Ministère De L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira De Bejaia

Faculté Des Sciences Exactes

Département De Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER en Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

Résultats d'existence pour des équations différentielles ordinaires non linéaires

---

Présenté par : Melle Kelfat Karima

Devant le jury :

Mme	S. ALLILI-ZAHAR	M.C.B	U.A.M. BEJAIA	Présidente
Mme	K. KHELOUFI-MEBARKI	Prof.	U.A.M. BEJAIA	Encadrant
Mme	B. BARACHE	M.C.B	U.A.M. BEJAIA	Examinatrice
Melle	L. BOUCHAL	Doctorante	U.A.M. BEJAIA	Invitée

Année Universitaire : 2022/2023

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage nécessaire pour réaliser ce travail.

Je remercie mon père, ma mère, mes soeurs, mes frères et toute ma famille pour tout ce qu'ils ont fait pour ma réussite.

Je tiens à remercier ma promotrice **Mme K. KHELOUFI** pour l'honneur qu'elle m'a fait de m'encadrer, pour la qualité de son encadrement, sa disponibilité, ses conseils précieux, ses compétences scientifiques, qui m'a permis d'élargir mes connaissances.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury **Mme S. ALLILI-ZAHAR** et **Mme B.BARACHE** qui m'ont honoré en acceptant d'examiner ce travail.

Je remercie également la doctorante **Melle L. BOUCHAL** pour son aide.

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant notre cycle d'études.

Je remercie tous ceux qui ont participés de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes chers parents Brahim et Djida pour leurs soutien, leurs patience et leurs encouragements durant mon parcours scolaire.

À mes chers frères et soeurs.

Á ma chère soeur Siham et son mari et sa fille.

À toute ma famille et mes amis en particulier Nadir.

À mes copines.

À tous mes enseignants, du primaire, du moyen, du secondaire, de l'université.

À Mme K. KHELOUFI pour son aide et ses précieux conseils.

À tous les étudiants de la promotion Mathématiques 2022-2023.

Table des matières

Notations

E	Un Espace de Banach.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	L'ensemble des nombres réels positifs.
I	Application identité.
$\frac{\partial(.)}{\partial t}$	La dérivée partielle par rapport a t.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$\mathring{\Omega}$	L'intérieur de Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence ou fermeture de Ω.
$\mathcal{C}(X, Y)$	L'espace de toutes les fonctions continues de X dans Y.
$\lvert\,.\,\rvert$	La valeur absolue.
$\lVert\,.\,\rVert$	Une norme.
(a, b)	Intervalle ouvert.
$p.p$	Presque partout.

Introduction

Les problèmes aux limites associés à des équations différentielles représentent l'une des parties les plus importantes de l'analyse mathématique. Elles modélisent de nombreux problèmes issue des sciences appliquée comme la physique, la biologie, l'économie,.... Parmi les problèmes aux limites existants, on retrouve, ceux qui sont associés à des équations différentielles considérées sur des intervalles bornés avec des conditions aux bords périodiques, anti-périodiques, linéaires séparées ou bien linéaires non séparées.... Les techniques les plus utilisées pour l'étude de ces types de problèmes sont : la méthode de sous et sur solution, les théorèmes de points fixes, le degré topologique de Leray-Schauder, les théorèmes de continuation de Leray-Schauder ou encore l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Les conditions aux limites périodiques sur un intervalle $[a, b]$ surviennent dans toute situation où la condition au point b est égal à la condition au point a i.e. $u(a) = u(b)$. Il existe beaucoup d'exemples de processus périodiques tels le rythme circadien naturel du corps humain ou une centrale électrique qui produit de l'énergie pour suivre les cycles de quotidiens où le stockage d'énergie est défini par une condition aux limites périodiques pour garantir que le début et la fin de la journée disposent d'au moins 200 unités d'énergie stockée. Les conditions aux limites anti-périodiques diffèrent des conditions aux limites périodique par un signe négatif, i.e. $(u(a) = -u(b))$, elles apparaissent dans une variété de situations de problèmes appliqués.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter un ensemble de résultats d'existence de solutions concernant les problèmes aux limites périodiques et anti-périodiques associés à des équations différentielles du premier ordre ainsi qu'aux équations différentielles du second ordre.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques notions préliminaires dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail. Nous donnons quelques outils fondamentaux, à savoirs : la définition de quelques classes d'opérateurs, le critère de compacité d'Ascoli-Arzelà, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Ensuite, nous présentons le théorème du point fixe de Schauder ainsi que quelques alternatives non linéaires du type Lerray-Schauder. Nous terminerons ce chapitre en présentant le théorème du point fixe de Krasnoel'skii-Guo sur les cônes.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions de deux problèmes aux limites périodiques associés à des équations différentielles du premier ordre suivants :

$$\begin{cases} u'(t) + b(t)u(t) = g(t, u(t)), \quad t \in [0,1] \\ u(0) = u(1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,1] \\ u(0) = u(1), \end{cases}$$

où $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec b ne s'annule pas dans $[0,1]$ (le premier problème considéré admet une formulation intégrale par contre le deuxième problème est non inversible). La méthode utilisée est l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions des problèmes aux limites anti-périodiques d'ordre 1 qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = \varphi(t, u(t)), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = -u(T), \end{cases}$$

où $T > 0$, $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

En utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder l'existence d'au moins une solution est établie.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions les deux problèmes aux limites périodiques d'ordre 2 suivants :

$$\begin{cases} -u''(t) + Mu(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0, 2\pi) \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi), \end{cases}$$

où $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, $M > 0$,

et

$$\begin{cases} u''(t) + Mu(t) = g(t, u(t)), \quad t \in (0, 2\pi) \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi), \end{cases}$$

où $g : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, $M \in (0, \frac{1}{4})$.

La méthode utilisée est le théorème du point fixe de Kranosel'skii-Guo sur les cônes d'un espace de Banach.

Dans ce travail, nous avons également présenté les méthodes de calcul de la fonction de Green correspondant à chaque problème aux limites étudiés.

1 Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons les résultats préliminaires indispensables à la compréhension de la suite du travail.

1.1 Quelques outils de base

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *(a) On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé complet.*
(b) Un espace métrique (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy de* X *est convergente dans* X.

Définition 1.2 (Boule)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique,* $a \in X$ *et* $r > 0$*, on définit la boule (ouverte) de centre a et rayon r par :*

$$B(a, r) = \{x \in X \ \mid d(a, r) < r\}.$$

Définition 1.3 (Sous-ensemble ouvert)**.** *Un sous ensemble* U *de l'espace métrique* (X, d) *est dit ouvert si* $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ *tel que* $B(x, r) \subset U$.

Remarque 1.1. *Soient* X *un espace vectoriel normé et* A *un sous ensemble de* X.
(a) A *est un sous ensemble fermé de* X*, si pour toute suite convergente* $(f_n)_{n\geq 1} \subset A$*, la*

limite est aussi dans A.

(b) A est un sous ensemble ouvert de X, si

$$\forall x \in A, \exists \delta > 0 \ \ \textit{tel que}\, y \in X, \ \| y - x \| < \delta \Rightarrow y \in A.$$

Définition 1.4. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $Tx = x$.*

Soient X et Y deux espaces de Banach.

Définition 1.5. *Soit $f : \Omega \subset X \to Y$ une application. On dit que*

(a) f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de Ω en un ensemble relativement compact dans Y.

(b) f est bornée s'il transforme les bornés de Ω en des ensembles bornés.

(c) f est dite compacte si $f(\Omega)$ est relativement compacte dans Y.

Remarque 1.2. *(a) Toute application compacte et continue dans Ω est complètement continue.*

(b) La réciproque est vraie, si Ω est borné.

Définition 1.6 (Définition équivalente)**.** *Une application $f : X \to Y$ est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X on peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

1.1.2 Quelques critères de compacité

Théorème 1.1 (Critère d'Ascoli-Arzelà)**.** *Soit X un espace métrique compact. $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ un sous-espace muni de la norme sup. Alors H est relativement compact, pour la topologie de la convergence uniforme, si et seulement si :*

1. *H est uniformément borné, i.e.*

   $\forall\, x \in X$, l'ensemble $\{f(x) : f \in H\}$ est borné dans Y.

2. H est équi-continu, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X,\ d(x,y) \leq \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon,\ \forall f \in H.$$

Théorème 1.2. *(Cas particulier) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ une suite vérifiante :*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée, i.e. $\exists\, c > 0, \forall\, n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq c$.

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-continue, i.e. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall\, x, y \in [a,b]$:

$| x - y | \leq \delta \Rightarrow | f_n(x) - f_n(y) | \leq \varepsilon, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Corollaire 1.1. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $\mathcal{C}^{k+1}([a,b],\mathbb{R})$, alors elle admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}^{k}([a,b],\mathbb{R})$.*

Théorème 1.3. *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue "T.C.D.L")*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que :

(i) $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$ p.p dans Ω,

(ii) il existe une fonction $g \geq 0$ et $g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p dans Ω.

Alors, $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$, quand $n \to \infty$.

1.2 Équations linéaires du premier ordre

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$p_0(x)y' + p_1(x)y = r(x), \quad x \in J = [a,b], \tag{1.1}$$

où $p_0(x)$, $p_1(x)$, $r(x)$ sont des fonctions continues et $p_0(x) \neq 0$ sur J.

L'équation (1.1) peut s'écrire sous la forme :

$$y' + p(x)y = q(x),$$

où $p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$ et $q(x) = \frac{r(x)}{p_0(x)}$ sont des fonctions continues sur J.

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in J. \tag{1.2}$$

L'équation homogène associée à l'équation (1.2) est :

$$y' + p(x)y = 0, \quad x \in J. \tag{1.3}$$

Toute solution de l'équation homogène (1.3) peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = Ce^{-\int^x p(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Remarquons que la solution triviale $y \equiv 0$ est toujours une solution d'une équation différentielle linéaire homogène. Cette solution est incluse dans l'expression (1.4) pour $C = 0$.

Si $x_0 \in J$, alors la fonction

$$y(x) = y_0 \, e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt},$$

vérifie l'équation (1.3) sur J et passe par le point (x_0, y_0).

Par la méthode de variation de la constante, la solution générale de l'équation non homogène (1.2) s'écrit sous la forme :

$$y(x) = C(x)e^{-\int^x p(t)dt}, \text{ où } C'(x) = \frac{q(x)}{e^{-\int^x p(t)dt}}.$$

En intégrant $C'(t)$ on trouve

$$C(x) = \int^x \frac{1}{e^{-\int^t p(s)ds}} q(t)dt + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

D'où, la solution générale de l'équation (1.2) est donnée par :

$$y(x) = C_1 e^{-\int^x p(t)dt} + \int^x e^{-\int_t^x p(s)ds} q(t)dt, \; x \in J. \tag{1.5}$$

Remarque 1.3. *La solution y dans (1.5) est de la forme $C_1 u + v$. Notons que $C_1 u$ est la solution générale de l'équation (1.3) et v est une solution particulière de l'équation (1.2) . Par conséquent, la solution générale de l'équation (1.2) est obtenue en ajoutant n'importe quelle solution particulière de l'équation (1.2) à la solution générale de l'équation homogène associée.*

Cas où l'équation (1.2) est associée à une condition initiale

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x), & x \in J \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

où $x_0 \in J$.

D'après l'expression (1.5), la solution du problème (1.6) s'écrit sous la forme :

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{t}^{x} p(s)ds} q(t)dt, \quad x \in J. \tag{1.7}$$

Cette solution dans le cas particulier où p et q sont des constantes ($p(x) \equiv p$ et $q(x) \equiv q$) se réduit à

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{q}{p}\right) e^{-p(x-x_0)} + \frac{q}{p}.$$

Exemple 1.1. *Considérons le problème de Cauchy linéaire*

$$(H) \begin{cases} xy' - 4y + 2x^2 + 4 = 0, & x \in [1,3], \qquad (I) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on présentera deux méthodes pour trouver la solution du problème (H).

