République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire Présenté

Pour l'obtention du Diplôme de Master

En Mathématiques appliquées

Option : Mathématiques Financières

Par :ADJAOUD Rahma

Méthode support pour l'optimisation de portefeuille avec contraintes générales.

Soutenu à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia,
Le 17/09/2023, devant le jury composé de :

Président	D^r ASLI Larbi	M.C.A	Université de Bejaia.
Encadrant	D^r BRAHMI Belkacem	M.C.A	Université de Bejaia
Examinateur	D^r TOUATI Sofiane	M.C.B	Université de Bejaia.
Examinateur	M^{r}BOUDJELDA Souhaib	Doctorant	Université de Bejaia.

Année Universitaire 2022 – 2023

Louange A Dieu, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela n'aurait pu être.

J *e tiens tout d'abord à remercier le Professeur M^{r} Belkacem BRAHMI pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de m'encadrer. Ses conseils précieux ont permis une bonne orientation dans la réalisation de ce modeste travail.*

J *e teins également à remercier M^{r} Larbi ASLI, pour tout son soutien et aide pour les étudiants .*

J *e teins également à remercier M^{r} Larbi ASLI. d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.*

J *e remercie M^{r} Sofiane TOUATI et M^{r}Souhaib BOUDJELDA d'avoir accepter de faire partie du jury et consacrer leurs temps à la lecture et à la correction de ce mémoire.*

M *es remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à mes parents.*

E *nfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

Je dédie ce modeste travail :

A *mes très chères* ***parents*** *auxquels Je Dois Ce Que Je Suis Que Dieu Vous Protège et Vous Prête Une Bonne Santé et Une Longue Vie.*

A *mes frères* ***Lamine*** *et* ***Lahlou*** *et ma belle-soeur* ***Thiziri*** *et mes soeurs* ***Baya et ma petite Manassa****, et mes petits anges* ***Dylan, Dylia, Hamid*** et ma cousine **Yasmina**, ainsi que mes chers amis **Siham** et **Zoubir**.

A *ma promotion de Master* $\mathcal{MF}$.

A *tous mes amis*

Adjaoud Rahma.

Table des matières

Table des figures

Liste des Algorithmes

Notations

Symbole	signification
PQP	problème quadratique paramétrique.
MDS	méthode directe de support.
PQ	problème quadratique.
P	portefeuille
SR	solution réalisable.
SRS	solution réalisable de support

Introduction générale

Un marché financier est un marché dans lequel des personnes, des sociétés privées et des institutions publiques peuvent négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande.

Le domaine financier est marqué par une perturbation significative, manifestée à travers le concept de risque, lequel requiert une réduction voire une élimination. Dans ce contexte, les options pour les investisseurs demeurent restreintes : ils peuvent opter pour un rendement assuré mais modeste, ou bien prendre le risque d'aspirer à un rendement plus élevé.

Un portefeuille consiste en une assemblée d'instruments financiers, tels que : actions, obligations, produits dérivés ou matières premières, détenus par un investisseur. Ces divers actifs sont combinés selon des ratios différents afin de former un portefeuille bien équilibré, permettant ainsi d'atteindre le rendement escompté tout en minimisant les risques encourus par l'investisseur.

En 1952, le mathématicien Harry Markowitz [27] a introduit la théorie moderne du portefeuille qui définit le processus de sélection de titres pour créer un portefeuille le plus efficient possible, c'est à dire celui qui minimise le risque pour une certaine rentabilité espérée ou celui qui maximise le rendement pour un niveau de risque fixé. Cette théorie a révolutionné le domaine de la finance, donne un aperçu sur la façon avec laquelle un investisseur rationnel diversifie son investissement afin d'optimiser son portefeuille.

La méthode directe du support (MDS) [10] est une approche pour résoudre des problèmes de programmation linéaire et quadratique convexes. Elle s'inspire de l'algorithme du simplexe, mais se distingue de l'utilisation de la métrique propre au simplexe. l'objectif est de déterminer une direction d'amélioration et de trouver le pas optimal le long de cette direction pour optimiser la fonction objectif. Cette méthode génère ainsi une suite finie de points réalisables qui convergent vers la solution optimale du problème.

Dans ce travail, on s'intéresse au problème de gestion de portefeuille, qui consiste à minimiser le risque et maximiser le rendement sous des contraintes d'investissement et d'absence de vente à découvert. On fera appel à la méthode d'agrégation des critères afin de le transformer en un problème mono-critère pour faciliter sa résolution. Le problème résultant est un programme quadratique paramétré (PQP), où ce paramètre représente la préférence du décideur.

En s'inspirant du travail de M. J. Best [6], on a adaptera la méthode directe de support [8, 7], qu'on nommera MDS, pour résoudre ce PQ paramétré, ce dans l'objectif de trouver la forntiere effieciente . Ce mémoire sera structuré de la façon suivante :

Après cette introduction générale mettant l'accent sur la thématique traitée, ainsi que sur nos motivations et la démarche suivie, le premier chapitre sera dédié à la présentation des préliminaires et des concepts de base de l'optimisation, tels que les principales définitions et propriétés liées au concepts de portefeuille financier.

Le deuxième chapitre sera entièrement consacré aux outils utilisés dans notre travail ; à savoir la méthode directe du support en programmation quadratique, adapté au problème étudié.

Enfin, le troisième chapitre présentera la modélisation du problème ainsi que sa résolution.on utilise la méthode de support pour aborder la résolution du problème de gestion de portefeuille qui inclut des contraintes linéaires générales. Pour trouver la frontière efficiente dans ce contexte, nous nous trouvons face à un problème quadratique paramétrique ((PQP) avec le paramètre de aversion au risque "t"). Pour résoudre ce PQP, nous adoptons une approche en deux phases.

La première phase vise à calculer le portefeuille présentant une variance minimale, en utilisant la méthode (MDS)que nous avons développée dans le chapitre précédent. La deuxième phase consiste à itérativement déterminer les autres portefeuilles efficaces.

Le travail s'achève par une conclusion générale.

1

Gestion de portefeuille : Éléments théoriques

Introduction

La théorie du portefeuille à été développé en 1952 par Harry Markowitz [27, 24], elle montre comment des investisseurs rationnels et averses au risque choisissent leurs portefeuille optimal en situation d'incertitude. Elle constitue l'un des piliers de la théorie de la finance moderne.

Le principe du modèle classique de Markowitz est de modéliser le risque par la variance ou l'écart-type des taux de rendement des titres, et de l'intégrer dans le choix des titres d'un portefeuille. Ce modèle se base sur certaines hypothèses, à savoir la normalité des distributions des rendements des actifs financiers et sur la rationalité des investisseurs.

Dans ce chapitre, nous rappelons les concepts de base de la gestion de portefeuille, ensuite, nous présentons la théorie moderne du portefeuille, à savoir le modèle de Markowitz et ses variantes nous présentons quelques éléments théoriques et concepts de base de la gestions de portefeuille.

1.1 Notions de base

Des concepts et défintions spécifiques sont nécessaires pour la suite de ce travail.

Définition 1.1. Actif financier :
Un actif (ou titre) financier est un contrat, le plus souvent transmissible et négociable, qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus et/ou un gain en capital en contrepartie d'une prise de risque.

Définition 1.2. Action :
Une action est un titre de propriété sur une fraction du capital qu'une entreprise décide de vendre aux investisseurs [29]. Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. L'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers.

Définition 1.3. Portefeuille financier :
Un portefeuille est une combinaison d'un ensemble de titres (actifs) financiers, détenus par un investisseur (actions, obligations, produits dérivés, matières premières, etc). Cette combinaison se fait en des proportions différentes afin d'avoir un portefeuille bien diversifié, permettant ainsi de réaliser un rendement espéré bien déterminé tout en minimisant le risque que peut courir l'investisseur.

Mathématiquement, un portefeuille P composé de n actifs financiers est un vecteur de proportions $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ où x_i représente la proportion du capital investi dans le i^{me} titre, calculée par :

$$x_i = \frac{\text{La part du capital investi en titre } i}{\text{Capital total}}$$

Généralement, la somme des parts investies dans les différents titres financiers donne 1, cette contrainte, appelée contraintes d'investissement totale, est donnée par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Le signe $(')$ est celui de l'opération de transposition des vecteurs et des matrices.

Définition 1.4. Marché financier :
Les marchés financiers sont des lieux fictifs, où se rencontrent des agents économiques (personnes, sociétés privées et institutions publiques) ayant un excédent de capitaux (investisseurs) et ceux ayant besoin de financement, pour négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande.

1.2 Mesures de rentabilité

Le taux de rentabilité ou le rendement est une notion fondamentale en finance et apparaît dans l'expression de la plupart des modèles de gestion de portefeuille, elle mesure l'appréciation (la dépréciation) relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs financier entre deux instants successifs[12].

1.2.1 Rendement d'un actif financier

Rendement arithmétique

Le rendement arithmétique (simple) d'un actif i à la fin de la période t, noté $R^a_{i,t}$ est calculé par la relation suivante [5] :

$$R^a_{i,t} = \frac{(P_{i,t} - P_{i,t-1}) + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

Avec :
- $P_{i,t}$ Prix du titre i à la fin de la période t.
- $P_{i,t-1}$ Prix du titre i au début de la période $t-1$.
- $D_{i,t-1}$ Dividende dans le cas d'une action ou intérêt dans le cas d'une obligation reçu durant la période t.

Rendement géométrique

Le rendement géométrique (logarithmique) périodique d'un actif i, notée $R^g_{i,t}$.
i,t est donné par la relation suivante [5] :

$$R^g_{i,t} = \ln(\frac{P_{i,t}D_{i,t}}{P_{i,t-1}}) = \ln(R_{i,t} + 1)$$

où ln est la fonction logarithme niperien et $R_{i,t}$ est le rendement arithmétique du titre i à la fin de la période t.

1.2.2 Rendement espéré d'un titre

En pratique les prix des titres financiers varient dans le temps ce qui entraîne aussi une variation des rendements de ces derniers[10]. Alors les rendements seront considérés comme des variables aléatoires R_i , ayant des distributions de probabilités. Pour le modèle classique de Markowitz, la loi normale est souvent utilisée. Le rendement espéré d'un actif financier peut être calculé à partir [5] :
- Des probabilités subjectives par rapport aux rendements possibles.
- Des rendements historiques.

Calcul du rendement espéré à partir des probabilités subjectives :

Le rendement espéré d'un actif i, noté μ_i, est la moyenne pondérée des différents rendements possibles :

$$\mu = E(R_i) = p_1 r_{i,1} + p_2 r_{i,2} + \ldots + p_k r_{i,k} = [\sum_{j=1}^{k} p_j r_{i,j}]$$

où :

— $r_{i,j}$: Rendement possible de l'issu j : $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.
— p_j : Probabilité de réalisation du scénario (événement) j.
— k : Le nombre de scénarios possibles.

