République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire De Master

En
Mathématiques

Option
Analyse Mathématique

Thème :

La bornitude et la presque périodicité des solutions d'un système différentiel linéaire

Présenté par : Benmeddour celina

Soutenu le 14 juin 2023

devant le jury composé de :

Présidente	Dr. N. MOHDEB	U. A/Mira Bejaia.
Rapporteur	Pr. F. Boulahia-Talbi	U. A/Mira Bejaia.
Examinateur	Dr.NASRI	U. A/Mira Bejaia.

2022-2023.

⁜ *Remerciements* ⁜

Je remercie **Dieu**,de m'avoir donné le courage et la patience afin de terminer ce modeste travail.

Je tines à expmrimer toute ma reconnaisance à ma promotrice Madame ***BOULAHIA-TALBI Fatiha****pour sa patience, sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire, et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à Madame****N.MOHDEB*** *et Madame****A.NASERI*** *d'avoir accepté de juger et d'évaluer ce travail.*

Enfin, un grand merci à ***mes parents*** *qui m'ont toujours encouragé soutenu le long de mon cursus universitaire .*

⋇ *Dédicaces* ⋇

Je dédie ce modeste travail à :

*A mes chers **parents**, à qui j'exprime ma reconnaissance et ma haute considération pour tous leurs efforts et sacrifices qui ont fait de moi la personne que je suis aujoud'hui..*

*A mon **Mari** que je salue pour toute l'attention qu'il m'accordée,pour tous ses encouragements motivants.*

Enfin, à tous les étudiants de la promotion Analyse mathématique 2022/2023

Benmeddour celina

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$C(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$
$C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Espace des fonctions continues et bornées
$AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Espace des fonctions presque périodiques
α	La suite $(\alpha_n)_n$
$\alpha' \subset \alpha$	$(\alpha'_n)_n$ une sous suite de $(\alpha_n)_n$
$\alpha' + \alpha$	La suite $(\alpha'_n + \alpha_n)_n$
$-\alpha$	La suite $(-\alpha_n)_n$
T	L'opérateur de translation
$U\mathrm{T}_\alpha f = g$	$\lim\limits_{n\to\infty} f(t+\alpha_n) = g(t)$ uniformément pour tout $t \in \mathbb{R}$
$S^pC(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Espace des fonctions S^p- continues
$SC(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Espace des fonctions S^1- continues
$S^pB(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Espace des fonctions Stepanov bornées définies sur $\mathbb{R}$
$S^pAP(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Espace des fonctions Stepanov presque périodiques

Introduction générale

L'étude des équations différentielles périodiques et presque périodiques présente un intérêt théorique considérable et correspond à des problèmes pratiques importants pour tout ce qui concerne les phénomènes de vibration, résonance, et la superposition de plusieurs phénomènes périodiques.

La résolution directe d'un système différentiel est en général difficile ou impossible. Faute d'exhiber les solutions exactes, on peut utiliser des méthodes numériques afin de les approcher. Parfois, on a recours à l'étude qualitative pour fournir des informations sur le comportement et la nature des solutions d'un système différentiel sans les calculer.

Les systèmes linéaires périodiques continus sont des systèmes linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires à coefficients périodiques en fonction du temps. De tels systèmes sont utilisés pour modéliser des phénomènes naturels ou artificiels de type périodiques. Dans ce sens, ils revêtent un grand intérêt dans de nombreux champs d'application. C'est le cas par exemple, en physique du solide, en mécanique céleste, en aéronautique, en automatique en mécanique quantique, etc.

On va s'intéresser dans ce mémoire au lien existant entre la bornitude et la presque périodicité (au sens de Bohr et au sens de Stepanov) des solutions des systèmes différentiels linéaires à coefficients presque périodiques

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

où $A(t)$ et f sont presque périodiques.

Rappelons que la théorie des fonctions presque périodiques a été initiée par H. Bohr [6] au cours des années vingt. La presque périodicité d'une fonction en tant que propriété structurelle est une généralisation de la périodicité. Cette théorie joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles, elle a été développée par plusieurs auteurs, notamment par Bochner [5] vers 1933 qui a donné deux autres définitions des fonctions presque périodiques équivalentes à celle de Bohr [6] à savoir : la normalité et le critère de suites doubles.

L'existence et l'unicité de solutions presque périodiques sont d'une grande importance dans l'étude qualitative des équations différentielles à cause de leurs applications dans plusieurs domaines, comme la biologie mathématique, la physique, la théorie de contrôle et bien d'autre domaines.