Méthode 1. *Ici* $x_0 = 1, y_0 = 1, p(x) = \frac{-4}{x}$ *et* $q(x) = \frac{-2x^2-4}{x}$, *d'après l'expression (1.7) , la solution du problème* (H) *s'écrire sous la forme*

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_1^x \frac{4}{t}dt} + \textstyle\int_1^x \left(-2t - \frac{4}{t}\right) e^{\int_t^x \frac{4}{s}ds} dt \\ &= x^4 + \textstyle\int_1^x \left(-2t - \frac{4}{t}\right) \frac{x^4}{t^4} dt \\ &= x^4 + x^4\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - 2\right) = -x^4 + x^2 + 1, \quad x \in [1,3]. \end{aligned}$$

Méthode 2. *D'une part, la solution général de l'équation homogène associée* $y' - \frac{4}{x}y = 0$, *est* $y(x) = Cx^4$,

d'autre part, la fonction $\int^x \left(-2t - \frac{4}{t}\right) e^{\int_t^x \frac{4}{s}ds} dt = x^2 + 1$, *est une solution particulière de l'équation* (I).

D'où, la solution générale du problème (H) *est donnée par :*

$$y(x) = Cx^4 + x^2 + 1,\ x \in [1,3].$$

Maintenant pour satisfaire la condition initiale $y(1) = 1$, il est nécessaire que $C = -1$. Donc la solution du problème (H) est $y(x) = -x^4 + x^2 + 1,\ x \in [1, 3]$.

Quelques propriétés des solutions des équations (1.2) et (1.3) :

Soient $y_1$et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation non homogène (1.2). Alors

1. $y_1 - y_2$ est une solution de l'équation homogène (1.3). En effet,
$$\begin{aligned} y_1'(x) - y_2'(x) &= -p(x)y_1(x) + q(x) + p(x)y_2(x) - q(x) \\ &= -p(x)(y_1(x) - y_2(x)). \end{aligned}$$
2. $y = C(y_1 - y_2) + y_1$ ainsi que $y = C(y_1 - y_2) + y_2$ représentent la solution générale de l'équation non homogène (1.2).
   Par exemple, $y_2(x) = \frac{x^2+1}{x}$ et $y_1(x) = x$ sont deux solutions particulières de l'équation $xy' + y = 2x$, alors sa solution générale est $y(x) = \frac{C}{x} + x,\ C \in \mathbb{R}$.
3. **(Principe de superposition)**. Si y_1 et y_2 sont des solutions des équations $y' + p(x)y = q_i(x),\ i = 1, 2$, respectivement, alors $C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ est une solution de l'équation $y' + p(x)y = C_1\, q_1(x) + C_2\, q_2(x)$, où C_1 et C_2 sont des constantes.

Certaines équations non linéaires du premier ordre peuvent être réduites à des équations linéaires par un changement de variables. Par exemple, l'équation de Bernoulli :

$$p_0(x)y' + p_1(x)y = r(x)y^n, \quad n \notin \{0, 1\}. \tag{1.8}$$

L'équation (1.8) est équivalente à l'équation

$$p_0(x)y^{-n}\, y' + p_1(x)y^{1-n} = r(x).$$

Le changement d'inconnue $v = y^{1-n}$ conduit à l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{1}{1-n}\ p_0(x)v' + p_1(x)v = r(x).$$

Exemple 1.2. *L'équation $x\, y' + y = x^2\, y^2,\ x \neq 0$ peut s'écrire $x\, y^{-2}\, y' + y^{-1} = x^2$. Le changement d'inconnue $v = y^{-1}$ conduit à l'équation linéaire : $-x\, v' + v = x^2$, qui peut être résolue pour obtenir $v = (C - x)x$, et donc la solution générale de l'équation donnée est $y(x) = (Cx - x^2)^{-1},\ C \in \mathbb{R}$.*

Dans de nombreux problèmes physiques, le terme non homogène q dans l'équation (1.2) est donné par différentes formules dans différents intervalles. C'est souvent le cas lorsque l'équation (1.2) est considérée comme une relation entrée-sortie. Cela signifie que la fonction q est une entrée et la solution y est une sortie correspondant à l'entrée $q(x)$. Habituellement, dans de tels cas, la solution y n'est pas définie en certains points, de sorte qu'elle n'est pas continue sur tout l'intervalle d'intérêt. Pour comprendre un tel cas, on considéré, pour simplifier, le problème (1.2) dans l'intervalle $[x_0, x_2]$, où la fonction $p(x)$ est continue, et

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x), & x_0 \leq x < x_1 \\ q_2(x), & x_1 < x \leq x_2. \end{cases}$$

On suppose que les fonctions q_1 et q_2 sont continues sur deux sous intervalles $[x_0, x_1)$ et $(x_1, x_2]$, respectivement. Avec ces hypothéses, la solution y du problème (1.2), au vu de l'équation (1.7) peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = y_0\ e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int_{x_0}^{x} q_1(t)\ e^{-\int_t^x p(s)ds} dt, & x_0 \leq x < x_1 \\ \\ y_2(x) = C\ e^{-\int_{x_1}^{x} p(t)dt} + \int_{x_1}^{x} q_2(t)\ e^{-\int_t^x p(s)ds} dt, & x_1 < x \leq x_2. \end{cases}$$

Évidemment, au le point x_1 on ne peut pas dire grand chose sur la solution y qui n'est même pas définie. Cependant, si les limites $\lim\limits_{x \longrightarrow x_1{}^-} y_1(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_1{}^+} y_2(x)$ existent (elles sont garanties, par exemple si les fonctions $q_1(x)$ et $q_2(x)$ sont limitées à $x = x_1$), alors la relation

$$\lim_{x \longrightarrow x_1{}^-} y_1(x) = \lim_{x \longrightarrow x_1{}^+} y_2(x) \tag{1.9}$$

détermine la constante C, pour que la solution y soit continue sur $[x_0, x_2]$.

Exemple 1.3. *Considérons le problème*

$$\begin{cases} y' - \frac{4}{x} y = q(x), & x \in [1, 4] \\ y(1) = 1, \end{cases} \tag{1.10}$$

où

$$q(x) = \begin{cases} -2x - \frac{4}{x}, & x \in [1,2] \\ x^2, & x \in [2,4], \end{cases}$$

la solution générale du problème (1.10) sécrit comme suit

$$y(x) = \begin{cases} -x^4 + x^2 + 1, & x \in [1,2] \\ C\frac{x^4}{16} + \frac{x^4}{2} - x^3, & x \in [2,4]. \end{cases}$$

La relation du (1.9) donne maintenant $C = -11$. Ainsi, la solution continue du problème (1.10) est

$$y(x) = \begin{cases} -x^4 + x^2 + 1, & x \in [1,2] \\ -\frac{3}{16}x^4 - x^3, & x \in [2,4]. \end{cases}$$

Il est clair que cette solution n'est pas différentiable à $x = 2$.

1.3 Conditions aux bords linéaires

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 :

$$(E) \quad p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x), \; x \in [a,b],$$

où p, q, r et f sont des fonctions continues sur $[a,b]$, associée à des conditions aux bords linéaires (séparéés ou non séparées) :

$$(F) \quad \begin{cases} U_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \gamma, \\ U_2(y) = \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

les α_i, β_i, $i = 1,4$ et γ, δ sont des constantes réelles données.

Définition 1.7. *1. On appelle problème aux limites homogène associé au problème $(E) + (F)$ le problème $(E_H) + (F_H)$ tel que :*

$$(E_H) \quad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad a < x < b$$

et

$$(F_H) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Si ($f = 0$ *et* ($\gamma \neq 0$ *ou* $\delta \neq 0$)) *ou* ($f \neq 0$ *et* $\gamma = \delta = 0$), *on dit que le problème* $(E) + (F)$ *est non homogène.*

2. *Une solution d'un problème aux limites est une fonction qui satisfait l'équation différentielle et les conditions aux limites associées*

3. *Les conditions aux bords linéaires* (F) *sont générales, en particulier elles comprennent :*

a) *les conditions de Dirichlet :* $y(a) = \gamma$, $y(b) = \delta$;

b) *les conditions de Neumann :* $y'(a) = \gamma$, $y'(b) = \delta$;

c) *les conditions mixte :* $y(a) = \gamma$, $y'(b) = \delta$ *ou* $y'(a) = \gamma$, $y(b) = \delta$;

d) *les conditions aux limites linéaires séparées*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

où ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 \neq 0$ *et* ${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 \neq 0$.

e) *Les conditions aux limites périodiques*

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b). \end{cases}$$

f) *Les conditions aux limites anti-périodiques*

$$\begin{cases} y(a) = -y(b) \\ y'(a) = -y'(b). \end{cases}$$

1.4 Théorème du point fixe de Schauder et alternatives non linéaires

Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.4 (**Schauder, 1930**, [1]). *Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E. Supposons que $T : C \to C$ est une application continue et compacte. Alors T admet au moins un point fixe dans C.*

Une conséquence immédiate est donnée par :

Corollaire 1.2. *Soient C un ensemble non vide, compact, convexe d'un espace de Banach E et $T : C \to C$ une application continue. Alors T admet au moins un point fixe dans C.*

Corollaire 1.3. *Soient C un ensemble non vide, fermé, convexe (non nécéssairement borné) d'un espace de Banach E et $T : C \to C$ une application continue vérifiant*

$$T(C) \text{ est inclu dans un sous-ensemble compact de } C.$$

Alors, T admet au moins un point fixe dans C.

Démonstration 1. *Il existe un sous-ensemble compact $A \subset C$ tel que $T(C) \subset A \subset C$. Posons $A_0 = \overline{conv}(A)$. Nous avons A_0 est un ensemble convexe, compact et $T(A_0) \subset A \subset A_0$, donc T admet un point fixe dans A_0. D'où, T admet un point fixe dans C (car $A_0 \subset C$).*

Alternatives non linéaires

Pour appliquer le théorème de Schauder, ou bien l'un des corollaires précédents, on a besoin d'une application définie sur un fermé, convexe dans lui même ; et ceci est difficile à obtenir. Dans cette section on va traiter le cas où cette condition n'a pas lieu.

Théorème 1.5 (Alternative non linéaire). *Soient E un espace vectoriel normé et $B := \overline{B(0,R)}$ une boule fermée. Soit $T : B \to E$ une application continue et compacte. Alors*

a. *ou bien, T admet un point fixe dans B,*

b. *ou bien, il existe $\lambda \in (0,1)$ et $x \in \partial B$ tels que $x = \lambda T(x)$.*

Démonstration 2. *Soit $r : E \to B$ une rétraction, définie comme suit :*

$$r(x) = \begin{cases} x, & x \in B, \\ R\frac{x}{\|x\|}, & x \notin B. \end{cases}$$

L'application $r \circ T : B \to B$ est continue et compacte (la composition d'une application compacte et d'une application continue est compacte). D'après le théorème de Schauder $r \circ T$ admet un point fixe dans B, c'est à dire :

$$\exists x \in B,\ (r \circ T)(x) = r(T(x)) = x.$$

Par suite, on distingue deux cas :

Cas (1) : $T(x) \in B$. Dans ce cas on aura

$$x = (r \circ T)(x) = r(T(x)) = T(x).$$

C'est à dire T admet un point fixe dans B.