Calcul du rendement espéré à partir des probabilités historiques :

Le rendement espéré d'un actif i est la moyenne arithmétique des rendements réalisé au cours des T périodes précédentes :

$$\mu = E(R_i) = \frac{r_{i,1} + r_{i,2} + \ldots + r_{i,T}}{T} = \frac{1}{T}[\sum_{t=1}^{T} r_{i,t}]$$

où $r_{i,t}$, est le rendement du titre i à la fin de la période t.

1.3 Analyse du risque

L'utilisation d'outils de mesure du risque est devenu systématique et les professionnels ont développé des instruments très sophistiqués. Néanmoins, il existe bon nombre d'outils constituant la base de la gestion du risque et qui sont à la portée de tous les investisseurs et ces outils ont démontré leur efficacité. Nous abordons ici les plus célèbres et utilisés d'entre eux .

1.3.1 La variance et la covariance

La variance et la covariance sont les principales mesures utilisées pour mener à bien une étude d'analyse du risque.

La variance

Selon la définition classique, la variance est la moyenne des carrés des écarts en général. Mathématiquement, il est considéré comme une mesure utilisée pour caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon autour de sa moyenne. La variance du rendement du titre i, notée σ^2 , donné par la formule suivante :

$$\sigma_i^2 = Var(R_i) = E(R_i - \bar{R}_i)^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1}(r_{i,t} - \mu_i)^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} r_{i,t}^2 - \mu_i^2$$

avec :

$r_{i,t}$: le cours de l'actif i à l'instant t,

$\bar{R}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$ est le rendement moyen du titre i et $\mu_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{i,t}$ est son estimateur.

T : nombres de périodes.

Grossièrement on peut la voir comme la moyenne des carrés moins le carré des moyennes. Cette formule intègre des carrés dans le but d'éviter que les écarts positifs et les écarts négatifs par rapport à la moyenne ne s'annulent pas. La dimension de cette mesure étant le carré de la dimension de la moyenne, on utilise plus souvent l'écart-type qui n'est rien d'autre que la racine carrée de la variance.

Propriétés de la variance

1. La variance est toujours positive ou nulle,
2. Si la variance est nulle, cela signifie que la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne est nulle et donc que la variable aléatoire est une constante.
3. Pour deux variables aléatoires R_i et R_j , on a :
   — $Var(aR_i + b) = a^2 Var(R_i)$
   — si R_i et R_j sont indépendants, alors on aura :$Var(R_i + R_j) = Var(R_i) + Var(R_j)$
4. Plus la variance est proche de 0 cela signifie que les variables ne s'écartent pas énormément de sa moyenne et donc les variations ne sont pas trop importantes. Ainsi, on dit que la variance traduit la notion d'incertitude. Plus la variance est élevée plus la variable est susceptible de s'éloigner de sa moyenne.

La covariance

La covariance est légèrement différente. Si la variance permet d'étudier les variations d'une variable aléatoires par rapport à elle-même, la covariance va permettre d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyenne respectives. La covariance entre les rendements des titres i et j est calculée par la relation suivante [5] :

$$\sigma_{i,j} = Cov(R_i, R_j = E[(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)] = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{i,t} - \bar{r_i})(r_{j,t} - \bar{r_j})$$

avec :

$r_{i,t}$: cours de l'actif i à l'instant t.

$r_{j,t}$: cours de l'actif j à l'instant t.

$\bar{r_i}$: moyenne du cours de l'actif i.

$\bar{r_j}$: moyenne du cours de l'actif j.

T : nombre de périodes.

Du résultat obtenu par cette mesure on en déduit que plus la covariance est faible et plus les séries sont indépendantes et inversement plus elle est élevée et plus les séries sont liées. Une covariance nulle correspondant à deux variables totalement indépendantes.

1.3.2 La volatilité et l'écart-type

La volatilité

La volatilité est par définition une mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier. Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée et plus l'espérance de gain (ou risque de perte) sera important. A l'inverse, un portefeuille sans risque ou très peu risqué aura une volatilité très faible. La notion de volatilité concerne tous les horizons (court, moyen et long terme) et ne se soucis pas du sens du mouvement (seule l'amplitude des mouvements est pris en compte).
Alors que cette notion tient aujourd'hui une place primordiale dans l'étude des marchés,

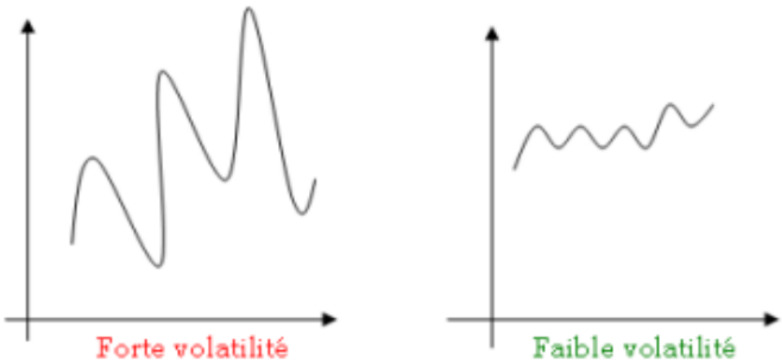

FIGURE 1.1 – Forte et faible volatilité

elle est également énormément utilisée pour diversifier les portefeuilles, gérer le risque, calculer les prix des options. Les périodes de forte volatilité se traduisent pas des cours relativement bas ce qui permet aux investisseurs d'anticiper une rentabilité plus élevée.

Calcul de l'écart type

Pour calculer la volatilité, on utilise l'écart type, qui est relativement simple à comprendre et à appliquer. La volatilité des rendements d'un titre financier i est calculée par :

$$\sigma_i = \sigma(R_i) = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i^2)}$$

avec :

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$$

est le rendement espéré du titre i.

Coefficient de corrélation

La corrélation entre deux actifs financiers, ou plus généralement entre deux variables aléatoires, est l'intensité de la liaison qui existe entre ces deux variables. Afin de déterminer cette liaison, il suffit de calculer le coefficient de corrélation par la formule suivante [5] :

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

où, σ_i et σ_j représentent respectivement les volatilités des titres i et j.

Propriétés du coefficient de corrélation

1. $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$.
2. Si $\rho_{ij} = 1$ (respectivement -1), alors il existe une relation linéaire positive (respectivement négative) entre les titres i et j.
3. Si $\rho_{ij} = 0$, alors les deux titres i et j sont décorrélées.
4. Le coefficient de corrélation est symétrique, c'est-à-dire $\rho_{ij} = \rho_{ji}$.

1.4 Les caractéristiques d'un portefeuille

1.4.1 Rendement espéré d'un portefeuille

Considérons un portefeuille P composé de n titres, ayant des rendements R_i , $i = \overline{1, n}$ Le rendement du portefeuille P, noté R_p, durant une période donnée est une combinaison linéaire pondérée des rendements qui le composent :

$$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \ldots + x_n R_n = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

où x_i est la proportion du portefeuille (ou richesse) investi dans le titre i. Le rendement espéré du portefeuille, noté μ_p , est égale à la moyenne pondérée des rendements enregistrés pendant cette période des différents titres qui composent ce portefeuille. Il est donné par l'expression suivante :

$$\mu_p = E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i$$

En notant : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)'$, alors le rendement espéré d'un portefeuille P s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$R_p = \mu' x \text{ avec } \mu_p = \mu' x$$

1.4.2 La variance d'un portefeuille

Le risque d'un portefeuille est calculé en fonction de sa volatilité, cette volatilité étant définie comme la variance ou l'écart-type des rentabilités des actifs financiers. Alors pour calculer le risque d'un portefeuille, on doit tenir compte de :

- La volatilité du rendement de chaque titre :" la variance $Var(R_i)$ ".
- Le degré de dépendance existant entre les rendements des différents titres : " la matrice de variance-covariance notée Σ " .

Risque d'un portefeuille composé de deux titres :

La variance du taux de rendement d'un portefeuille composé de deux titres i et j est donnée par :

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= x_i^2 Var(R_i) + x_j^2 Var(R_j) + 2x_i x_j Cov(R_i, R_j) && (1.1) \\ &= x_i^2\sigma_i^2 + x_j^2\sigma_j^2 + 2x_i x_j \sigma_{i,j} && (1.2) \end{aligned}$$

Risque d'un portefeuille composé de n titres :

La variance du taux de rendement d'un portefeuille composé de n titres est la somme des produits des poids de chaque couple d'actifs par leurs covariance :

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov(R_i, R_j)$$

La forme matricielle du risque s'écrit sous la forme :

$$\sigma_p^2 = Var_(R_p) = x'\Sigma x$$

où Σ est la matrice variance-covariance des rendements des différents titres, avec :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2}^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n}^2 \end{pmatrix}$$

1.5 Le modèle de Markowitz

Même si le concept de gestion du portefeuille était utilisé bien avant le milieu du 20eme siècle, la théorie du portefeuille est véritablement née au début des années cinquante à la suite des travaux de Markowitz qui peut être considéré comme le père de la théorie moderne du portefeuille [11].

Avant lui, les investisseurs avaient comme objectif de maximiser le rendement de leur portefeuille, tout en sachant qu'il existait un risque. L'apport principal du modèle de Markowitz (1952) [27] a été de modéliser le risque, mesuré par l'écart type des taux de rendement des titres, et de l'intégrer dans le choix des titres d'un portefeuille.

Celui-ci s'opère dans le cadre d'un marché parfait, c'est-à-dire sur la base de certaines hypothèses concernant : la divisibilité des titres, l'absence de coût de transaction et de taxes, l'accès au prêt et à l'emprunt sans limites, au même taux et sans aucune influence d'un investisseur sur les prix.

Les principes fondamentaux de la constitution d'un portefeuille reposent donc constamment sur un arbitrage entre le risque de celui-ci et sa rentabilité. Tout investisseur rationnel se doit de choisir le portefeuille de risque minimum pour un niveau de rendement espéré.

Ce choix est lié au concept de la diversification [24] qui consiste simplement pour un investisseur à ne pas investir tout dans un seul titre, mais à répartir ses investissements sur plusieurs titres, ce qui lui permet d'atteindre un meilleur rapport rendement/risque.

1.6 Principe du modèle de Markowitz

En comparant deux portefeuilles par leurs rendements, on retient :

— A risque identique, celui qui a l'espérance de rendement le plus élevée.

— A espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible.

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres. La courbe qui relie l'ensemble des portefeuilles efficients s'appelle la frontière efficiente.

En dessous de cette courbe, tout les portefeuilles rejetés sont dits dominés. Il est possible de diminuer le risque prévisionnel en diversifiant son portefeuille, si les actifs sont parfaitement corrélés, en supposant un grand nombre d'actifs financiers et toutes les combinaisons possibles, il est donc possible de calculer l'espérance et la variance du rendement prévisionnel d'un très grand nombre de portefeuilles.

