

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAÏA



Faculté des Sciences Exactes
Département Recherche Opérationnelle

Mémoire de Master

Option : Modélisation Mathématique et Évaluation des
Performances des Réseaux

*Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans
les réseaux radio cognitifs*

Présenté par :

Khider Numidia & Boumaiza Rofia

Soutenu devant le jury composé de :

Président	<i>M^r</i> Boualem Mohamed	Professeur	U. A/Mira Béjaïa
Rapporteurs	<i>M^{me}</i> Adel Karima	Professeur	U. A/Mira Béjaïa
	<i>M^{me}</i> Halimi Naouel	Docteur	U. A/Mira Béjaïa
Examinatrice	<i>M^{me}</i> Lakaour Lamia	Docteur	U. A/Mira Béjaïa
Examineur	<i>M^r</i> Khimoum Nouredine	Docteur	U. A/Mira Béjaïa

Promotion 2022 – 2023

Table des matières

Table des figures	4
Remerciements	5
1 La Radio Cognitive	10
1.1 Radio cognitive	10
1.1.1 Historique	10
1.1.2 Définition	11
1.1.3 Architecture	11
1.1.4 Les Utilisateurs Primaires (PUs)	12
1.1.5 Les Utilisateurs Secondaires (SUs)	12
1.1.6 Composants de la radio cognitive	12
1.1.7 Domaines d'application de la radio cognitive	13
1.2 Conclusion	15
2 Concepts de base	16
2.1 Notions élémentaires de la théorie des jeu	16
2.1.1 Définition d'un Jeu	16
2.1.2 Joueur	17
2.1.3 Les stratégies	17
2.1.4 Fonction d'utilité (fonction gain)	17
2.1.5 Représentation des jeux	18
2.1.6 Classification des jeux	18
2.1.7 Jeux finis et jeux infinis	19
2.1.8 Les jeux symétriques	19
2.1.9 Concept de solution "Équilibres de Nash"	20
2.2 Processus stochastiques et files d'attente Markoviennes	20
2.2.1 Processus stochastiques	20
2.2.2 Chaîne de Markov à temps discret	22
2.2.3 Chaînes de Markov à temps continu	23

2.2.4	Processus de naissance et de mort	23
2.2.5	Files d'attente	24
2.2.6	Files d'attente Markoviennes	27
2.2.7	Analyse mathématique	27
2.2.8	Caractéristiques d'un système de files d'attente	27
2.2.9	Description du modèle $M/M/1$	28
2.3	Théorie des jeux dans les files d'attente Markovienne	30
2.3.1	Étude d'une File d'attente $M/M/1$ simple et observable	30
2.3.2	File d'attente $M/M/1$ simple et non-observable	31
2.3.3	File d'attente $M/M/1$ avec panne du serveur	31
2.3.4	Modélisation sous forme d'un jeu	31
2.4	Équations aux différences linéaires à coefficients constants	33
2.4.1	Résolution de l'équation homogène	33
2.4.2	Exemple de Racines réelles simples	34
2.5	Conclusion	35

3 Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans les réseaux radio cognitive "avec perte de clients" 36

3.1	Modélisation	36
3.1.1	Modèles de profit	37
3.2	Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre : équilibre et tarification	38
3.2.1	Probabilité stationnaire et temps de séjour prévu	38
3.2.2	Stratégie d'équilibre individuel	41
3.2.3	L'équilibre Social	45
3.3	Résultats des simulation	47
3.4	Algorithme	49
3.4.1	Algorithme de simulation	52
3.5	Conclusion	54

4 Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans les réseaux radio cognitive Sans perte des clients 55

4.1	Modélisation	55
4.1.1	Modèle de profit	56
4.2	Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre équilibre et tarification	57
4.2.1	Probabilités stationnaires et temps de séjour prévu	57
4.2.2	Stratégie d'équilibre individuel	60
4.2.3	L'équilibre Sociale	63
4.3	Conditions de stabilité	65
4.4	Résultats des simulation	65
4.5	Algorithme	67
4.5.1	Algorithme de simulation	69

4.6	Comparaison de deux simulation	71
4.7	Conclusion	71
5	Modélisation du désastre dans les réseaux cognitifs	72
5.1	Les probabilités stationnaires	72
5.2	Conclusion	76
	Bibliographie	78

Table des figures

1.1	Architecture de la radio cognitive	11
1.2	Composants de la radio cognitive	12
2.1	Graphe de processus de naissance et de mort	24
2.2	file d'attente	25
2.3	Graphe de transition de la file $M/M/1$	28
3.1	La Modélisation	36
3.2	Diagramme transition avec perte de clients	39
3.3	Relation entre la probabilité de rejoindre la file et la récompense	48
3.4	Le profit en fonction de la récompense	48
4.1	La Modélisation	55
4.2	Diagramme de transition pour le modèle sans perte de clients	57
4.3	Relation entre la probabilité de rejoindre la file et la récompense	65
4.4	Le profit en fonction de la récompense	65
5.1	Diagramme de transition avec désastre	73

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette mémoire de master. Leur soutien et leur encouragement ont été essentiels pour mener à bien ce projet.

Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement *M^{me}K.Adel* et *M^{me}N.Halimi* pour leur encadrement attentif et leur précieux conseils tout au long de ce travail. pour leur passion pour le domaine de la recherche et leur disponibilité ont été une source d'inspiration et nous ont grandement aidés à approfondir nos connaissances.

Nos remerciements vont également à *M^rM.Boualem*, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance. *M^{me}L.Lakaour* et *M^rN.Khimoum*, les membres du jury qui ont accepté de consacrer leur temps à évaluer ce travail. Leurs commentaires et suggestions constructives ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire

Nous sommes reconnaissants envers nos camarades de classe qui ont partagé leurs idées et leurs connaissances avec nous. Leur collaboration et leurs discussions stimulantes ont été une source d'enrichissement personnel.

Nous tenons à exprimer notre gratitude envers nos amis et notre famille pour leur soutien indéfectible tout au long de nos études. Leurs encouragements et leur compréhension nous ont aidés à surmonter les moments difficiles et à persévérer dans nos efforts.

Dédicace

À ma merveilleuse mère, source d'inspiration, en ce jour important, je te dédie cette déclaration. Tu es ma force et mon soutien, je te remercie jamais assez.

À mon père bien-aimé, source de ma fierté, cette soutenance, je te la dédie avec gratitude. Merci d'être là, merci de croire en moi.

*À mes frères bien-aimés "**Khaled**" et "**Fodhil**" compagnons de ma vie, cette dédicace est pour vous, source de joie infinie.*

*À mes amies merveilleuses "**Lina**", "**Houda**", "**Chebla**" et "**Soumia**", rayons de lumière, cette dédicace est pour vous.*

*À ma binôme extraordinaire **Numidia**, partenaire de confiance, Cette dédicace est pour toi.*

Rofia

Dédicace

À ma merveilleuse mère, source d'inspiration, tes encouragements et ton amour infini, m'ont guidé jusqu'ici, vers ce jour béni.

À mon cher père, pilier de ma vie, en ce jour important, je t'adresse cette dédicace infinie.

*À mes frères bien-aimés "**Aissam**", "**Youba**" et "**Rabah**" compagnons de ma vie, cette dédicace est pour vous, source de joie infinie.*

*À ma sœur bien-aimée **Ahlam**, complice de ma vie, cette dédicace est pour toi, mon étoile qui brille..*

*À mes amies merveilleuses "**Roumaïssa**", "**Tina**", "**Tata Aniesse**", "**Nabila**" et "**Lydia**", rayons de lumière, cette dédicace est pour vous.*

*À mes chers cousins "**Ghiles**" et "**lyes**", sources de complicité, cette dédicace est pour vous.*

*À **Rofia** tu es ma binôme, ma complice, ma partenaire idéal.*

Numidia

Introduction générale

Les réseaux radio cognitifs (Cognitive Radio Networks, CRNs) sont des systèmes de communication sans fil intelligents qui permettent aux utilisateurs d'accéder au spectre radio de manière dynamique et opportuniste. Dans ces réseaux, deux types d'utilisateurs sont distingués : les utilisateurs primaires (*PU*s) et les utilisateurs secondaires (*SU*s). Les utilisateurs primaires sont les détenteurs légitimes des licences d'utilisation du spectre radio. Les utilisateurs secondaires, quant à eux, sont des utilisateurs non autorisés à utiliser le spectre, mais qui sont autorisés à l'utiliser de manière opportuniste lorsqu'il est inutilisé par les utilisateurs primaires.

Dans un environnement où les utilisateurs primaires ne sont pas toujours présents ou utilisent seulement une partie limitée du spectre, les utilisateurs secondaires peuvent exploiter les bandes de fréquences disponibles de manière efficace en utilisant des mécanismes de détection de spectre et de prise de décision intelligente.

Les files d'attente dans les réseaux radio cognitifs implique donc la prise en compte à la fois des utilisateurs primaires et secondaires. Les PUs ont la priorité sur les SUs en termes d'accès au spectre, et les SUs doivent attendre leur tour pour accéder aux canaux radio disponibles. Le jeu de file d'attente est un concept clé dans la gestion des ressources dans les réseaux radio cognitifs, où les SUs doivent être en mesure de faire face aux files d'attente générées par la demande d'accès concurrente au spectre. Les SUs doivent choisir le moment opportun pour accéder au spectre en tenant compte de divers facteurs, tels que les opportunités de spectre libre. L'objectif principal du jeu de file d'attente dans les réseaux radio cognitifs est d'optimiser l'allocation des ressources entre les utilisateurs secondaires tout en minimisant les interférences et en préservant les droits des utilisateurs primaires.

Dans cette étude, nous nous intéresserons à l'analyse et à l'optimisation des jeux de file d'attente dans les réseaux radio cognitifs en tenant compte des utilisateurs primaires et secondaires. La gestion des files d'attente dans les réseaux radio cognitifs en prenant en compte les utilisateurs primaires et secondaires est un défi complexe. Les jeux de file d'attente offrent un cadre mathématique et algorithmique pour résoudre ce problème. En comprenant les différents aspects des jeux de file d'attente dans les CRNs, nous pourrions développer des solutions plus efficaces pour la gestion des ressources dans les réseaux radio cognitifs.

Dans [30], les auteurs ont présenté un jeu de file d'attente pour aider les *Sus* à décider d'accéder au spectre (rejoindre la file ou quitter le système). Dans ce travail, les auteurs ont supposé que l'arrivée d'un *Pu* engendrera la perte des paquets *SUs*. Dans ce mémoire, nous avons développé un algorithme qui permet aux *Sus* de décider de rejoindre ou non la file d'attente. En deuxième lieu, nous avons proposé un jeu de file d'attente sans perte de clients et

nous avons calculé les mêmes performances données dans [30]. Nous avons aussi considéré le cas où les clients peuvent être perdus .

Ce mémoire est organisé en une introduction générale, cinq chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

Dans le chapitre 1, nous avons présenté des généralités sur réseaux radio cognitifs et la position du problème . Le chapitre 2 est consacré aux rappels théoriques des concepts utilisés dans le mémoire .

Le chapitre 3 illustre en détail le travail [30] en plus de l'algorithme qui se base sur les résultats de [30] et qui permet aux *Sus* de décider de rejoindre la file ou non.

Dans le chapitre 4, nous avons considéré le jeu de file d'attente pour l'accès au canal sans fil sans perte de clients.

Dans le chapitre 5, nous avons donné la modélisation du même problème (l'accès au canal sans fil avec la radio cognitive) dans le cas où les clients (paquets) *Sus* peuvent être perdus ou non.

La Radio Cognitive

Introduction

La demande croissante en services sans fil et la saturation progressive du spectre radio électrique traditionnel ont conduit à la recherche de solutions novatrices pour maximiser l'utilisation de cette ressource précieuse. La radio cognitive a émergé comme une technologie prometteuse, offrant une approche dynamique et intelligente pour gérer l'allocation des fréquences.

Des études ont montré que le spectre pourrait être mieux exploité si les notions de temps et d'espace étaient prises en compte. En effet, à un instant donné, une sous bande peut être vide (on appelle cela un trou) et un utilisateur secondaire pourrait utiliser cette sous bande. On peut alors procéder à une allocation dynamique du spectre pour remplir ces trous.

Cette allocation repose sur des méthodes telles que des processus de décision markovien, la théorie des jeux ou encore sur la radio cognitive.

Ce chapitre explorera la radio cognitive en mettant l'accent sur les Utilisateurs Primaires (PUs) et les utilisateurs secondaires (SUs).

1.1 Radio cognitive

1.1.1 Historique

L'idée de la radio cognitive a été présentée officiellement par Joseph Mitola III à un séminaire à KTH l'Institut royal de technologie, en 1998, publié plus tard dans un article de J. Mitola et G. Maguire, en 1999.[11] Connu comme le « Père de la radio logicielle », Mitola est l'un des auteurs les plus cités dans le domaine. Mitola combine son expérience de la radio logicielle ainsi que sa passion pour l'apprentissage automatique et l'intelligence artificielle pour mettre en place la technologie de la radio cognitive, et donc d'après lui :

« Une radio cognitive peut connaître, percevoir et apprendre de son environnement puis agir pour simplifier la vie de l'utilisateur »[11]

1.1.2 Définition

La Radio Cognitive est une forme de communication sans fil dans laquelle un émetteur/récepteur peut détecter intelligemment les canaux de communication qui sont en cours d'utilisation et ceux qui ne le sont pas, et peut se déplacer dans les canaux inutilisés. Ceci permet d'optimiser l'utilisation des fréquences radio disponibles du spectre tout en minimisant les interférences avec d'autres utilisateurs.

Un Réseau Cognitif coordonne les transmissions suivant différentes bandes de fréquences et différentes technologies en exploitant les bandes disponibles à un instant donné et à un endroit donné. Il a besoin d'une station de base capable de travailler sur une large gamme de fréquences afin de reconnaître différents signaux présents dans le réseau et se reconfigurer intelligemment.

1.1.3 Architecture

L'architecture de la radio cognitive repose sur la coordination dynamique entre les utilisateurs secondaires (SUs) et les utilisateurs primaires (PUs), permettant aux SUs d'accéder aux bandes de fréquences inutilisées par les PUs de manière opportuniste et efficace.

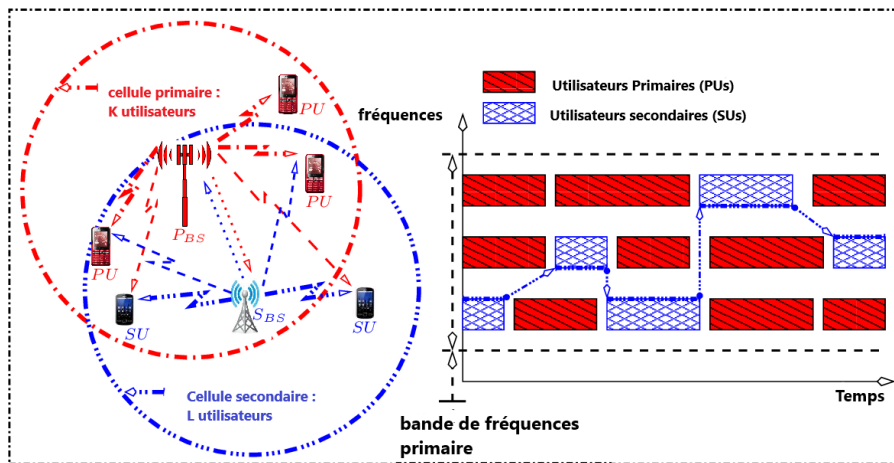


FIGURE 1.1 – Architecture de la radio cognitive

D'après la Figure 1.1 illustrant l'architecture de la radio cognitive, on peut observer la présence des utilisateurs primaires (PU s) au centre, entourés par les utilisateurs secondaires (SUs), symbolisant ainsi la coordination dynamique entre les deux groupes dans l'exploitation des opportunités de spectre non utilisé.

1.1.4 Les Utilisateurs Primaires (PUs)

Les *PU*s sont des entités qui ont une licence légitime pour l'utilisation d'une partie spécifique du spectre radioélectrique.

1.1.5 Les Utilisateurs Secondaires (SUs)

Les *SU*s sont des dispositifs capables de détecter les portions du spectre inutilisées par les PUs et de les exploiter de manière opportuniste.

1.1.6 Composants de la radio cognitive

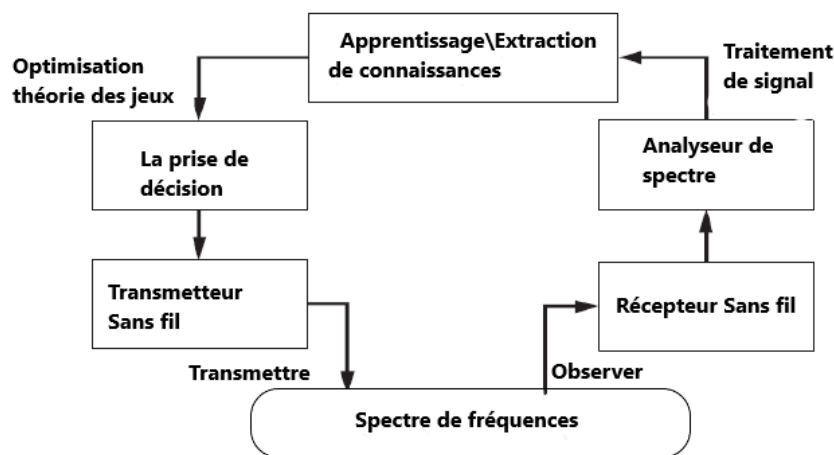


FIGURE 1.2 – Composants de la radio cognitive

- **Emetteur/ Récepteur :**

un émetteur/récepteur sans fil est le composant majeur avec les fonctions du signal de transmission de données et de réception. En outre, un récepteur sans fil est également utilisé pour observer l'activité sur le spectre de fréquence (spectre de détection). Les paramètres émetteur/récepteur dans les noeuds de la radio cognitive peuvent être modifiés dynamiquement.

- **Analyseur de spectre (Spectrum analyser) :**

L'analyseur de spectre utilise les signaux mesurés pour analyser l'utilisation du spectre (par exemple pour détecter la signature d'un signal provenant d'un utilisateur primaire et trouver les espaces blancs du spectre pour les utilisateurs secondaires). L'analyseur de spectre doit s'assurer que la transmission d'un utilisateur primaire n'est pas perturbée si un utilisateur secondaire décide d'accéder au spectre. Dans ce cas, diverses techniques de traitement du signal peuvent être utilisées pour obtenir des informations sur l'utilisation du spectre.

- **Extraction de connaissances et apprentissage (Knowledge extraction/learning) :**
L'apprentissage et l'extraction de connaissances utilisent les informations sur l'utilisation du spectre pour comprendre l'environnement ambiant RF (bande de fréquences utilisée pour la transmission et la diffusion des communications) "par exemple le comportement des utilisateurs sous licence". Une base de connaissances de l'environnement d'accès au spectre est construite et entretenue, qui est ensuite utilisée pour optimiser et adapter les paramètres de transmission pour atteindre l'objectif désiré sous diverses contraintes. Les algorithmes d'apprentissage peuvent être appliqués pour l'apprentissage et l'extraction de connaissances.
- **Prise de décision (Decision making) :**
Après que la connaissance de l'utilisation du spectre soit disponible, la décision sur l'accès au spectre doit être faite. La décision optimale dépend du milieu ambiant, elle dépend du comportement coopératif ou compétitif des utilisateurs secondaires. Différentes techniques peuvent être utilisées pour obtenir une solution optimale. Par exemple, la théorie d'optimisation peut être appliquée lorsque le système peut être modélisé comme une seule entité avec un seul objectif. En revanche, les modèles de la théorie des jeux peuvent être utilisés lorsque le système est composé d'entités multiples, chacun avec son propre objectif. L'optimisation stochastique peut être appliquée lorsque les états du système sont aléatoires.