Cas (2) : $T(x) \notin B$. Dans ce cas on aura

$$x = r(T(x)) = R\frac{T(x)}{\|T(x)\|}.$$

D'où, il existe $x \in \partial B$ (car $\|x\| = \left\| R\frac{T(x)}{\|T(x)\|} \right\| = R$) et $\lambda = \frac{R}{\|T(x)\|} \in [0,1]$ tel que :

$$x = \lambda T(x).$$

Dans la version suivante, on remplace la boule $B(0,R)$ par un ouvert quelconque de E.

Théorème 1.6 (Alternative non linéaire)**.** *Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert borné de E contenant 0 et $T : \overline{\Omega} \to E$ une application complètement continue. Alors,*

a. *ou bien, T admet un point fixe dans Ω,*

b. *ou bien, il existe $\lambda \in (0,1]$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $x = \lambda T(x)$.*

Démonstration 3. *Supposons que (b) n'est pas vérifié, alors*

$$\forall\, x \in \partial\Omega,\ \forall\, \lambda \in \left]0,1\right],\ (I - \lambda T)(x) \neq 0.$$

Ce qui implique que le degré $deg(I-\lambda T,\Omega,0)$ est bien défini. D'après, les propriétés d'invariance homotopique et la normalisation, on aura

$$deg(I-T,\Omega,0)=deg(I,\Omega,0)=1.$$

Par suite, la propriété d'existence de degré assure l'existence d'une solution dans Ω de l'équation $(I-T)(x)=0$. C'est à dire T admet un point fixe dans Ω.

On peut trouver des résultats sur le degré topologique dans les références, [8], [6].

Théorème 1.7. *(Théorème de Schaefer, 1955 [3]) Soient E un espace de Banach et $T:E\to E$ une application complètement continue. Alors,*

a. *ou bien, T admet un point fixe dans E,*

b. *ou bien, Pour tout $\lambda\in(0,1)$, l'ensemble $\{x\in E : x=\lambda T(x)\}$ n'est pas borné.*

Notons que le théorème 1.7 est appelé aussi *Alternative non linéaire de Leray-Schauder.* La version suivante de ce résultat est très utile dans les applications.

Théorème 1.8 (L'alternative non linéaire de Leray-Schauder, [3])**.** . *Soit E un espace de Banach et $C\subseteq E$ un convexe fermé, Ω un ouvert de C contenant 0 et $T:\overline{\Omega}\to C$ une application continue et compacte. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié*

(i) T admet un point fixe dans $\overline{\Omega}$ i.e. $\exists\, x\in\overline{\Omega} : x=T(x)$,

(ii) il existe $x\in\partial\Omega$ et $\lambda\in(0,1)$ tels que $x=\lambda T(x)$.

Démonstration 4. *Nous pouvons trouver des démonstrations de ces résultats dans [3].*

Remarque 1.4. *L'énoncé (ii) du théorème 1.8 indique que l'ensemble*

$$S=\{x\in\Omega : x=\lambda T(x)\,;\,\lambda\in(0,1)\}$$

n'est pas borné. Ainsi pour appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, il suffit de montrer que T est complètement continue vérifiant l'estimation a priori suivante :

$$\exists R>0,\forall\lambda\in(0,1) : (x=\lambda T(x)\Rightarrow\|x\|<R).$$

Cela veut dire que T admet au moins un point fixe dans $B(0,R)$, où $B(0,R)$ la boule ouverte de E de centre 0 et de rayon R.

1.5 Théorème du point fixe de Krasnosel'skii-Guo

Définition 1.8. *Soient E un espace de Banach réel et K un sous ensemble non vide, fermé et convexe de E. K est dit cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

(i) $x \in K, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$;

(ii) $x \in K,\ -x \in K \Rightarrow x = 0$.

Exemple 1.4.

1. *Soit $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n\} = (\mathbb{R}_+)^n$ est un cône de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit $E = \mathcal{C}([a,b])$, $\mathcal{P}_2 = \{x \in \mathcal{C}([a,b]) : x(t) \geq 0,\ \forall t \in [a,b]\}$ est un cône de $\mathcal{C}([a,b])$.*

Théorème 1.9. *[2] (Théorème du point fixe de Krasnosel'skii-Guo, 1988).*
Soit E un espace de Banach, et soit $K \subset E$ un cône. Supposons que Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles bornés ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.
Soit $\Phi : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to K$ un opérateur complètement continu vérifiant l'une des conditions suivantes :

(i) $\|\Phi u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|\Phi u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$,

(ii) $\|\Phi u\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|\Phi u\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors, Φ admet au moins point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

2 Problèmes aux limites périodiques d'ordre 1

On peut trouver les résultats de ce chapitre dans [7].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous utiliserons l'alternative non linéaire de Leray-Schauder afin de démontrer l'existence de solutions des problèmes aux limites périodiques du premier ordre suivants :

$$\begin{cases} x' + b(t)x = g(t,x), \quad t \in [0,1] \\ x(0) = x(1), \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \quad t \in [0,1] \\ x(0) = x(1), \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec b ne s'annule pas dans $[0,1]$.

Une solution du problème (2.1) (resp. du problème (2.2)) est une fonction continûment différentiable $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (notée par $x \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^n)$) qui satisfait le problème (2.1) (resp. le problème (2.2)).

Dans ce qui suit, $\langle y, z\rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\|z\|$ désigne la norme euclidienne de z sur $\mathbb{R}^n$ (i.e $\|z\| = \sqrt{\langle z.z\rangle} = \sum\limits_{i=1}^{n} {z_i}^2$).

2.2 Formulation intégrale du problème (2.1)

Lemme 2.1. *Soient $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec $b(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,1]$. Le problème (2.1) est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right),\ t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Démonstration 5. $\Leftarrow$) *Dérivons x, donnée par (2.3), sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient*

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{-b(t)e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}{\left(e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}\right)^2}\left(\frac{\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right)\\
&\quad + \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(g(t,x(t))e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}\right)\\
&= \frac{-b(t)}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right) + g(t,x(t))\\
&= -b(t)x(t) + g(t,x(t)),\ t \in [0,1].
\end{aligned}$$

De plus on a $x(0) = \frac{\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1}$ *donc*

$$\begin{aligned}
x(1) &= \frac{1}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right)\\
&= \frac{1}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}}\left(1 + \frac{1}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1}\right)\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\\
&= \frac{1}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}}\left(\frac{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1}\right)\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\\
&= \frac{\int_0^1 g(s,x(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1}\\
&= x(0).
\end{aligned}$$

D'où x donné par (2.3) vérifie le problème (2.1).

$\Rightarrow$) *Soit le problème linéaire*

$$\begin{cases} x' + b(t)x = h(t), & t \in [0,1] \\ x(0) = x(1). \end{cases} \tag{2.4}$$

Remarquons que le problème homogène associé au problème 2.4 n'admet que la solution triviale $x \equiv 0$, alors le problème 2.4 admet une unique solution (d'après l'alternative de Fredholm). Montrons que l'unique solution de ce problème s'écrit

$$x(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(\frac{\int_0^1 h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1} + \int_0^t h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \right), \; t \in [0,1].$$

Dans ce qui suit, on présentera deux méthodes pour trouver x.

Méthode 1. *Soit l'équation homogène associée au problème (2.4),*

$$x'(t) + b(t)x(t) = 0, \quad t \in [0,1]. \tag{2.5}$$

Toute solution non nulle de l'équation (2.5) peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = Ce^{-\int_0^t b(\tau)d\tau}, \; C \in \mathbb{R}.$$

Donc par la méthode de variation de la constante, la solution générale de l'équation non homogène

$$x'(t) + b(t)x(t) = h(t), \tag{2.6}$$

peut s'écrire sous la forme $x(t) = C(t)e^{-\int_0^t b(\tau)d\tau}$, où $C'(t) = \frac{h(t)}{e^{-\int_0^t b(\tau)d\tau}}$.
En intégrant $C'(t)$ on trouve

$$C(t) = \int_0^t \frac{1}{e^{-\int_0^s b(\tau)d\tau}} h(s)ds + K, \; K \in \mathbb{R}.$$

D'où, la solution générale de l'équation (2.6) est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\int_0^t \frac{1}{e^{-\int_0^s b(\tau)d\tau}} h(s)ds + K \right) e^{-\int_0^t b(\tau)d\tau} \\ &= \left(\int_0^t h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds + K \right) e^{-\int_0^t b(\tau)d\tau}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Déterminons la constante K. On a

$$x(0) = K \quad et \quad x(1) = \left(\int_0^1 h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds + K \right) e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x(0)=x(1) \quad &\Leftrightarrow \quad K=\left(\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds+K\right)e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau} \\ &\Leftrightarrow \quad K\left(1-e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau}\right)=e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau}\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad K=\frac{e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau}\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{1-e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau}}.$$

D'où, le problème linéaire (2.4) admet une unique solution non nulle x de la forme :

$$x(t)=\left(\int_0^t h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds+\frac{e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau}\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{1-e^{-\int_0^1 b(\tau)d\tau}}\right)e^{-\int_0^t b(\tau)d\tau},\ t\in[0,1].$$

Ou encore

$$x(t)=\frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1}+\int_0^t h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right),\ t\in[0,1].$$

Méthode 2. *Supposons que x est une solution du problème (2.4), alors*

$$x'(t)+b(t)x(t)=h(t),\quad t\in[0,1].$$

On pose $u(t)=e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}x(t)$. Dérivons u sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} u'(t) &= b(t)e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}x(t)+e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}x'(t) \\ &= e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}\left[b(t)x(t)+x'(t)\right] \\ &= e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}h(t),\ t\in[0,1]. \end{aligned}$$

En intégrant u' sur l'intervalle avec $t\in[0,1]$, on trouve

$$u(t)=u(0)+\int_0^t h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds.$$

u(0)=x(0), on aura

$$e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}x(t)=x(0)+\int_0^t h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds.$$

D'où, la solution générale de l'équation (2.4) est donnée par :

$$x(t)=\frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(x(0)+\int_0^t h(s)e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right).$$

Déterminons $x(0)$. On a

$$x(0) = e^{\int_0^t b(\tau)d\tau} x(t) - \int_0^t h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds.$$

Comme les conditions aux bords sont périodiques, donc

$$x(0) = e^{\int_0^1 d(\tau)d\tau} x(1) - \int_0^1 h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds,$$

alors

$$x(0) = e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} x(0) - \int_0^1 h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds.$$

Ensuite,

$$x(0) = \frac{\int_0^1 h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1}.$$

D'où le résultat recherché.

Par suite, la solution du problème linéaire (2.4) s'écrit

$$x(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(\frac{\int_0^1 h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1} + \int_0^t h(s) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \right).$$

Par conséquent, toute solution du problème non linéaire (2.1) peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(\frac{\int_0^1 g(s, x(s)) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1} + \int_0^t g(s, x(s)) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \right), \ t \in [0, 1].$$

2.3 Résultats d'existence

2.3.1 Résultats d'existence pour le problème (2.1)

Théorème 2.1. *Soient $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ avec $b(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$. S'il existe $\alpha, K \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$\lambda \|g(t,z)\| e^{\int_0^t b(\tau)d\tau} \leqslant 2\alpha \left[\langle z, \lambda g(t,z) \rangle - b(t)\|z\|^2 \right] + K, \quad (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

alors, le problème (2.1) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration 6. *Définissons l'application* $T : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ *par*

$$Tx(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(\frac{\int_0^1 g(s,x(s)) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1} + \int_0^t g(s,x(s)) e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \right), \ \forall t \in [0,1]. \quad (2.8)$$

D'après le lemme 2.1, le problème (2.1) se réduit à monter l'existence d'au moins un point fixe de l'application T *dans* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$. *Pour cela on va utiliser l'alternative non linéaire de Leray-Schauder en prenant l'espace de Banach* $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ *muni de la norme* $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} ||x(t)||$ *et l'ouvert* $\Omega = \left\{ x \in E \, : \, \max_{t\in[0,1]} \|x(t)\| < R \right\}$, *où*

$$R = \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(1 + \frac{1}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1|} \right) \right) K + 1.$$

(1) *Montrons que* $x \neq \lambda Tx$ *pour tout* $x \in \partial\Omega$ *et* $\lambda \in [0,1]$.