Chaque portefeuille aura donc des caractéristiques d'espérance et de variance différentes, en fonction du choix des actifs, des pondérations et des corrélations entre les actifs. Il est alors possible d'obtenir un graphique représentant le risque et le rendement de chaque portefeuille, et de déterminer une frontière d'efficience [[5, 6]] à partir des portefeuilles dominants/dominés.

1.6.1 Hypothèses du modèle de Markowitz

Les hypothèses relatives aux actifs financiers :

Hypothèse 1 : Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque : le rendement R_i d'un actif financier i pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, donc on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale, c'est-à-dire une distribution symétrique stable entièrement définie par deux paramètres : l'espérance mathématique $\mu_p = E(R_i)$ du rendement et son écart-type $\sigma_i = \sigma(R_i)$.

Hypothèse 2 : Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles ($\sigma_{i,j} \neq 0$).

Hypothèse 3 : Les marchés sont parfaits : toutes les conditions pour que les prix correspondent à la réalité du moment sont réunies. L'entrée et la sortie sont libres et sans coût. L'information circule de manière totalement transparente. La concurrence est parfaite entre les acteurs composant le marché.

Les hypothèses relatives aux comportements des investisseurs :

Hypothèse 1 : Le comportement des investisseurs est caractérisé par un degré plus au moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'ecart-type de la distribution de la probabilité du rendement.

Hypothèse 2 : Les investisseurs sont relationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence celle-ci, des choix strictement transitifs.

Hypothèse 3 : Tout les investisseurs ont de même horizon de décision, qui comporte une seule période. A partir des hypothèses, Markowitz propose un modèle de décision qui tient compte du caractère combinatoire du portefeuille.

1.6.2 Portefeuille optimal et frontière efficiente

Le problème posé par Markowitz est la recherche d'un portefeuille P composé de n actifs risqués, ayant respectivement des rendements R_i , $i = 1, \ldots, n$, suivant tous la loi normal. Chaque titre i est caractérisé par une espérance de rentabilité $\mu = E(R_i)$ et un écart-type σ_i. L'objectif de tout investisseur est de déterminer les proportions investies x dans les différents titres de telle sorte à minimiser la variance (risque) du portefeuille pour une rentabilité donnée μ_p^* [11]. Un portefeuille ayant ces caractéristiques est dit coefficient et il est déterminé en résolvant le problème quadratique (PQ) suivant :

$$\begin{cases} \min & \sigma_p^2 = x'\Sigma x \\ \underline{\text{s.c}} & \mu' x = \mu_p^* \\ & e'x = 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

où :

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ est le vecteur des proportions investies dans les n titres risqués.
$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)' \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des rendements espérés des différents titres
$e = (1, 1, \ldots, 1)$ est un n-vecteur formé de 1.
σ_P^2 est la variance (risque) du portefeuille.
μ_P est le rendement du portefeuille.

Dans la pratique, nous cherchons pas un seul portefeuille, mais tous les portefeuilles qui pour une espérance donnée minimisent la variance [13].

Frontière efficiente :

Au vue des caractéristiques de ce programme nous allons recourir encore aux multiplicateurs de Lagrange :

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = x'\Sigma x - \lambda_1 (\mu' x - \mu_p) - \lambda_2 (e'x - 1)$$

Nous allons annuler les dérivées partielles respectivement de la fonction de Lagrange par rapport aux différentes variables, avec : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes du PQ (1.6.2).

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\Sigma x - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0. \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x'\mu - \mu_p = 0. \tag{1.5}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = e'x - 1 = 0 \tag{1.6}$$

Ici également nous allons d'abord déterminer une expression de x en fonction de λ_1 et λ_2, ensuite nous allons l'implémenter dans les équations comme ceci :

$$x = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1 \mu + \lambda_2 e)$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1 \mu' \Sigma^{-1} \mu + \frac{1}{2}\lambda_2 \mu' \Sigma^{-1} e = \mu_p$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1 \mu' \Sigma^{-1} e + \frac{1}{2}\lambda_2 e' \Sigma^{-1} e = 1$$

Pour venir à bout de ce système, nous allons d'abord définir :

$$A = e'\Sigma^{-1}\mu = \mu'\Sigma^{-1}e, B = \mu'\Sigma^{-1}\mu, C = e'\Sigma^{-1}e$$

Pour rendre le reste des opérations plus conviviable :

$$\begin{cases} B\lambda_1 + A\lambda_2 & = 2\mu_p \\ A\lambda_1 + C\lambda_2 & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ A & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mu_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ceci devient une identité de l'algèbre linéaire bien connue.

$$Mx = b \Rightarrow x = M^{-1}b, \text{ pour } M = \begin{pmatrix} B & A \\ A & C \end{pmatrix},$$
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} B & A \\ A & C \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{BC - A^2} \begin{pmatrix} C & -A \\ -A & B \end{pmatrix}$$

Selon la méthode des cofacteurs et $b = 2 \begin{pmatrix} \mu_p \\ 1 \end{pmatrix}$. En posant $D = BC - A^2$ nous obtenons finalement :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{D} \begin{pmatrix} C & -A \\ -A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_p \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{D} \begin{pmatrix} C\mu_p & -A \\ -A\mu_p & B \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que :

$$\lambda_1 = 2\frac{-A + C\mu_p}{D}, \text{ et } \lambda_2 = 2\frac{B - A\mu_p}{D}$$

Nous allons remplacer ces expressions dans l'expression de x précédemment définie et on aura :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left(\lambda_1\mu + \lambda_2 e\right) \\ &= \frac{1}{2}\Sigma^{-1}\left[2\left(\frac{-A + C\mu_p}{D}\right)\mu + 2\left(\frac{B - A\mu_p}{D}\right)e\right] \\ &= \frac{1}{D}\Sigma^{-1}\left[\left(-A + C\mu_p\right)\mu + \left(B - A\mu_p\right)e\right] \\ &= \frac{1}{D}\Sigma^{-1}\left[(-A\mu + Be) + (C\mu - Ae)\mu_p\right] \\ &= \frac{1}{D}\Sigma^{-1}(-A\mu + Be) + \frac{1}{D}\Sigma^{-1}(C\mu - Ae)\mu_p \end{aligned}$$

Nous pouvons finalement conclure que :

$$x = E\mu_p + F$$

avec :

$$E = \frac{1}{D}\Sigma^{-1}(C\mu - Ae) \text{ et } F = \frac{1}{D}\Sigma^{-1}(-A\mu + Be)$$

Maintenant nous pouvons exprimer notre fonction de frontière efficiente qui n'est en fait qu'une expression de σ_p^2 en fonction μ_p :

$$\sigma_p^2\left(\mu_p\right) = x\left(\mu_p\right)' \Sigma^{-1} x\left(\mu_p\right) \tag{1.7}$$

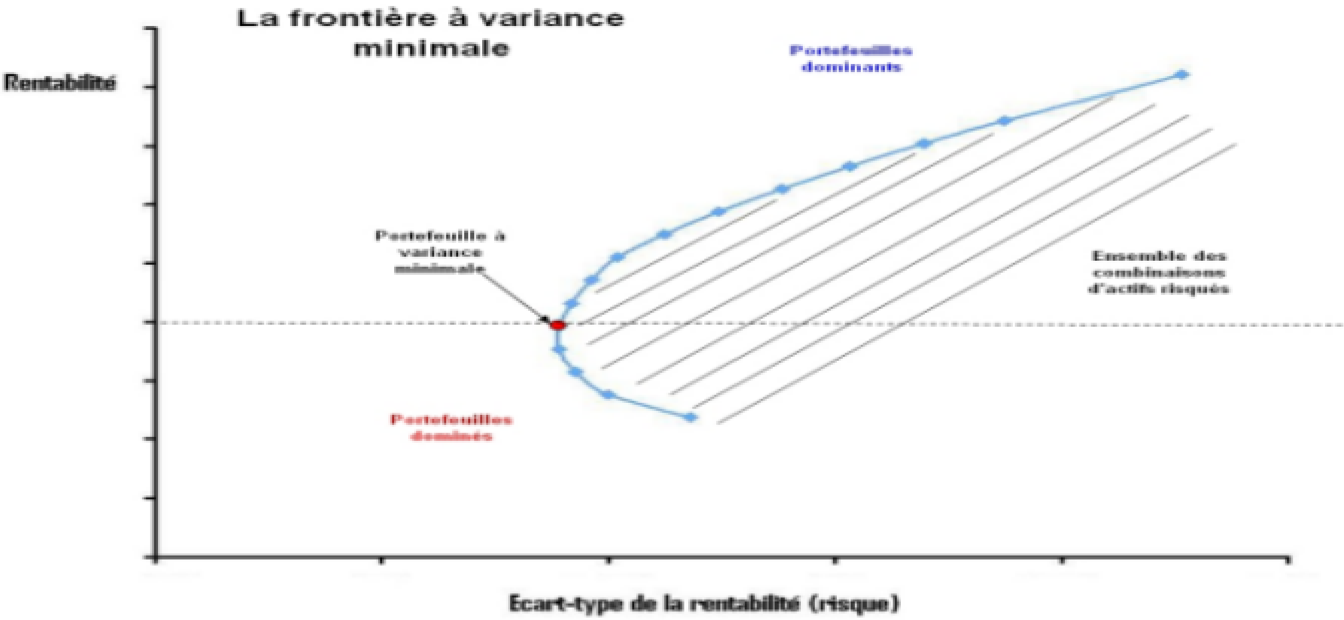

FIGURE 1.2 – La frontière efficiente

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les bases théoriques essentielles de la gestion de portefeuille. Nous avons présenté plusieurs concepts clés ainsi que des évaluations liées aux risques. Ensuite, nous nous sommes concentrés sur la reconnaissance des modèles de Markowitz et leur examen.

Le chapitre suivant sera consacré à la présentation de la méthode du support addaptée au problème quadratiques.

2

Méthode directe de support pour un problème de programmation quadratique convexe

Introduction

La Méthode de Support Direct (MDS) pour les problèmes de programmation convexe linéaire et quadratique constitue une extension élargie de l'algorithme du simplexe. Cette méthode intègre une métrique propre à un simplexe, permettant ainsi qu'un unique indice non basique puisse être modifié à chaque itération[18].

Le processus itératif de la méthode MDS englobe deux aspects essentiels : la détermination de la direction d'amélioration ainsi que le choix optimal des pas. Ce faisant, elle optimise les variables dans cette direction spécifiée. Cette approche lui permet de générer un ensemble fini de points réalisables, lesquels convergent vers la solution optimale du problème visé.

Dans ce chapitre, nous exposons l'algorithme MDS de résolution de problème Quadratique (PQ). Nous l'ajustons ensuite pour résoudre le problème d'optimisation d'un portefeuille financier.

2.1 Notions sur la convexité

La convexité joue un rôle central dans la théorie classique de l'optimisation. Elle représente un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité[4].