1.1.7 Domaines d'application de la radio cognitive

Le concept de la radio cognitive peut être appliqué à une variété de scénarios de communication sans fil, nous allons décrire quelques uns :

- **Réseaux de télécommunications**

La radio cognitive peut être utilisée pour optimiser l'allocation des ressources spectrales dans les réseaux de téléphonie mobile et sans fil.

Elle permet de détecter les bandes de fréquences inutilisées et de les utiliser de manière opportuniste, améliorant ainsi l'efficacité du spectre et la qualité des communications. Par exemple : En cas de catastrophes naturelles ou d'autres situations d'urgence, les réseaux de communication peuvent être fortement sollicités. La radio cognitive peut aider à optimiser l'utilisation du spectre en permettant aux dispositifs de communication d'accéder aux bandes de fréquences disponibles de manière opportuniste, même si elles ne sont pas traditionnellement allouées aux services d'urgence.

- **Radio diffusion**

Dans le domaine de la radio diffusion, la radio cognitive peut être utilisée pour gérer l'allocation des fréquences pour les stations de radio et de télévision.

Cela peut aider à résoudre les problèmes de congestion du spectre et permettre une distribution plus efficace des contenus audiovisuels. Par exemple, dans un environnement urbain où de nombreuses stations de radio coexistent, la radio cognitive peut détecter

les canaux non utilisés ou les canaux utilisés de manière inefficace et les réallouer aux stations nécessitant une meilleure qualité de transmission. Elle peut également détecter les interférences provenant d'autres sources et ajuster les paramètres de transmission en conséquence pour minimiser l'impact de ces interférences.

- **Services de cyber santé (eHealth services)**

Différents types de technologies sans fil sont adoptés dans les services de santé pour améliorer l'efficacité de la prise en charge des patients et la gestion des soins de santé. Cependant, la plupart des dispositifs de soins utilisés sont sans fil et sont limités par les EMI (interférences électromagnétiques) et EMC (compatibilité électromagnétique).

Depuis que les équipements médicaux et les capteurs bio signal sont sensibles aux EMI, la puissance d'émission des appareils sans fil doit être soigneusement contrôlée. En outre, différents dispositifs biomédicaux (équipement et appareils chirurgicaux, de diagnostic et de suivi) utilisent la transmission RF. L'utilisation du spectre de ces dispositifs doit être choisie avec soin pour éviter toute interférence avec l'autre. Dans ce cas, les concepts de la radio cognitive peuvent être appliqués. Par exemple de nombreux capteurs médicaux sans fil sont conçus pour fonctionner dans les ISM (Industriel, Scientifique et Médicale), et donc ils peuvent utiliser les concepts de la radio cognitive pour choisir les bandes de transmission permettant d'éviter les interférences.

- **Réseaux d'urgence**

les réseaux de sécurité publique et d'urgence peuvent profiter des concepts de la radio cognitive pour fournir la fiabilité et la flexibilité de communication sans fil.

Par exemple, dans un scénario où il y a une catastrophe, l'infrastructure de communication standard peut ne pas être disponible, et par conséquent, un système de communication sans fil adaptatif (soit un réseau d'urgence) peut être nécessaire d'être créé pour soutenir la reprise après sinistre. Ce genre de réseau peut utiliser le concept de la radio cognitive pour permettre la transmission sans fil et la réception sur une large gamme du spectre radio.

- **Réseaux militaires**

Avec la radio cognitive, les paramètres de la communication sans fil peuvent être adaptés de manière dynamique en fonction du temps et de l'emplacement ainsi que de la mission des soldats. Par exemple, si certaines fréquences sont brouillées ou bruyantes, les dispositifs radio cognitifs (émetteurs/récepteurs) peuvent effectuer des recherches pour trouver des bandes de fréquence d'accès de rechange pour la communication.

1.2 Conclusion

En conclusion, la radio cognitive représente une avancée significative dans les communications sans fil en exploitant intelligemment le spectre radio disponible. Les PUs, en tant qu'utilisateurs autorisés, bénéficient d'une protection de leur accès aux bandes de fréquences réservées. Les SUs, quant à eux, exploitent les opportunités offertes par les bandes de fréquences disponibles, ce qui améliore l'utilisation globale du spectre.

En somme, la radio cognitive offre une solution novatrice pour optimiser l'utilisation du spectre et répondre aux besoins croissants en communications sans fil. Son potentiel d'application dans différents secteurs ouvre la voie à de nouvelles possibilités et contribue à l'évolution des technologies de communication vers des systèmes plus intelligents et adaptatifs.

Concepts de base

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques concepts de base de la théorie des jeux, quelques définitions sur processus stochastiques et files d'attente Markoviennes et des notions sur les équations aux différences. Ces trois domaines sont des outils mathématiques puissants qui nous permettent de modéliser et d'analyser des situations complexes rencontrées dans divers contextes.

2.1 Notions élémentaires de la théorie des jeu

La théorie des jeux consiste à étudier les situations de conflits qui peuvent exister entre des individus en interaction.[29] Ces conflits sont souvent présentés dans notre vie réelle, sociale, économique ou tout autre domaine individus interagissent entre eux. Le but principal pour chaque individu consiste à savoir comment réagir et quelle sera la décision à prendre pour satisfaire son intérêt personnel selon le principe de la rationalités qui vise à maximiser son utilité (gain, profit) ou minimiser son coût. Pour répondre à ces besoins, plusieurs études ont été faites pour pouvoir analyser et, dans certains cas, résoudre ces conflits. Cette étude de conflits d'intérêts est appelée théorie des jeux.

2.1.1 Définition d'un Jeu

Un jeu est une situation où les individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certains nombres d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance (les règles de jeu), les résultats de ces choix constituant une issue du jeu, à laquelle est associé un gain, positif ou négatif, pour chacun des participants.

2.1.2 Joueur

Un joueur peut être une personne, un groupe de personnes, une société, une région, un parti politique, un pays ou la nature. Si dans un jeu, il y'a N joueurs ($N \geq 2$) qui participent au jeu, on notera par $I = \{1,2,\dots,N\}$ l'ensemble des joueurs.

2.1.3 Les stratégies

a. Stratégies pures

Une stratégie pure est la spécification d'une action pour un joueur à chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures de ce joueur et par $s_i \in S_i$ une stratégie pure, et $|S_i| = m_i$ le nombre de stratégie du joueur "i".

b. Stratégie mixte

Considérons un jeu fini, c-à-d un jeu où les ensembles de stratégies pures des joueurs $i \in I$ contiennent un nombre fini de stratégies $|S_i| = m_i < \infty$. Une stratégie mixte du joueur "i" est une distribution de probabilités α définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i . On notera par :

$$\Delta_{m_i} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}, \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, m_i}\} \quad (2.1)$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur $i \in I$, où α_j est la probabilité que le joueur "i" joue sa stratégie pure $s_j \in S_i$.

2.1.4 Fonction d'utilité (fonction gain)

C'est une fonction attribuée à chaque joueur, elle est utilisée pour définir les préférences des joueurs. La fonction d'utilité est plus élevée pour un choix de décision donné si le joueur préfère cette décision par rapport à une autre.

Pour tout $i \in I = \{1,2,\dots,N\}$, on associe une fonction U_i définie sur l'ensemble

$$S = \prod_{j=1}^N S_j$$

des issues possibles du jeu :

$$U_i : S = \prod_{j=1}^N S_j \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$s \in S \rightarrow U_i(s)$$

Où : $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ une issue du jeu.

2.1.5 Représentation des jeux

Les jeux peuvent être représentés sous deux formes[6].

a. Jeux sous forme stratégique

Un jeu sous forme normale (ou bien stratégique) s'écrit de la manière suivante :

$$\langle I; \{S_i\}_{i \in I}; \{U_i\}_{i \in I} \rangle \quad (2.3)$$

où :

$I = \{1, 2, \dots, N\}$ représente l'ensemble des joueurs et S_i représente l'ensemble des stratégies du joueur $i, i \in I$.

Pour chaque joueur " i ", on définit une fonction d'utilité :(2.2), qui à chaque ensemble de stratégies associe le gain du joueur i [25].

b. Jeux sous forme extensive

Un jeu sous forme extensive est défini par :

- Un ensemble $I = \{1, 2, \dots, N\}$ de joueurs.
- Un arbre fini composé d'un ensemble de noeuds et d'un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque coup.
- Une fonction de nommage qui indique à chaque noeud quel est le joueur qui doit jouer.
- Une fonction de gains qui associe à chaque noeud terminal un vecteur de nombres représentant les gains de chacun des joueurs.
- Une partition des noeuds en un ensemble d'information représentant les croyances des joueurs[25].

2.1.6 Classification des jeux

Il existe plusieurs classifications possibles des jeux. Nous allons définir quelques catégories :

I. Selon l'ordre

I.1 Jeux statiques

Un jeu est dit statique lorsque les joueurs choisissent simultanément leurs actions, et reçoivent ensuite leurs gains respectifs. La représentation adéquate est la forme normale[6].

I.2 Jeux séquentiels

Un jeu séquentiel est un jeu dont les joueurs interviennent les uns après les autres, la représentation la plus adéquate est la forme extensive[12].

II. Relations entre les joueurs

II.1 Jeux coopératifs

Un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent communiquer librement entre eux et passer des accords (par exemple sous forme d'un contrat). Ils forment alors une coalition et recherchent l'intérêt général suivi d'un partage des gains entre tous les joueurs[6].

II.2 Jeux non coopératifs

Dans ce type de jeux, chaque joueur essaye de maximiser sa fonction d'utilité en tenant compte de la stratégie des autres, il n'est donc pas possible de former des coalitions.

III. Selon les gains des joueurs

Les jeux non coopératifs se divisent en deux grandes familles : les jeux à somme nulle, et ceux à somme non nulle.

III.1 Jeux à somme nulle

Les jeux à somme nulle sont tous les jeux où la somme algébrique des gains des joueurs est nulle pour chaque issue du jeu, ce que gagne l'un est nécessairement perdu par un autre.

III.2 Jeux à somme non nulle

Un jeu est dit à somme non nulle, si au moins pour une situation du jeu la somme des gains des joueurs n'est pas nulle.

IV. Selon l'information

IV.1 Jeux à information parfaite

On dit qu'un jeu est à information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs.

IV.2 Jeux à information imparfaite

On dit qu'un jeu est à information imparfaite lorsqu'un joueur atteint un point de décision où il ne connaît pas toutes les actions des autres joueurs qui l'ont précédés [26].

IV.3 Jeux à information complète

Un jeu est dit à information complète si tous les joueurs connaissent parfaitement la structure du jeu, c'est-à-dire : l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d'information de chaque joueur et l'histoire du jeu [28].

IV.4 Jeux à information incomplète

Un jeu est dit à information incomplète si au moins un des joueurs ne connaît pas parfaitement la structure du jeu.

2.1.7 Jeux finis et jeux infinis

On dit qu'un jeu est fini si l'ensemble des stratégies de chaque joueur est fini, autrement dit : $\forall i \in I$, l'ensemble S_i contient un nombre fini de stratégies. Ainsi, un jeu est dit infini s'il existe un $i \in I$ tel que l'ensemble S_i est infini.

2.1.8 Les jeux symétriques

Un jeu est dit symétrique, si tous les joueurs possèdent les mêmes stratégies, et la même fonction d'utilité.

2.1.9 Concept de solution "Équilibres de Nash"

L'équilibre de Nash, introduit par John Nash en 1950, est un concept fondamental en théorie des jeux. Il décrit une issue du jeu dans laquelle aucun joueur n'a intérêt de modifier sa stratégie étant donnée la stratégie de chacun de ses rivaux.

a. Équilibre de Nash en stratégies pures

Une situation $s^* = \{s_1^*, s_2^* \dots s_N^*\} \in S$ est un équilibre de Nash en stratégies pures du jeu si :

$$U_i(s_i^*; s_{-i}^*) \geq U_i(s_i; s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i, \forall i \in I \quad (2.4)$$

Où : $s_{-i} = (s_1 \dots s_{i-1}, s_{i+1} \dots s_N)$

En d'autres termes, un équilibre de Nash est une issue du jeu dont aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement.[6]

b. Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour le jeu est un ensemble de stratégies mixtes α^* tel que :

$$U_i(\alpha_i^*; \alpha_{-i}^*) \geq U_i(\alpha_i; \alpha_{-i}^*), \forall \alpha_i \in \Delta_{mi}, \forall i \in I \quad (2.5)$$

Où : $\Delta_{mi} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{mi} \in \mathbb{R}^{mi}, \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, mi}, \sum_{i=1}^{mi} = 1\}$

Ainsi, il a été démontré que tout jeu fini sous forme stratégique admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes[6].

2.2 Processus stochastiques et files d'attente Markoviennes

L'évaluation des performances d'un système s'avère nécessaire, étant donné que l'on ne peut pas mesurer directement les paramètres de performance sur le système réel, il s'agit alors de proposer un formalisme mathématique permettant de le décrire au mieux, [29].

Il est alors très intéressant de donner beaucoup d'importance à l'étape de modélisation. Dans ce chapitre nous allons présenter brièvement quelques définitions et principaux résultats sur les processus stochastiques et les files d'attente. On parlera en particulier des files d'attente Markoviennes et on s'attardera sur l'analyse du modèle $M/M/1$.

2.2.1 Processus stochastiques

Un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilités (Ω, F, p) , où $X(t)$ représente l'état du processus au temps t . L'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelé l'espace des états du processus noté par E [8].

a. Processus de Comptage :

Désignons par $N(t)$ le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$, en supposant que $N(0) = 0$. On cherche à déterminer la distribution de cette variable aléatoire discrète.

Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ l'instant d'occurrence du $n^{\text{ème}}$ évènement, le processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est appelé processus de comptage à temps continu associé à $(S_n)_{n \geq 1}$ si ses réalisations sont des fonctions en escalier non décroissantes[7].

Tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $t \geq 0$, le nombre $N(t)$ est à valeurs entières positives.
2. $N(u + t) - N(u)$ représente le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle semi ouvert $]u, u + t]$.

On s'intéresse au comptage du nombre d'occurrences d'un évènement, par exemple :

- Appels téléphoniques à un standard,
- Prises de poisson par un pêcheur,
- Naissances d'individus,
- Arrivée, de clients à un guichet,
- L'occurrence d'accidents dans une entreprise,
- Le nombre d'étudiants présents dans une salle.

b. Processus de Poisson :

Définition 1. On dit qu'un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de Poisson s'il satisfait les trois conditions suivantes[23] :

- * Le processus $N(t)$ est homogène dans le temps : c'est-à-dire que le nombre d'évènements se produisant dans un intervalle de temps de longueur t ne dépend que de t . Autrement dit

$$P(N(s + t) - N(s) = k) = P(N(t) = k) = p_k(t). \quad (2.6)$$

- * Le processus $N(t)$ est à accroissements indépendants : c'est-à-dire que le nombre d'évènements se produisant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

$$P(N(s + t) - N(s) = k, N(s) = j) = P(N(s + t) - N(s) = k)P(N(s) = j) = p_k(t)p_j(s) \quad (2.7)$$

- * La probabilité que deux évènements ou plus se produisant dans un petit intervalle (Δt) est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul évènement. Autrement dit,

$$p_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t) & (k \geq 2) \\ \lambda \Delta t + o(\Delta t) & (k = 1) \\ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) & (k = 0) \end{cases} \quad (2.8)$$

Le coefficient λ est appelé intensité du processus de Poisson

c. Loi d'un Processus de Poisson :

Si un processus de comptage $N(t)$ satisfait les trois conditions précédentes alors sa distribution de probabilité est donnée par :

$$P(N(t) = k) = P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (2.9)$$

pour la quelle on obtient les caractéristiques suivantes :

$$E[N(t)] = \lambda t \text{ et } V[N(t)] = \lambda t \quad (2.10)$$

d. Loi exponentielle :

Une variable aléatoire T à valeurs dans R_+ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Sa fonction de densité est alors donnée par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, sa moyenne est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et sa variance est $V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Notons que la loi exponentielle est caractérisée par la propriété d'absence de mémoire que l'on exprime formellement par :

$$\forall s, t \geq 0; P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t) \quad (2.11)$$

e. Processus de Poisson et loi exponentielle :

Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre λ , et T_n la durée séparant le $(n - 1)^{\text{ème}}$ et le $n^{\text{ème}}$ évènements

Théorème 1. *Les temps d'attente T_n d'un processus de Poisson de paramètre λ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ . [23]*

Théorème 2. *Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ si les intervalles de temps entre deux évènements consécutifs sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à la même loi exponentielle de paramètre λ , [23].*

2.2.2 Chaîne de Markov à temps discret

Une chaîne de Markov à temps discret est un processus stochastique $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ à temps discret, défini sur un espace d'états E fini ou dénombrable et vérifiant la propriété de Markov suivante :

$$P[X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] \quad (2.12)$$

pour tout $n \geq 0$ et pour tout états $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in E$.

En d'autres termes, une chaîne de Markov est un processus stochastique dont la dépendance au passé est résumée par la seule observation présente.

Une chaîne de Markov à temps discret est homogène (dans le temps) si, pour toute paire d'états (i, j) et tout instant n :

$$P[X_n = j | X_{n-1} = i] = P[X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = i]; \forall k \geq 0. \quad (2.13)$$

2.2.3 Chaînes de Markov à temps continu

Une chaîne de Markov à temps continu est un processus $\{X(t), t \in R_+\}$ à valeurs discrètes dans E qui satisfait aux hypothèses suivantes [2] :

- H_1 : est un processus Markovien. C'est à dire que pour toute suite d'instant $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in R^+$

$$P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}].$$

- H_2 : $X(t)$ est un processus homogène, c'est à dire que pour tout $s, t \in R^+$ et $i, j \in E$:

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i)$$

2.2.4 Processus de naissance et de mort

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ une chaîne de Markov à temps continu dont l'espace des états est égal à E et A sa matrice génératrice. Cette chaîne est appelée processus de naissance et de mort, si ses intensités de transition vérifient :

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

Autrement dit, un processus de naissance et de mort est une chaîne de Markov à temps continu définie sur l'espace des états $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ et telle que, depuis n'importe quel état i , les seules transitions possibles se font soit dans l'état $(i - 1)$, soit dans l'état $(i + 1)$. L'état $X(t)$ d'un tel processus est généralement interprété comme la taille d'une population donnée au temps t [13]. Chaque augmentation d'une unité du nombre d'individus correspond à une naissance et chaque diminution d'une unité correspond à une mort

On note :

$$\lambda_i = a_{i, i+1}, i = 0, 1, 2, \dots$$

le taux de naissance dans l'état i et

$$\mu_i = a_{i, i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

le taux de mort dans l'état i (évidemment $\mu_0 = 0$). Nous obtenons ainsi :

$$a_{ii} = -\lambda_i - \mu_i, i = 0,1,2,\dots$$

La matrice génératrice de la chaîne est :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Le graphe représentatif de ce processus est donné par la figure 2.1 suivante :

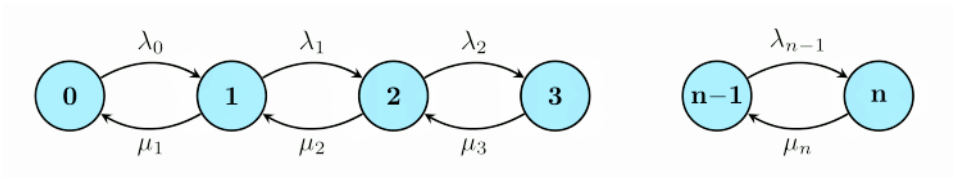


FIGURE 2.1 – Graphe de processus de naissance et de mort

2.2.5 Files d'attente

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. On les rencontre dans les domaines d'activité les plus divers (guichet de poste, trafic routier, central téléphonique, atelier de réparation,...).

