinear Mathematical Physics- Volume 23 No. 1 (2016), 21-27.
- [5] R. BOUKOUCHA, Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 217, pp. 1-7.
- [6] R. BOUKOUCHA, Explicit expression for a hyperbolic limit cycles of a class of polynomial differential systems, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2017, Vol. 23. No 3. pp. 300-307.
- [7] R. BOUKOUCHA, On the non existence of periodic orbits for a class of two dimensional Kolmogorov systems, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. Vol. 2018, No. 1, pp. 3-9.
- [8] R. BOUKOUCHA AND M. YAHIAOUI, On the class of two dimensional Kolmogorov systems, Engineering Mathematics Letters. 2019, No. 4, pp. 1-12.
- [9] R. BOUKOUCHA AND M. YAHIAOUI, Explicit expression for a first integral for a class of two-dimensional differential system, General Letters in Mathematics. Vol. 6, No. 1, Mar 2019, pp.10-15

- 
- [10] M. YAHIAOUI AND R. BOUKOUCHA, Invariant algebraic curves and the first integral for a class of Kolmogorov systems, *Nonlinear studies*. Vol. 27, No. 1, pp.205-212, 2020
- [11] M. YAHIAOUI AND R. BOUKOUCHA, Polynomial differential systems with explicit expression for limit cycles, *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica (BASM)*. No. 3(91), 2019, pp. 65-74.
- [12] J. LLIBRE, Periodic solutions via avragine theory.
- [13] S. ELLAGGOUNE, Le nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée des équations de Liénard, Thèse de Doctorat, Université 8 Mai 1945 Guelma. 2018.
- [14] A. BERBACHE, Etude qualitative de quelques classes de systèmes différentiels planaires, Thèse de Doctorat, Université Ferhat Abbas Sétif 1. 2016.
- [15] F. TOUATI, Cycles limites d'une classe des equations différentielles de second ordre et de l'équation de duffing, Thèse de Doctorat, Université Badji Moukhtar Annaba. 2014.
- [16] S. BENYOUCEF, Sur quelques classes de systèmes différentiels avec cycles limites explicites, Thèse de Doctorat, Université Badji Moukhtar Annaba 2017.
- [17] Z. DIAB, Cycle limites des systèmes différentiels polynomiaux, Thèse de Doctorat, Université Badji Moukhtar Annaba. 2015.