2.1.1 Ensemble convexe

Définition 2.1. Un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0.1], \lambda x + (1-\lambda) y \in X$$

Autrement dit, un ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est convexe, si $\forall x, y \in X$, le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans X :

$$\forall x, y \in S \Rightarrow [x, y] \subset X$$

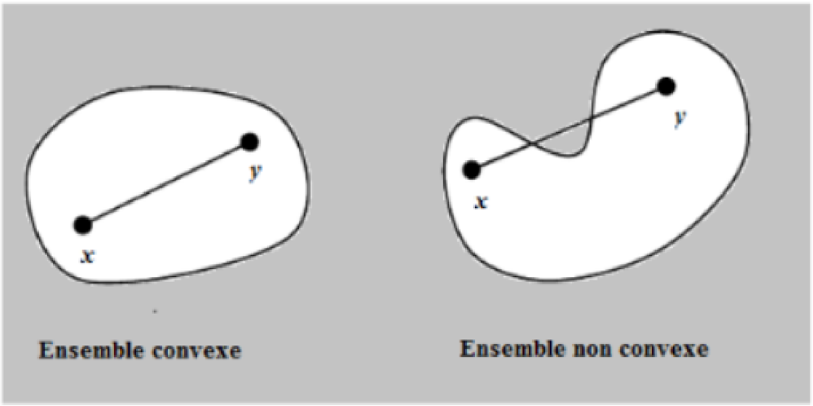

FIGURE 2.1 – Ensemble convexe et non convexe

Proposition 1. *: Soit S_1 et S_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$:*

- ✓ *L'ensemble $\alpha S_1 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha x, x \in S_1\}$ est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
- ✓ *L'ensemble $S = \alpha S_1 + \beta S_2$ est un ensemble convexe pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
- ✓ *Toute intersection d'ensembles convexes est convexe.*
- ✓ *L'image d'un sous-ensemble convexe par une application linéaire est convexe.*
- ✓ *Tout produit cartésien d'ensembles convexes est convexe.*

Fonctions convexes

Définition 2.2. Une fonction réelle F définie sur un ensemble convexe X de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe, si $\forall x, y \in X$, et $\forall \lambda \in [0, 1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) \tag{2.1}$$

Autrement dit, une fonction F est convexe si et seulement si, le segment reliant tout couple de points situés sur la courbe définie par la fonction F est situé au-dessus de cette courbe

[18].
La fonction F est dite strictement convexe si l'inégalité (2.1) est stricte, c'est à dire :

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

avec : $x \neq y, \lambda \in]0,1[$
Une fonction F est dite concave si $(-F)$ est convexe, autrement dit :

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \tag{2.2}$$

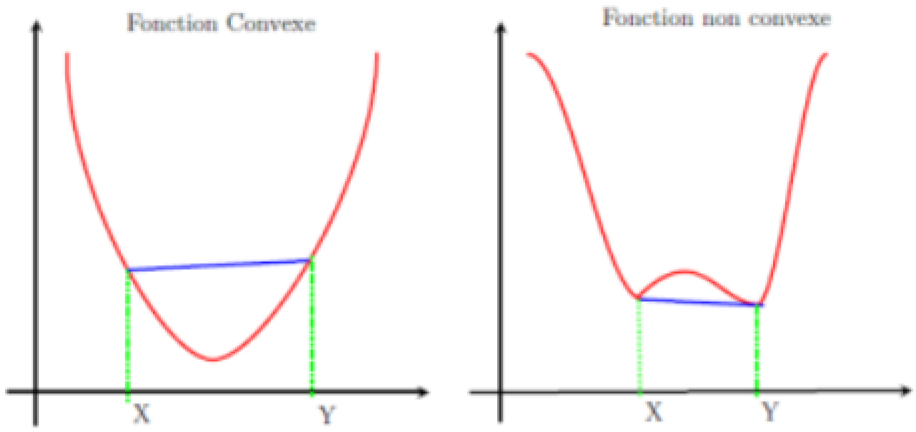

FIGURE 2.2 – Fonction convexe et non conevexe

Définition 2.3. Une fonction vectorielle $F : X \to \mathbb{R}^n$, telle que :$F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est convexe si chacune de ses composantes f_i est convexe [5] .

- Toute fonction linéaire est à la fois convexe et concave.
- La somme de fonctions convexes est une fonction convexe.

2.1.2 Propriétés des fonctions convexes

Proposition 2. *:*

- *Soit une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \in \mathbb{R}^n$ alors f est convexe ssi :*
$$epi(f) = (x, r) : x \in X, r \geq f(x) \subset \mathbb{R}^n$$
- *Soit une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \in \mathbb{R}^n$ alors f est convexe ssi :*
$$f(\sum_{X=1}^{n} \lambda_i S_i) \leq \lambda_i(\sum_{k=1}^{n} f(S_i))$$

où $S_i \in X, i = 1, 2, \ldots, p; \sum \lambda_i = 1$

— *Soit une fonction réelle de classe* C^1 *définie sur un ensemble convexe* $X \in \mathbb{R}^n$, *alors* f *est convexe ssi :*

$$f(y) - f(x) \geq (x - y)' \bigtriangledown f(x), \forall x, y \in X$$

— *Soit une fonction réelle de classe* C^2 *définie sur un ensemble convexe* $X \in \mathbb{R}^n$, *alors* f *est convexe ssi :*

$$(y - x)' H(x)(y - x) \geq 0, \forall x, y \in C$$

— *Si* $X \in \mathbb{R}^n$ *est un ouvert convexe, alors* f *est convexe ssi :*

$$H(x) \geq 0, \forall x \in C$$

— *Le vecteur* $\ell \in \mathbb{R}^n, \ell \neq 0$ *est appelé direction admissible en point* $x \in S$, *s'il existe un réel,* $\alpha > 0$ *tel que* $x + \theta\ell \in S, \forall\theta \in [0, \alpha]$, *si* x *est un point intérieure alors, toutes les directions sont admissibles.*

Avec H *représente le Hessien de* f.

2.2 Propriétés des formes quadratiques

2.2.1 Représentation d'une forme quadratique

Définition 2.4. Une forme quadratique de dimension n est une fonction réelle de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ayant la forme suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{2.3}$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ est un n-vecteur et $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ une matrice carrée d'ordre n. Pour $i \neq j$, le coefficient du terme $x_i x_j$ s'écrit $a_{ij} + a_{ji}$. En vertu de cela, la matrice A peut-être supposée symétrique. En effet, en définissant de nouveaux coefficients :

$$D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n) \text{ avec }, d_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$$

Il est clair qu'après une redéfinition des coefficients, la valeur de la forme quadratique $F(x)$ reste inchangée pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(x) = x'Ax = x'Dx$$

2.2.2 Gradient d'une forme quadratique

Définition 2.5. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continûment différentiable, son gradient au point x est défini par :

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Soit F une forme quadratique et D sa matrice symétrique associée :

$$F(x) = x'Dx \tag{2.5}$$

En écrivant la matrice D sous forme de vecteurs colonnes :

$$D = (d_1, d_2, ..., d_n) \tag{2.6}$$

L'expression (2.5) peut se mettre sous la forme suivante :

$$F(x) = (x_1, x_2, ...x_j, ..., x_n) \begin{pmatrix} d_1'x \\ d_2'x \\ \vdots \\ d_j'x \\ \vdots \\ d_n'x \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j d_j' x_j$$

La dérivée partielle de F par rapport à chaque variable x_j est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= x_1 d_{1j} + ... + x_{j-1} d_{j-1}(j) + d_j'x + x_j d_{jj} + ...x_n d_{nj} \\ &= x_1 d_{1j} + ... + x_{j-1} d_{j-1}(j) + x_j d_{jj} + x_n d_{nj} + ... + x_n d_{nj} + d_j'x \\ &= 2d_j'x \end{aligned} \tag{2.7}$$

Par conséquent, le gradient de $F(x)$ est :

$$\nabla F(x) = 2Dx \tag{2.8}$$

Définition 2.6. Soit une fonction réelle de classe C^2, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Le Hessien de la fonction F est défini par :

$$\nabla^2 F(x) = (\nabla \frac{\partial F}{\partial x_1}, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \nabla \frac{\partial F}{\partial x_j}, ..., \nabla \frac{\partial F}{\partial x_n}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Définition 2.7. Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. La dérivée directionnelle de F dans la direction d au point x est :

$$\frac{\partial F}{\partial d} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x+td) - F(x)}{t} = \frac{\partial F(x+td)}{\partial x_1}|_{t=0} d_1 + ... + \frac{\partial F(x+td)}{\partial x_n}|_{t=0} d_n = \nabla F(x)'^d$$

2.2.3 Forme quadratique définie et semi-définie positive

Soit $F(x) = x'Dx$ une forme quadratique avec D symétrique.

Définition 2.8. $F(x)$ est dite définie positive si :

$$x'Dx > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et $x \neq 0$,elle est dite semi-définie positive ou définie non négative si : $x'Dx \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

Définition 2.9. $F(x)$ est dite définie négative si :

$$x'Dx < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et $x \neq 0$, elle est dite semi-définie négative ou définie non positive si :

$$x'Dx \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

.

Forme quadratique définie positive

Une matrice symétrique D est dite matrice définie positive (non négative) et on note $D > 0, (D \geq 0)$ si elle est associée à une forme quadratique définie positive (non négative).

2.3 Méthode directe de support

2.3.1 Position du problème

Considérons le problème de programmation quadratique convexe suivant :

$$\begin{cases} \min & F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x \\ & \\ \text{s. c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

où :

— $D' = D \geq 0; b \in \mathbb{R}^n$; $c \in \mathbb{R}^n$
— A est une matrice de dimension $(m \times n)$, avec $rang(A) = m < n$.
— $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ est l'ensemble d'indices des lignes de A.
— $J = \{1, 2, \cdots, n\}$ est l'ensemble d'indices des colonnes de A, tel que $J = J_B \cup J_N$.
— J_B est l'ensemble d'indices des variables basiques, tel que $|J_B| = |I| = m$.
— J_N est l'ensemble d'indices des variables hors-base .

Définition 2.10.

1. Un vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ vérifiant les contraintes du problème (2.10) est appelé solution réalisable (SR).

2. Une solution réalisable x^* est dite optimale si :

$$F(x^*) = \frac{1}{2}(x^*)'D(x^*) + c'(x^*) = \min_x(\frac{1}{2}x'Dx + c'x) \tag{2.11}$$

3. Une solution réalisable x est dite sub-optimale ou ϵ-optimale si elle vérifie :

$$F(x^\epsilon) - F(x^*) \leq \epsilon \tag{2.12}$$

   où x^* est une solution optimale du problème (2.12) et ϵ est un nombre arbitraire positif ou nul, choisi comme précision par l'utilisateur.