L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités, appelées "clients", se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire. Si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi, sinon, il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant un ordre spécifique[9].

Une file d'attente est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. Les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station.

La figure 2.2 illustre une file d'attente avec un seul serveur et file infinie.

Afin de spécifier complètement une file d'attente, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.

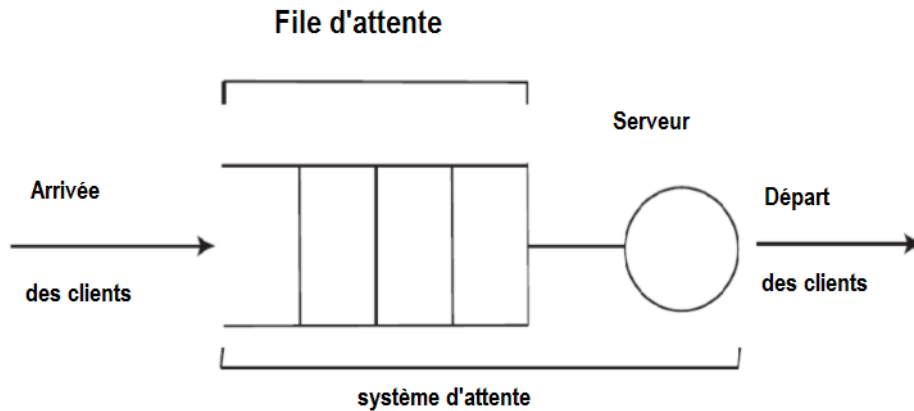


FIGURE 2.2 – file d’attente

a. Processus d’arrivée L’arrivée des clients à la station sera décrite à l’aide d’un processus stochastique de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$

Si A_n désigne la variable aléatoire mesurant l’instant d’arrivée du $n^{\text{ème}}$ client dans le système. On note par T_n la variable aléatoire mesurant le temps séparant l’arrivée du $(n - 1)^{\text{ème}}$ client et du $(n)^{\text{ème}}$ client, on aura alors : $T_n = A_n - A_{n-1}$.

b. Temps de service On note par Y_n la variable aléatoire mesurant l’instant de départ du $n^{\text{ème}}$ client du système et B_n la variable aléatoire mesurant le temps de service du $n^{\text{ème}}$ client.

Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut en effet, qu’un client qui quitte la station laisse celle-ci vide. Le serveur est alors inoccupé jusqu’à l’arrivée du prochain client.

Les temps de service consécutifs sont décrits par des variables B_n indépendantes et identiquement distribuées. Si μ est le taux de service, alors $\frac{1}{\mu}$ est la durée moyenne de service.

c. Structure et discipline de la file — Nombre de serveur

Une station peut disposer d’un ou de plusieurs serveurs en parallèle. Soit s le nombre de serveurs. Dès qu’un client arrive à la station, s’il trouve un serveur libre, ce dernier entre dans le système. Si tous les serveurs sont occupés, le client se place dans la file en attente qu’un serveur se libère.

La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ils possèdent donc la même distribution) et indépendants les uns des autres. On parle alors de service homogène

— **Capacité de la file**

La capacité de la file à accueillir des clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit N la capacité de la file (incluant le ou les clients en service). Une file à capacité illimitée vérifie $N = +\infty$. Lorsque la capacité de la file est limitée et qu’un client arrive alors que cette dernière est pleine, le client est perdu.

— **Discipline de service**

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file pour pouvoir déterminer le tour de chaque client pour effectuer son service. Les disciplines les plus courantes sont [14] :

-FIFO (first in, first out) :

c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Le premier client arrivé sera le premier à quitter la file.

-LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served) :

Cela correspond à une file, dans laquelle le dernier client arrivé sera le premier traité, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file mono-serveur

-RANDOM (aléatoire) : Le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.

-Round-Robin (cyclique) : Tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant un quantum Q de leur temps de service et sont replacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli. Cette discipline de service a été introduite afin de modéliser les systèmes informatiques ;

d. Notation de Kandall Pour la classification des systèmes d'attente, on recourt à une "notation symbolique" dite notation de Kendall [27]. Cette notation comprend des symboles rangés dans l'ordre, elle est noté par $A/B/s/N/D/O$ tel que

A : indique la loi des temps inter-arrivées des clients.

B : indique la loi des temps de services.

s : indique le nombre de serveurs.

N : indique la capacité de la salle d'attente, ce dernier sera supprimé si $N = \infty$.

D : indique la discipline du service.

O : la source des clients potentiels, qui peut être fini ou infini, homogène ou hétérogène

Les lois des deux premiers symboles sont donnés par :

M : loi exponentielle

G : loi générale

D : loi constante (déterministe)

Ek : loi de Erlang d'ordre k ,

Hk : loi hyper exponentielle

2.2.6 Files d'attente Markoviennes

Lorsque les deux quantités, les inter-arrivées et le service sont exponentiellement distribuées, on parle alors de files d'attente Markoviennes. Celles-ci sont caractérisées par le fait que le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant t est de naissance et de mort.

La distribution du temps de service la plus simple à étudier est la distribution exponentielle. Cependant, la propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle fait que celle-ci n'est généralement pas très réaliste pour modéliser les phénomènes réels. On est donc souvent obligé de recourir à d'autres distributions, on parle alors de files d'attente non Markoviennes

2.2.7 Analyse mathématique

En premier lieu, on s'intéresse au nombre $N(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t et on note $P_n(t) = P[N(t) = n]$ les probabilités d'états définissant le régime transitoire du processus $(N(t), t \geq 0)$

Le régime stationnaire du processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ défini par les distributions stationnaires de ce processus :

$$P_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P[N(t) = n]; (n = 0, 1, 2, \dots).$$

2.2.8 Caractéristiques d'un système de files d'attente

À partir de la distribution stationnaire du processus $\{N(t), t \geq 0\}$, on peut obtenir d'autres caractéristiques du système telles que :

\bar{N} : le nombre moyen de clients dans le système,

\bar{N}_q : le nombre moyen de clients dans la file d'attente,

\bar{T}_s : le temps moyen de séjour d'un client dans le système (attente + service),

\bar{T}_q : le temps moyen d'attente dans la file.

A. Formules de Little Le nombre moyen de clients dans le système est donné par la relation suivante :

$$\bar{N} = E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n \quad (2.15)$$

Soit \bar{N}_q le nombre de clients se trouvant dans la file d'attente, on peut alors écrire le nombre moyen de clients dans la file d'attente comme suit :

$$\bar{N}_q = E(N_q) = \sum_{n=s}^{+\infty} (n - s)p_n. \quad (2.16)$$

Pour trouver T_s et T_k , on fait souvent appel aux formules de Little, celles-ci sont données par le Théorème 3, plus précisément pour le modèle $M/M/1$

Théorème 3. *Formules de Little [24] :*

Si λ_e est le taux d'entrée et $\frac{1}{\mu}$ est le temps moyen de service, alors on a :

$$\bar{N} = \lambda_e \bar{T}_s \quad (2.17)$$

$$\bar{N}_q = \lambda_e \bar{T}_q \quad (2.18)$$

$$\bar{N} = N_q + \frac{\lambda_e}{\mu} \quad (2.19)$$

$$\bar{T}_s = T_q + \frac{1}{\mu} \quad (2.20)$$

2.2.9 Description du modèle $M/M/1$

On considère un système formé d'une file de capacité infinie et d'un seul serveur. La discipline de service de la file est FIFO. Le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux λ (ce qui équivaut à dire que les inter-arrivées ont une distribution exponentielle de paramètre λ) et le temps de service d'un client est une variable aléatoire ayant une distribution exponentielle de taux μ .

a. Caractéristiques de la file $M/M/1$

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ le processus de naissance et de mort qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant $t \geq 0$ et P_n ses distribution d'états. Le graphe de transition qui caractérise cette file est donné par la figure 2.3 :

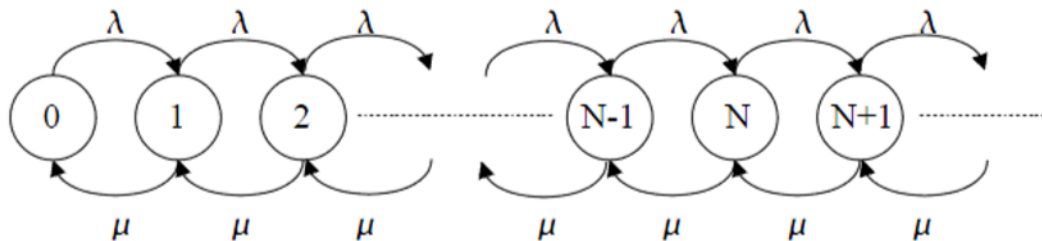


FIGURE 2.3 – Graphe de transition de la file $M/M/1$

Les équations d'équilibre de ce système sont donné comme suit :

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, \quad \text{pour } n = 0. \quad (2.21)$$

$$(\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2}, \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (2.22)$$

Par récurrence, on obtient : $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$. En posant $\rho = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ et en se servant du fait que les P_n définissent une distribution de probabilité, on peut alors écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{\mu} P_0 = 1$$

Ce qui nous permet d'obtenir la probabilité $P_0 = 1 - \rho$. Ainsi on aura l'expression finale des probabilités d'états du processus, données par

$$P_n = \rho(1 - \rho) \quad (2.23)$$

b. Le nombre moyen de client dans le système

Le nombre moyen de clients dans le système peut être donné de la manière suivante :

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^2 \quad (2.24)$$

$$= \rho(1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1} \quad (2.25)$$

$$\bar{N} = \frac{\rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (2.26)$$

c. Le nombre moyen de client dans la file

Ce nombre est donné comme suit :

$$\bar{N}_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)P_n = \frac{\rho^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.27)$$

d. Le temps moyen de séjour dans le système

On utilisant les formule de Little, on obtient :

$$\bar{T}_s = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (2.28)$$

f. Le temps moyen de séjour dans la file

Ce temps moyen peut être aussi déterminé en utilisant les formules de Little :

$$\bar{T}_q = \frac{\bar{N}_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.29)$$

2.3 Théorie des jeux dans les files d'attente Markovienne

Types de travaux concernant l'application de la théorie des jeux en files d'attente markoviennes [29] :

- Des travaux qui considèrent que les joueurs sont les serveurs, où les jeux sont simultanés et non-coopératifs.
- Des travaux qui considèrent que les joueurs sont les clients, où les jeux sont considérés séquentiels et non-coopératifs.

Le premier travail qui a été réalisé concernant ce thème, a été effectué en 1969 par P.Naor sur un modèle $M/M/1$, où il a étudié le comportement des clients dans une station de péage [22]. Depuis, plusieurs travaux ont vu le jour [19], [1], [15], [5], [16]

2.3.1 Étude d'une File d'attente $M/M/1$ simple et observable

1. Description du modèle

Soit une file d'attente $M/M/1$ FIFO, où les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ , le taux de service est μ . Chaque client paye un coût fixe θ d'entrée à la file, et un coût C par unité de temps aussi longtemps qu'il reste dans le système, et reçoit une récompense R s'il est servi [22]. Lorsqu'un client arrive et trouve n clients dans le système, son temps moyen de séjour dans le système est alors : $\frac{n+1}{\mu}$

2. Le jeu associé

On peut modéliser cette situation par un jeu entre les clients. Chaque client possède deux alternatives, soit entrer soit quitter. Lorsqu'un client i arrive au système, et trouve n clients, sa fonction d'utilité est donné par :

$$U_i = (R - \frac{c(n+1)}{\mu} - \theta)j \quad (2.30)$$

où :

$$j = \begin{cases} 1, & \text{si entrer} \\ 0, & \text{si quitter} \end{cases} \quad (2.31)$$

Cette fonction est la même pour tous les joueurs, on peut dire alors que ce jeu est symétrique. On suppose qu'il n'existe pas de coût pour un client qui ne rejoint pas la file d'attente, mais si un client décide d'entrer, alors il ne pourra plus revenir sur sa décision.

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$, le processus qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant $t \geq 0$. L'objectif était de trouver une taille critique, telle qu'au moment d'arrivée d'un client,

si $N(t) \leq n_e$ alors le client rejoint la file, sinon il quitte

2.3.2 File d'attente $M/M/1$ simple et non-observable

Le travail de Naor [22], a été complété par B.Edelson et D.Hildebrand[17], en considérant une autre situation. Ces auteurs supposent que les clients qui arrivent n'observent pas la taille du système. Ils prennent leurs décisions d'entrer ou de quitter sans connaître l'état du système. Les stratégies de chaque joueur sont alors : *entrer, quitter*. La fonction d'utilité d'un client i est $U_i(q,p)$, donnée lorsque ce client utilise les stratégies mixtes $(q, 1-q)$ et les autres utilisent les stratégies mixtes $(p, 1-p)$. Cette fonction d'utilité est donnée par l'expression suivante :

$$U(q,p) = q\left(R - \frac{c}{\mu + p\lambda} - \theta\right)j \quad (2.32)$$

2.3.3 File d'attente $M/M/1$ avec panne du serveur

Ce travail consiste à étudier le comportement des clients dans une file d'attente Markovienne de type $M/M/1$ à un seul serveur non fiable, réalisé par O.Boudali et A.Economou [20]

1. Description du modèle

On considère une file d'attente à un seul serveur, à capacité infinie, les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ , le service s'effectue suivant une distribution exponentielle de paramètre μ . Le serveur est sujet à des pannes aléatoires du serveur se réalisant avec un processus de poisson de paramètre ξ .

Lorsqu'une panne se réalise, tous les clients sont ainsi forcés à quitter le système, et le serveur devient alors inactif, et une réparation du système est lancée. La durée de réparation est exponentiellement distribuée de moyenne $\frac{1}{\eta}$. Durant la réparation, aucun client n'est accepté. Finalement, on suppose que le temps de service, temps de réparation, inter arrivés et intercatastrophes sont mutuellement indépendants .

L'état du système à l'instant t se représente par la paire $(N(t), I(t))$ telle que :

$N(t)$: représente le nombre de clients dans le système à l'instant t .

$I(t)$: représente l'état du serveur à l'instant t , et prend la valeur 1 si le système est opérationnel ou bien 0 si le système est sous réparation.

2.3.4 Modélisation sous forme d'un jeu

L'ensemble des joueurs sont les clients. Les alternatives de chaque joueur sont soit :

- De rejoindre le système (r).
- De quitter le système (q).

Les fonctions de gains des clients, diffèrent selon l'information disposée, celles-ci sont données plus explicitement dans la section suivante .

1. Règles du jeu

Chaque client reçoit une récompense de R_s unités lorsqu'il sera servi, ou bien une compensation de R_f unités dans le cas où il est forcé de quitter le système due à une panne, et perd un coût C par unité de temps aussi longtemps qu'il reste dans le système (dans la file ou bien dans le service).

L'objectif des clients est de maximiser leurs bénéfices nets. Et leurs décisions sont supposées irrévocables. On peut considérer que cette situation est un jeu symétrique entre eux. Deux cas sont considérés selon l'information disposée aux clients :

— Cas observable :

Les clients observent le nombre de clients $N(t)$ dans le système, ensuite ils décident de rejoindre ou bien de quitter.

Les alternatives de chaque joueur sont : soit entrer, soit quitter le système.

Lorsqu'un client arrive et trouve le système à l'état $(n,1)$, alors sa fonction de gain s'écrit de la manière suivante :

$$U_{obs} = R_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + R_f \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right] - \frac{C}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right], n \geq 0 \quad (2.33)$$

telle que :

$\left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1}$ est la probabilité d'être servi.

$\frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \right]$ est le temps moyen d'attente.

Les auteurs ont trouvé l'équilibre de Nash pour ce jeu.

— Cas non-observable :

Les clients n'observent pas $N(t)$. Dans ce cas la fonction d'utilité d'un client est alors :

$$U_{nobs}(1,q) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{nobs}(k,1) U_{obs} k, \quad (2.34)$$

$P_{nobs}(k,1)$ représente la probabilité qu'il y ait k client dans le système lorsque le serveur est actif.

Il s'agit donc de chercher l'équilibre en stratégies mixtes tel qu'un client qui arrive entre avec la probabilité p_e .

2.4 Équations aux différences linéaires à coefficients constants

2.4.1 Résolution de l'équation homogène

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux équations aux différences linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre k de la forme, [3].

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = 0, n \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

avec $p_i, i \in \{1, \dots, k\}$ sont des constantes réelles et $p_k \neq 0$. Notre objectif est de trouver un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.35) et par conséquent sa solution générale.

Proposition 1. *Soit λ un nombre complexe non nul. Si la suite définie par $y(n) = \lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}$ est une solution de l'équation (2.35), alors λ est solution de l'équation*

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k = 0 \quad (2.36)$$

Démonstration 1. *Soit $y(n) = \lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Substituons les termes de cette suite dans (2.35) nous obtenons*

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \dots + p_k \lambda^n = 0, n \in \mathbb{N} \quad (2.37)$$

donc

$$\lambda^n [\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k] = 0, n \in \mathbb{N} \quad (2.38)$$

d'où(2.36)

Remarque 1. *L'équation (2.36) est appelée équation caractéristique associée à l'équation (2.35).*

Théorème 4. *L'ensemble des solutions de l'équation(2.35) est un ensemble fondamental de solutions si et seulement si $W(n_0) \neq 0$, [3].*

$$(y_1^n)_{n=n_0}^{+\infty}, (y_2^n)_{n=n_0}^{+\infty}, \dots, (y_k^n)_{n=n_0}^{+\infty} \quad (2.39)$$

Théorème 5. *Soient $\lambda_i, i \in 1, \dots, k$ les solutions distinctes de l'équation (2.36). Alors $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation(2.35)*

Démonstration 2. *Soient $\{\lambda_i^n\}_{n=0}^{+\infty}, i \in \{1, \dots, k\}$ des solutions de l'équation (2.35) et $W(n)$ le Casoratien de ces solutions, d'après le Théorème 4 suffit de montrer que $W(0) \neq 0$*

On a

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

c'est le déterminant de Vandermonde, alors

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i), \quad (2.40)$$

Puisque les $\lambda_i, i \in \{1, \dots, k\}$ sont distinctes, il résulte de (2.40) que $W(0) \neq 0$, donc $\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.35)

Corollaire 1. *La solution générale de l'équation (2.35) est donnée par*

$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.41)$$

Lemme 1. *Soient $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ des solutions de l'équation (2.36) de multiplicité $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ respectivement tels que $r \leq k$ et $\{m_1, m_2, \dots, m_r = k\}$.*

Alors

$$\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n, \dots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\} \quad (2.42)$$

est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.35). Pour la démonstration [2].

Corollaire 2. *La solution générale de l'équation (2.35) s'écrit sous la forme*

$$y(n) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, c_{i,j} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.43)$$

2.4.2 Exemple de Racines réelles simples

Considérons l'équation aux différences suivante

$$y(n+2) + 2y(n+1) - y(n) = 0, n \in \mathbb{N} \quad (2.44)$$

avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

L'équation caractéristique associée à l'équation (2.44) est

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

et les solutions de cette équation sont.