Supposons que $\exists\, x \in \partial\Omega$ *et* $\lambda \in [0,1]$ *tels que* $x = \lambda Tx$.

D'après le lemme 2.1, l'équation $x = \lambda Tx$ *est équivalente au problème aux limites*

$$\begin{cases} x' + b(t)x = \lambda g(t,x), \quad t \in [0,1], \ \lambda \in [0,1] \\ x(0) = x(1). \end{cases} \quad (2.9)$$

Soit $r(t) := \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$, $\forall t \in [0,1]$, *alors* $r'(t) = 2\langle x(t), x'(t) \rangle$, *avec* $x'(t) = \lambda g(t,x(t)) - b(t)x(t)$.

Posons

$$H(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(1 + \frac{1}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1|} \right), \ t \in [0,1].$$

Pour tout $t \in [0,1]$, *on aura*

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|\lambda Tx(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(\frac{\int_0^1 \lambda \|g(s,x(s))\| e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1|} + \int_0^t \lambda \|g(s,x(s))\| e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \right) \\ &\leqslant \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}} \left(1 + \frac{1}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau} - 1|} \right) \int_0^1 \lambda \|g(s,x(s))\| e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \\ &\leqslant H(t) \int_0^1 \lambda \|g(s,x(s))\| e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \\ &\leqslant H(t) \int_0^1 \left(2\alpha \left[\langle x(s), \lambda g(s,x(s)) \rangle - b(t)\|x(s)\|^2 \right] + K \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \; H(t)\int_0^1 \left(2\alpha\left[\langle x(s),\lambda g(s,x(s))\rangle - b(t)\langle x(s),x(s)\rangle\right] + K\right) ds\\
&\leqslant \; H(t)\int_0^1 \left(2\alpha\langle x(s),\lambda g(s,x(s)) - b(t)x(s)\rangle + K\right) ds\\
&\leqslant \; H(t)\int_0^1 \left(2\alpha\langle x(s),\lambda g(s,x(s)) - b(t)x(s)\rangle + K\right) ds\\
&\leqslant \; H(t)\int_0^1 \left(2\alpha\langle x(s),x'(s)\rangle + K\right) ds\\
&= \; H(t)\int_0^1 \left(\alpha\tfrac{d}{ds}(\|x\|^2) + K\right) ds\\
&= \; H(t)\left(\alpha\left(\|x(1)\|^2 - \|x(0)\|^2\right) + K\right)\\
&= \; H(t)K\\
&< \; R.
\end{aligned}$$

Par passage au maximum on trouve $\|x\|_\infty < R$, ce qui est une contradiction avec $x \in \partial\Omega$.

(2) *(a) Montrons que l'application T est continue.*

Soit (y_n) une suite de E telle que $y_n \to y$, $n \to \infty$.

Montrons que $Ty_n \to Ty$, $n \to \infty$ dans E, c'est à dire montrons que

$\|Ty_n - Ty\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$.

Pour cela, il suffit de monter que $\|Ty_n(t) - Ty(t)\| \to 0, n \to \infty, \forall t \in [0,1]$.

On a

$$Ty_n(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,y_n(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,y_n(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right).$$

$$Ty(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right).$$

D'après la continuité de g, on a

$$g(s,y_n(s)) \to g(s,y(s)),\ \textit{quand}\ n \to \infty,\ \forall\, s \in [0,1],$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,y_n(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,y_n(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right)\\
&\to \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$
\begin{aligned}
\|Ty_n(t)\| &\leq \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 \|g(s,y_n(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1|} + \int_0^t |g(s,y_n(s))|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right)\\
&\leqslant \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(1+\frac{1}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1|}\right)\int_0^1 \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\\
&\leqslant H(t)\int_0^1 \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds < \infty.
\end{aligned}
$$

Ensuite, pour tout $t \in [0,1]$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraine

$$Ty_n(t) \to Ty(t), n \to \infty.$$

$$\|Ty_n(t) - Ty(t)\| \to 0, n \to \infty.$$

Par conséquent,

$$\|Ty_n(t) - Ty(t)\|_\infty \to 0, n \to \infty.$$

(b) Montrons que l'ensemble $T(\overline{\Omega})$ est relativement compact.

Pour cela on va utiliser le critère de compacité d'Ascoli-Arzelà.

(i) *Montrons que $T(\overline{\Omega})$ est uniformément borné. Soit $y \in \overline{\Omega}$, Pour tout $t \in [0,1]$, on a*

$$
\begin{aligned}
\|Ty(t)\| &= \left\|\frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1} + \int_0^t g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right)\right\|\\
&\leqslant \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(\frac{\int_0^1 \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1|} + \int_0^t \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\right)\\
&\leqslant \frac{1}{e^{\int_0^t b(\tau)d\tau}}\left(1+\frac{1}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1|}\right)\int_0^1 \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\\
&\leqslant H(t)\int_0^1 \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds\\
&= H(t)K\\
&< R.
\end{aligned}
$$

(ii) *Montrons que $T(\overline{\Omega})$ est équi-continu. Soit $y \in \overline{\Omega}$. Alors, pour tout t_1 , $t_2 \in [0,1]$,*

$$\begin{aligned}
\|Ty(t_1) - Ty(t_2)\| &= \|\frac{\int_0^1 g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1|e^{\int_0^{t_1} b(\tau)d\tau}} + \frac{\int_0^{t_1} g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^{t_1} b(\tau)d\tau}} \\
&\quad - \frac{\int_0^1 g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1|e^{\int_0^{t_2} b(\tau)d\tau}} - \frac{\int_0^{t_2} g(s,y(s))e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^{t_2} b(\tau)d\tau}}\| \\
&\leq \frac{\int_0^1 \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{|e^{\int_0^1 b(\tau)d\tau}-1|}\left|\frac{1}{e^{\int_0^{t_1} b(\tau)d\tau}} - \frac{1}{e^{\int_0^{t_2} b(\tau)d\tau}}\right| \\
&\quad + \frac{\int_0^{t_1} \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^{t_1} b(\tau)d\tau}} - \frac{\int_0^{t_2} \|g(s,y(s))\|e^{\int_0^s b(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^{t_2} b(\tau)d\tau}} \\
&\longrightarrow 0 \text{ quand } t_1 \to t_2.
\end{aligned}$$

D'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder il existe $x \in \overline{\Omega}$ telle que $Tx = x$, qui est solution du problème (2.1). De plus, comme la fonction g est continue, alors $x \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^n)$. $\square$

Corollaire 2.1. *Soient $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec $b < 0$, $\forall x \in [0,1]$. S'il existe $\alpha, K \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\|g(t,z)\|e^{\int_0^t b(\tau)d(\tau)} \leqslant 2\alpha\langle z, g(t,z)\rangle + K,\ \forall (t,z) \in [0,1]\times\mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

alors, le problème (2.1) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^n)$.

Démonstration 7. *On multiplie les deux côtés de l'équation (2.10) par $\lambda \in [0,1]$, puis on ajoute le terme positif $-b(t)\|z\|^2$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\lambda\|g(t,z)\|e^{\int_0^t b(\tau)d(\tau)} &\leqslant 2\alpha\langle z, \lambda g(t,z)\rangle + \lambda K \\
&= 2\alpha[\langle z, \lambda g(t,z)\rangle - b(t)\|z\|^2] + K,\ \forall (t,z) \in [0,1]\times\mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Ainsi la condition (2.7) est vérifiée et le résultat découle du théorème 2.1.

Corollaire 2.2. *Soient* $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ *et* $b \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *avec* $b(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$. *Si* g *est bornée sur* $[0,1] \times \mathbb{R}^n$, *alors le problème (2.1) admet au moins une solution dans* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^n)$.

Démonstration 8. *Comme* g *est bornée sur* $[0,1] \times \mathbb{R}^n$, *alors* $\exists L \geq 0$ *telle que*

$$\sup_{(t,z)\in[0,1]\times\mathbb{R}^n} \|g(t,z)\| \leq L.$$

Ainsi la condition (2.7) sera satisfaite pour $\alpha = 0$ *et* $K = \max_{t\in[0,1]} e^{\int_0^t b(\tau)d(\tau)} L$.

Cas particulier. Considérons maintenant le problème (2.1) pour $n = 1$, on obtient le corollaire suivant du théorème 2.1 :

Corollaire 2.3. *Soient* g *une fonction continue à valeurs scalaires, et* b *une fonction continue avec* $b(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$. *S'il existe* $\alpha, K \in \mathbb{R}_+$ *tels que, pour tout* $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda |g(t,z)| e^{\int_0^t b(\tau)d(\tau)} \leqslant 2\alpha \left[z\lambda g(t,z) - b(t)z^2 \right] + K, \ \forall (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

alors, le problème (2.1) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Démonstration 9. *Il est facile de voir que pour* $n = 1$ *la condition (2.7) devient (2.11) ; et le résultat découle du théorème 2.1.*

Exemple 2.1. *Considérons le problème scalaire* $(n = 1)$ *donné par :*

$$\begin{cases} x' - x = e^t x^3 + 1, \quad t \in [0,1] \\ x(0) = x(1). \end{cases} \tag{2.12}$$

Ici $g(t,z) = e^t z^3 + 1$, $t \in [0,1]$, $z \in \mathbb{R}$ *et* $b(t) = -1$ *sur* $[0,1]$. *Il reste à montrer l'existence de* $\alpha, K \in \mathbb{R}_+$ *pour que la condition (2.10) soit satisfaite.*

On a $|g(t,z)| \leq e|z^3| + 1$ *et* $e(z^4 + z + 10) \geq e(|z^3| + 1) \geq e|z^3| + 1 \geq |g(t,z)|$, $\forall (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. *Par conséquent,*

$$\begin{aligned} 2\alpha z g(t,z) + K &= 2\alpha z(e^t z^3 + 1) + K \\ &\geq 2\alpha(z^4 + z) + K \\ &= e(z^4 + z) + 10e, \quad \textit{pour } \alpha = e/2, \ K = 10e \\ &\geq |g(t,z)| \geq |g(t,z)| e^{-t}, \ \forall (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la condition (2.10) est satisfaite. Ainsi toutes les conditions du corollaire 2.1 sont vérifiées. Par conséquent, le problème (2.12) admet au moins une solution.

2.3.2 Résultats d'existence pour le problème (2.2)

Considérons maintenant le problème (2.2) défini par :

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \quad t \in [0,1] \\ x(0) = x(1). \end{cases}$$

Le problème (2.2) est non inversible. Nous ne pouvons pas le reformuler sous la forme d'une équation intégrale équivalente. Cependant, le problème équivalent

$$\begin{cases} x' - x = f(t,x) - x, \quad t \in [0,1] \\ x(0) = x(1), \end{cases} \tag{2.13}$$

est inversible (le lemme 2.1 est applicable pour le cas particulier $b(t) = -1$ et $g(t,z) = f(t,z) - z$).