4. L'ensemble d'indices des variables basiques J_B est appelé support de base du problème (2.10) si :

$$det(A_B) = det A(I, J_B) \neq 0 \tag{2.13}$$

5. Le couple $\{x, J_B\}$ formé de la solution réalisable x et du support des contraintes J_B est appelé solution réalisable de support (SRS).
6. Une SRS $\{x, J_B\}$ est dite non dégénérée si les composantes basiques sont strictement positives, c'est-à-dire :

$$x_j > 0, \forall j \in J_B$$

2.3.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (2.10). Considérons une autre (SR) (solution réalisable) quelconque : $\bar{x} = x + \Delta x$, L'accroissement de la fonction objectif peut s'écrire comme suit :

$$F(x) = c'x + \frac{1}{2}x'Dx \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) = F(\bar{x} + \Delta x) &= c'(x + \Delta x) + \frac{1}{2}(x + \Delta x)'D(x + \Delta x) \\ &= c'x + \frac{1}{2}x'Dx + c'\Delta x + x'D\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x) \\ &= F(x) + (c + \Delta x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x) \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = g'(x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x) \tag{2.16}$$

ou :

$$g(x) = Dx + c$$

est le gardient de F au point x, avec

$$g(x) = g(J) = \begin{pmatrix} g_B \\ g_N \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

De plus, nous avons :

$$\begin{cases} Ax = b \\ A\bar{x} = b \end{cases} \tag{2.18}$$

donc,

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= A(x + \Delta x) \\ &= Ax + A\Delta x \\ &= b \\ &\Longrightarrow A\Delta x = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

et en fractionnant le vecteur Δx comme suit :

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_N \end{pmatrix}, \Delta x_B = \Delta x(J_B), \Delta x_N = \Delta x(J_N) \tag{2.20}$$

Alors, on peut écrire :

$$A\Delta x = A_B \Delta x_B + A_N \Delta x_N = 0 \quad \Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N. \tag{2.21}$$

En utilisant l'expression (2.21), l'accroissement (2.16) devient :

$$\begin{aligned}
F(\bar{x}) - F(x) &= g'_B \Delta x_B + g'_N \Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_B, \Delta x_N)' D \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_N \end{pmatrix} \\
&= g'_B A_B^{-1} A_N \Delta x_N + g'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \Delta x_N \\ \Delta x_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \Delta x_N \\ \Delta x_N \end{pmatrix} \\
&= (-g'_B A_B^{-1} A_N + g'_N) \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x'_N \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} A_B^{-1} A' N \\ I_N \end{pmatrix} \Delta x_N \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Où :

$$I_N = I(J_N, J_N)$$

est une matrice d'identité d'ordre $(n-m)$. Posons :

$$Z = Z(J, J_N) \quad = \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Et

$$M = M(J_N, J_N) = Z' D Z \tag{2.24}$$

On définit le vecteur des potentiels par :

$$u' = g'_B A_B^{-1} \tag{2.25}$$

Et le vecteur des estimations E comme suit :

$$\begin{aligned}
E' = E'(J) = g' - u'A = (E'_B, E'_N), \\
avec : E'_B = g'_B - u' A_B = 0 \\
E'_N = g'_N - u' A_N \Rightarrow E'_j = g' - u' A_j, j \in J_N
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Donc la formule d'accroissement (2.16) prend la forme finale suivante :

$$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x'_N M \Delta x_N. \tag{2.27}$$

2.3.3 Critère d'optimalité

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2.27), et remarquons que $M \geq 0$ on obtient le théorème suivant :

Théorème

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2.10). Alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j \geq 0 & si\ x_j = 0 \\ E_j = 0 & si\ x_j > 0,\ j \in J_N \end{cases} \tag{2.28}$$

sont suffisantes pour l'optimalité du point x. Ces relations sont aussi nécessaires, dans le cas où la SRS est non-dégénéré [7] .

2.3.4 Critère de suboptimalité

Pour une SRS $\{x, J_B\}$, remplaçant dans la formule de l'accroissement (2.27), x par une solution optimale x^* , et en minorant l'expression, on aura :

$$\begin{aligned} F(x^*) - F(x) &= E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta x'{}_N M \Delta x_N \\ &= \sum_{j \in J_N} E_j(x_j^* - x_j) + \frac{1}{2}\Delta x'_N M \Delta x_N \\ &\geq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j^* - x_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) - F(x^*) \leq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j - x_j^*) \tag{2.29}$$

Puisque x^* est réalisable et optimale, alors on aura $E_N \geq 0$ et par conséquents on aura :

$$\begin{aligned} -x_j^* &\leq 0 \\ &\Rightarrow x_j - x_j^* \leq x_j \\ &\Rightarrow E_j(x_j - x_j^*) \\ &\Rightarrow E_j(x_j - x_j) \leq E_j x_j \end{aligned}$$

d'où :

$$F(x) - F(x^*) \leq \sum_{j \in J_N} E_j x_j = \beta(x, J_B) \tag{2.30}$$

$\beta(x, J_B)$ appelé l'estimation de suboptimalité de la SRS (x, J_B)

Condition suffisante de suboptimalité

Soit x, J_B un plan de support des contraintes du problème (2.3) et ϵun nombre positif ou nul arbitraire. Si $\beta(x, J_J) \leq \epsilon$, alors le plan x est $\epsilon - optimal$

2.3.5 Construction de l'algorithme de résolution

Avant de présenter l'algorithme de résolution, donnons quelques définitions essentielles :

Définition 2.11. (Support de la fonction objectif), l'ensemble des indices $J_S \subset J_N$ est appelé support de la fonction objectif F si :

$$det(M_S) = detM(J_S, J_S) > 0, M = Z'DZ$$

Définition 2.12. (Support du problème), l'ensemble des indices $J_P = \{J_B, J_S\}$ est appelé support du problème (2.10), ou J_B est le support des contraintes et J_S est le support de la fonction objectif.

Définition 2.13. (Plan de support), On appelle plan de support du problème (2.10), la paire $\{x, J_P\}$ formée du plan x et du support J_P. il est dit accordé si $E_S = E(J_S) = 0$

2.3.6 Construction d'une direction d'amelioration adaptée

La détermination d'une direction d'amélioration pour la méthode de support est basée sur la métrique du simplexe, mais les plans de support admettent encore d'autres métriques pour les directions de descente.
Considérons la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$x_j + l_j \geq 0 \Rightarrow l_j \geq -l_j, j \in J_{NN} = J_N \backslash J_S \tag{2.31}$$

Cette métrique dépend du plan courant x et de ce fait, elle est dite adaptée.
Afin de calculer les composantes de la direction admissible d'amélioration l, considerons l'accroissement :

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x+l) - F(x) \\ &= \sum_{J \in J_N, E_j \geq 0} E_j lj + \frac{1}{2} l'_n M \, l_N \end{aligned} \tag{2.32}$$

En tenant compte de la métrique (2.31), la partie linéaire de ΔF atteint son minimum pour les valeurs des composantes de l_{NN} suivantes :

$$l_j = \begin{cases} -signE_j & , \; si \quad E_j < 0 \\ -x_J & , \; si \quad E_j \geq 0. \end{cases} \quad , \forall \quad J \in J_{NN} \tag{2.33}$$

Nous calculons la composante l_S de manière à assurer que $\bar{x}$ soit aussi un plan accordé, i,e :

$$\bar{E}_j = E_j(x + \theta l) = 0, \quad j \in J_S.$$

Donc :

$$M(J_S, J_S) l(J_S) + M(J_S, J_{NN}) l(J_{NN}) = 0$$

d'où :

$$l_S = -M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}) \tag{2.34}$$

Puis, nous calculons l_B à partir de la relation $Al = 0$, ce qui nous donne :

$$l_B = -A_B^{-1}(A_S l_S + A_{NN} l_{NN}). \tag{2.35}$$

Par conséquent, la direction de descente l est entiérement déterminée par les relations suivantes :

$$\left[\begin{array}{lll} l_j & = \left\{\begin{array}{ccc} -signE_j & , si & E_J < 0 \\ -x_j & , si & E_j \geq 0. \end{array}\right. & , pourtout \quad J \in J_{NN} \\ & & \\ l_S & = -M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}) & \\ l_B & = -A_B^{-1}(A_S l_S + A_{NN} l_{NN}) & \end{array}\right. \tag{2.36}$$

2.3.7 Changement de plan

On construit alors un nouveau plan $\bar{x}$ sous la forme :

$$\bar{x} = x_j + \theta^0 l_j, \quad j \in J_B \tag{2.37}$$

où l est la direction d'amélioration définie précédemment et le nombre positif θ^0 est le pas le long de cette direction, avec :

$$\theta^0 = min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}.$$

Les nombres 1, θ_{j_1},θ_{j_s} se calculent de façon à ce que les contraintes directes sur le vecteur $\bar{x}$ soient vérifiées :

$$\theta l_j \geq -x_j, j \in J_B \Rightarrow \theta \geq \frac{-x_j}{l_j} \tag{2.38}$$

En calculant les différentes valeurs maximales que peut prendre les pas θ dans ces relations, on aura :

$$\theta_{j_1} = min\{\theta_j, j \in J_B\}, avec \quad \theta_j = \left\{\begin{array}{cc} \frac{-x_j}{l_j}, & si \quad l_j < 0 \\ \infty, & \text{Sinon} \end{array}\right. \tag{2.39}$$

Le nombre $\theta^0 = 1$ représente le pas correspondant aux indices de J_{NN} . Quant à θ_F , il se calcule de façon est ce que le passage de x à $\bar{x}$ puisse assurer une diminution maximale de la fonction objectif, tout en gardant le même signe pour les E_j et $\bar{E}_j$ où : $E'_N = (g(x))'Z$ et $\bar{E}'_N = (g(x + \theta^0 l))'Z$

Finalement, nous avons :

$$\bar{E_N} = E_N + \theta^0 M l_N = E_N + \theta^0 \delta_N.$$

On posera donc $\theta_F = \sigma_{j_*} = min\, \sigma_j, j \in J_{NN}$, avec :

$$\theta_F = \sigma_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{\delta_j}, & si \quad E_j\delta_j < 0 \\ \infty, & sionon. \end{cases} \quad , \quad \delta_j = M(j, J_N)l_N.$$

(2.40)

Nous devons prendre le pas θ^0 comme suit :

$$\theta^0 = min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \sigma_{j_*}\}$$

Le nouveau plan est :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l$$

Estimation de suboptimalité

Calculons la nouvelle estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B)$ en fonction de $\beta(x; J_B)$:

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \bar{E}_j(\bar{x}_j) = \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \bar{E}_j x_j + \theta^0 l_j$$

$$= \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} (\bar{E}_j + \theta^0\delta_j)(x_j + \theta^0 l_j)$$

$$= \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \bar{E}_j(\bar{x}_j) + \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \bar{E}_j\theta^0 l_j + \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \theta^0\delta_j(x_j) + \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \theta^0\delta_j\theta^0 l_j$$

En vertu des relations (2.33), on aura alors :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} -\theta^0\delta_j x_j + \theta^0 \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \delta_j(-l_j) + \theta^{0^2} \sum_{\substack{j\in J_N \\ \bar{E}_j>0}} \delta_j(l_j) \tag{2.41}$$

Méthode adaptée pour un problème de programmation quadratique convexe :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0\beta(x, J_B) - \theta^0\delta'_N l_N.$$

Donc on obtient la formule suivante :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) - \theta^0(1 - \theta^0)l'Dl. \tag{2.42}$$

Si $E'_N \ngeq 0$ et $\beta(x, J_B) > \epsilon$ alors le plan $\bar{x}$ est ϵ-optimal et nous pouvons arreter l'algorithme ; sinon, on procèdera au changement du support.