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Donc la solution générale de l'équation (2.44) est

$$y(n) = c_1 \left(-1 - \sqrt{2}\right)^n + c_2 \left(-1 + \sqrt{2}\right)^n, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}.$$

D'après les conditions initiales on a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + (-1 - \sqrt{2}) + c_2(-1 + \sqrt{2}) = 1, \end{cases} \quad (2.45)$$

donc

$$c_1 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (2.46)$$

d'où la solution de l'équation (2.44) avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$ est

$$y(n) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left(-1 - \sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-1 + \sqrt{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

2.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des éléments de base de la théorie des jeux, file d'attente et les équations aux différences qui nous seront utiles pour les chapitres qui suivent. Pour pouvoir comprendre les analyses des systèmes d'attente que nous avons abordé dans notre travail.

L'objectif de la théorie des jeux dans les files d'attente Markovienne est d'étudier le comportement des clients au moment de leurs arrivées au système et de déterminer les stratégies que les clients suivent pour pouvoir maximiser leurs gains.

Dans le chapitre 3, Nous allons présenter les résultats de recherche de [30] qui concerne une modélisation de l'accès au canal sans fil *RC* (Radio Cognitifs) en utilisant les files d'attentes et la théorie des jeux. Les performances du modèle d'attente sont calculées via les équations aux différences.

Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans les réseaux radio cognitive "avec perte de clients"

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans les réseaux radio cognitifs avec perte de clients. La perte de clients se produit lorsqu'un *PU* arrive et occupe le spectre.

Sur la base du travail [30], nous aborderons l'analyse du comportement des *SUs* dans ce contexte. Nous explorerons les stratégies d'optimisation individuelle et sociale que les *SUs* peuvent adopter pour maximiser leurs profits malgré la possibilité de quitter la file.

Ce chapitre se concentre sur l'utilisation du jeu de file d'attente pour modéliser l'accès au spectre dans les réseaux radio cognitifs avec perte de clients. Nous avons exploité ce travail pour écrire un algorithme qui permet aux paquets *SUs* de décider d'entrer dans la file ou non, étant donné le résultat du jeu donné dans[30]

3.1 Modélisation

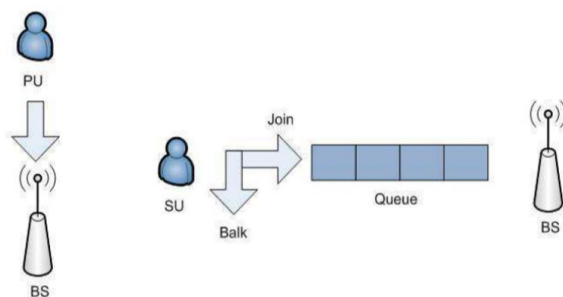


FIGURE 3.1 – La Modélisation

La modélisation peut être trouvée dans la Figure (3.1). Les auteurs considèrent qu'un *RRC*(Réseaux radio cognitif) se compose de plusieurs *SUs*, d'une *BS*(Station de Base) et

de plusieurs *PU*s. Lorsque les *PU*s sont absentes, la *BS* peut utiliser le spectre disponible pour desservir les *SU*s. Si le *PU* entre dans le système, en raison de sa priorité, la *BS* doit abandonner la connexion de service des *SU*s et commencer à desservir le *PU*. Pendant ce temps, la file d'attente composée des *SU*s n'existe plus et toutes les *SU*s doivent quitter la file d'attente et rechercher d'autres opportunités de transmission.

Ils considèrent que le taux d'arrivée des données du *SU* suit le processus de Poisson de taux λ , et l'arrivée du *PU* suit également le processus de Poisson de taux ξ . Le service des *SU* sont indépendantes et identiquement distribuées avec une distribution exponentielle de paramètre μ . La politique du premier arrivé premier servi (*FIFO*) est appliquée pour déterminer l'ordre de service des *SU*s à la *BS*. La durée du temps de service d'un *PU* est également supposée suivre une distribution exponentielle de paramètre η . Le modèle de file d'attente considéré ci-dessus est déjà considéré dans certaines littératures antérieures, par exemple [10] [4].

L'état du système à l'instant t est représenté par un couple $(N(t), I(t))$, où $N(t)$ est la longueur de file d'attente, c'est-à-dire le nombre des *SU*s dans le système et $I(t)$ indique l'état de fonctionnement de la *BS* avec :

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{il dessert les SUs} \\ 0, & \text{il dessert les PUs} \end{cases}$$

Donc sur la base du modèle lorsque $I(t) = 0$, on a $N(t) = 0$.

Il est supposé que lorsque l'*SU* est servi avec succès par la *BS*, il peut recevoir une récompense. Pendant l'attente dans la file d'attente, le coût du retard du *SU* dépend de sa durée d'attente. En fonction de la différence entre la récompense et le coût total, le *SU* peut prendre la décision de rejoindre ou non la file d'attente et d'attendre l'accès au spectre. Les modèles de gain sont présentés dans la suite pour évaluer cette décision.

3.1.1 Modèles de profit

Il est supposé que lorsque le *SU* est servi avec succès par la *BS*, il reçoit une récompense \bar{w}_s . De plus, il est supposé que le coût de rester dans la file d'attente est représenté par $\chi(T)$, où T correspond au temps de séjour dans le système, c'est-à-dire le temps pendant lequel le *SU* reste dans la file d'attente.

Il est nécessaire que $\chi(T)$ soit une fonction croissante de T , et un exemple simple de fonction linéaire est $\chi(T) = CT$, où C représente le coût unitaire. Ainsi, le profit du *SU* peut être exprimé :

$$R = \bar{w}_s - CT \tag{3.1}$$

En conséquence, ils peuvent définir le profit individuel espéré.

Définition 2. *Lorsqu'il y a n SUs dans la file d'attente, le profit attendu du SU qui arrive peut être défini comme :*

$$U(n) = \theta_s(\bar{w}_s - CE(Q_n)) \quad (3.2)$$

où θ_s est la probabilité que le SU puisse être desservi et $E(Q_n)$ est le temps de séjour attendu lié à n SUs

De plus, on peut également définir le bien-être social comme suit :

Définition 3. *Le bien-être social est donné par :*

$$S(q) = \lambda \rho_s \bar{w}_s - CE(N) \quad (3.3)$$

où

ρ_s : représente la proportion de SUs qui rejoignent la file d'attente et la quittent après avoir été servis.

$E(N)$: est le nombre moyen de SUs .

Dans la suite, les auteurs prennent en compte le fait que les SUs sont soumis au risque naturel et cherchent à maximiser leurs profits. De plus, ils supposent que les SUs sont identiques, ce qui signifie qu'un jeu symétrique est présumé, ils considèrent que lorsque le SU entre dans le système à l'instant t , tous les paramètres du système, y compris le modèle de profit, sont connus à l'exception de la longueur de la file d'attente $N(t)$. Il ne peut observer $I(t)$ qu'à son arrivé, c'est-à-dire une observation partielle de la file est considérée.

3.2 Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre : équilibre et tarification

3.2.1 Probabilité stationnaire et temps de séjour prévu

Une fois entré dans le système, le SU a la possibilité de décider s'il doit ou non rejoindre la file d'attente pour accéder au spectre, en se basant sur sa propre observation, c'est-à-dire, en prenant en compte les bénéfices potentiels. Ainsi, il existe seulement deux stratégies pures : rejoindre la file d'attente ou quitter, tandis qu'une stratégie mixte est spécifiée par la probabilité d'adhésion $q \in [0,1]$ d'un SU qui constate que la BS ne sert pas de PU . Par conséquent, le taux d'arrivée effectif devient $\lambda' = \lambda q$.

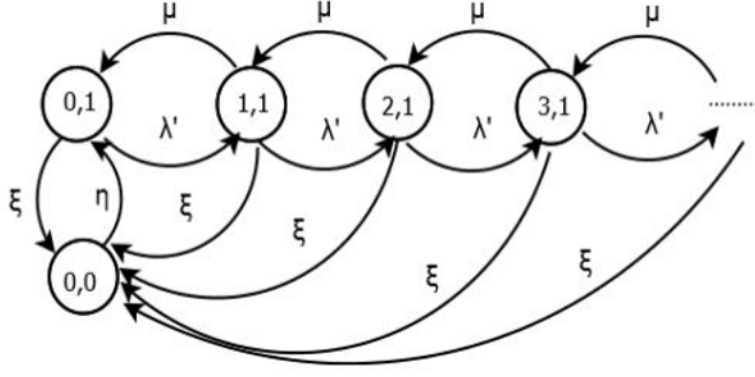


FIGURE 3.2 – Diagramme transition avec perte de clients

Le diagramme de transition illustré dans la Figure 3.2 permet d'obtenir les probabilités stationnaires $p(N(t), I(t))$ pour le système considéré.

$$\eta p(0,0) = \xi \sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) \quad (3.4)$$

$$(\lambda' + \xi)p(0,1) = \mu p(1,1) + \eta p(0,0) \quad (3.5)$$

$$(\lambda' + \xi + \mu)p(n,1) = \lambda' p(n-1,1) + \mu p(n+1,1), \forall n \geq 1, \quad (3.6)$$

$$p(0,0) + \sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) = 1. \quad (3.7)$$

Pour obtenir $p(0,0)$ et $p(n,1)$, les propositions suivantes sont utilisées,

Proposition 2. *Les probabilités stationnaires $p(0,0)$ et $p(n,1)$ peuvent être exprimées de la manière suivante [30] :*

$$p(0,0) = \frac{\xi}{\xi + \eta} \quad (3.8)$$

$$p(n,1) = \frac{\eta(1 - x(\lambda'))x(\lambda')^n}{\xi + \eta} \quad (3.9)$$

Preuve

À partir de l'équation (3.8), on peut observer que $p(0,0) = \frac{\xi}{\xi + \eta}$

Pour obtenir $p(n,1)$, on peut appliquer une approche similaire à celle utilisée dans [21]. On peut remarquer que l'équation (5.1) peut être considérée comme une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 2, c'est-à-dire avec des coefficients constants et une équation caractéristique

$$\begin{aligned} (\lambda' + \xi + \mu)p(n,1) &= \lambda' p(n-1,1) + \mu p(n+1,1) \\ -(\lambda' + \xi + \mu)p(n,1) + \lambda' p(n-1,1) + \mu p(n+1,1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

soit y un nombre non nul

$$\mu y^2 - (\lambda' + \xi + \mu)y + \lambda' = 0 \quad (3.11)$$

en résolvant une équation quadratique, nous avons obtenu la solution suivante

$$x(\lambda') = \frac{(\lambda' + \xi + \mu) - \sqrt{(\lambda' + \xi + \mu)^2 - 4\lambda'\mu}}{2\mu} \quad (3.12)$$

$$x'(\lambda') = \frac{(\lambda' + \xi + \mu) + \sqrt{(\lambda' + \xi + \mu)^2 - 4\lambda'\mu}}{2\mu} \quad (3.13)$$

il est suffisant de démontrer que $\det W(0) \neq 0$

avec

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x(\lambda') & x'(\lambda') \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

ainsi, $x'(\lambda')$ et $x(\lambda')$ constituent des solutions de l'équation.

La solution générale de l'équation (5.1) est exprimée comme suit :

$$x(\lambda') = \frac{(\lambda' + \xi + \mu) - \sqrt{(\lambda' + \xi + \mu)^2 - 4\lambda'\mu}}{2\mu} \quad (3.15)$$

$$p(n,1) = C_1 x'(\lambda')^n + C_2 x(\lambda')^n \quad (3.16)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées de la manière suivante

étant donné que $x'(\lambda') > 1$, il est nécessaire que C_1 soit égal à 0, c'est-à-dire $C_1 = 0$. Ainsi, on obtient : $p(n,1) = C_2 x(\lambda')^n$. De plus, on a $p(0,0) + \sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) = 1$, où $p(0,0) = \frac{\xi}{\xi + \eta}$.

La constante C_2 peut être calculée en utilisant l'équation (3.7)

$$p(0,0) + \sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) = 1. \quad (3.17)$$

$$\frac{\xi}{\xi + \eta} + \sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) = 1. \quad (3.18)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) = 1 - \frac{\xi}{\xi + \eta} \quad (3.19)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) = \frac{\eta}{\xi + \eta} \quad (3.20)$$

à partir de (3.20), nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n,1) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_2 x(\lambda')^n = \frac{\eta}{\xi + \eta}. \quad (3.21)$$

puisque $x(\lambda') < 1$ lorsque n tend vers l'infini, nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x(\lambda')^n = \frac{1}{1 - x(\lambda')}. \quad (3.22)$$

En utilisant cette relation, nous pouvons déterminer la valeur de C_2

$$C_2 = \frac{\eta(1 - x(\lambda'))}{\xi + \eta}. \quad (3.23)$$

Par conséquent, l'expression de $p(n,1)$ devient

$$p(n,1) = \frac{\eta(1 - x(\lambda'))x(\lambda')^n}{\xi + \eta}. \quad (3.24)$$

Pour atteindre le profit espéré, nous devons d'abord obtenir les valeurs de θ_s et $E(Q_n)$ à partir de l'équation (3.2)

Supposons qu'un SU entre dans le réseau à l'état $(n,1)$ à son arrivée et décide de rejoindre la file d'attente. Ce SU peut se retrouver dans l'une des deux situations suivantes

a. Lorsqu'un SU termine son service Dans ce cas, le SU a attendu une somme de $n+1$ durées indépendantes, distribuées exponentiellement avec un paramètre de μ .

b. Lorsqu'un PU entre dans le système .

Ainsi, la durée de séjour du SU dans le système est donnée par $N = \min(L_n, Q)$, où L_n suit une distribution Gamma avec les paramètres $n+1$ et μ , et Q est une variable aléatoire qui suit une distribution exponentielle avec un taux ξ . Il est important de noter que Q est indépendant de L_n . Par conséquent, nous avons la relation suivante

$$\theta_s = Pr(L_n < Q) \quad (3.25)$$

Dans cette perspective, en supposant que le SU a connaissance de $N(t)$ et $I(t)$, il est possible d'obtenir les valeurs de θ_s et $E(Q_n)$

$$\theta_s = \int_0^\infty \exp^{-\xi L} \frac{\mu^{n+1}}{n!} L^n \exp^{-\mu L} dL = \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \quad (3.26)$$

$$E(Q_n) = \int_0^\infty \exp^{-\xi Q_n} \int_{Q_n}^\infty \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n \exp^{-\mu u} du dQ_n = \frac{1}{\xi} (1 - \theta_s) \quad (3.27)$$

Dans cette situation, en utilisant les équations (3.4) et (3.27) et (3.26), on peut résoudre $U(n)$ dans l'équation (3.2) et ainsi trouver le profit espéré d'un SU qui entre dans la file d'attente avec une certaine probabilité. Il est important de noter que n représente le nombre de SU dans la file d'attente.

3.2.2 Stratégie d'équilibre individuel

En utilisant les résultats des probabilités stationnaires et du temps de séjour attendu, nous pouvons calculer le profit espéré d'un SU qui décide d'entrer dans la file d'attente avec une probabilité q_e , comme illustré ci-dessous

Proposition 3. *Lorsqu'une bande passante de fréquence est disponible pour les SU, le profit espéré d'un SU qui décide d'entrer dans la file d'attente avec une probabilité \tilde{q} , sachant que d'autres SU rejoignent la file d'attente avec une probabilité q , peut être exprimé comme suit :*

$$\Gamma(\tilde{q}, q) = \tilde{q} \left[\left(\bar{w}_s + \frac{C}{\xi} \right) \frac{\mu(1-x(\lambda'))}{\mu + \xi - \mu x(\lambda')} - \frac{C}{\xi} \right] \quad (3.28)$$

Preuve

Pour démontrer la Proposition 3, nous commençons par calculer le profit espéré lorsque le SU est capable d'observer la présence de n autres SU et l'état de la file d'attente dans le système à son arrivée (c'est-à-dire la file d'attente observée) et décide d'entrer. Ce profit espéré peut être calculé à partir de l'équation (3.26) (3.27).

$$U(n) = \bar{w}_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} - \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\xi} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} \quad (3.29)$$

Lorsqu'un SU décide de se joindre à la file d'attente, en supposant que la BS dessert d'autres SU et que ces derniers suivent la stratégie q , le profit espéré peut être exprimé de la manière suivante :

$$\Gamma(\tilde{q}, q) = (1 - \tilde{q})\Gamma(0, q) + \tilde{q}\Gamma(1, q) \quad (3.30)$$

si un SU décide de ne pas rejoindre la file d'attente, le profit espéré correspondant est nul.

$$(1 - \tilde{q})\Gamma(0, q) = 0 \quad (3.31)$$

$$\Gamma(\tilde{q}, q) = \tilde{q}\Gamma(1, q) \quad (3.32)$$

$$\Gamma(1, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_1(n, 1)U(n) \quad (3.33)$$

où $\sum_{n=0}^{+\infty} p_1(n, 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p(n, 1)}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 1)}$

soit $p(n)$ la probabilité qu'il y ait n SUs dans la file d'attente lorsqu'un SU arrive

$$\Gamma(1, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p(n, 1)}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 1)} U(n) \quad (3.34)$$

$$\Gamma(1, q) = \left(\bar{w}_s + \frac{C}{\xi} \right) \frac{\mu(1-x(\lambda'))}{\mu + \xi - \mu x(\lambda')} - \frac{C}{\xi} \quad (3.35)$$

on a

$$\Gamma(1, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p(n, 1)}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 1)} U(n) \quad (3.36)$$

$$\Gamma(1, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\eta(1-x(\lambda'))x(\lambda')^n}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 1)} U(n) \quad (3.37)$$

$$\Gamma(1, q) = (1 - x(\lambda')) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\eta}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 1)} x(\lambda')^n U(n) \quad (3.38)$$

on a aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(i,1) = \frac{\eta}{\xi + \eta}$$

donc

$$\Gamma(1,q) = (1 - x(\lambda')) \sum_{n=0}^{+\infty} x(\lambda')^n U(n) \quad (3.39)$$

$$\Gamma(1,q) = (1 - x(\lambda')) \sum_{n=0}^{+\infty} x(\lambda')^n [\bar{\omega}_s \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1} - \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\xi} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1}] \quad (3.40)$$

$$\Gamma(1,q) = (1 - x(\lambda')) \sum_{n=0}^{+\infty} x(\lambda')^n \left[\left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} - \frac{C}{\xi} \right] \quad (3.41)$$

$$\Gamma(1,q) = (1 - x(\lambda')) \sum_{n=0}^{+\infty} x(\lambda')^n \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} - \frac{C}{\xi} \quad (3.42)$$

$$\Gamma(1,q) = (1 - x(\lambda')) \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} x(\lambda')^n \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^n - \frac{C}{\xi} \quad (3.43)$$

$$\Gamma(1,q) = (1 - x(\lambda')) \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right) \frac{1}{1 - \frac{x(\lambda')\mu}{\mu + \xi}} - \frac{C}{\xi} \quad (3.44)$$

$$\Gamma(1,q) = (1 - x(\lambda')) \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right) \frac{\mu + \xi}{\mu + \xi - x(\lambda')\mu} - \frac{C}{\xi} \quad (3.45)$$

on obtient

$$\Gamma(1,q) = -\frac{C}{\xi} + \frac{\mu(1 - x(\lambda'))}{\mu + \xi - x(\lambda')\mu} \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) \quad (3.46)$$

$$\Gamma(\tilde{q},q) = \tilde{q} \left[-\frac{C}{\xi} + \frac{\mu(1 - x(\lambda'))}{\mu + \xi - x(\lambda')\mu} \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) \right] \quad (3.47)$$

Maintenant, nous pouvons procéder à la recherche de l'équilibre individuel (EI), c'est-à-dire la stratégie optimale d'un SU . Voici ce qui a été obtenu :