Théorème 2.2. *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. S'il existe $\alpha_1, K_1 \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$\lambda \|f(t,z) - z\| e^{-t} \leq 2\alpha_1 [\langle z, \lambda f(t,z)\rangle + (1-\lambda)\|z^2\|] + K_1, \ \forall (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.14}$$

alors, le problème (2.2) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration 10. *Il est facile de voir que pour $g(t,z) = f(t,z) - z$ et $b(t) = -1$ la condition (2.7) devient (2.14) . Par suite, le résultat découle du théorème 2.1.*

Corollaire 2.4. *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. S'il existe $\alpha_1, K_1 \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\|f(t,z) - z\| \leq 2\alpha_1 \langle z, \lambda f(t,z)\rangle + K_1, \ \forall (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.15}$$

alors, le problème (2.2) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration 11. *Il est facile de voir que pour* $g(t,z) = f(t,z) - z$ *et* $b(t) = -1$ *avec* $\|f(t,z) - z\|e^{-t} \leq \|f(t,z) - z\|, \ \forall (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$, *la condition (2.10) devient (2.15) . Par suite, le résultat découle du corollaire 2.1.*

Corollaire 2.5. *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction continue. Si* $f(t,z) - z$ *est bornée pour* $(t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$, *alors le problème (2.2) admet au moins une solution dans* $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration 12. *Il s'agit d'un cas particulier du corollaire 2.2 avec* $b(t) = -1$ *et* $g(t,z) = f(t,z) - z$.

3 Problèmes aux limites anti-périodiques d'ordre 1

On peut trouver les résultats de ce chapitre dans [8].

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous utiliserons l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour démontrer l'existence de solutions des problèmes aux limites non linéaires anti-périodiques du premier ordre suivants :

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \quad t \in [0,T] \\ x(0) = -x(T), \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x' - x = f(t,x) - x, \quad t \in [0,T] \\ x(0) = -x(T), \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et $T > 0$.

Nous pouvons considérer les problèmes (3.2) et (3.1) comme des cas particuliers du problème suivant :

$$\begin{cases} x' + a(t)x = \varphi(t,x), \quad t \in [0,T] \\ x(0) = -x(T), \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Dans ce qui suit, $\langle y, z\rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\|z\|$ désigne la norme euclidienne de z sur $\mathbb{R}^n$ (i.e $\|z\| = \sqrt{\langle z.z\rangle} = \sum\limits_{i=1}^{n} {z_i}^2$).

3.2 Formulation intégrale du problème (3.3)

Lemme 3.1. *Soient $\varphi \in \mathcal{C}([0,T]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$. Le problème (3.3) est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}\left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} + \int_0^t \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\right),\ t\in[0,T]. \tag{3.4}$$

Démonstration 13. $\Leftarrow$) *Dérivons x dans (3.4) sur l'intervalle $[0,T]$, on obtient*

$$\begin{aligned} & x'(t) \\ = & -a(t)\,e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}\left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} + \int_0^t \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\right) \\ & + e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}\left(\varphi(t,x(t))e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}\right) \\ = & -a(t)\,e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}\left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} + \int_0^t \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\right) + \varphi(t,x(t)) \\ = & -a(t)x(t)+\varphi(t,x(t)),\ t\in[0,T]. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $x(0) = \dfrac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)}$ *donc*

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} + \int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\right) \\ &= e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\left(1+\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)}\right)\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds \\ &= e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\left(\frac{-1}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)}\right)\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds \\ &= \frac{-e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} \\ &= -x(0). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$) *Considérons le problème linéaire scalaire :*

$$\begin{cases} x' + a(t)x = g(t), \quad t \in [0,T] \\ x(0) = -x(T), \end{cases} \tag{3.5}$$

où $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*

Montrons que l'unique solution de ce problème s'écrit

$$x(t) = e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} \left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}) \int_0^T g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds}{-\left(1 + e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} + \int_0^t g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds \right), \ t \in [0,T].$$

Dans ce qui suit, on présentera une méthode pour trouver x.

La solution générale de l'équation $x'(t) + a(t)x(t) = g(t)$ *est donnée par :*

$$x(t) = \left(\int_0^t g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds + K \right) e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}, \quad K \in \mathbb{R}$$

. Déterminons la constante K. *On a*

$$x(0) = K \quad et \quad x(T) = \left(\int_0^T g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds + K \right) e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x(0) = -x(T) \quad &\Leftrightarrow \quad K = -\left(\int_0^T g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds + K \right) e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau} \\ &\Leftrightarrow \quad K \left(1 + e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau} \right) = -e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau} (\int_0^T g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds) \\ \\ &\Leftrightarrow \quad K = \frac{-e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau} (\int_0^T g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds)}{1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}. \end{aligned}$$

D'où, le problème linéaire (3.5) admet une unique solution non nulle x *définie par :*

$$x(t) = \left(\int_0^t g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds + \left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}) \int_0^T g(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds}{-(1 + e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})} \right) \right) e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}, \ t \in [0,T].$$

Par conséquent, toute solution du problème non linéaire (3.3) peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \left(\int_0^t \varphi(s, x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds + \left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}) \int_0^T \varphi(s, x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds}{-(1 + e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})} \right) \right) e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}, \ t \in [0,T].$$

Remarque 3.1. *La solution du problème linéaire (3.5) peut s'écrire sous la forme :*

$$x(t) = \int_0^T G(s,t)g(s)ds, \ t \in [0,T],$$

où G est la fonction de Green définie par :

$$G(s,t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{-\left(1+e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)}\right) e^{\int_t^s a(\tau)d\tau}, & 0 \leq s < t \leq T, \\ \frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{-\left(1+e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} e^{\int_t^s a(\tau)d\tau}, & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases}$$

3.3 Résultats d'existence

Théorème 3.1. *Soient $q : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable avec $\int_0^T q(t)dt > 0$ et $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, [0,+\infty[)$ avec $W(z) = W(-z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$. S'il existe un réel $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$\lambda\|\varphi(t,z)\|e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \leq \gamma\langle DW(z), \lambda\varphi(t,z) - a(t)z\rangle + q(t), \ (t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

alors, le problème (3.3) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Notons que pour $z = (z_1, z_2, ...z_n)$, $DW(z) = \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}(z), \frac{\partial W}{\partial z_2}(z), ..., \frac{\partial W}{\partial z_n}(z)\right)$.

Démonstration 14. *Définissons l'application $A : \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ par :*

$$Ax(t) = e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} \left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}) \int_0^T \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{-\left(1 + e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} + \int_0^t \varphi(s,x(s))e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds \right), \tag{3.7}$$

$t \in [0,T]$. D'après le lemme 3.1, monter l'existence de solution du problème (3.3) se réduit à monter l'existence de points fixes de l'application A dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Pour cela on va utiliser l'alternative non linéaire de Leray-Schauder (théorème 1.8) en prenant :

- *$E = \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^n)$ espace de Banach muni de la norme $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} ||x(t)||$,*
- *l'ouvert $\Omega = \left\{x \in E \ : \ \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\| < R + 1\right\}$,*

où

$$R = \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{1}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}\left(1+\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})}{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}+1}\right)\right)\int_0^T q(t)dt.$$

(1) *Montrons que* $x \neq \lambda Ax$ *pour tout* $x \in \partial\Omega$ *et* $\lambda \in [0,1]$.

Supposons que $\exists\, x \in \partial\Omega$ *et* $\lambda \in [0,1]$ *tels que* $x = \lambda Ax$.

D'après le lemme 3.1, l'équation $x = \lambda Ax$ *est équivalente au problème aux limites*

$$\begin{cases} x' + a(t)x = \lambda\varphi(t,x), \quad t \in [0,T],\ \lambda \in [0,1] \\ x(0) = -x(T). \end{cases} \tag{3.8}$$

Pour tout $t \in [0,T]$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \|\lambda Ax(t)\| \\
&\leq \frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})\int_0^T \lambda\|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}|1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}|} + \frac{\int_0^t \lambda\|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}} \\
&\leq \frac{1}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}\left(\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}+1\right)\int_0^T \lambda\|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds \\
&\leq \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{1}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}\left(\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}+1\right)\right)\int_0^T(\gamma\langle DW(x(s)),\lambda\varphi(s,x(s))-a(s)x(s)\rangle+q(s))ds \\
&\leq \frac{R}{\int_0^T q(s)ds}\int_0^T\left(\gamma\langle DW(x(s)),x'(s)\rangle+q(s)\right)ds \\
&= \frac{R}{\int_0^T q(s)ds}\int_0^T\left(\gamma\frac{d}{ds}W(x(s))+q(s)\right)ds \\
&= \frac{R}{\int_0^T q(s)ds}(\gamma(W(x(T))-W(-x(t)))+\int_0^T q(s)ds) \\
&= R.
\end{aligned}$$

Par passage au maximum on trouve $\|x\|_\infty < R+1$, *ce qui est une contradiction avec* $x \in \partial\Omega$.

(2) *(a) Montrons que l'application* A *est continue.*

Soit (y_n) *une suite de* E *telle que* $y_n \to y$, $n \to \infty$.

Montrons que $Ay_n \to Ay$, $n \to \infty$ *dans* E, *c'est à dire montrons que*

$\|Ay_n - Ay\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$.

Pour cela, il suffit de monter que $|Ay_n(t) - Ay(t)| \to 0, n \to \infty, \forall t \in [0,T]$.

On a

$$Ay_n(t) = \int_0^T G(s,t)\varphi(s, y_n(s))ds.$$
$$Ay(t) = \int_0^T G(s,t)\varphi(s, y(s))ds.$$

D'une part, la continuité de φ *entraîne que*

$$\varphi(s, y_n(s)) \to \varphi(s, y(s)), \ \textit{quand } n \to \infty, \forall\, s \in [0,T].$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$, *on a :*

$$\begin{aligned} |Ay_n(t)| &\leq \textstyle\int_0^T |G(s,t)|\,|\varphi(s,y_n(s))|ds \\ &\leq \max_{t\in[0,T]} |\varphi(s,y_n(s))| \textstyle\int_0^T |G(s,t)|ds < \infty. \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $t \in [0,T]$, *le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que*

$$Ay_n(t) \to Ay(t), n \to \infty.$$

Par conséquent,

$$\|Ay_n(t) - Ay(t)\|_\infty \to 0, n \to \infty.$$

Donc A *est continu sur* E.

(b) Montrons que l'ensemble $A(\overline{\Omega})$ *est relativement compact.*

On va utiliser le critère de compacité d'Ascoli-Arzelà avec Ω *un sous ensemble borné de* E

(i) *Montrons que* $A(\overline{\Omega})$ *est uniformément borné. Soit* $y \in \overline{\Omega}$, *montrons que* $\|Ay\|_\infty < \infty$.