Changement de support :

Si $E'_N \not\geq 0$ et $\beta(x, J_B) > \epsilon$, nous allons changer le support J_P par un nouveau supoport $\bar{J}_P$ de la manière suivante :

Si $\theta^0 = 1$, alors le vecteur $x^0 = x + l$ est une solution optimale du problème (2.10).

Si $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$ contreirement à la méthode de simplexe, le choix de l'indice j_0 n'est pas unique, ce qui fait la particularité de cette méthode. lorsque ce cas se réalise pour un indice $j_1 \in J_B$, nécessairement on a :

$$l_{j_1} = -\sum_{j \in J_N} e'_{j_1} A_B^{-1} a_j l_j = -\sum_{j \in J_N} z_{j_1}, \quad l_j \neq 0 \tag{2.43}$$

où :

e_{j_1} est un vecteur unitaire de dimension m dont la composante j_1 vaut 1 et $z_{j_1,j} = Z(j_1, j)$, où Z est définie par la relation (2.3.2),(2.3.2).
Il existe alors $j_0 \in J_N$ tel que $z_{j_1} \neq 0$.
Cette dernier condition nous assure par conséquent que :

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash j_1) \cup j_0$$

est bel et bien un support.
Si on peut avoir $z_{j_1} \neq 0$ avec $j_0 \in J_S$, on posera donc :

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash j_1, \quad \bar{J}_S \backslash j_0).$$

Sinon, on choisira un indice $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_0 \neq 0$, alors :

$$\bar{J}_B = (_B \backslash j_1), \quad \bar{J}_S = J_S$$

Si $\theta^0 = \theta_{j_s}$, alors :

$$\bar{J}_B = J_B \quad \bar{J}_S = J_S \backslash j_s$$

Si $\theta^0 = \theta_F = \sigma_{j_*}$, alors :

$$\bar{J}_B = J_B, \quad \bar{J}_S = J_S \cup j_*$$

Nous commencerons alors **une nouvelle** itération avec le nouveau plan de support $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$, si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \geq \epsilon$.
Où le support $\bar{J}_P$ satisfait les conditions algébriques :

$$det\bar{A}_B = detA(I, \bar{J}_B) \neq 0, et \quad detM(\bar{J}_S, \bar{J}_S)$$

.

Algorithme 1 Algorithme de support quadratique

Etape 01 : Initialisation : Soit $\{x, J_P\}$, une SRS telle que $J_P = \{J_B, J_P\}$, $\epsilon \geq 0$ est un nombre quelconque. on pose $J_S = \emptyset$.
Calculer le vecteur des estimations : $E'_N = g'\mu' A$, avec : $\mu = g'_B A_B^{-1}$
Etape 02 : Test d'optimalté de la SRS $\{x, J_P\}$: ,
si $(E_N \geq 0)$ **alors**
Calculer $\beta(x, J_B) = \sum_{J \in J_{NN0}} E_j x_j$
finsi
si $(\beta(x, J_B) \leq \epsilon)$ **alors**
x est ϵ-optimale, et on arrete.
sinon
Aller à (etape 03)
finsi
Aller à (etape03),
Etape 03 :
.Amélioration de la SR x :
.Déterminer l'ensemble des indices non optimaux J_{NN0}
.Choisire l'indice j_0, tel que :$|E_{j_0}| = \max_{j \in J_{NN0}} |E_j|$.
Calculer la direction d'amélioration $(J) = (l_B, l_S, l_{NN})$.
Calculer le pas $\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$
si $(\theta^0 = \infty)$ **alors**
Le problème n'est pas borné, et on arrete le processus.
sinon
calculer $\bar{x} = x + \theta l$, et $F(\bar{x})$,
finsi
Etape 04 :
Test d'optimamité de la nouvelle solution x,
Calculer $\bar{E_N} = E_N + \theta^0 M l_N$.
si $(\bar{E_N} \geq 0)$ **alors**
Calculer $\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_{NN0}} \bar{E_j}(\bar{x_j})$.
si $(\beta(\bar{x}, J_B) \leq \epsilon)$ **alors**
x est ϵ-optimale,et on arrete.
sinon
Aller à (etape 05).
finsi
sinon
Aller à (etape 5)
finsi
Etape05 : Changement du support :
si $(\theta^0 = \theta_{j_0})$ **alors**
$\bar{J_B} = J_B, \bar{J_S} = J_S, \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\}$
finsi
si $(\theta^0 = \theta_{j_S})$ **alors**
$\bar{J_B} = J_B, J_S = (J_S/j_s), \bar{J_P} = \{\bar{J_B}\bar{J_S}$
finsi
si $(\theta^0 = \theta_F)$ **alors**
$\bar{J_B} = J_B,\ \bar{J_S} = (J_S \cup j_S),\ \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\}$
finsi
si $(\theta^0 = \theta_{j_1})$ **alors**
$\bar{J_B} = (J_B/j_1) \cup j_0,\ \bar{J_S} = J_S, \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\}$
finsi
Poser $x \longleftarrow \bar{x}, J_P \longleftarrow \bar{J_P}$, et aller à (Etap02).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné la méthode adaptée pour traiter un problème associé à la Programmation Quadratique Convexe (PQC). Nous avons exposé les caractéristiques inhérentes aux formes quadratiques, ainsi que les principes fondamentaux de la programmation convexe. De plus, nous avons introduit des concepts élémentaires en lien avec ce sujet.
Au cours de chapitre prochain, nous allons utilisé ces concepts pour la résolution du problème de portefeuille financière.

3

Méthode de résolution

Introduction

Dans ce chapitre, on applique la méthode de support pour la résolution du problème de gestion du portefeuille avec des contraintes linéaires générales. La recherche de la frontière efficiente pour ce cas revient à résoudre un problème quadratique paramétrique (PQP), avec le paramètre d'aversion au risque t. La résolution de ce PQP se fait en deux phases, dont la première permet de calculer le portefeuille de variance minimale qui correspont à $t = 0$, et ce appliquant la méthode support (MDS) du chapitre précèdent. La phase 2 permet de trouver itérativement le reste des portefeuilles efficients.

3.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, on présente la méthode de support pour la résolution du problème de gestion de portefeuille sous contraintes linéaires générales et la contrainte d'absence de ventes à découvert. Ce problème est alors modélisé par un PQP convexe ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \min\limits_{x} \;\; f(x) = \dfrac{1}{2}x'\Sigma x - t\mu' x \\ s.c \;\; Ax = b \\ \qquad x \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour ce problème, la signification des différentes entités sont les suivantes :

- Σ : est une matrice carrée de variance-covariance de dimension n, symétrique et semi-définie positive.
- μ : est un n vecteur des rendements espérés des n titres financiers risqués .

- t : est le paramètre d'aversion du risque, avec $t \geq 0$.
- x : un n-vecteur des proportions investies dans chaque titre risqué.
- A : une $m \times n$- matrice incluant la contrainte d'investissement totale $e'x = 1$, tel que $rang\ (A) = m < n$ et e est un n-vecteur formé de 1.

3.2 Résolution du problème

Pour résoudre le problème précédent, la démarche a suivre est :

— On pose $t = 0$ on résoud le problème (3.1) avec la méthode de support décrite dans le chapitre précedent.
Soit $\{x^0, J_P^0\}$ la SRS optimale obtenue du problème, avec $J_P^0 = \{J_B^0, J_S^0\}$. Cette dernière, nous permet de déterminer le portefeuille de variance minimale.

— Pour $t > 0$, soit la fonction de Largrange associée au problème (3.1) :

$$L(x, y, v) = \frac{1}{2}x'\Sigma x - t\mu' x + y'(Ax - b) - v'x \tag{3.2}$$

où $v \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des multiplicateurs de **KKT** associés aux contraintes de non négativité ; y est un m-vecteur associé aux contraintes d'égalité (multiplicateur de Lagrange).
Comme Σ est semi-définie positive, alors le problème est convexe et par conséquent les conditions d'optimalité de **KKT** de premier ordre sont à la fois nécessaires et suffisantes [5] pour l'optimalité du point (x, y, v) vérifiant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x} = \Sigma x - t\mu + A'y - v = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial y} = Ax - b = 0, \quad x \geq 0 \\
&v'x = 0, \quad v \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Comme ce problème est un programme quadratique avec une **seule** contrainte, et afin d'appliquer la méthode adaptée pour sa résolution, alors nous suggérons la définition de support suivante :

Définition 3.1. Un sous-ensemble d'indices $J_B \subset J$, tel que $|J_B| = m$ est appelé support des contraintes du problème (3.1) si la sous-matrice associée $A_B = A(I, J_B)$ est non singulière.

Alors, on note par J_B l'ensemble des indices des variables basiques (de support), et par $J_N = \{J \backslash J_B\}$ l'ensemble des indices des variables hors base (hors support). Comme décrit dans le chapitre précèdent, considérons la matrice Hessienne réduite du problème donnée par :

$$M = Z'\Sigma Z, \quad \text{avec } Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix},$$

où I_N est la matrice identité d'ordre $n - m$.
Maintenant, on peut définir le support de la fonction objectif (super-base) de la manière suivante :

Définition 3.2. Un sous-ensemble d'indices $J_S \subset J_N$ est appelé support de la fonction objectif si la sous-matrice $M_S = M(J_S, J_S)$ est non singulière.