Théorème 6. *Dans le modèle considéré, il existe une unique stratégie mixte d'équilibre individuel (EI), avec une probabilité d'adhésion q_e donnée par :*

$$q_e = \begin{cases} 1, & \bar{\omega}_s \in \left[\frac{c}{\mu(1-k)}, +\infty \right), \\ \Theta, & \bar{\omega}_s \in \left(\frac{c}{\mu}, \frac{C}{\mu(1-k)} \right), \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases} \quad (3.48)$$

où

$$\Theta = \frac{(\mu\bar{\omega}_s - C)(C + \xi\bar{\omega}_s)}{\lambda C \bar{\omega}_s}$$

$$k = x(\lambda)$$

Preuve

Pour un SU, il préférera entrer dans la file d'attente si son profit espéré après avoir entré, représenté par $\Gamma(1,q)$, est > 0 , et il reculera s'il est < 0 . Lorsque $\Gamma(1,q)=0$, on peut résoudre pour $x(\lambda')$. L'unique solution est : $\Gamma(1,q) = 0$.

$$\Gamma(1,q) = -\frac{C}{\xi} + \frac{\mu(1-x(\lambda'))}{\mu+\xi-x(\lambda')\mu} \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\mu(1-x(\lambda'))}{\mu+\xi-x(\lambda')\mu} \left(\bar{\omega}_s + \frac{C}{\xi} \right) = \frac{C}{\xi} \quad (3.50)$$

on aura

$$x(\lambda') = 1 - \frac{C}{\mu\bar{\omega}_s} \quad (3.51)$$

pour $x(\lambda')$, où $\lambda' = \lambda q$, est une racine de l'équation (3.11). En résolvant cette équation, on obtient

$$q_e = \frac{x(\lambda')[\mu(1-x(\lambda')) + \xi]}{\lambda(1-x(\lambda'))} \quad (3.52)$$

en remplaçant $x(\lambda') = \frac{(\lambda'+\xi+\mu) - \sqrt{(\lambda'+\xi+\mu)^2 - 4\lambda'\mu}}{2\mu}$

$$q_e = \frac{(\mu\bar{\omega}_s - C)(C + \xi\bar{\omega}_s)}{\lambda C \bar{\omega}_s} \quad (3.53)$$

on peut également observer que $\frac{dx(\lambda')}{dq} > 0$, donc $x(\lambda')$ est une fonction strictement croissante.

$$x(\lambda') = \frac{(\lambda' + \xi + \mu) - \sqrt{(\lambda' + \xi + \mu)^2 - 4\lambda'\mu}}{2\mu} \quad (3.54)$$

$$\frac{dx(\lambda')}{dq} = \frac{\lambda}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{(\lambda q + \mu + \xi) - 2\mu}{\sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}} \quad (3.55)$$

$$\frac{dx(\lambda')}{dq} = \frac{\lambda}{2\mu} \left[1 - \frac{(\lambda q + \mu + \xi) - 2\mu}{\sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}} \right] = 0 \quad (3.56)$$

Comme $\frac{\lambda}{2\mu} > 0$

$$\frac{(\lambda q + \mu + \xi) - 2\mu}{\sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}} = 1 \quad (3.57)$$

$$(\lambda q + \mu + \xi) - 2\mu = \sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}. \quad (3.58)$$

- La condition $-4\mu\xi = 0$ est impossible, ce qui nous permet de conclure que $\frac{dX(\lambda')}{dq} > 0$
- Si $x(\lambda q_e) \in [0, k]$ où $k = x(\lambda)$, alors $q_e \in [0, 1]$
- Si $q_e = 1$, cela implique que $x(\lambda') = x(\lambda) = k$, $\lambda' = \lambda 1$

Autrement dit, q_e est dans l'intervalle $(0, 1)$ ssi $\bar{\omega}_s \in \left(\frac{C}{\mu}, \frac{C}{\mu(1-k)} \right)$

- pour $q_e = 1$ on à

$$x(\lambda q_e) = x(\lambda) = \kappa \quad (3.59)$$

$$x(\lambda) = 1 - \frac{C}{\mu \bar{\omega}_s} \Rightarrow \kappa = 1 - \frac{C}{\mu \bar{\omega}_s} \quad (3.60)$$

$$\bar{\omega}_s = \frac{C}{\mu(1 - \kappa)} \quad (3.61)$$

- pour $q_e = 0$ on a $X(\lambda q_e) = X(0) = 0$

$$1 - \frac{C}{\mu \bar{\omega}_s} = 0 \Rightarrow \bar{\omega}_s = \frac{C}{\mu} \quad (3.62)$$

- ainsi $q_e \in [0,1]$ ssi $\bar{\omega}_s \in (\frac{C}{\mu}, \frac{C}{\mu(1-k)})$.

De plus, on peut constater que lorsque $\bar{\omega}_s \geq \frac{C}{\mu(1-k)}$, $\Gamma(1,q)$ reste positif. Cela signifie que la meilleure réponse pour le SU est de rejoindre la file d'attente. Dans ce cas, "joindre" est l'unique équilibre individuel.

D'autre part, lorsque $\bar{\omega}_s \leq \frac{C}{\mu}$, $\Gamma(1,q)$ devient négatif. Dans cette situation, la stratégie d'équilibre pour les individus est de "reculer".

Selon le théorème 5.1, l'équilibre individuel (IE) est indépendant du temps de service de PU . Cela signifie que la décision d'un SU pour entrer dans la file d'attente ne dépend que de la présence d'un PU et non des informations le concernant. Cependant, les stratégies d'équilibre social des SUs dépendent des stratégies de tarification des stations de bases et du taux d'arrivée des utilisateurs primaires(PU s). Il est important de noter que l'EI ne garantit pas l'optimalité du bien-être social. Par conséquent, les auteurs se penchent sur l'étude de la stratégie sociale optimale dans la suite de leur travail.

3.2.3 L'équilibre Social

En utilisant les résultats précédents sur les probabilités stationnaires et en considérant le bien-être social, nous sommes en mesure de formuler la proposition suivante :

Proposition 4. *Le profit social attendu, lorsque les SUs suivent une stratégie mixte avec une probabilité q de rejoindre (c'est-à-dire que les SU arrivant qui trouvent un BS ne desservant pas le PU entrent avec une probabilité q , tandis que les autres choisissent de reculer sans être servis), est donné par :*

$$S(q) = \frac{\eta x(\lambda') [\mu \bar{\omega}_s (1 - x(\lambda')) - C]}{(\xi + \eta)(1 - x(\lambda'))} \quad (3.63)$$

Pour évaluer le bien-être social exprimé par l'équation (3.3), il est nécessaire de déterminer les valeurs de $E(N)$ et ρ_s . En utilisant (3.4) et (3.27), on obtient ρ_s et $E(N)$

$$\rho_s = \sum_n p(n,1) q \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} = q \frac{\mu \eta (1 - x(\lambda'))}{\xi + \mu (1 - x(\lambda'))} \quad (3.64)$$

$$E(N) = \sum_n np(n,1) = \frac{\eta x(\lambda')}{(\eta + \xi)(1 - x(\lambda'))} \quad (3.65)$$

En utilisant l'équation en (3.63), nous pouvons déduire la stratégie optimale, qui est énoncée dans le théorème suivant

Théorème 7. *Dans le modèle considéré, il existe une unique stratégie optimale sur le plan social avec une probabilité q_s pour rejoindre la file d'attente, qui peut être exprimée comme suit :*

$$q_s = \begin{cases} 1, & \bar{\omega}_s \in [\frac{C}{\mu(1-k)^2}, +\infty[, \\ \Phi, & \bar{\omega}_s \in]\frac{C}{\mu}, \frac{C}{\mu(1-k)^2}[, \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (3.66)$$

d'où

$$\Phi = \frac{\sqrt{\vartheta}(\mu\bar{\omega}_s - \sqrt{\vartheta})(\xi\bar{\omega}_s + \sqrt{\vartheta})}{\lambda\vartheta\bar{\omega}_s} \quad (3.67)$$

et

$$\vartheta = \mu\bar{\omega}_s C \quad (3.68)$$

Preuve

on peut observer que l'équation (3.63) peut être reformulée de la manière suivante

$$S(q) = f(x(\lambda q)) \quad (3.69)$$

d'où

$$f(x) = \frac{\eta x[\mu\bar{\omega}_s(1-x) - C]}{(\xi + \eta)(1-x)} \quad (3.70)$$

il est nécessaire de résoudre

$$f'(x) = \frac{\eta(\mu\bar{\omega}_s x^2 - 2\mu\bar{\omega}_s x + \mu\bar{\omega}_s - C)}{(\xi + \eta)(1-x)^2} \quad (3.71)$$

$$f'(x) = \eta(\mu\bar{\omega}_s x^2 - 2\mu\bar{\omega}_s x + \mu\bar{\omega}_s - C) = 0 \quad (3.72)$$

on aura :

$$\mu\bar{\omega}_s x^2 - 2\mu\bar{\omega}_s x + \mu\bar{\omega}_s - C = 0 \quad (3.73)$$

il est possible d'observer que le discriminant du polynôme quadratique dans(3.73) est inférieur ou égal à 0 lorsque $C \leq 0$. Par conséquent, on peut conclure que $f(x)$ est croissante et que $S(q)$ l'est également. Le polynôme en (3.73) possède alors deux racines, qui sont

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu\bar{\omega}_s} \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu\bar{\omega}_s} \quad (3.74)$$

nous avons $x_1 < 1 < x_2$

- Si $x_1 \leq 0$, alors nous avons $x_1 < 0 < k < x_2$. En conséquence, $S(q)$ diminue dans l'intervalle $[0,1]$ et le choix social optimal est $q_s = 0$. De plus, on peut observer que $x_1 \leq 0$ implique $\bar{\omega}_s \leq \frac{C}{\mu}$.
- Si $0 < x_1 < k$, nous pouvons constater que le maximum de $S(q)$ est atteint pour une valeur de q telle que $x(q) = x_1$. En utilisant l'équation (3.9) en substituant y par x_1 et en résolvant pour q , nous obtenons :

$$-(\lambda' + \mu + \xi)x + \mu x^2 + \lambda' = 0 \quad (3.75)$$

$$-(\mu + \xi) \left(1 - \frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu \bar{\omega}_s}\right) + \mu \left(1 - \frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu \bar{\omega}_s}\right)^2 = 0 \quad (3.76)$$

$$-(\mu + \xi) + \frac{\sqrt{\vartheta}(\lambda' + \mu + \xi)}{\mu \bar{\omega}_s} + \mu \left[1 + \left(\frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu \bar{\omega}_s}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{\vartheta}}{\mu \bar{\omega}_s}\right] = 0 \quad (3.77)$$

$$-\mu - \xi + \frac{\sqrt{\vartheta}(\lambda' + \mu + \xi)}{\mu \bar{\omega}_s} + \mu + \frac{\mu \sqrt{\vartheta}}{\mu^2 \bar{\omega}_s^2} - 2\frac{\sqrt{\vartheta} \mu}{\mu \bar{\omega}_s} \quad (3.78)$$

$$-\xi + \frac{\sqrt{\vartheta}(\lambda' + \mu + \xi) - 2\sqrt{\vartheta} \mu}{\mu \bar{\omega}_s} + \frac{\mu \vartheta}{\mu^2 \bar{\omega}_s^2} = 0 \quad (3.79)$$

$$-\xi + \frac{\sqrt{\vartheta}(-\mu + \xi + \lambda') \bar{\omega}_s}{\mu \bar{\omega}_s^2} + \frac{\vartheta}{\mu \bar{\omega}_s^2} = 0 \quad (3.80)$$

$$\frac{\sqrt{\vartheta}(-\mu + \xi + \lambda') \bar{\omega}_s + \vartheta}{\mu \bar{\omega}_s^2} = \xi \quad (3.81)$$

$$q_s = \frac{\xi \mu \bar{\omega}_s^2 + \mu \sqrt{\vartheta} \bar{\omega}_s - \xi \sqrt{\vartheta} \bar{\omega}_s - \vartheta}{\sqrt{\vartheta} \lambda \bar{\omega}_s} \quad (3.82)$$

$$q_s = \frac{\sqrt{\vartheta}(\mu \omega_s - \sqrt{\vartheta})(\xi \omega_s + \sqrt{\vartheta})}{\lambda \vartheta \omega_s} \quad (3.83)$$

on peut observer que $0 < x_1 < k$ signifie que $\frac{C}{\mu} < \omega_s < \frac{C}{\mu(1-\kappa)^2}$

- de même, si $x_1 \geq k$, nous pouvons avoir le choix social optimal $q_s = 1$ et $\omega_s \geq \frac{C}{\mu(1-\kappa)^2}$.

3.3 Résultats des simulation

Les paramètres numériques sont les suivants : $\lambda = 7$, $\xi = 0,5$, $\mu = 3$, $\eta = 2$, $C = 2$.

Tout d'abord, dans la Figure(3.3), il est possible d'observer que la probabilité d'adhésion socialement optimale q_s est toujours inférieure à la probabilité individuelle q_e . En conséquence, il existe un écart important entre le taux d'atteinte de l'équilibre individuel et le taux d'atteinte l'équilibre sociale, puisque ces taux peuvent être exprimés respectivement par λ_e (respectivement $\lambda_s = \lambda q_e$ (respectivement λq_s).

Les arrivées des utilisateurs secondaires SUs peuvent être réglementées. Dans la Figure 3.4, on peut observer que profit social lors de l'utilisation de q_s est plus élevé que lors de l'utilisation de q_e .

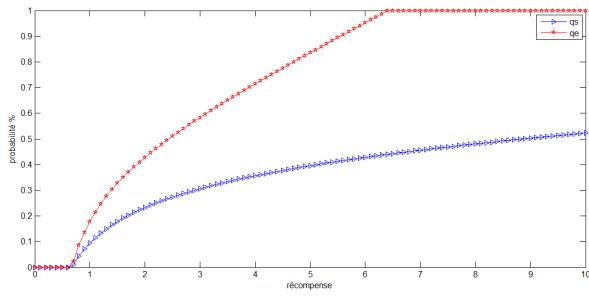


FIGURE 3.3 – Relation entre la probabilité de rejoindre la file et la récompense

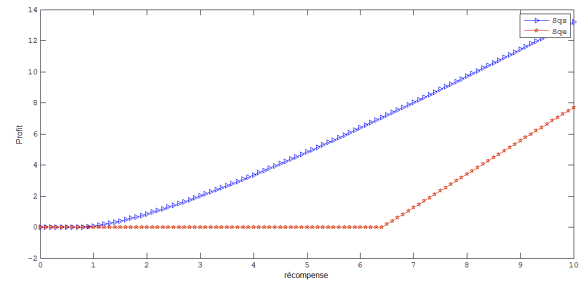


FIGURE 3.4 – Le profit en fonction de la récompense

En comparant la Figure 3.3 et la Figure 3.4, il est possible de constater que seule lorsque $q_e = 1$, la prestation sociale est supérieure à 0, sinon elle reste inférieure ou égale à 0. En revanche, les avantages sociaux lors de l'utilisation de q_s sont toujours supérieurs à 0 et comparativement élevés.

3.4 Algorithmme

Algorithme pour aider le *SU* à choisir une Stratégie

Algorithm 1: pour trouver la probabilité q_e et profit $S(q_e)$ en fonction de la récompense $\bar{\omega}_s$

Data: $\bar{\omega}_s$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_e, S(q_e)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité d'entrée et profit associer ($\bar{\omega}_s$) :

disp(['la valeur de la récompense est :', num2str($\bar{\omega}_s$)]);

disp('taux d'arrive du SU');

λ =input('entrez la valeur = ');

disp('taux d'service d un SU ');

μ =input('entrez la valeur = ');

disp('taux d'arrive du PU');

ξ =input('entrez la valeur = ');

disp('taux d service du PU ');

η =input('entrez la valeur = ');

disp('coût unitair');

C =input('entrez la valeur = ');

$$k = \frac{(\lambda + \xi + \mu) - \sqrt{(\lambda + \xi + \mu)^2 - 4\mu\lambda}}{2\mu};$$

// Traitement principal

if ($\bar{\omega}_s < \frac{C}{\mu(1-k)}$) || ($\bar{\omega}_s > \frac{C}{\mu}$) **then**

$$| \quad q_e = \frac{(\mu\bar{\omega}_s - C) \times (C + \xi\bar{\omega}_s)}{\lambda \times C \times \bar{\omega}_s};$$

end

if $\bar{\omega}_s \leq \frac{C}{\mu}$ **then**

$$| \quad q_e = 0;$$

end

if $\bar{\omega}_s \geq \frac{C}{\mu(1-k)}$ **then**

$$| \quad q_e = 1;$$

end

$$x = \frac{(q_e\lambda + \mu + \xi) - \sqrt{(q_e\lambda + \mu + \xi)^2 - 4q_e\lambda\mu}}{2\mu};$$

$$S(q_e) = \frac{(\eta x)(\mu\bar{\omega}_s(1-x) - C)}{(\xi + \eta)(1-x)};$$

disp(['la probabilité de rejoindre q_e : ', num2str(q_e)]);

$$s = (1 - q_e);$$

disp(['la probabilité de reculer ($1 - q_e$) : ', num2str(s)]);

disp(['le profit espéré $S(q_e)$: ', num2str($S(q_e)$)]);

end

Algorithm 2: pour trouvé la probabilité q_s et bénéfices $S(q_s)$ en fonction de la récompense $\bar{\omega}_s$

Data: $\bar{\omega}_s$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_s, S(q_s)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité de bien être social($\bar{\omega}_s$) :

```

disp(['la valeur de la récompense est :', num2str( $\bar{\omega}_s$ )]);
disp('taux d'arrive du SU');
 $\lambda$ =input('entrez la valeur = ');
disp('taux d'service d un SU ');
 $\mu$ =input('entrez la valeur = ');
disp('taux d'arrive du PU');
 $\xi$ =input('entrez la valeur = ');
disp('taux d service du PU ');
 $\eta$ =input('entrez la valeur = ');
disp('coût unitair');
C=input('entrez la valeur = ');
 $k = \frac{(\lambda + \xi + \mu) - \sqrt{(\lambda + \xi + \mu)^2 - 4\mu\lambda}}{2\mu}$ ;
// Traitement principal
 $b = \mu\bar{\omega}_s C$ ;
 $v = \sqrt{b}$ ;
if ( $\bar{\omega}_s < \frac{C}{\mu(1-k)^2}$ ) || ( $\bar{\omega}_s > \frac{C}{\mu}$ ) then
|    $q_s = \frac{v(\mu\bar{\omega}_s - v)(\xi\bar{\omega}_s + v)}{b\lambda\bar{\omega}_s}$ ;
end
if  $\bar{\omega}_s \leq \frac{C}{\mu}$  then
|    $q_s = 0$ ;
end
if  $\bar{\omega}_s \geq \frac{C}{\mu(1-k)^2}$  then
|    $q_s = 1$ ;
end
 $x = \frac{(q_s\lambda + \mu + \xi) - \sqrt{(q_s\lambda + \mu + \xi)^2 - 4q_s\lambda\mu}}{2\mu}$ ;
 $S(q_s) = \frac{(\eta x(\mu\bar{\omega}_s(1-x) - C))}{(\xi + \eta)(1-x)}$ 
disp(['la probabilité de rejoindre  $q_s$  : ', num2str( $q_s$ )]);
 $s = (1 - q_s)$ ;
disp(['la probabilité de reculer ( $1 - q_s$ ) : ', num2str( $s$ )]);
disp(['le profit espéré  $S(q_s)$  : ', num2str( $S(q_s)$ )]);

```

end

3.4.1 Algorithme de simulation

Algorithm 3: pour trouver la probabilité q_e et bénéfices $S(q_e)$ en fonction de la récompense $\bar{\omega}_s$