Pour tout $t \in [0,T]$, *on a*

$$\|Ax(t)\| = \left\| \frac{1}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}} \left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}) \int_0^T \varphi(s,x(s)) e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds}{-\left(1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)} + \textstyle\int_0^t \varphi(s,x(s)) e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds \right) \right\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}\left(\frac{(e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau})\int_0^T \|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}+1} + \int_0^t \|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\right)\\
&\leq \frac{1}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}\left(\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}+1}+1\right)\int_0^T \|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\\
&\leq \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{1}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}\left(\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}+1}+1\right)\right)\int_0^T \|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\\
&= \frac{R}{\int_0^T q(s)ds}\int_0^T \|\varphi(s,x(s))\|e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\\
&= R.
\end{aligned}
$$

(ii) *Montrons que $A(\overline{\Omega})$ est équi-continu. Soit $y \in \overline{\Omega}$. Alors, pour tout t_1 , $t_2 \in [0,T]$,*

$$
\begin{aligned}
& \|Ay(t_1) - Ay(t_2)\|\\
= \;& \|\int_0^T G(s,t_1)\varphi(s,y(s))ds - \int_0^T G(s,t_2)\varphi(s,y(s))ds\|\\
\leq \;& |\int_0^T G(s,t_1)ds - \int_0^T G(s,t_2)ds|\;\|\varphi(s,y(s))\|\\
\leq \;& \int_0^{t_1}\left(1+\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}}\right)e^{\int_{t_1}^s a(\tau)d\tau}ds + \int_{t_1}^T \frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}e^{\int_{t_1}^s a(\tau)d\tau}ds\\
& -\int_0^{t_2}\left(1+\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}}\right)e^{\int_{t_2}^s a(\tau)d\tau}ds - \int_{t_2}^T \frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}}e^{\int_{t_2}^s a(\tau)d\tau}ds\\
\leq \;& \left(1+\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}}\right)\left[\int_0^{t_1} e^{\int_{t_1}^s a(\tau)d\tau}ds - \int_0^{t_2} e^{\int_{t_2}^s a(\tau)d\tau}ds\right]\\
& +\frac{e^{-\int_0^T a(\tau)d\tau}}{1+e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}}\left[\int_{t_1}^T e^{\int_{t_1}^s a(\tau)d\tau}ds - \int_{t_2}^T e^{\int_{t_2}^s a(\tau)d\tau}ds\right]\\
\longrightarrow \;& 0,\ \textit{quand } t_1 \to t_2.
\end{aligned}
$$

D'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, il existe $x \in \overline{\Omega}$ telle que $Ax = x$, qui est solution du problème (3.3). De plus, comme la fonction φ est continue, alors $x \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Cas particulier. Considérons maintenant le problème (3.3) pour $n = 1$, du théorème 3.1, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. *Soient φ une fonction continue à valeurs scalaires, et a une fonction continue. S'il existe une fonction intégrable $q : [0,T] \to \mathbb{R}$ avec $\int_0^T q(t)dt > 0$ et W est une fonction continue, avec $W(z) = W(-z), \forall z \in \mathbb{R}$, et s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$\lambda|\varphi(t,z)|e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \leq \gamma DW(z)\left(\lambda\varphi(t,z) - a(t)z\right) + q(t), \ (t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

alors, le problème (3.3) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$.

Démonstration 15. *Il est facile de voir que pour $n = 1$, la condition (3.6) devient (3.9). Par suite, le résultat découle du théorème 3.1.*

Corollaire 3.2. *Soient $q : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable avec $\int_0^T q(t)dt > 0$ et $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, [0,\infty[)$ avec $W(z) = W(-z), \forall z \in \mathbb{R}^n$. S'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$\lambda\|f(t,z) - z\| \leq \gamma\langle DW(z), \lambda f(t,z) + (1-\lambda)z\rangle + q(t), \ (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n, \tag{3.10}$$

alors, le problème (3.3) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Démonstration 16. *Il est facile de voir que pour $\varphi(t,z) = f(t,z) - z$ et $a(t) = -1$ avec $\|f(t,z) - z\|e^{-t} \leq \|f(t,z) - z\|, \ (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$, le résultat découle du théorème 3.1. On a*

$$\lambda\|\varphi(t,z)\|e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \leq \gamma\langle DW(z), \lambda\varphi(t,z) - a(t)z\rangle + q(t), \ (t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

on remplace $\varphi(t,z) = f(t,z) - z$ et $a(t) = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda\|f(t,z) - z\|e^{-t} &\leq \gamma\langle DW(z), \lambda f(t,z) - \lambda z + z\rangle + q(t) \\ &\leq \gamma\langle DW(z), \lambda f(t,z) + (1-\lambda)z\rangle + q(t), \end{aligned}$$

et avec $\|f(t,z) - z\|e^{-t} \leq \|f(t,z) - z\|$ donc

$$\lambda\|f(t,z) - z\| \leq \gamma\langle DW(z), \lambda f(t,z) + (1-\lambda)z\rangle + q(t).$$

4 Problèmes aux limites périodiques d'ordre 2

On peut trouver les résultats de ce chapitre dans [4].

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons le théorème du point fixe de Krasnosel'skii-Guo sur les cônes d'un espace de Banach, pour établir l'existence de solutions positives des problèmes aux limites périodiques du second ordre suivants :

$$\begin{cases} -x'' + Mx = f(t,x), \quad t \in (0, 2\pi) \\ x(0) = x(2\pi), \\ x'(0) = x'(2\pi), \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, $M > 0$,

et

$$\begin{cases} x'' + Mx = g(t,x), \quad t \in (0, 2\pi) \\ x(0) = x(2\pi), \\ x'(0) = x'(2\pi), \end{cases} \tag{4.2}$$

où $g : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, $M \in (0, \frac{1}{4})$.

4.2 Formulation intégrale du problème (4.1)

Lemme 4.1. *Soit $f \in \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$. Le problème linéaire*

$$\begin{cases} -x'' + Mx = f(t), \quad t \in (0,2\pi) \\ x(0) = x(2\pi), \\ x'(0) = x'(2\pi), \end{cases} \tag{4.3}$$

est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)f(s)ds, \ t \in [0,2\pi], \tag{4.4}$$

où $G : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{m(2\pi+t-s)} + e^{m(s-t)}}{2m(e^{2\pi m}-1)}, & 0 \leq t < s, \\ \dfrac{e^{m(t-s)} + e^{m(2\pi+s-t)}}{2m(e^{2\pi m}-1)}, & s < t \leq 2\pi, \end{cases}$$

avec $m = \sqrt{M}$.

Démonstration 17. $\Leftarrow$) *Montrons que la fonction x donnée par (4.4) vérifie le problème (4.3) Dérivons x sur l'intervalle $[0,2\pi]$, on obtient*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \textstyle\int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds + \int_t^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds \\ &= \textstyle\int_0^t \dfrac{m\ e^{m(t-s)} - m\ e^{m(2\pi-t+s)}}{2m\ (e^{2m\pi}-1)} f(s)ds + \int_t^{2\pi} \dfrac{m\ e^{m(2\pi-s+t)} - m\ e^{m(s-t)}}{2m\ (e^{2m\pi}-1)} f(s)ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x''(t) &= \textstyle\int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds + \int_t^{2\pi} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds + \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(t) - \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(t) \\ &= \textstyle\int_0^t \dfrac{m^2\ e^{m(t-s)} + m^2\ e^{m(2\pi-t+s)}}{2m\ (e^{2m\pi}-1)} f(s)ds + \int_t^{2\pi} \dfrac{m^2\ e^{m(2\pi-s+t)} + m^2\ e^{m(s-t)}}{2m\ (e^{2m\pi}-1)} f(s)ds \\ &\quad + \dfrac{m - me^{2\pi m}}{2m(e^{2\pi m}-1)} f(t) + \tfrac{m-me^{2\pi m}}{2m(e^{2\pi m}-1)} f(t) \\ &= Mu + \left[\dfrac{m - me^{2m\pi}}{2m\ (e^{2m\pi}-1)} f(t)\right] + \left[\dfrac{m - me^{2m\pi}}{2m\ (e^{2m\pi}-1)} f(t)\right] \\ &= Mu + f(t)\left[\dfrac{2m(1-e^{2m\pi}}{2m\ (e^{2m\pi}-1)}\right] \\ &= Mu + f(t)(-1) \\ &= Mu - f(t), \ t \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} x(0) &= \int_0^{2\pi} G(0,s)f(s)ds \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{e^{ms}+e^{m(2\pi-s)}}{2m\,(e^{2m\pi}-1)}\, f(s)\, ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x(2\pi) &= \int_0^{2\pi} G(2\pi,s)f(s)ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{m(2\pi-s)}+e^{ms}}{2m\,(e^{2m\pi}-1)}\, f(s)\, ds \\ &= x(0). \end{aligned}$$

Ensuite, on a $\quad x'(0) = \int_0^{2\pi} \dfrac{m\, e^{m(2\pi-s)} - me^{ms}}{2m\,(e^{2m\pi}-1)}\, f(s)\, ds,$ *donc*

$$\begin{aligned} x'(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{m\, e^{m(2\pi-s)} - m\, e^{ms}}{2m\,(e^{2m\pi}-1)}\, f(s)\, ds \\ &= x'(0). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$*)Considérons le problème homogène :*

$$\begin{cases} -x'' + Mx = 0, \quad M > 0 \qquad (E) \\ x(0) = x(2\pi), \\ x'(0) = x'(2\pi). \end{cases}$$

Soient $\Phi_1(t) = e^{mt}$ *et* $\Phi_2(t) = e^{-mt}$ *deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* (E)*, alors la solution générale de cette équation s'écrit*

$$x(t) = C_1 e^{mt} + C_2 e^{-mt}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Les conditions aux bords donnent le système linéaire

$$\begin{cases} C_1(1-e^{2\pi m}) + C_2(1-e^{-2\pi m}) = 0 \\ C_1 m(1-e^{2\pi m}) - C_2 m(1-e^{-2\pi m}) = 0. \end{cases}$$

Comme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-e^{2\pi m} & 1-e^{-2\pi m} \\ m(1-e^{2\pi m}) & -m(1-e^{-2\pi m}) \end{vmatrix} = 2m(-2+e^{-2\pi m}+e^{-2\pi m}) \neq 0, \ \text{car } M > 0,$$

alors, le problème homogène n'admet que la solution triviale $x \equiv 0$.

Par conséquent, le problème (4.3) admet une unique solution qui s'écrit sous la forme

$$x(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)f(s)ds, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Comme la fonction partielle $t \mapsto G(t,s)$ *est une solution de l'équation* (E) *dans chacun des intervalles* $[0,s[,\ ]s,2\pi]$, *il existe 4 fonctions de* s, *notées* $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, *telles que*

$$G(t,s) = \begin{cases} \lambda_1(s)e^{mt} + \lambda_2(s)e^{-mt}, & 0 \le t \le s, \\ \mu_1(s)e^{mt} + \mu_2(s)e^{-mt}, & s \le t \le 2\pi. \end{cases} \tag{4.5}$$

G *est continue et* $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ *ayant pour discontinuité* $\frac{1}{a_0(s)}$ *nous donne les égalités suivantes :*

$$\begin{cases} \lambda_1(s)\Phi_1(s) + \lambda_2(s)\Phi_2(s) = \mu_1(s)\Phi_1(s) + \mu_2(s)\Phi_2(s) \\ \mu_1(s)\Phi_1'(s) + \mu_2(s)\Phi_2'(s) - \lambda_1(s)\Phi_1'(s) + \lambda_2(s)\Phi_2'(s) \ = \frac{1}{a_0(s)}. \end{cases}$$

Posons $v_1(s) = \mu_1(s) - \lambda_1(s)$ *et* $v_2(s) = \mu_2(s) - \lambda_2(s)$. *On a* $v_1(s)$ *et* $v_2(s)$ *vérifient le système suivant :*

$$(S) \begin{cases} v_1(s)e^{ms} + v_2(s)e^{-ms} = 0, \\ v_1(s)m\,e^{ms} - v_2(s)m\,e^{-ms} = -1, \end{cases}$$