Pour une SRS $\{x, J_B\}$ du problème (3.1), on décompose l'ensemble des éléments basiques et non-basiques de notre système comme suit :
x$=\begin{pmatrix} x_B \\ x_S \\ x_{NN} \end{pmatrix}$, A$' = \begin{pmatrix} A_B \\ A_S \\ A_{NN} \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_B \\ \mu_S \\ \mu_{NN} \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_B & \sigma_{B,S} & \sigma_{B,NN} \\ \sigma_{S,B} & \sigma_S & \sigma_{S,NN} \\ \sigma_{NN,B} & \sigma_{NN,S} & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$

Le vecteur des coûts réduits :

$$E = \Sigma x - t\mu + A'y = (E_B, E_S, E_{NN})' \tag{3.4}$$

tels que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_B &=& \sigma_B x_B + \sigma_{BS} x_s + \sigma_{B,NN} x_{NN} - t\mu_B + A'_B y = 0, \\ E_S &=& \sigma_{SB} x_B + \sigma_S x_S + \sigma_{S,NN} x_{NN} - t\mu_S + A'_S y = 0, \\ E_{NN} &=& \sigma_{NN,B} x_B + \sigma_{NN,S} x_S + \sigma_{NN} x_{NN} - t\mu_{NN} + A'_{NN} y \end{array} \right.$$

Par construction, on a $E_B = 0$ et $E_S = 0$, et en multipliant par Z', on aura la relation suivante :

$$\begin{aligned} E_N &= Z'E \\ &= Z'\Sigma x - tZ'\mu + Z'A'y \\ &= Z'\Sigma Z x_N + A_B^{-1} - tZ'\mu \end{aligned} \tag{3.5}$$

Comme on a $Z'A' = 0$, et tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de la forme suivante :

$$x = Zx_N + A_B^{-1}b$$

Par conséquent l'expression finale de E_N sera :

$$E_N = Mx_N + A_B^{-1}b - tZ'\mu \tag{3.6}$$

Par construction, on a $E_S = 0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} E_S &= M(J_S, J_N)x_N + A_B^{-1}b - tZ'\mu = 0 \\ &= M(J_S, J_S)x_S + M(J_S, J_{NN})x_{NN} + A_B^{-1}b - tZ'\mu = 0 \\ &= M_S x_S + M_{S,NN} x_{NN} + A_B^{-1}b - tZ'\mu = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sachant que $x_{NN} = 0$, alors on aura :

$$\begin{aligned} x_S &= (M_S^{-1} Z'\mu)t - M_S^{-1}\Sigma(J, J_B)A_B^{-1}b \\ &= \alpha_1 t + \alpha_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

où les vecteurs α_1 et α_2 sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 = M_S^{-1} Z'\mu \\ \alpha_2 = -M_S^{-1}\Sigma(J, J_B)A_B^{-1}b \end{cases} \tag{3.9}$$

Pour calculer x_B, nous utilisons la relation $Ax = b$ et après décomposition on aura :

$$\begin{aligned} A_B x_B + A_S x_S + A_{NN} x_{NN} = b \\ x_B = -A_B^{-1} A_S x_S + A_B^{-1} b \end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant l'expression de x_S dans la relation précédente, on obtiendra l'expression finale de x_B :

$$\begin{aligned} x_B &= -A_B^{-1} + A_S(\alpha_1 t + \alpha_2) + A_B^{-1} b \\ &= -A_B^{-1} A_S \alpha_1 t + A_B^{-1} A_S \alpha_2 + A_B^{-1} b \\ &= \gamma_1 t + \gamma_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où les vecteurs γ_1 et γ_2 sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_1 = -A_B^{-1} A_S \alpha_1 \\ \gamma_2 = A_B^{-1} A_S \alpha_2 + A_B^{-1} b \end{cases} \tag{3.12}$$

Après avoir déterminé x_B et x_S, on peut maintenant calculer le vecteur des coûts réduits E_{NN} :

$$\begin{aligned} E_{NN} &= M x_N - tZ'\mu \\ &= M(J_{NN}, J_N)x_N - tZ'(J, J_{NN})\mu \\ &= M(J_{NN}, J_S)x_S + M(J_{NN}, J_{NN})x_{NN} + tZ'(J, J_{NN})\mu \\ &= M(J_{NN}, J_S)x_S + tZ'(J, J_{NN})\mu \\ &= \beta_1 t + \beta_2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

où les vecteurs β_1 et β_2 sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \beta_1 = M(J_{NN}, J_S)x_S \\ \beta_2 = Z'(J, J_{NN})\mu \end{cases} \tag{3.14}$$

3.2.1 Calcul du prochain point de rupture

Maintenant, on cherche la valeur du prochain point de rupture t^{k+1}. Sa valeur est calculée de telle sorte que tous les portefeuilles $x^k(t)$, $t^k < t \leq t^{k+1}$, restent optimales. Par conséquent, t^{k+1} est calculé par la relation suivante :

$$t^{k+1} = \min\{t^k_{j_1}, t^k_{j_s}, t^k_{j_0}\}, \tag{3.15}$$

où t_{j_1} et t_{j_s} sont calculés de tels sortes que les composantes $x^k_B(t)$ et $x^k_S(t)$ restent réalisables. Autrement dit, on les calcule respectivement par les formules suivantes :

On cherche les valeurs de t_{j_1} pour x_B , on a :

$$x^k_B(t) = \gamma^k_1 t + \gamma^k_2$$

$$x^k_j(t) = \gamma^k_{1j} t + \gamma^k_{2j} \geq 0, \gamma^k_{1j} \geq 0 \tag{3.16}$$

On a les cas suivants :

$$\begin{cases} \text{Si } \gamma^k_{j2} \geq 0, \text{ alors } x^k_j(t) \geq 0, \forall t \geq t^k \\ \text{Si } \gamma^k_{j2} < 0, \text{ alors } x^k_j(t) = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Pour

$$t = -\frac{\gamma^k_{2j}}{\gamma^k_{1j}}$$

$$t^k_{j_1} = \min_{j \in J^k_B}\{t^k_j\}, \quad \text{tel que } t^k_j = \begin{cases} \dfrac{-\gamma^k_{2j}}{\gamma^k_{1j}}, & \text{si } \gamma^k_{2j} < 0 \text{ et } t^k_j > t^k, \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.18}$$

On cherche aussi la valeur de t^k_{jS} pour lesquelles x^k_S, on a :

$$x^k_S(t) = \alpha^k_1 t + \alpha^k_2 \tag{3.19}$$

$$x^k_j(t) = \alpha^k_{1j} t + \alpha^k_{2j} \geq 0, \alpha^k_{1j} \geq 0 \tag{3.20}$$

On a les cas suivants :

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha^k_{j2} \geq 0, \text{ alors } x^k_j(t) \geq 0, \forall t \geq t^k \\ \text{Si } \alpha^k_{j2} < 0, \text{ alors } x^k_j(t) = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Pour

$$t = -\frac{\alpha^k_{2j}}{\alpha^k_{1j}}$$

D'où la valeur de $t^k_{j_S}$ est donné par l'expression suivante :

$$t^k_{j_S} = \min_{j \in J^k_S}\{t^k_j\}, \quad \text{tel que } t^k_j = \begin{cases} \dfrac{-\alpha^k_{2j}}{\alpha^k_{1j}}, & \text{si } \alpha^k_{2j} < 0 \text{ et } t^k_j > t^k, \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.22}$$

On cherche par la suite la valeur de t^k_{j0} pour $E^k_{NN} = \beta^k_1 t + \beta^k_2$, on a :

$$E^k_{NN}(t) = \beta^k_1 t + \beta^k_2 \tag{3.23}$$

$$E^k_j(t) = \beta^k_{2j} t + \beta^k_{2j} \geq 0, \beta^k_{1j} \geq 0 \tag{3.24}$$

On a les cas suivants :

$$\begin{cases} \text{Si } \beta^k_{j2} \geq, \text{ alors } x^k_j(t) \geq 0, \forall t \geq t^k \\ \text{Si } \beta^k_{j2} < 0, \text{ alors } x^k_j(t) = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Pour

$$t = -\frac{\beta^k_{2j}}{\beta^k_{1j}}$$

D'où la valeur de t_{j0} est donné par l'expression suivante :

$$t_{j_0} = \min_{j \in J^k_{NN}}\{t^k_j\}, \quad \text{tel que } t^k_j = \begin{cases} \dfrac{-\beta^k_{2j}}{\beta^k_{1j}}, & \text{si } \beta^k_{2j} < 0 \text{ et } t^k_j > t^k, \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.26}$$

On détermine le point de rupture $t^{k+1} = min\{t^k j_1, t^k j_S, t^k j_0\}$. Si $t^{k+1} = \infty$, alors on arrête l'algorithme, sinon on procède au changement de support en fonction des t_j de la manière suivante :

— Sinon on procède au changement de support en fonction des valeurs de t^{k+1} et ce j de la manière suivante :

— Si $t^{k+1} = t^{k\ k}_{j_1}$, alors on pose :

$$J^{k+1}_B = (J^k_B / j_1) \cup j_0$$

— Si $J^k_S = \phi$,

$$J^{k+1}_{NN} = (J^k_{NN} / j_0) \cup j_1, \ J^{k+1}_S = J^k_S$$

— Sinon

$$J_S^{k+1} = J_S^k / j_0^k; \;\; J_{NN}^{k+1} = J_{NN}^k \cup j_1$$

— Si $t^{k+1} = t_{j_S}$

$$J_B^{k+1} = J_B^k, \;\; j_S^{k+1} = J_S^k / j_S$$

— Si $t^{k+1} = t_{j_0}$

$$J_S^{k+1} = J_S \cup j_0; \;\; J_{NN}^{k+1} = J_{NN}^k / j_0^k; J_B^{k+1} = J_B^k$$

3.2.2 Détermination du rendement et la variance du portefeuille

Après avoir déterminé la valeur de t^{k+1}, on calcule le rendement du portefeuille μ_p^k et son risque associé $(\sigma_p^{k+1})^2$, puis on fait varier la valeurs de t dans l'intervalle $[t^k, t^{k+1}]$ et on trace la courbe de la frontière efficiente avec les proportions $x^k(t)$ obtenues.Soit :

$$x^k(t) = \begin{cases} x_B^k(t) = \gamma_1^k t + \gamma_2^k \\ x_S^k(t) = \alpha_1^k t + \alpha_2^k \\ x_{NN}^k(t) = 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

Alors le rendement espéré et le risque du portefeuille se calculent avec les formule suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_p^k &= \mu^{k\prime} x^k \\ &= \left(\mu_B^k, \mu_S^k, \mu_{NN}^k\right)' \begin{pmatrix} x_B^k(t) \\ x_S^k(t) \\ x_{NN}^k(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec $x_{NN}^k = 0$, alors :

$$\mu_p^k = x_B^k(t) \mu_B^{k\prime} + x_S^k(t) \mu_S^{k\prime} \tag{3.28}$$

on replace le x_B^k et x_S^k
donc on aura :

$$\begin{aligned} \mu_P^k &= \mu_B^{k\prime}(\gamma_1^k t + \gamma_2^k) + \mu_S^{k\prime}(\alpha_1^k t + \alpha_2^k) \\ &= \mu_B^{k\prime}\gamma_1^k t + \mu_B^{k\prime}\gamma_2^k + \mu_S^{k\prime}\alpha_1^k t + \mu_S^{k\prime}\alpha_2^k \\ &= T_1 t + T_2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec :

$$\begin{cases} T_1 = \mu_B^{k\prime}\gamma_1^k + \mu_S^{k\prime}\alpha_1^k \\ T_2 = \mu_B^{k\prime}\gamma_2^k + \mu_S^{k\prime}\alpha_2^k \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\sigma_P^k = x^{k\prime}\Sigma x^k \tag{3.31}$$

avec, $x^k = Zx_N^k$ alors

$$\begin{aligned} x^{k\prime}\Sigma x &= (Zx_N^k)'\Sigma Z' x_N^k \\ &= x'^k Z'\Sigma Z x_N^k \\ &= {x'_N}^k M^k x_N^k \end{aligned} \tag{3.32}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_P^k &= x^{k\prime}(t)\Sigma x^k(t) \\ &= \left(x_S^k, x_{NN}^k\right)' \begin{pmatrix} M_{SS}^k & M_{SNN}^k \\ M_{NNS}^k & M_{NN}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_S^k \\ x_{NN}^k \end{pmatrix} \\ &= \left(x'^k_S, 0\right)' \begin{pmatrix} M_{SS}^k & M_{SNN}^k \\ M_{NSS}^k & M_{NN}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_S^k \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(x_S^k M_{SS}^k, x_S^k M_{SNN}^k\right)' \begin{pmatrix} x_S^k \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x_S^{k\prime} M_{SS}^k x_S^k \end{aligned} \tag{3.33}$$