Data: $\bar{\omega}_s$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_e, S(q_e)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité d'entrée et profit associer ($\bar{\omega}_s$) :

single k, λ , μ , ξ , η , C; // déclarer le type de variables

$\lambda=7$; // taux d'arrivée du SU, constante

$\mu=3$; // taux d'service d'un SU, constante

$\xi=0.5$; // taux d'arrivée du PU, constante

$\eta=2$; // taux d'service d'un PU, constante

C=2; // coût unitair, constante

m=length($\bar{\omega}_s$); // récupérer la taille du vecteur $\bar{\omega}_s$

$q_e=0$:m-1; // créer un vecteur q_e de taille m

x=0 :m-1; // créer un vecteur x de taille m

$S(q_e)=0$:m-1; // créer un vecteur $S(q_e)$ de taille m

$k = \frac{(\lambda+\xi+\mu) - \sqrt{(\lambda+\xi+\mu)^2 - 4\mu\lambda}}{2\mu}$;

// Traitement principal

for i \leftarrow 1 **to** m **do**

if ($\bar{\omega}_s(i) < \frac{C}{\mu(1-k)}$) || ($\bar{\omega}_s(i) > \frac{C}{\mu}$) **then**

$q_e(i) = \frac{(\mu\bar{\omega}_s(i) - C) \times (C + \xi\bar{\omega}_s(i))}{\lambda C \bar{\omega}_s(i)}$;

 // Le SU va décider d'entrer dans la file avec une probabilité q_e ou il va reculer avec une probabilité $(1 - q_e)$

end

if $\bar{\omega}_s(i) \leq \frac{C}{\mu}$ || $\bar{\omega}_s(i) = 0$ **then**

$q_e(i) = 0$;

 // Le SU va décider de reculer

end

if $\bar{\omega}_s(i) \geq \frac{C}{\mu(1-k)}$ **then**

$q_e(i) = 1$;

 // Le SU va décider d'entrer officiellement dans la file

end

end

$x(i) = \frac{(q_e(i)\lambda + \mu + \xi) - \sqrt{(q_e(i)\lambda + \mu + \xi)^2 - 4q_e(i)\lambda\mu}}{2\mu}$;

$S(q_e) = \frac{(\eta x(i))(\mu\bar{\omega}_s(i)(1-x(i)) - C)}{(\xi + \eta)(1-x(i))}$ // Le bénéfice espéré de SU par apport à sa probabilité d'entrer q_e

end

Algorithm 4: pour trouvé la probabilité q_s et bénéfices $S(q_s)$ en fonction de la récompense $\bar{\omega}_s$

Data: $\bar{\omega}_s$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_s, S(q_s)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité de bien être social($\bar{\omega}_s$) :

```

single k, λ, μ, ξ, η, C, v, b; // déclaration le type de variables
λ=7; // taux d'arrivée du SU, constante
μ=3; // taux d'service d'un SU, constante
ξ=0.5; // taux d'arrivée du PU, constante
η=2; // taux d'service d'un PU, constante
C=2; // coût unitair, constant
m=length( $\bar{\omega}_s$ ); // récupérer la taille du vecteur  $\bar{\omega}_s$ 
 $q_s=0:m-1$ ; // créer un vecteur  $q_s$  de taille  $m$ 
 $x=0:m-1$ ; // créer un vecteur  $x$  de taille  $m$ 
 $Sq_s=0:m-1$ ; // créer un vecteur  $Sq_s$  de taille  $m$ 
 $k = \frac{(\lambda+\xi+\mu)-\sqrt{(\lambda+\xi+\mu)^2-4\mu\lambda}}{2\mu}$ ;
// Traitement principal
for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
     $b = \mu\bar{\omega}_s(i)C$ ;
     $v = \sqrt{b}$ ;
    if ( $\bar{\omega}_s(i) < \frac{C}{\mu(1-k)^2}$ ) || ( $\bar{\omega}_s(i) > \frac{C}{\mu}$ ) then
         $q_s(i) = \frac{v(\mu\bar{\omega}_s(i)-v)(\xi\bar{\omega}_s(i)+v)}{b\lambda\bar{\omega}_s(i)}$ ;
        // Le SU va décider d'entrer dans la file avec une probabilité
         $q_s$  ou il va reculer avec une probabilité  $(1 - q_e)$ 
    end
    if  $\bar{\omega}_s(i) \leq \frac{C}{\mu}$  then
         $q_e(i) = 0$ ;
        // Le SU va décider de reculer
    end
    if  $\bar{\omega}_s(i) \geq \frac{C}{\mu(1-k)^2}$  then
         $q_e(i) = 1$ ;
        // Le SU va décider d'entrer officiellement dans la file
    end
end
end
 $x(i) = \frac{(q_s(i)\lambda+\mu+\xi)-\sqrt{(q_s(i)\lambda+\mu+\xi)^2-4q_s(i)\lambda\mu}}{2\mu}$ ;
 $S(q_s) = \frac{(\eta x(i))(\mu\bar{\omega}_s(i)(1-x(i))-C)}{(\xi+\eta)(1-x(i))}$  // Le bénéfice espéré de SU par apport à sa
    probabilité d'entrer  $q_e$ 

```

end

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude a été menée sur le jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans les réseaux radio cognitifs avec perte de clients. Un scénario réaliste a été exploré, où les utilisateurs secondaires (*SUs*) peuvent subir des pertes de clients lorsque des utilisateurs primaires (*PUs*) arrivent et occupent le spectre.

L'importance de modéliser la perte de clients a été soulignée afin de comprendre précisément le comportement et les performances du système.

En examinant le modèle de jeu de file d'attente avec perte de clients, les différentes étapes du processus d'accès au spectre, de l'arrivée des SUs à leur départ, ont été décrites en tenant compte des contraintes imposées par les PUs. Les stratégies d'optimisation individuelle et sociale que les SUs peuvent adopter pour maximiser leurs performances malgré la possibilité de pertes de clients ont été explorées.

Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans les réseaux radio cognitive Sans perte des clients

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle modélisation de l'accées au canal sans fil présentée dans le chapitre 3 en considérant que les paquets *SUs* peuvent être stockés dans un buffer. En effet, dans le travail de [30] présenté dans le chapitre 3, les paquets *SUs* sont perdus dès une station *PU* décide d'émettre. Dans notre travail, nous supposons que la station *BS* conserve les paquets *SUs* dans un buffer pendant le service d'un *PU*. Nous étudions le nouveau système pour obtenir les même performances .

4.1 Modélisation

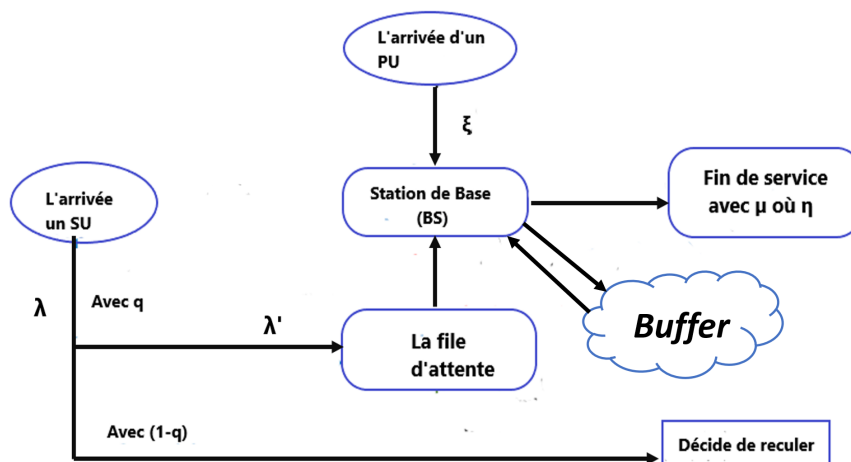


FIGURE 4.1 – La Modélisation

On peut présenter notre modèle de file d'attente à travers la Figure 4.1. Lorsque les PUs sont absents la base peut utiliser le spectre disponible pour desservir les *SUs*. Si *PU* entre dans

le système en raison de sa priorité. La BS doit sauvegarder(enregistrer) les paquets SUs dans une autre file et commence à servir les PU s. Pendant ce temps, la file d'attente composée des SUs est gardée, les SUs doivent attendre la fin du service d'un PU .

4.1.1 Modèle de profit

On suppose que l'orsque un SU est servi avec succès par la base il reçoit une récompense \bar{w}_s . On suppose également que le coût de rester dans la file d'attente est $\chi(T)$ où T : le temps de séjour dans le système représentant le temps qu'un SU reste dans la file.

$\chi(T)$: devrait être une fonction croissante de T est un exemple linéaire simple et que $\chi(T) = CT$

où C : Coût unitaire.

Alors le profit du SU peut être donné comme :

où

$$R = \bar{w}_s - CT \quad (4.1)$$

R : Profit individuel espéré.

\bar{w}_s : la récompense.

Définition 4. *Lorsqu'il y a n SU dans la file d'attente, le profit attendu du SU qui arrive peut être défini comme :*

$$U(n) = (\bar{w}_s - CT_s)\theta_s \quad (4.2)$$

la probabilité que un SU puisse être desservi s'il entre dans la file égal à 1 donc $\theta_s = 1$ $\theta_s = 1$.

$$U(n) = (\bar{w}_s - CT_s) \quad (4.3)$$

T_s : Le temps de séjour des SUs lié à n .

De plus. on peut également définir le bien-être social comme suit.

Définition 5. *Le bien-être social du système considéré est donné par :*

$$S(q) = \lambda \rho_s \bar{w}_s - CE(N) \quad (4.4)$$

$E(N)$: Nombre moyen des SUs .

ρ_s : est la fraction de SUs qui rejoignent la file d'attente et quittent après avoir été servis.

Dans ce qui suit, Nous considérons que les SUs essayent de maximiser leurs profits. Nous supposons également que les SUs sont identiques c'est-à-dire c'est un jeu symétrique.

De plus, nous considérons également que lorsque l' SU entre dans le système à l'instant t , tous les paramètres du système, y compris le modèle de profit sont connus à l'exception de la

longueur de la file d'attente $N(t)$ et l' SU ne peut observer $I(t)$ qu'à son arrivé, c'est-à-dire une observation partielle de la file est considérée.

4.2 Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre équilibre et tarification

4.2.1 Probabilités stationnaires et temps de séjour prévu

Une fois entré dans le système, l' SU a la possibilité de décider s'il doit ou non rejoindre la file d'attente pour accéder au spectre, en se basant sur sa propre observation, c'est-à-dire, en prenant en compte les bénéfices potentiels. Ainsi, il existe seulement deux stratégies pures : rejoindre la file d'attente ou quitter le système, tandis qu'une stratégie mixte est spécifiée par la probabilité d'adhésion $q \in [0,1]$ d'un SU qui constate que la BS ne sert pas d' PU . Par conséquent, le taux d'arrivée effectif devient $\lambda' = \lambda q$.

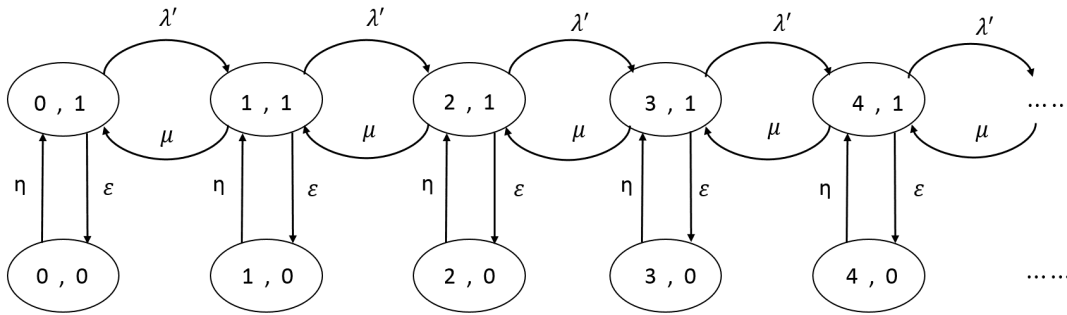


FIGURE 4.2 – Diagramme de transition pour le modèle sans perte de clients

Le diagramme de transition illustré dans la Figure 4.2 permet d'obtenir les probabilités stationnaires $p(N(t), I(t))$ pour le système considéré.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,0) + \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) = 1 \quad (4.5)$$

on voit clairement que

$$P(0,0) = \frac{\xi}{\eta} P(0,1) \quad (4.6)$$

$$P(1,0) = \frac{\xi}{\eta} P(1,1) \quad (4.7)$$

on peut conclure

$$P(n,0) = \frac{\xi}{\eta} P(n,1) \quad (4.8)$$

pour l'état $P(0,1)$

$$(\xi + \lambda')P(0,1) = \eta P(0,0) + \mu P(1,1) \quad (4.9)$$

en remplace $P(0,0)$ par (4.6)

on aura

$$(\xi + \lambda')P(0,1) = \xi P(0,1) + \mu P(1,1) \quad (4.10)$$

$$\lambda' P(0,1) = \mu P(1,1) \quad (4.11)$$

pour trouver $\sum_{n=0}^{\infty} P(n,1)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} P(n,0)$

on remplace (4.6) dans (4.5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi}{\eta} P(n,1) + \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) = 1 \quad (4.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) \left[\frac{\xi}{\eta} + 1 \right] = 1 \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) \left[\frac{\eta + \xi}{\eta} \right] = 1 \quad (4.14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) = \frac{\eta}{\eta + \xi} \quad (4.15)$$

en remplaçant (4.15) dans (4.5) on peut obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,0) = \frac{\xi}{\eta + \xi} \quad (4.16)$$

pour l'état $P(1,1)$ on a :

$$(\xi + \mu + \lambda)P(1,1) = \eta P(1,0) + \lambda P(0,1) + \mu P(2,1) \quad (4.17)$$

en remplaçant $p(1,0)$ donnée dans (4.7)

$$(\xi + \mu + \lambda)P(1,1) = \xi P(1,1) + \lambda P(0,1) + \mu P(2,1) \quad (4.18)$$

$$(\mu + \lambda')P(1,1) = \lambda' P(0,1) + \mu P(2,1) \quad (4.19)$$

on peut conclure que pour n'importe quel $n > 0$ on aura

$$(\mu + \lambda')P(n,1) = \lambda' P(n-1,1) + \mu P(n+1,1) \quad (4.20)$$

On peut remarquer que (4.20) peut être considéré comme une équations aux différences linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

$$\mu P(n+1,1) - (\lambda' + \mu)P(n,1) + \lambda' P(n-1,1) = 0$$

en posant : $P(n,1) = y^1$, $P(n-1,1) = y^0$ et $P(n+1,1) = y^2$
on aura :

$$\mu y^2 - (\lambda' + \mu)y + \lambda' = 0 \quad (4.21)$$

en résolvant (4.21) , on trouve $\Delta = (\lambda' + \mu)^2 - 4\mu\lambda' = (\lambda' - \mu)^2$
alors :

$$\begin{aligned} X_1(\lambda') &= 1 \\ X_2(\lambda') &= \frac{\lambda q}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu} \end{aligned} \quad (4.22)$$

il suffit de montrer que $\det W(0) \neq 0$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ X_1(\lambda') & X_2(\lambda') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{\lambda'}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{\lambda'}{\mu} - 1 \neq 0$$

donc $X_1(\lambda')$ et $X_2(\lambda')$ sont des solutions de l'équation.

La solution générale de l'équation (4.20) est donnée par :

$$P(n,1) = C_1 X_1(\lambda')^n + C_2 X_2(\lambda')^n \quad (4.23)$$

C_1 et C_2 sont obtenus comme suit :

comme $X_1(\lambda') = 1$, alors C_1 doit nécessairement être égale à 0.

$$P(n,1) = C_2 X_2(\lambda')^n \quad (4.24)$$

on a de (4.15)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) &= \frac{\eta}{\eta + \xi} \\ \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_2 [X_2(\lambda')]^n = C_2 \sum_{n=0}^{\infty} [X_2(\lambda')]^n = \frac{\eta}{\eta + \xi} \end{aligned} \quad (4.25)$$

pour n assez grand

$$\sum_{n=0}^{\infty} [X_2(\lambda')]^n = \frac{1}{1 - X_2(\lambda')} \quad (4.26)$$

$$C_2 = \frac{\eta(1 - X_2(\lambda'))}{\eta + \xi} \quad (4.27)$$

en remplaçant (4.27) dans (4.24) :

$$P(n,1) = \frac{\eta(1 - X_2(\lambda'))X_2(\lambda')^n}{\eta + \xi} \quad (4.28)$$

et en remplaçant (4.28) dans (4.8) on trouve :

$$P(n,0) = \frac{\xi(1 - X_2(\lambda'))X_2(\lambda')^n}{\eta + \xi} \quad (4.29)$$

4.2.2 Stratégie d'équilibre individuel

En utilisant les résultats des probabilités stationnaires et du temps de séjour attendu, nous pouvons calculer le profit espéré d'un SU qui décide d'entrer dans la file d'attente avec une probabilité q_e , comme illustré ci-dessous.

Proposition 5. *Lorsqu'une bande passante de fréquence est disponible pour les SU, le profit espéré d'un SU qui décide d'entrer dans la file d'attente avec une probabilité \tilde{q} , sachant que d'autres SU rejoignent la file d'attente avec une probabilité q , peut être exprimé comme suit :*

$$\Gamma(\tilde{q}, q) = \tilde{q}U_n \quad (4.30)$$

Pour démontrer la Proposition 5, nous commençons par calculer le profit espéré lorsque le SU est capable d'observer la présence de n autres SU et l'état de la file d'attente dans le système à son arrivée (c'est-à-dire la file d'attente partiellement observée) et décide d'entrer.

$$U(n) = \bar{w}_s - \frac{CX_2(\lambda')(\lambda + \eta)}{\lambda(\eta + \xi)(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.31)$$

preuve

on a :

$$U(n) = (\bar{w}_s - CT_s)$$

d'où

$$T_s = \frac{N_{SU_s}}{\lambda} + \frac{N_{PU_s}}{\xi} \quad (4.32)$$

$$T_s = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nP(n,1)}{\lambda} + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nP(n,0)}{\xi}$$

Avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP(n,1) = \frac{\eta X_2(\lambda')}{(\eta + \xi)(1 - X_2(\lambda'))}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP(n,0) = \frac{\xi X_2(\lambda')}{(\eta + \xi)(1 - X_2(\lambda'))}$$

donc :

$$T_s = \frac{X_2(\lambda)(\lambda + \eta)}{\lambda(\eta + \xi)(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.33)$$

en remplaçant (4.33) dans (4.3) on aura :

$$U(n) = \bar{w}_s - \frac{CX_2(\lambda')(\lambda + \eta)}{\lambda(\eta + \xi)(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.34)$$

Lorsqu'un SU décide de se joindre à la file d'attente, en supposant que la BS dessert d'autres SU et que ces derniers suivent la stratégie q , le profit espéré peut être exprimé de la manière

suivante :

$$\Gamma(\bar{q}, q) = (1 - \bar{q})\Gamma(0, q) + \bar{q}\Gamma(1, q) \quad (4.35)$$

si un SU décide de ne pas rejoindre la file d'attente, le profit espéré correspondant est nul.

$$(1 - \tilde{q})\Gamma(0, q) = 0 \quad (4.36)$$

donc :

$$\Gamma(\bar{q}, q) = \bar{q}\Gamma(1, q) \quad (4.37)$$

et on a :

$$\Gamma(1, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} [P_1(n, 1) + P_1(n, 0)]U_n \quad (4.38)$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{+\infty} p_1(n, 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p(n, 1)}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 1)}$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_1(n, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p(n, 0)}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 0)}$$

donc :

$$\Gamma(1, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n, 1) + P(n, 0)}{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i, 1) + p(i, 0)} U_n \quad (4.39)$$

on remplace $\sum_{i=0}^{+\infty} P(n, 1)$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} P(n, 0)$ par leur valeur (4.15) et (4.16)

nous allons obtenir

$$\Gamma(1, q) = (1 - X_2(\lambda')) \sum_{n=0}^{+\infty} X_2(\lambda')^n U_n \quad (4.40)$$

d'où

$$\Gamma(1, q) = U_n \quad (4.41)$$

alors

$$\Gamma(\bar{q}, q) = \bar{q}U_n \quad (4.42)$$

Nous pouvons maintenant traiter pour trouver la stratégie d'équilibre individuel d'un SU.