Comme $W(\Phi_1, \Phi_2)(s) \neq 0$ *pour tout* $s \in [0, 2\pi]$, *alors le système* (S) *admet une unique solution donnée par :*

$$v_1(s) = -\frac{1}{2m\,e^{ms}}, \quad v_2(s) = \frac{1}{2m\,e^{-ms}}.$$

Ensuite, comme $t \mapsto G(t,s)$ *vérifie les conditions aux bords* $\forall s \in [0, 2\pi]$, *on trouve*

$$\begin{cases} \lambda_1(s)(\Phi_1(0) - \Phi_1(2\pi)) + \lambda_2(s)(\Phi_2(0) - \Phi_2(2\pi)) = k_1(s), \\ \lambda_1(s)(\Phi_1'(0) - \Phi_1'(2\pi)) + \lambda_2(\Phi_2'(0) - \Phi_2'(2\pi)) = k_2(s), \end{cases}$$

où

$$k_1(s) = v_1(s)\Phi_1(2\pi) + v_2(s)\Phi_2(2\pi).$$

$$k_2(s) = v_1(s)\Phi_1'(2\pi) + v_2(s)\Phi_2'(2\pi).$$

Ce qui donne le système

$$(S) \begin{cases} \lambda_1(s)(1 - e^{2\pi m}) + \lambda_2(s)(1 - e^{-2\pi m}) = -\dfrac{e^{2\pi m}}{2m\,e^{ms}} + \dfrac{e^{-2\pi m}}{2m\,e^{-ms}} \\ \lambda_1(s)m(1 - e^{2\pi m}) + \lambda_2(s)m(-1 + e^{-2\pi m}) = -\dfrac{me^{2\pi m}}{2m\,e^{ms}} - \dfrac{me^{-2\pi m}}{2m\,e^{-ms}}. \end{cases}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
G(0,s) &= \lambda_1(s)\Phi_1(0)+\lambda_2\Phi_2(0)=\lambda_1(s)+\lambda_2(s).\\
G(2\pi,s) &= \lambda_1(s)\Phi_1(2\pi)+\lambda_2\Phi_2(2\pi)=\lambda_1(s)e^{2\pi m}+\lambda_2 e^{-2\pi m}.\\
\tfrac{\partial G}{\partial t}(0,s) &= \lambda_1(s)\Phi_1'(0)+\lambda_2(s)\Phi_2'(0)=m\lambda_1(s)-m\lambda_2(s).\\
\tfrac{\partial G}{\partial t}(2\pi,s) &= \lambda_1(s)\Phi_1'(2\pi)+\lambda_2(s)\Phi_2'(2\pi)=m\lambda_1(s)\,e^{2\pi m}-m\lambda_2(s)\,e^{-2\pi m}.
\end{aligned}$$

Le déterminant du système (S) *est* $\Delta = 2m(-2+e^{-2\pi m}+e^{2\pi m}) \neq 0$ *alors* $\lambda_1(s)$ *et* $\lambda_2(s)$ *existent et elles sont déterminées comme suit :*

$$\lambda_1(s) = -\frac{e^{-ms}e^{2\pi m}}{2m\,(1-e^{2\pi m})},\qquad \lambda_2(s)=\frac{e^{ms}e^{-2\pi m}}{2m\,(1-e^{-2\pi m})}.$$

Par suite,

$$\mu_1(s)=v_1(s)+\lambda_1(s)=-\frac{1}{2m\,e^{ms}(1-e^{2\pi m})},\qquad \mu_2(s)=v_2(s)+\lambda_2(s)=\frac{1}{2m\,e^{-ms}(1-e^{-2\pi m})}.$$

En remplaçant ces fonctions dans (4.5)*, on aura*

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{e^{m(2\pi+t-s)}+e^{m(s-t)}}{2m(e^{2\pi m}-1)}, & 0\le t<s,\\[2mm] \dfrac{e^{m(t-s)}+e^{m(2\pi+s-t)}}{2m(e^{2\pi m}-1)}, & s<t\le 2\pi.\end{cases}$$

4.3 Formulation intégrale du problème (4.2)

Lemme 4.2. *Soit* $g\in\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$*. Le problème linéaire*

$$\begin{cases} x''+Mx=g(t), \quad t\in(0,2\pi)\\ x(0)=x(2\pi),\\ x'(0)=x'(2\pi),\end{cases}\tag{4.6}$$

est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t)=\int_0^{2\pi} H(t,s)g(s)ds,\ t\in[0,2\pi],\tag{4.7}$$

où $H:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$H(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\sin m(t-s)+\sin m(2\pi-t+s)}{2m(1-\cos(2m\pi))}, & s<t\leqslant 2\pi,\\[2mm] \dfrac{\sin m(s-t)+\sin m(2\pi-s+t)}{2m(1-\cos(2m\pi))}, & 0\leqslant t<s,\end{cases}$$

avec $m = \sqrt{M}$.

Démonstration 18. *La démonstration de ce lemme est similaire à celle du lemme 4.2. Ici les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène* $x'' + Mx = 0$ *sur* $[0, 2\pi]$ *sont* $\Phi_1(t) = \cos(mt)$ *et* $\Phi_2(t) = \sin(mt)$.

4.4 Résultats d'existence

4.4.1 Résultats d'existence pour le problème (4.1)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ un espace de Banach muni de la norme $\|x\| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t)|, \quad x \in E$. On considère l'opérateur $\Phi : E \to E$ par :

$$\Phi x(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, 2\pi].$$

D'après le lemme 4.1 tout point fixe de l'opérateur Φ est une solution du problème (4.1). On définit sur E, le cône K par :

$$K = \{x \in E : x(t) \geq 0 \ \text{ et } \ \min_{t\in[0,2\pi]} x(t) \geq \sigma \|x\|\},$$

où $\sigma := \dfrac{G(\pi)}{G(0)} := \dfrac{G(2\pi, \pi)}{G(0,0)} = \dfrac{2(e^{m\pi})}{1 + e^{2m\pi}}$.

Dans le lemme suivant nous donnons quelques propriétés de l'opérateur Φ.

Lemme 4.3. *Supposons que* $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue. Alors* $\Phi : K \to K$ *est un opérateur complètement continu.*

Démonstration 19. *(1)* $\Phi(K) \subset K$. *En effet, pour tout* $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, *on a*

$$\frac{2e^{m\pi}}{2m(e^{2m\pi} - 1)} = G(\pi) \leq G(t,s) \leq G(0) = \frac{e^{2m\pi} + 1}{2m(e^{2m\pi} - 1)} \tag{4.8}$$

$$i.e. \quad 1 \geq \frac{G(t,s)}{G(0)} \geq \sigma \text{ pour tout } \ 0 \leq t, s \leq 2\pi. \tag{4.9}$$

Soit $x \in K$ d'après 4.9, on a

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{0\leq t\leq 2\pi}(\Phi x)(t) & = & \min\limits_{0\leq t\leq 2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,s)f(s,x(s))ds \\ & \geq & \sigma\int_0^{2\pi} G(0)f(s,x(s))ds \\ & \geq & \sigma\max\limits_{0\leq t\leq 2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,s)f(s,x(s))ds \\ & \geq & \sigma\|\Phi x\|, \end{array}$$

alors, $\Phi(x) \in K$.

(2) Montrons que l'opérateur Φ est complètement continu sur E.

(a) Montrons que l'opérateur Φ est continue.

Soit $(y_n)_n$ une suite de E telle que $y_n \to y$, $n \to \infty$.

Montrons que $\Phi y_n \to \Phi y$, $n \to \infty$ dans E, c'est à dire montrons que $\|\Phi y_n - \Phi y\| \to 0$, $n \to \infty$. Pour cela, il suffit de monter que $|\Phi y_n(t) - \Phi y(t)| \to 0$, $n \to \infty, \forall t \in [0, 2\pi]$.

On a

$$\Phi y_n(t) = \int_0^{2\pi} G(s,t)f(s,y_n(s))ds.$$
$$\Phi y(t) = \int_0^{2\pi} G(s,t)f(s,y(s))ds.$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(s,y_n(s)) \to f(s,y(s)), \forall\, s \in [0,2\pi] \text{ quand } n \to \infty.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |\Phi y_n(t)| & \leq & \int_0^{2\pi} |G(s,t)|\,|f(s,y_n(s))|ds \\ & \leq & \max\limits_{t\in[0,2\pi]}|f(s,y_n(s))|\int_0^{2\pi}|G(s,t)|ds < \infty. \end{array}$$

Ensuite, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraine

$$\Phi y_n(t) \to \Phi y(t), n \to \infty.$$

Par conséquent,

$$\|\Phi y_n(t) - \Phi y(t)\| \to 0, n \to \infty.$$

Donc Φ est continu sur E.

(b) Soit Ω sous ensemble borné de E, montrons que $\Phi(\Omega)$ est relativement compact.

(i) Montrons que $\Phi(\Omega)$ est uniformément borné.

Soit $y \in \Omega$, alors $\exists C > 0$ tel que $\|y\| \leq C$. Comme la fonction f est continue, $\exists M > 0$ tel que $M = \sup_{C \leq z \leq C,\ 0 \leq s \leq 2\pi} |f(s,z)|$. De plus, $\exists K > 0$ tel que $|G(t,s)| \leq K$, $\forall t, s \in [0, 2\pi]$. Alors, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\begin{aligned} |\Phi y(t)| &\leq \textstyle\int_0^{2\pi} |G(t,s)f(s,y(s))| \\ &\leq \textstyle\int_0^{2\pi} KM \\ &\leq 2\pi KM. \end{aligned}$$

(ii) Montrons que $\Phi(\Omega)$ est équi-continu. Soient $y \in \Omega$ et t_1 , $t_2 \in [0, 2\pi]$, alors d'après la continuité de la fonction de Green G, on aura

$$\begin{aligned} |\Phi y(t_1) - \Phi y(t_2)| &= |\textstyle\int_0^{2\pi} G(t_1,s)f(s,y(s))ds - \int_0^{2\pi} G(t_2,s)f(s,y(s))| \\ &\leq |\textstyle\int_0^{2\pi} G(t_1,s) - \int_0^{2\pi} G(t_2,s)|\,|f(s,y(s))| \\ &\leq M \textstyle\int_0^{2\pi} |G(t_1,s) - G(t_2,s)|ds \end{aligned}$$

$\longrightarrow 0$ *quand* $t_1 \to t_2$.

D'après le critère de compacité d'Ascoli-Arzelà, l'opérateur Φ envoi les bornés de E dans des ensembles relativements compacts de E.

D'où, l'opérateur Φ est complètement continu.

Le résultat d'existence principal est présenté dans le théorème le suivant

Théorème 4.1. *Supposons que $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et $M > 0$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \max\limits_{t \in [0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \min\limits_{t \in [0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty$,

(b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \min\limits_{t \in [0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \max\limits_{t \in [0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = 0$,

alors, le problème aux limites (4.1) admet au moins une solution positive.

Démonstration 20. *Pour démonter ce théorème on utilisera le théorème du point fixe de Krasnosel'skii-Guo (voir le théorème 1.9)*

(a) Supposons que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\max\limits_{t\in[0,2\pi]}\frac{f(t,x)}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\min\limits_{t\in[0,2\pi]}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty.$

(i) De la condition $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\max\limits_{t\in[0,2\pi]}\frac{f(t,x)}{x}=0, \exists\, R_1>0$ *tel que*

$$f(t,x)\leq \varepsilon x, \quad \textit{pour tout} \;\; 0\leq x\leq R_1 \;\; \textit{et} \;\; 0\leq t\leq 2\pi, \;\; \textit{avec}\; 2\pi\, G(0)\,\varepsilon<1. \tag{4.10}$$

Posons

$$\Omega_1:=\{x\in E:\|x\|<R_1\}.$$

Montrons que $\|\Phi x\|\leq\|x\|, \;\forall x\in K\cap\partial\Omega_1$*. Soit* $x\in K$ *et* $\|x\|=R_1$*. D'après (4.8) et (4.10), pour tout* $t\in[0,2\pi]$*, on a*

$$\begin{aligned}
|\Phi x(t)| &= |\textstyle\int_0^{2\pi} G(t,s)f(s,x(s))ds|\\
&\leq G(0)\textstyle\int_0^{2\pi}|f(s,x(s))|ds\\
&\leq G(0)\textstyle\int_0^{2\pi}\varepsilon\,|x(s)|ds\\
&\leq G(0)\varepsilon\|x\|\textstyle\int_0^{2\pi}ds\\
&\leq G(0)2\pi\varepsilon\|x\|\\
&= G(0)2\pi\varepsilon R_1\\
&< R_1.
\end{aligned}$$

Par passage au maximum, on aura

$$\|\Phi x\|<R_1=\|x\|, \;\forall x\in K\cap\partial\Omega_1.$$

(ii) De la condition $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\min\limits_{t\in[0,2\pi]}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty, \forall\eta>0, \exists\, R_2>\frac{R_1}{\sigma}>0$ *tel que*

$$f(t,x)>\eta x, \;\textit{pour tout}\;\; x\geq\sigma R_2 \;\textit{et}\;\; 0\leq t\leq 2\pi, \;\;\textit{avec}\; 2\pi\, G(\pi)\,\sigma\,\eta>1. \tag{4.11}$$

Posons

$$\Omega_2:=\{x\in E:\|x\|<R_2\}.$$

Montrons que $\|\Phi x\| \geq \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$. *Soit* $x \in K$ *et* $\|x\| = R_2$. *D'après* (4.8) *et* (4.11), *pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, *on a*

$$\begin{aligned} |\Phi x(t)| &= |\int_0^{2\pi} G(t,s)f(s,x(s))ds| \\ &\geq G(\pi)\int_0^{2\pi} f(s,x(s))ds \\ &\geq G(\pi)\int_0^{2\pi} \eta x(s)ds \\ &\geq G(\pi)\int_0^{2\pi} \eta R_2\sigma ds \\ &= 2\pi G(\pi)\sigma\eta R_2 \\ &> R_2. \end{aligned}$$

Par passage au maximum, on aura

$$\|\Phi x\| > R_2 = \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega_2.$$

Alors la conditions (i) du théorème du point fixe de Krasnosel'skii-Guo est satisfaite, d'où Φ *admet un point fixe* $x \in K$ *tel que* $R_1 \leq \|x\| \leq R_2$.