On a : $x_S^k(t) = \alpha_1^k t + \alpha_2^k$ Alors

$$(\sigma_P^k)2 = (\alpha_1^k t + \alpha_2^k)' M_{SS}^k (\alpha_1^t + \alpha_2^k) \tag{3.34}$$

$$= \alpha_1^{k\prime} M_{SS}^k \alpha_1^k t^2 + 2\alpha_1^{k\prime} M_{SS}^k \alpha_2^k t + \alpha_2^{k\prime} M_{SS}^k \alpha_2^k \tag{3.35}$$

$$= L_1 t^2 + L_2 + L_3 \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} L_1 = \alpha_1^{k\prime} M_{SS}^k \alpha_1^k \\ L_2 = 2\alpha_1^{k\prime} M_{SS}^k \alpha_2^k \\ L_3 = \alpha_2^{k\prime} M_{SS}^k \alpha_2^k \end{cases} \tag{3.37}$$

3.2.3 Algorithme adapté

Algorithme 2 Algorithme de MDS

Etape 1 : Initialisation :
$k = 0$,
$t^k = 0$,
soient :
-Σ la matrive de variance-covariance.
-μ le vecteur des rendemnts espérés.
$\left\{x^k, J_B^k\right\}$ une SRS optimale obtenue à l'aide de la MDS, avec $J_B^k = J/J_N^k$,
Etape 2 :
.Calculer $x_S^k = \alpha_1^k t + \alpha_2^k$,
.Calculer $x_B^k = \gamma_1^k t + \gamma_2^k$,
.Calculer $E_{NN}^k = \beta_1^k t + \beta_2^k$,
Etape 3 :
Calculer le point de repture $t^{k+1} = \min\{t_{j_1}^k, t_{j_s}^k, t_{j_0}^k\}$, où $t_{j_1}^k$, et $t_{j_S}^k$, et $t_{j_0}^k$ sont calculées par les formules (3.15, 3.18, 3.26)
.Calculer le rendement espéré $\mu_P^k = \mu^k{}' x^k(t)$.
.Calculer le resque $\sigma_P = x^k(k)'\Sigma x^k(t)$.
Etape 4 :
si $t^{k+1} = \infty$ **alors**
  On arrete l'algorithme
sinon
  si $t^{k+1} = t_{j_1}^k$ **alors**
    $J_B^{k+1} = (J_B^k / j_1^k) \cup J_0^k$
  finsi
finsi
si $J_S^k = \phi$ **alors**
  $J_{NN}^{k+1} = (J_{NN}^k / J_0^k) \cup J_{1_j}^k$, $J_S^{k+1} = J_S^k$,
sinon
  $J_S^{k+1} = J_S^k / j_0^k$; $J_{NN}^{k+1} = J_{NN}^k \cup J_1^k$
  si $t^{k+1} = t_{j_S}^k$ **alors**
    $J_B^{k+1} = J_B^k$, $j_S^{k+1} = J_S^k / J_S^k$, , $J_{NN}^{k+1} = J_{NN}^k$,
    si $t^{k+1} = t_{j0}^k$ **alors**
      $J_S^{k+1} = J_S^k \cup J_0^k$; $J_{NN}^{k+1} = J_{NN0}^{k}$; $J_B^{k+1} = J_B^k$
    finsi
  finsi
finsi

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la résolution d'un modèle de Markowitz à objectif unique, caractérisé par sa quadratisation, sa convexité et sa paramétrisation. Pour parvenir à la résolution, nous avons appliqué la méthode MDS. L'objectif principal était d'analyser et de déterminer la frontière efficiente du modèle.

Conclusion générale

Le mémoire que nous avons présentée aborde la problématique de la gestion de portefeuille, qui vise à réduire le risque et augmenter le rendement en résolution du problème de gestion de portefeuille sous contraintes linéaires générales et la contrainte d'absence de ventes à découvert. on a considerie le modele Markowitz mono-critére. Le problème se traduit par un programme quadratique paramétré (PQP).

Le modèle de Markowitz, souvent appelé le modèle de la moyenne-variance, a joué un rôle majeur dans la modernisation de la finance. Ce modèle est un modèle à critère unique qui vise à atteindre deux objectifs principaux : minimiser la variance du portefeuille et maximiser le rendement de l'investisseur. Pour résoudre ce modèle ,nous utilisons la méthode de support pour aborder la résolution du problème de gestion de portefeuille. Pour trouver la frontière efficiente dans ce contexte, nous nous trouvons face à un problème quadratique paramétrique (PQP) avec le paramètre de préférence au risque "t". Pour résoudre ce PQP, nous adoptons une approche en deux phases.

La première phase vise à calculer le portefeuille présentant une variance minimale, ce qui correspond à "t = 0", en utilisant la méthode adpté que nous avons développée .
La deuxième phase consiste à itérativement déterminer les autres portefeuilles efficaces, qui implique la transformation du problème initial en un problème quadratique paramétrique (PQP).

Bibliographie

[1] L. Asli. *Méthodes Multicritères d'aide à la Décision*. PhD thesis, Cours de Master 1 en Mathématiques financières université de bejaia, 2021.

[2] V. Barichard. *Approches hybrides pour les problèmes multiobjectifs*. PhD thesis, Université d'Angers, 2003.

[3] P. Harold Benson. Optimization over the efficient set. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 98(2) :562–580, 1984.

[4] M. BENTOUBACHE. *Sur les méthodes mathématiques de la programmation linéaire et quadratique*. PhD thesis, Université de Béjaia-Abderrahmane Mira.

[5] J. Michael Best. *Portfolio optimization*. CRC Press, 2010.

[6] J.Michael Best. *Quadratic programming with computer programs*. Chapman and Hall/CRC., 2017.

[7] M. BIBI. *Téchniques numériques d'optimisation*. PhD thesis, Cours de Master 2 en Mathématiques financières, 2019.

[8] B. BRAHMI. *"Méthodes primales et duales pour la programmation quadratique*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, Université A. Mira de Bejaia, 2012.

[9] B. BRAHMI. *Optimisation d'un portefeuille financier*. PhD thesis, Cours de Master 1 en Mathématiques financières, 2019.

[10] S. Boudjelda L. Agoune B. Brahmi. *Méthode directe de support pour l'optimisation multi-objectifs d'un portefeuille financier*. PhD thesis, Université de Bejaia, 2018.

[11] A. Corhay. Fondements de gestion financière. *Editions de l'Université de Liège*, 2007.

[12] A. Damodaran. *Pratique de la finance d'entreprise : A user's manual*. De Boeck Supérieur, 2010.

[13] M. Engels. Portfolio optimization : Beyond markowitz, 2004.

[14] M. Engels. *Portfolio optimization : Beyond markowitz*. PhD thesis, Leiden University, 2004.

[15] S. Assoul C et Ben Guedouad. *Méthode adaptée pour la résolution du problème de gestion de portefeuille multi-objectifs*. PhD thesis, université de Bejaia, 2020.

[16] J. Knowles et D. Corne et K. Deb. Introduction : Problem solving, ec and emo. *Multiobjective Problem Solving from Nature : From Concepts to Applications*, pages 1–28, 2008.

[17] A. Bouaziz et K. Ghemmour. Optimisation de portefeuille de produits dans le marché concurrentiel : une approche par la théorie des jeux, 2015.

[18] S. Chelouti et K. Kaidi. “résolution d’un problème d’optimisation multi-objectif fractionnaire linéaire flou en nombres entiers., 2016.

[19] S. Ellis et M. Brown. *Hacking growth : how today’s fastest-growing companies drive breakout success.* Currency, 2017.

[20] K. Miettinen et M. Marko. *Proper Pareto optimality in nonconvex problems-characterization with tangent and normal cones.* University of Jyväskylä, 1998.

[21] Y. Collette et P. Siarry. *Optimisation multiobjectif.* Editions Eyrolles, 2002.

[22] S. Chebbar et S. Lallouch. Optimisation de portefeuille sous des contraintes de risque, 2015.

[23] D. Golberg. Principles in the evolutionary design of digital circuits—part i. *Genetic programming and evolvable machines*, 1 :7–35, 2000.

[24] M. Harry H. Markovitz. *Portfolio selection : Efficient diversification of investments.* John Wiley, 1959.

[25] N. Jozefowiez. *Optimisation combinatoire multi-objectif : des méthodes aux problèmes, de la Terre à (presque) la Lune.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse), 2013.

[26] G. Jiguan Lin. Three methods for determining pareto-optimal solutions of multiple-objective problems. In *Directions in Large-Scale Systems : Many-Person Optimization and Decentralized Control*, pages 117–138. Springer, 1976.

[27] H. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1) :77–91, 1952.

[28] B. Merdjaoui. *Optimisation multi-objectif par algorithmes génétiques et approche pareto des paramètres d’usinage sous contraintes des limitations de production.* PhD thesis, Université Boumerdes, 2006.

[29] F. Muniesa. Comment la bourse fait ses prix : ethnographie d’un cours d’action boursière, 2011.

[30] S.Mahdi. *Optimisation multiobjectif par un nouveau schéma de coopération méta/exacte.* PhD thesis, 2007.

Résumés

Résumé

Sur le marché financier, l'investisseur peut se contenter d'une rentabilité certaine mais faible ou prendre un risque contrebalancé avec une rentabilité espérée plus élevée. En 1952, Harry Markowitz a formalisé et évalué l'effet de diversifier plusieurs actifs dans un portefeuille financier. Le modèle de Markowitz permet de réduire le risque total pour une rentabilité espérée donnée. L'objectif de notre travail est de résoudre le problème monocritères de gestion de portefeuille par la méthode directe de support. Nous avons choisi une approche en deux phases afin de le résoudre et le problème résultant est un programme quadratique convexe paramétrique.

Mots clés : Marché financier, Portefeuille financier, Modèle de Markowitz,Méthode direct du support, Programme quadratique paramétrique.

Abstract :

"In the financial market, an investor can opt for a certain but low return or take a balanced risk for a higher expected return. In 1952, Harry Markowitz formalized and evaluated the effect of diversifying multiple assets in a financial portfolio. The Markowitz model aims to minimize the overall risk for a given expected return. The objective of our work is to solve the single-criteria portfolio management problem using the direct support method. We have chosen a two-phase approach to solve it, resulting in a parametric convex quadratic program."

Keywords : Financial market, Financial Portfolio, Markowitz Model, Direct Support Method, Parametric Quadratic Programming.