Théorème 8. *Dans le modèle considéré, il existe une unique stratégie mixte (IE), avec une probabilité d'adhésion q_e donnée par :*

$$q_e = \begin{cases} 1; & \bar{\omega}_s \in \left[\frac{Ck(\lambda+\eta)}{\lambda(\eta+\xi)(1-k)}, \infty[\right. \\ \Phi; & \bar{\omega}_s \in \left] 0, \frac{Ck(\lambda+\eta)}{\lambda(\eta+\xi)(1-k)}[\right. \\ 0; & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \Phi = \frac{\mu\bar{\omega}_s(\eta+\xi)}{C(\eta+\lambda)+\lambda\bar{\omega}_s(\eta+\xi)}$$

preuve

Pour un SU

- Il préférera d'entrer dans la file d'attente si son profit espéré après avoir décider entré est :

$$\Gamma(1,q) > 0$$

- Il préférera de reculer si :

$$\Gamma(1,q) < 0$$

en considérant $\Gamma(1,q) = 0$

$$\Gamma(1,q) = U_n = 0 \quad (4.43)$$

$$\bar{\omega}_s - \frac{CX_2(\lambda')(\lambda + \eta)}{\lambda(\eta + \xi)(1 - X_2(\lambda'))} = 0 \quad (4.44)$$

$$\bar{\omega}_s = \frac{CX_2(\lambda')(\lambda + \eta)}{\lambda(\eta + \xi)(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.45)$$

alors :

$$X_2(\lambda') = \frac{\lambda\bar{\omega}_s(\eta + \xi)}{C(\eta + \lambda) + \lambda\bar{\omega}_s(\eta + \xi)} \quad (4.46)$$

on a $X_2(\lambda')$ est une racine de (4.21) et comme on a 4.22 :

$$X_2(\lambda') = \frac{\lambda'}{\mu} \Rightarrow \lambda' = X_2(\lambda')\mu \quad (4.47)$$

alors :

$$q_e = \frac{\mu X_2(\lambda')}{\lambda} \quad (4.48)$$

en remplaçant $X_2(\lambda')$ par (4.46)

$$q_e = \frac{\mu\lambda\bar{\omega}_s(\eta + \xi)}{\lambda(C(\eta + \lambda) + \lambda^2\bar{\omega}_s(\eta + \xi))} \quad (4.49)$$

alors :

$$q_e = \frac{\mu\bar{\omega}_s(\eta + \xi)}{C(\eta + \lambda) + \lambda\bar{\omega}_s(\eta + \xi)} \quad (4.50)$$

on peut observer que $X_2(\lambda')$ est strictement croissante pour $q \in [0,1]$

car : $\frac{\partial X_2(\lambda')}{\partial q} = \frac{\lambda}{\mu} > 0$. on a : $q \in [0,1]$ alors $X_2(\lambda') \in [0,k]$

- Pour $q = 0$ on a $X_2(0) = 0$ et $\bar{\omega}_s = 0$ car $\lambda' = q\lambda$
- Pour $q = 1 \Rightarrow X_2(\lambda) = k$

$$X_2(\lambda) = k = \frac{\lambda\bar{\omega}_s(\eta + \xi)}{C(\eta + \lambda) + \lambda\bar{\omega}_s(\eta + \xi)} \quad (4.51)$$

$$\bar{\omega}_s = \frac{Ck(\lambda + \eta)}{\lambda(\eta + \xi)(1 - k)} \quad (4.52)$$

- Pour $q \in]0,1[$ on a $X_2(\lambda') \in]0,k[$

$$0 < \bar{\omega}_s < \frac{Ck(\lambda + \eta)}{\lambda(\eta + \xi)(1 - k)} \quad (4.53)$$

$$q_e = \frac{\mu\bar{\omega}_s(\eta + \xi)}{C(\eta + \lambda) + \lambda\bar{\omega}_s(\eta + \xi)} \quad (4.54)$$

Selon le théorème 8, l'équilibre individuel (IE) est dépendant du temps de service de PU . Cela signifie que la décision d'un SU d'entrer dans la file d'attente dépend que de la présence de PU , et qu'il à la accès aux informations sur PU .

4.2.3 L'équilibre Sociale

Sur la base de la définition du bien-être social et des résultats précédents des probabilités stationnaires, nous pouvons arriver à la proposition suivante :

Proposition 6. *Le profit social attendu, étant donné que les SUs suivent une stratégie mixte avec une probabilité q de rejoindre (c'est-à-dire que les SUs arrivant qui trouvent un BS ne desservant pas le PU entre avec une probabilité q , tandis que les autres choisissent de reculer sans être servi) est donné par :*

$$S(q) = \mu X_2(\lambda')\bar{\omega}_s - C \frac{X_2(\lambda')}{(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.55)$$

preuve

$$S(q) = \lambda\rho_s\bar{\omega}_s - CE(N) \quad (4.56)$$

$$\rho_s = \sum [P(n,1) + P(n,0)]q \quad (4.57)$$

à partir de l'équation (4.5)

$$\rho_s = q \quad (4.58)$$

et

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n (P(n,1) + P(n,0)) \quad (4.59)$$

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\eta(1 - X_2(\lambda'))X_2(\lambda')^n}{\eta + \xi} + \frac{\xi(1 - X_2(\lambda'))X_2(\lambda')^n}{\eta + \xi} \right) \quad (4.60)$$

$$E(N) = \frac{\eta + \xi}{\eta + \xi} (1 - X_2(\lambda')) \sum_{n=0}^{\infty} n X_2(\lambda')^n \quad (4.61)$$

$$E(N) = (1 - X_2(\lambda')) \frac{X_2(\lambda')}{(1 - X_2(\lambda'))^2} \quad (4.62)$$

$$E(N) = \frac{X_2(\lambda')}{(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.63)$$

on aura donc :

$$S(q) = \lambda q \bar{\omega}_s - C \frac{X_2(\lambda')}{(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.64)$$

et en remplaçant q par (4.48)

$$S(q) = \mu X_2(\lambda') \bar{\omega}_s - C \frac{X_2(\lambda')}{(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.65)$$

Théorème 9. *Dans le modèle considéré, il existe une unique stratégie optimale sur le plan social avec une probabilité q_s pour rejoindre la file d'attente, qui peut être exprimée comme suit :*

$$q_s = \begin{cases} 1, & \bar{\omega}_s \in [\frac{C}{\mu(1-k)^2}, +\infty], \\ \Theta, & \bar{\omega}_s \in]\frac{C}{\mu}, \frac{C}{\mu(1-k)^2}[, \\ 0, & \bar{\omega}_s \leq \frac{C}{\mu}. \end{cases} \quad (4.66)$$

pour $\Theta = \frac{\mu\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s} - C\mu}{\lambda\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s}}$

preuve

on peut remarquer que (4.65) peut se reformuler comme $S(q) = f(X_2(\lambda'))$

$S(q)$ est optimale quand $f'(X_2(\lambda')) = 0$ calculer $f'(X_2(\lambda'))$

$$f(X_2(\lambda')) = \mu X_2(\lambda') \bar{\omega}_s - C \frac{X_2(\lambda')}{(1 - X_2(\lambda'))} \quad (4.67)$$

$$f'(X_2(\lambda')) = \mu \bar{\omega}_s - \frac{C}{(1 - X_2(\lambda'))^2} \quad (4.68)$$

$$f'(X_2(\lambda')) = \frac{2\mu\bar{\omega}_s X_2(\lambda') + \mu\bar{\omega}_s + \mu\bar{\omega}_s X_2(\lambda')^2 - C}{(1 - X_2(\lambda'))^2} \quad (4.69)$$

pour avoir $f'(X_2(\lambda')) = 0$

$$\mu\bar{\omega}_s X_2(\lambda')^2 - 2\mu\bar{\omega}_s X_2(\lambda') - C + \mu\bar{\omega}_s = 0 \quad (4.70)$$

il est possible d'observer que le discriminant du polynôme quadratique en (4.70) est inférieur ou égal à 0 lorsque $C \leq 0$. pour $C > 0$, on peut conclure que $f(X_2(\lambda'))$ est croissante et que $S(q)$ l'est également. Le polynôme en (4.70) possède alors deux racines, qui sont

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s}}{\mu\bar{\omega}_s} \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s}}{\mu\bar{\omega}_s} \quad (4.71)$$

- Si $x_1 \leq 0$, alors nous avons $x_1 < 0 < k < x_2$. En conséquence, $S(q)$ diminue dans l'intervalle $[0,1]$ et le choix social optimal est $q_s = 0$. De plus, on peut observer que pour $x_1 \leq 0$ implique $\omega_s \leq \frac{C}{\mu}$.
il est préférable de quitter la file.
- Si $0 < x_1 < k$, nous pouvons constater que le maximum de $S(q)$ est atteint pour une valeur de q telle que $X_2(\lambda q) = x_1$. En utilisant l'équation (4.21) en substituant y par x_1 et en résolvant pour q , nous obtenons :

$$q_s = \frac{\mu\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s} - C\mu}{\lambda\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s}} \quad (4.72)$$

on peut observer que $0 < x_1 < k$ signifie que $\frac{C}{\mu} < \omega_s < \frac{C}{\mu(1-\kappa)^2}$

- de même, si $x_1 \geq k$, nous pouvons avoir le choix social optimal $q_s = 1$ et $\omega_s \geq \frac{C}{\mu(1-\kappa)^2}$.

Remarque 2. $x_2 > 1$ c'est pour ça on le prend pas au considération

4.3 Conditions de stabilité

$$0 < P(0,0) < 1. \quad (4.73)$$

$$P(n,0) = \frac{\xi(1 - X_2(\lambda^n))X_2(\lambda^n)^n}{\eta + \xi} \quad (4.74)$$

$$P(0,0) = \frac{\xi(1 - X_2(\lambda^0))X_2(\lambda^0)^0}{\eta + \xi} \quad (4.75)$$

$$0 < \frac{\xi(1 - X_2(\lambda^0))}{\eta + \xi} < 1 \quad (4.76)$$

4.4 Résultats des simulation

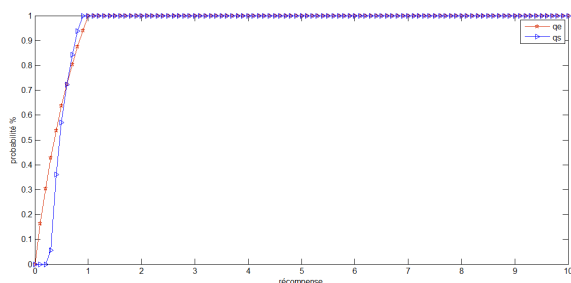


FIGURE 4.3 – Relation entre la probabilité de rejoindre la file et la récompense

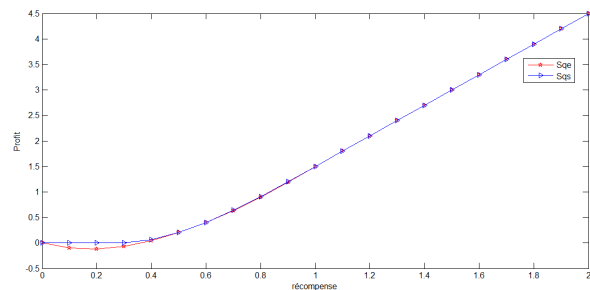


FIGURE 4.4 – Le profit en fonction de la récompense

Les paramètres numériques sont les suivants :

$\lambda = 3$, $\xi = 0,5$, $\mu = 7$, $\eta = 2$, $C = 2$. Tout d'abord, dans la Figure 4.3, il est possible d'observer que la probabilité d'adhésion socialement optimale q_s est inférieure à la probabilité individuelle q_e dans l'intervalle $\bar{\omega}_s \in [0,0.3]$ et elles tombent sur la même valeur dans $]0.3,\infty[$. En conséquence, il existe un écart négligeable entre le taux d'atteinte de l'équilibre individuel et le taux d'atteinte sociale, puisque ces taux peuvent être exprimés respectivement par λ_e (respectivement λ_s) = λq_e (respectivement λq_s).

Les arrivées des utilisateurs secondaires SUs peuvent être réglementées. Dans la Figure 4.4, on peut observer que profit social lors de l'utilisation de q_s est plus élevé que lors de l'utilisation de q_e dans l'intervalle $\bar{\omega}_s \in [0,0.4]$.

En comparant la Figure 4.3 et la Figure 4.4, il est possible de constater que $q_e = 1$ et $q_s = 1$ pour une valeur de récompense $\bar{\omega}_s \in [1,\infty[$.

4.5 Algorithmme

Algorithmme pour aider le *SU* à choisir une Stratégie

Algorithm 5: pour trouver la probabilité q_e et profit $S(q_e)$ parapour a la récompense $\bar{\omega}_s$ donné par la *BS*

Data: $\bar{\omega}_s$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_e, S(q_e)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité d'entrée et profit associer ($\bar{\omega}_s$) :

disp(['la valeur de la récompense est :', num2str($\bar{\omega}_s$)]);

disp('taux d'arrive du SU');

λ =input('entrez la valeur = ');

disp('taux d'service d un SU ');

μ =input('entrez la valeur = ');

disp('taux d'arrive du PU');

ξ =input('entrez la valeur = ');

disp('taux d service du PU ');

η =input('entrez la valeur = ');

disp('coût unitair');

C=input('entrez la valeur = ');

$k = \frac{\lambda}{\mu}$;

// Traitement principal

if ($\bar{\omega}_s < \frac{Ck(\lambda+\eta)}{\lambda(\eta+\xi)(1-k)}$) || ($\bar{\omega}_s > 0$) **then**

 | $q_e = \frac{\mu\bar{\omega}_s(\eta+\xi)}{C(\eta+\lambda)+\lambda\bar{\omega}_s(\eta+\xi)}$;

end

if $\bar{\omega}_s \geq \frac{Ck(\lambda+\eta)}{\lambda(\eta+\xi)(1-k)}$ **then**

 | $q_e = 1$;

end

else

 | $q_e = 0$;

end

$X_2(\lambda') = \frac{(q_e\lambda)}{C\mu}$;

$S(q_e) = \mu X_2(\lambda')\bar{\omega}_s - \frac{X_2(\lambda')}{1-X_2(\lambda')}$;

disp(['la probabilité de rejoindre q_e : ', num2str(q_e)]);

$s = (1 - q_e)$;

disp(['la probabilité de reculer ($1 - q_e$) : ', num2str(s)]);

disp(['le profit espéré $S(q_e)$: ', num2str($S(q_e)$)]);

end

Algorithm 6: pour trouver la probabilité q_s et profit $S(q_s)$ par rapport à la récompense $\bar{\omega}_s$ donné par la BS

Data: $\bar{\omega}_s$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_s, S(q_s)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité de bien être social($\bar{\omega}_s$) :

```

disp(['la valeur de la récompense est :', num2str( $\bar{\omega}_s$ )]);
disp('taux d'arrive du SU');
 $\lambda$ =input('entrez la valeur = ');
disp('taux d'service d un SU ');
 $\mu$ =input('entrez la valeur = ');
disp('taux d'arrive du PU');
 $\xi$ =input('entrez la valeur = ');
disp('taux d service du PU ');
 $\eta$ =input('entrez la valeur = ');
disp('coût unitair');
C=input('entrez la valeur = ');
 $k = \frac{\lambda}{\mu}$ ;
// Traitement principal
if ( $\bar{\omega}_s < \frac{C}{\mu(1-k)^2}$ ) || ( $\bar{\omega}_s > \frac{C}{\mu}$ ) then
    |  $q_s = \frac{\mu\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s} - C\mu}{\lambda\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s}}$ ;
end
if  $\bar{\omega}_s \leq \frac{C}{\mu}$  then
    |  $q_s = 0$ ;
end
if  $\bar{\omega}_s \geq \frac{C}{\mu(1-k)^2}$  then
    |  $q_s = 1$ ;
end
 $X_2(\lambda') = \frac{q_s\lambda}{\mu}$ ;
 $S(q_s) = \mu X_2(\lambda')\bar{\omega}_s - \frac{CX_2(\lambda')}{1-X_2(\lambda')}$ ;
disp(['la probabilité de rejoindre  $q_s$  : ', num2str( $q_s$ )]);
s=(1 -  $q_s$ );
disp(['la probabilité de reculer (1 -  $q_s$ ) : ', num2str(s)]);
disp(['le profit espéré  $S(q_s)$  : ', num2str( $Sq_s$ )]);
end

```

4.5.1 Algorithme de simulation

Algorithm 7: pour trouver la probabilité q_e et bénéfices $S(q_e)$ en fonction de la récompense $\bar{\omega}_s$

Data: $\bar{\omega}_s(i)$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_e(i), S(q_e)(i)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité d'entrée et profit associer ($\bar{\omega}_s$) :

single k, λ , μ , ξ , η , C; // déclarer le type de variables

$\lambda=7$; // taux d'arrivée du *SU*, constante

$\mu=3$; // taux d'service d'un *SU*, constante

$\xi=0.5$; // taux d'arrivée du *PU*, constante

$\eta=2$; // taux d'service d'un *PU*, constante

C=2; // coût unitair, constante

m=length($\bar{\omega}_s$); // récupérer la taille du vecteur $\bar{\omega}_s$

$q_e=0$:m-1; // créer un vecteur q_e de taille m

x=0 :m-1; // créer un vecteur x de taille m

$S(q_e)=0$:m-1; // créer un vecteur $S(q_e)$ de taille m

$k = \frac{\lambda}{\mu}$;

// Traitement principal

for i ← 1 **to** m **do**

if ($\bar{\omega}_s(i) < \frac{Ck(\lambda+\eta)}{\lambda(\eta+\xi)(1-k)}$) || ($\bar{\omega}_s(i) > 0$) **then**

$q_e(i) = \frac{\mu\bar{\omega}_s(i)(\eta+\xi)}{C(\eta+\lambda)+\lambda\bar{\omega}_s(i)(\eta+\xi)}$;

end

if $\bar{\omega}_s(i) \geq \frac{Ck(\lambda+\eta)}{\lambda(\eta+\xi)(1-k)}$ **then**

$q_e(i) = 1$;

end

else

$q_e(i) = 0$;

end

$X_2(\lambda')(i) = \frac{q_e(i)\lambda}{\mu}$;

$S(q_e)(i) = \mu X_2(\lambda')(i)\bar{\omega}_s(i) - \frac{CX_2(\lambda')(i)}{1-X_2(\lambda')(i)}$;

end

end

Algorithm 8: pour trouvé la probabilité q_s et bénéfices $S(q_s)$ en fonction de la récompense $\bar{\omega}_s$

Data: $\bar{\omega}_s$ Données d'entrée

Result: Résultat $q_s, S(q_s)$

// Déclaration de la fonction

Function probabilité de bien être social($\bar{\omega}_s$) :

single k, λ , μ , ξ , η , C; // déclaration le type de variables

$\lambda=7$; // taux d'arrivée du *SU*, constante

$\mu=3$; // taux d'service d'un *SU*, constante

$\xi=0.5$; // taux d'arrivée du *PU*, constante

$\eta=2$; // taux d'service d'un *PU*, constante

C=2; // coût unitair, constant

m=length($\bar{\omega}_s$); // récupérer la taille du vecteur $\bar{\omega}_s$

$q_s=0$:m-1; // créer un vecteur q_s de taille m

x=0:m-1; // créer un vecteur x de taille m

$Sq_s=0$:m-1; // créer un vecteur Sq_s de taille m

$k = \frac{\lambda}{\mu}$;

// Traitement principal

for i ← 1 to m **do**

if ($\bar{\omega}_s(i) < \frac{C}{\mu(1-k)^2}$) || ($\bar{\omega}_s(i) > \frac{C}{\mu}$) **then**

$q_s(i) = \frac{\mu\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s(i)} - C\mu}{\lambda\sqrt{C\mu\bar{\omega}_s(i)}}$;

end

if $\bar{\omega}_s(i) \leq \frac{C}{\mu}$ **then**

$q_s(i) = 0$;

end

if $\bar{\omega}_s(i) \geq \frac{C}{\mu(1-k)^2}$ **then**

$q_s(i) = 1$;

end

$X_2(\lambda')(i) = \frac{q_s(i)\lambda}{\mu}$;

$S(q_s)(i) = \mu X_2(\lambda')(i)\bar{\omega}_s - \frac{CX_2(\lambda')(i)}{1-X_2(\lambda')(i)}$;

 // Le bénéfice espéré de *SU* par apport à sa probabilité d'entrer

q_s

end

end

4.6 Comparaison de deux simulation

par rapport à q_e et q_s

- On remarque à partir des Figures 3.3 et 4.3 que la probabilité q_e est meilleure que la probabilité q_s dans les cas où il y a "Perte de clients" et dans le cas "Sans perte de SUs ".
- On constate également une évolution de q_s dans le cas "Sans perte" par rapport à celui "Avec perte". De plus, lorsque $\bar{\omega}_s \in]1, \infty[$, elle atteint sa valeur maximale de 1.

par rapport à Sq_e et Sq_s

- À partir des graphiques illustrés dans les Figures 3.4 et 4.4, on remarque que le profit obtenu à partir de la stratégie sociale dans le cas "Avec perte de clients" est meilleur que celui de la stratégie individuelle, c'est-à-dire que $Sq_e < Sq_s$. En revanche, dans le cas "Sans perte", si $\bar{\omega}_s \in [0, 0.4]$, le profit de la stratégie sociale est supérieur au profit de la stratégie individuelle ($Sq_e < Sq_s$), tandis que si $\bar{\omega}_s \in [0.4, \infty[$, $Sq_e = Sq_s$.