(b) Supposons que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \min\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \max\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = 0$.

(i) De la condition $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \min\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty,\ \forall \eta > 0,\ \exists\, R_1 > 0$ *tel que*

$$f(t,x) \geq \eta x, \quad \text{pour tout } x \leq R_1 \text{ et } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \text{avec } 2\pi\, G(\pi)\,\sigma\,\eta > 1. \tag{4.12}$$

Posons

$$\Omega_1 := \{x \in E : \|x\| < R_1\}.$$

Montrons que $\|\Phi x\| \geq \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega_1$. *Soit* $x \in K$ *et* $\|x\| = R_1$. *D'après* (4.8) *et* (4.12), *pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, *on a*

$$\begin{aligned} |\Phi x(t)| &= |\int_0^{2\pi} G(t,s)f(s,x(s))ds| \\ &\geq G(\pi)\int_0^{2\pi} \eta|x(s)|ds \\ &\geq G(\pi)\eta\|x\|\int_0^{2\pi} ds \\ &\geq 2\pi G(\pi)\eta\|x\| \\ &= 2\pi G(\pi)\eta R_1 \\ &> R_1. \end{aligned}$$

Par passage au maximum, on aura

$$\|\Phi x\| > R_1 = \|x\|, \ \forall x \in K \cap \partial\Omega_1.$$

(ii) De la condition $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \max\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = 0$, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ R_0 > 0$ *tel que*

$$f(t,x) \leq \varepsilon x, \quad \textit{pour tout } x \geq R_0 \textit{ et } \ 0 \leq t \leq 2\pi, \ \textit{avec } 2\pi\, G(0)\,\varepsilon < 1.$$

- *Si* $\max\limits_{t\in[0,2\pi]} f(t,x)$ *est non bornée sur* $\mathbb{R}^+$, $\exists\ R_2 > R_0 + R_1$ *tel que*

$$f(t,x) \leq \max_{t\in[0,2\pi]} f(t,R_2), \quad \textit{pour tout } x \in (0,R_2] \textit{ et } \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Posons

$$\Omega_2 := \{x \in E : \|x\| < R_2\}.$$

Montrons que $\|\Phi x\| < \|x\|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$. *Soit* $x \in K$ *et* $\|x\| = R_2$. *Pour tout* $t \in [0,2\pi]$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} |\Phi x(t)| & = & |\int_0^{2\pi} G(t,s)f(s,x(s))ds| \\ & \leq & G(0)\int_0^{2\pi} f(s,x(s))ds \\ & \leq & G(0)\int_0^{2\pi} \max\limits_{t\in[0,2\pi]} f(t,R_2) \\ & \leq & G(0)2\pi \max\limits_{t\in[0,2\pi]} f(t,R_2) \\ & \leq & 2\pi G(0)\varepsilon R_2 \\ & < & R_2. \end{array}$$

Par passage au maximum, on aura

$$\|\Phi x\| < R_2 = \|x\|, \ \forall x \in K \cap \partial\Omega_2.$$

- *Si* $\max\limits_{t\in[0,2\pi]} f(t,x)$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^+$, $\exists N > 0$, *tel que*

$$f(t,x) \leq N, \quad \textit{pour tout } x \geq 0 \textit{ et } \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dans ce cas, soit $R_2 > R_1 + \frac{N}{\varepsilon}$. *Posons*

$$\Omega_2 := \{x \in E : \|x\| < R_2\}.$$

Montrons que $\|\Phi x\| < \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega_2$. *Soit* $x \in K$ *et* $\|x\| = R_2$. *Pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, *on a*

$$\begin{aligned} |\Phi x(t)| &= |\int_0^{2\pi} G(t,s) f(s, x(s)) ds| \\ &\leq G(0) \int_0^{2\pi} f(s, x(s)) ds \\ &\leq G(0) \int_0^{2\pi} N ds \\ &\leq G(0) 2\pi N \\ &\leq 2\pi G(0) \varepsilon R_2 \\ &< R_2. \end{aligned}$$

Par passage au maximum, on aura

$$\|\Phi x\| < R_2 = \|x\|,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega_2.$$

Alors, la conditions (ii) du théorème du point fixe de Krasnosel'skii-Guo est satisfaite, d'où Φ *admet un point fixe* $x \in K$ *tel que* $R_1 \leq \|x\| \leq R_2$.

4.4.2 Résultats d'existence pour le problème (4.2)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ un espace de Banach muni de la norme $\|x\| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t)|,\ \ x \in E$. On considére l'opérateur $\Psi : E \to E$ par :

$$\Psi x(t) = \int_0^{2\pi} H(t,s) g(s, x(s)) ds, \ \ t \in [0, 2\pi].$$

D'après le lemme 4.2 tout point fixe de l'opérateur Ψ est une solution du problème (4.2). On définit sur E, le cône K par :

$$K = \{x \in E : x(t) \geq 0 \ \text{ et } \min_{t\in[0,2\pi]} x(t) \geq \sigma\|x\|\},$$

où $\sigma := \frac{G(0)}{G(\pi)} = \cos m\pi$.

Dans le lemme suivant nous donnons quelques propriétés de l'opérateur Ψ.

Lemme 4.4. *Supposons que* $g : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue. Alors* $\Psi : K \to K$ *est un opérateur complètement continu.*

Démonstration 21. *(1) $\Psi(K) \subset K$. En effet, pour tout $(t,s) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, on a*

$$\frac{\sin 2m\pi}{2m(1-\cos 2m\pi)} = H(0) \leq H(t,s) \leq H(\pi) = \frac{\sin m\pi}{m(1-\cos m\pi)}$$

$$i.e. \quad 1 \geq \frac{H(t,s)}{H(\pi)} \geq \sigma = \cos m\pi \ \textit{pour tout} \quad 0 \leq t,s \leq 2\pi. \tag{4.13}$$

Soit $x \in K$, on a

$$\begin{aligned} \min_{0\leq t\leq 2\pi} (\Psi x)(t) &= \min_{0\leq t\leq 2\pi} \int_0^{2\pi} H(t,s)g(s,x(s))ds \\ &\geq \sigma \int_0^{2\pi} H(\pi)g(s,x(s))ds \\ &\geq \sigma \max_{0\leq t\leq 2\pi} \int_0^{2\pi} H(t,s)g(s,x(s))ds \\ &\geq \sigma\|\Psi x\|, \end{aligned}$$

alors, $\Psi(x) \in K$.

(2) L'opérateur Ψ est complètement continu sur E, la démonstraction est similaire à celle du lemme 4.3.

Théorème 4.2. *Supposons que $g : [0,2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et $0 < M < \frac{1}{4}$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \max\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{g(t,x)}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \min\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{g(t,x)}{x} = +\infty$,

(b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \min\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{g(t,x)}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \max\limits_{t\in[0,2\pi]} \frac{g(t,x)}{x} = 0$,

alors, le problème aux limites (4.2) admet au moins une solution positive.

Démonstration 22. *La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.1.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de quelques problèmes aux limites périodiques et anti-périodiques associées à des équations différentielles ordinaires non linéaires. On a présenté des résultats l'existence de solutions pour des problèmes aux limites périodiques et anti-périodiques associés à des équations différentielles d'ordre 1 et 2.

L'approche employée dans ce travail s'appuie sur la théorie du point fixe dans les espaces de Banach, plus précisément, les deux résultats d'existence présentés pour les problèmes aux limites étudiés d'ordre 1 sont basés sur l'alternative non linéaire du Leray-Schauder. Les résultats d'existence présentés pour les problèmes aux limites du second ordre sont basés sur le théorème du point fixe du Krasnosel'skii-Guo sur les cônes qui nous garantit la positivité des solutions.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications,* Cambridge University Press, Vol. 141, (2001).

[2] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, New York, 1988.

[3] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-verlag, New-York, Vol. 14, (2003).

[4] D. Jiang, *On the existence of positive solutions to second order periodic BVPs*, Acta Mathematica Scientia, Vol. 18, *Supplement*(1998), $31-35$.

[5] J. Mawhin, *Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds*, Topol. Methods Nonlinear Anal,Journal of the Juliusz Schauder Center, ISSN : $1230-3429$, vol 9, $179-200$, 1997.

[6] K. Schmitt, R.C.Thompson, *Nonlinear Analysis and Differential Equations : An Introduction*, November 11, 2004.

[7] C. C. Tisdell, *Existence of solutions to first-order periodic boundary value problem,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 323, *no.*2, (2006), $1325-1332$.

[8] K. Wang, *A new existence result for nonlinear first-order anti-periodic boundary value problems*, Applied Mathematics Letters, Vol. 21, *no.*11, (2008), $1149-1154$.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de quelques problèmes aux limites périodiques et anti-périodiques associées à des équations différentielles ordinaires non linéaires. On a présenté des résultats l'existence de solutions pour des problèmes aux limites périodiques et anti-périodiques associés à des équations différentielles d'ordre 1 et 2.

L'approche employée dans ce travail s'appuie sur la théorie du point fixe dans les espaces de Banach, plus précisément, les deux résultats d'existence présentés pour les problèmes aux limites étudiés d'ordre 1 sont basés sur l'alternative non linéaire du Leray-Schauder. Les résultats d'existence présentés pour les problèmes aux limites du second ordre sont basés sur le théorème du point fixe du Krasnosel'skii-Guo sur les cônes qui nous garantit la positivité des solutions.

Mots clés : Point fixe, alternative non linéaire du Leray-Schauder, problèmes aux limites, conditions aux bords périodiques, conditions aux bords anti-périodiques, équations différentielles.

Abstract

In this work, we study some periodic and anti-periodic boundary problems associated with nonlinear ordinary differential equations. Results have been presented on the existence of solutions for periodic and anti-periodic boundary problems associated with first and second order differential equations.

The approach used in this work is based on fixed point theory in Banach spaces, more precisely, the two existence results presented for first order boundary problems are based on the nonlinear alternative of Leray-Schauder. The existence results presented for second order boundary problems are based on the Krasnosel'skii-Guo fixed point theorem on cones, which guarantees the positivity of solutions.

Key words : Fixed point, nonlinear alternative of Leray-Schauder, boundary value problems, periodic boundary conditions, anti-periodic boundary conditions, differential equations.