Dans ce travail, nous avons réussi à réduire considérablement la différence entre les deux probabilités q_e et q_s , ce qui peut être exprimé de la manière suivante :

$$\begin{cases} Sq_s > Sq_e, & \bar{\omega}_s \leq \frac{C}{\mu}, \\ Sq_s = Sq_e, & \bar{\omega}_s > \frac{C}{\mu} \end{cases}$$

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle modélisation de la technique d'accès au canal radio cognitive en supposant de la station de base "BS" peut conserver les paquets SUs à l'arrivée de PU .

Nous avons alors, construit un jeu de file d'attente qui permet d'avoir un équilibre individuel et un équilibre sociale. Nous avons effectué des simulations pour avoir une comparaison.

Dans le chapitre 5, nous considérons qu'il peut y avoir un désastre à l'arrivée d'un PU (perte des clients) ou non. section Comparaison de deux simulation

Modélisation du désastre dans les réseaux cognitifs

Introduction

L'accès au spectre est un élément crucial dans les réseaux de radio cognitive, où les dispositifs utilisateurs secondaires *SUs* doivent obtenir une autorisation pour utiliser les fréquences disponibles. Pour réguler cet accès de manière équitable et efficace, l'utilisation d'un jeu de file d'attente peut être envisagée. Dans ce jeu, les *SUs* ont la possibilité de choisir entre quitter la file d'attente et chercher d'autres opportunités de spectre ou bien rester dans la file en attendant leur tour. mais parfois, pour des raisons techniques ou logique mm si les sus d'cident d'attendre, l'arrivée d'un pu peut (ou nn) engendrer la perte des paquets. Dans ce chapitre, nous proposons une autre modélisation de la technique d'accésau canal sans fil radio cognitive en prenant en considération à la fois la possibilité de garder les paquets sus mm si un *PU* arrive où parfois de les perdre à cause des interférences ou autres. Cette approche offre aux *SUs* une certaine flexibilité dans la gestion de leur accès au spectre, tout en assurant une utilisation optimale des ressources disponibles.

5.1 Les probabilités stationnaires

En observant la Figure 5.1, on peut analyser les comportements des *SUs* et les règles de décision associées à leur choix de quitter ou de rester dans la file d'attente. Ces informations permettent de dériver mathématiquement les probabilités stationnaires, qui fournissent des indications essentielles sur la performance du système, telles que le temps moyen d'attente des *SUs* et l'utilisation du spectre. L'analyse des probabilités stationnaires permet ainsi de mieux comprendre les caractéristiques et les dynamiques du jeu de file d'attente, contribuant ainsi à l'optimisation de l'accès au spectre dans les réseaux de radio cognitive.

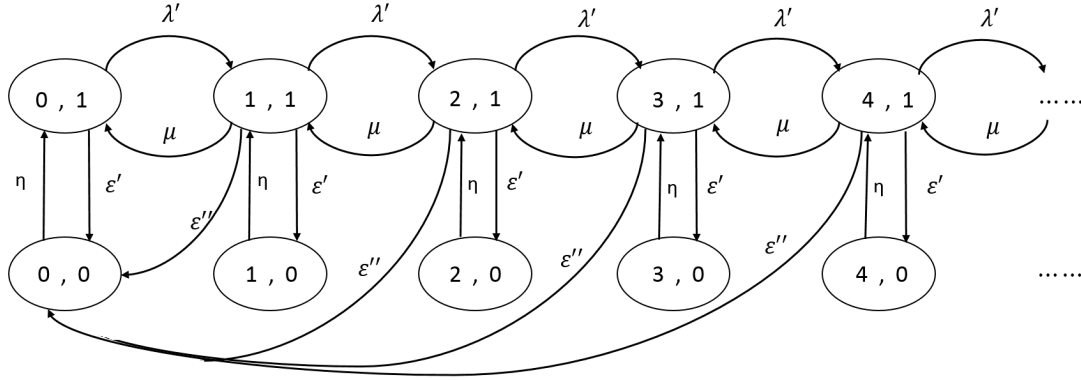


FIGURE 5.1 – Diagramme de transition avec désastre

$$\xi' = p\xi \quad (5.1)$$

$$\xi'' = (1-p)\xi \quad (5.2)$$

Avec

p : La probabilité qu'il va sauvgarder ses données.

$(1-p)$: La probabilité qu'il va perdre ses données.

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,0) + \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) = 1 \quad (5.3)$$

Pour $n = 0$:

$$P(0,0)\eta = \xi'P(0,1) + \xi'' \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) \quad (5.4)$$

$$P(0,0) = \frac{\xi'}{\eta}P(0,1) + \frac{\xi''}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) \quad (5.5)$$

$$P(0,1)(\xi' + \lambda') = \mu P(1,1) - \eta P(0,0) \quad (5.6)$$

$$P(0,1) = \frac{\mu}{(\xi' + \lambda')}P(1,1) - \frac{\eta}{(\xi' + \lambda')}P(0,0) \quad (5.7)$$

Pour $n = 1$:

$$P(1,0)\eta = \xi'P(1,1) \Rightarrow P(1,0) = \frac{\xi'}{\eta}P(1,1) \quad (5.8)$$

cela implique :

$$P(n,0) = \frac{\xi'}{\eta} P(n,1) \quad (5.9)$$

$$P(1,1)(\xi'' + \xi' + \lambda' + \mu) = \eta P(1,0) + \lambda' P(0,1) + \mu P(2,1) \quad (5.10)$$

$$P(1,1)(\xi + \lambda' + \mu) = \eta P(1,0) + \lambda' P(0,1) + \mu P(2,1) \quad (5.11)$$

$$P(1,1)(\xi + \lambda' + \mu) = \xi' P(1,1) + \lambda' P(0,1) + \mu P(2,1) \quad (5.12)$$

$$P(1,1)(\xi - \xi' + \lambda' + \mu) = \lambda' P(0,1) + \mu P(2,1) \quad (5.13)$$

on peut généraliser

$$P(n,1)(\xi - \xi' + \lambda' + \mu) = \lambda' P(n-1,1) + \mu P(n+1,1) \quad (5.14)$$

en utilisant les équations aux différences :

$$[\xi(1-p) + \lambda' + \mu]y = \lambda' + \mu y^2 \quad (5.15)$$

on trouve :

$$\mu y^2 - [\xi(1-p) + \lambda' + \mu]y + \lambda' = 0 \quad (5.16)$$

alors :

$$\Delta = [\xi(1-p) + \lambda' + \mu]^2 - 4\lambda'\mu \quad (5.17)$$

on aura :

$$X = \frac{[\xi(1-p) + \lambda' + \mu] + \sqrt{\Delta}}{2\mu} > 0 \quad (5.18)$$

$$X' = \frac{[\xi(1-p) + \lambda' + \mu] - \sqrt{\Delta}}{2\mu} \quad (5.19)$$

il suffit de montrer que $\det W(0) \neq 0$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ X & X' \end{vmatrix} = X' - X \neq 0$$

$$P(n,1) = C_1 X(\lambda')^n + C_2 X'(\lambda')^n \quad (5.20)$$

comme $X(\lambda') > 1$ et $C_1 = 0$

$$P(n,1) = C_2 X'(\lambda')^n \quad (5.21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) \left(1 + \frac{\xi'}{\eta}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) = \frac{\eta}{\eta + \xi'} \quad (5.22)$$

et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,1) = C_2 \sum_{n=0}^{\infty} X'(\lambda')^n = C_2 \frac{\eta[1 - X'(\lambda')]}{\eta + \xi'} \quad (5.23)$$

donc

$$P(n,1) = \frac{\eta[1 - X'(\lambda')]X'(\lambda')^n}{\eta + \xi'} \quad (5.24)$$

et on a

$$P(n,0) = \frac{\xi'}{\eta}P(n,1) \quad (5.25)$$

alors

$$P(n,0) = \frac{\xi'\eta[1 - X'(\lambda')]X'(\lambda')^n}{\eta^2 + \xi'\eta} \quad (5.26)$$

5.2 Conclusion

Les files d'attente dans les réseaux radio cognitifs revêt une grande importance pour assurer une utilisation efficace du spectre et améliorer la qualité de service globale. Les jeux de file d'attente offrent un cadre d'analyse et d'optimisation pour résoudre les défis liés à l'allocation des ressources dans ces réseaux.

Au cours de cette étude, nous avons examiné différents aspects des jeux de file d'attente dans les réseaux radio cognitifs, en mettant l'accent sur les utilisateurs primaires (PUs) et les utilisateurs secondaires (SUs).

Nous avons constaté que la gestion des files d'attente dans les réseaux radio cognitifs est un défi complexe en raison de la coexistence des PUs et SUs et de la nécessité de garantir une utilisation équitable du spectre tout en respectant les droits des utilisateurs primaires. Les algorithmes de jeu de file d'attente doivent prendre en compte les contraintes du système, les préférences des utilisateurs, les opportunités de spectre libre et les politiques du réseau pour atteindre un équilibre optimal.

En conclusion, les jeux de file d'attente constituent un outil précieux dans la gestion des ressources dans les réseaux radio cognitifs. Ils permettent de prendre en compte les utilisateurs primaires et secondaires, d'optimiser l'allocation du spectre et d'améliorer la qualité de service globale. En poursuivant les recherches dans ce domaine, nous pourrions développer des solutions plus efficaces pour la gestion des files d'attente et ouvrir la voie à une utilisation plus intelligente et efficace du spectre radio dans les réseaux cognitifs.

Conclusion générale

Nous avons en premier lieu, repris le travail présenté dans [30] en détails et recalculer tous les résultats pour bien comprendre le problème. Ainsi, et en se passant sur ces résultats, nous avons proposé un algorithme qui permet aux *Sus* de décider d'entrer ou non dans la file.

En deuxième lieu, nous avons modifié le modèle donné en [30] en supposant que les paquets (*Sus*) restent dans la file même après l'arrivée d'un *Pu* nous avons alors construit un jeu de file d'attente basé sur la notion de profit individuel et un autre basé sur l'équilibre social pour trouver la stratégie qui permet aux *Sus* de décider de rejoindre la file ou non. Nous avons obtenu des résultats numériques qui permettent de voir l'impact des paramètres du système sur les décisions.

En dernier lieu, nous avons donné une modélisation du même problème d'accès au canal sans fil mais en considérant dans ce cas les deux éventualités : avec et sans perte de clients.

En perspective, nous allons calculé pour ce modèle les probabilités stationnaires, nous pensons qu'il est intéressant de construire le jeu de file d'attente pour le modèle donné dans le chapitre 5, nous considérons que

- Il est aussi important de prendre en compte les interférences et les collisions.
- D'intégrer nos résultats dans un protocole de gestion de la bande passante par radio cognitive.

Bibliographie

- [1] A. Economou, S. Kanta, Stratégies optimales de balking et de tarification pour la file d'attente markovienne à serveur unique avec espace d'attente compartimenté, *Journal des systèmes de file d'attente*, 59, 237-269, (2008).
- [2] B. Lionel, *Processus stochastiques : processus de poisson et chaîne de Markov*, (2004).
- [3] B. Farida, *Introduction aux Équations aux Différences*, Département de Mathématiques Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel.
- [4] C. Do, N. Tran, M. Nguyen, C. Hong, S. Lee, "Stratégie d'optimisation sociale dans les systèmes de file d'attente non observés dans les réseaux radio cognitifs", *IEEE Commun, Lett*, vol.16, numéro.12, p.1944-1947, (2012).
- [5] D. Boukredera, K. Adel-Aissanou, *Modélisation et analyse des performances des réseaux radio cognitifs à l'aide de réseaux de Petri colorés stochastiques et temporisés*, *Communications personnelles sans fil*, (2020).
- [6] E. Bonzon, *Modélisation des interactions entre agents rationnels : les jeux booléens*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse 3, (2007).
- [7] E. Lebarbier, S. Robin, *Processus de Poisson, processus de naissances et morts*, Technical report, Université Paris, France.
- [8] G. Rubino, *Processus stochastiques*, Tech report, Université INRIA/IRISA Rennes, France, (2006).
- [9] H. Claudie, *Eléments de la théorie des files d'attente*, Rapport technique, Université Toulouse 2, France, (2008).
- [10] H. Li, Z. Han, "Maîtrise socialement optimale des files d'attente dans les réseaux RC soumis à des interruptions de service : faire la queue ou ne pas faire la queue " *IEEE Trans, Communication sans fil*, vol. 10, numéro.5, pages 1656-1666, (2011).
- [11] J. Mitola, G. Maguire, "Radio cognitive : Rendre les radios logicielles plus personnelles", *IEEE Personal Communications*, août (1999).
- [12] J. Desquilbet, *Théorie des jeux*, Rapport technique, Université d'Artois.
- [13] J. Hêche, W. Dominique, M. Thomas, *Recherche opérationnelle pour ingénieur. tome 2*. Presses Polytechniques Romandes, (2002).

- [14] J. Raj, Introduction to queueing theory, Technical report, Washington university, (2008).
- [15] L. Lakaour, D. Aissani, K. Adel-Aissanou, K. Barkaoui, S. Ziani, Une file d'attente non fiable à serveur unique avec collisions et erreurs de transmission ; Communications en statistiques, Théorie et méthodes, (2020).
- [16] L. Lakaour, D. Aïssani, K. Adel-Aissanou, K. Barkaoui, File d'attente M/M/1 avec collisions et erreurs de transmission, Méthodologie et calcul en probabilités appliquées, (2019).
- [17] M. Edelson, K. Hildebrand, Péages de congestion pour les processus de file d'attente de Poisson, Journal Econometrica, 43, 81–92, (1975).
- [18] N. Philippe, Eléments de base de la théorie des files d'attente : application à la modélisation des systèmes informatiques. Rapport technique. Université du Massachusetts, (1994).
- [19] N. Philippe, Éléments de base de la théorie des files d'attente : application à la modélisation des systèmes informatiques, Rapport technique, Université du Massachusetts, (1994).
- [20] O. Boudali, A. Economou, Stratégies d'équilibre dans la file d'attente markovienne à un seul serveur avec catastrophes, Journal ArXiv, 1107-2219, (2007).
- [21] O. Boudali, A. Economou, « L'effet des catastrophes sur le comportement stratégique des clients dans les systèmes de file d'attente », Naval Research Logistics, vol 60, numéro.7, pages 571-587, (2013).
- [22] P. Naor, La régulation de la taille des files d'attente par le prélèvement de péages Econometrica Journal. 37, 15-24, (1969).
- [23] R. Alan, Processus stochastiques avec application aux phénomènes d'attente et fiabilité, Edition 1, Presses Polytechnique Romandes, (1988).
- [24] R. Stephan, V. Heig, Modélisation stochastique, Technical report, Files d'attentes, (2009).
- [25] S. Konieczny, Introduction à la théorie des jeux, Technical report, konieczny@cril.univ-artois.fr, Université d'Artois.
- [26] T. Pénard, La théorie des jeux et les outils d'analyse des comportements stratégiques, Rapport technique, Université de Rennes1, (2004).
- [27] V. Fabrice, Les files d'attentes : Modélisation et évaluation de performances de réseaux, Technical report, Université Lyon, France, (2003).
- [28] Y. Murat, Introduction à la théorie des jeux, Dunod, (2003).
- [29] Z. Sofiane, M. Lamine, La théorie des jeux en files d'attente Markoviennes, (2012).
- [30] Z. Chang, T. Ristaniemi, Jeu de file d'attente pour l'accès au spectre dans Réseaux radio Cognitive , Article dans IEEE Communications Letters, (2015).

Résumé

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème de la gestion d'accès au canal sans fil par la technique radio cognitive. Nous avons d'abord étudié en détail le travail donné en [30]. Les auteurs ont présenté un jeu de file d'attente qui permet aux stations SUs de décider de rejoindre ou non la file d'attente sous l'hypothèse que l'arrivée d'un Pu engendre une perte totale des paquets SUs . Ensuite, nous avons repris la modélisation, en considérant que les paquets SUs ne sont pas perdus mais stockés dans un buffer au niveau de la station de base.

Nous avons alors construit le jeu de file d'attente pour le profit individuel et un jeu pour l'équilibre social.

Nous avons aussi effectué une application numérique pour chaque résultat. Pour se rapprocher mieux de la réalité, nous avons considéré la possibilité ou non de perdre les clients. Nous avons calculé les probabilités stationnaires du modèle.

Mots clé : canal sans fil , radio cognitive, jeu file d'attente , profit.

Abstract

In this work, we focused on the problem of access management to the wireless channel using cognitive radio techniques. We first studied in detail the work presented in [30]. The authors introduced a queueing game that allows the *SUs* (Secondary Users) to decide whether to join the queue or not, under the assumption that the arrival of a *Pu* (Primary User) results in a total loss of *SUs* packets.

Next, we extended the modeling by considering that the *SUs* packets are not lost but stored in a buffer at the base station. We then constructed the queueing game for individual profit and a game for social equilibrium.

We also performed numerical applications for each result. To better reflect reality, we considered both the possibility of losing clients and not losing them. We calculated the steady-state probabilities of the model.

Keywords : wireless channel, cognitive radio, queueing game, profit.