Bohr [7] a montré que dans le cas où la matrice A est constante, la bornitude de la solution suffit pour avoir sa presque périodicité. Par contre dans le cas où A n'est pas constante ce résultat n'est pas vrai. Quand la matrice $A(.)$ et f sont périodiques. Ces systèmes ne peuvent pas être résolus explicitement, comme dans le cas où A est une matrice constante, où on peut trouver une représentation pour la solution générale. Mais grâce à la théorie qui est dû à Gaston Floquet 1883, un système périodique peut être transformé en un système différentiel à coefficients constants, en utilisant une certaine transformation.

Cette théorie est très importante dans l'étude des systèmes différentiels périodiques. Grâce à la notion de multiplicateurs caractéristiques, elle permet de montrer l'existence d'une solution périodique pour une certaine valeur du multiplicateur et de déterminer aussi sa stabilité. Cependant pour déterminer les multiplicateurs caractéristiques, on a besoin d'une matrice fondamentale, c'est à dire on a besoin de connaître les solutions pour trouver la transformation qui réduit le système périodique à un système à coefficients constants, chose qui n'est pas facile.

La théorie des systèmes différentiels linéaires à coefficients presque périodiques n'a pas atteint la perfection atteinte par celle des systèmes périodiques. Néanmoins, il existe une littérature riche et variée concernant ce type de systèmes.

Favard [12] a établi une condition appelée la condition de séparation, sous laquelle le théorème de Favard [12] affirme que l'équation (1) possède une solution bornée. Ce théorème de Favard est aujourd'hui l'un des rares résultats d'existence générale dans la littérature.

Cette condition est affaiblie par Hu et Mingarelli [14],ces derniers ont aussi généralisé cette condition de separation au cas Stepanov presque périodique [14]. Les fonctions Stepanov presque périodiques ont été introduites par Stépanov lui même en 1926 [17]. Ces fonctions ne sont pas nécessairement continues. Cette classe de fonctions contient les fonctions Bohr presque périodiques.

Hu et Mingarelli [14] ont étendu le théorème de Bochner (critère de suites doubles) sur les fonctions Bohr presque périodiques au cas des fonctions presque périodiques de Stepanov. Tout comme dans le cas des fonctions presque périodiques de Bohr, ce théorème joue un rôle important dans la discussion de l'existence de solutions Stepanov presque périodiques pour les équations différentielles à coefficients Stepanov presque périodiques.
Ce mémoire contient trois chapitres qu'on peut décrire brièvement comme suit :
dans le premier chapitre, on a rappelé les méthodes de résolution des systèmes differentiels linéaires à coefficients constants et à coefficients non constants : une attention particulière a été accordée aux systèmes périodiques.
Le deuxième chapitre, est dédié au lieu entre la Bohr presque périodicité et la bornitude des solutions d'un système différentiel à coefficients Bohr presque périodiques. On a débuté le chapitre par la présentation des différentes définitions et les propriétés des fonctions presque périodiques de Bohr. Par la suite on s'est intéressé a la presque périodicité des solutions d'un système différentiel linéaire

$$\dot{x} = Ax(t) + f(t) \tag{2}$$

où A est une matrice constante.
La dernière section de ce chapitre est consacrée à la condition de Favard qui permet de confirmer l'existence des solutions presque périodiques.

Dans le troisième chapitre, on a introduit les différentes définitions de la presque périodicité au sens de Stepanov et leurs différentes propriétés, puis nous avons donné la formulation de Bochner (suite double), dans le cadre des fonctions Stepanov presque périodiques. A la fin nous avons donné une version du théorème de Favard pour les systèmes Stepanov presque périodiques.

Chapitre 1

Aperçu sur les systèmes différentiels linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de divers types des systèmes différentiels linéaires. Des méthodes de résolution et des résultats concernant l'existence de solutions périodiques sont exposés.

1.1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

1.1.1 Résolution d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

Un système différentiel linéaire homogène à coefficients complexes est un système d'équations linéaires de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

Le système précédent s'écrit sous forme matricielle

$$x'(t) = Ax(t) \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

où $A = (a_{i,j})_{i,j}$ est une matrice carrée complexe d'odre n,

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad et \qquad x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.1.

1. *Dans le cas* $n = 1$, *le système (1.1) s'écrit sous la forme* $x'(t) = ax(t)$ *et les solutions sont :* $x(t) = Ce^{at}, \quad$ *où* C *une constante.*
2. *L'ensemble des solutions de (1.1) est un espace vectoriel de dimension* n.
3. *Si* A *est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, *alors les solutions sont*
$$x_i(t) = ke^{\lambda_i t}, \quad k_i \in \mathbb{R}.$$
4. *Si* A *est une matrice triangulaire supérieure, alors le système s'écrit*
$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n' = a_{nn}x_n \end{cases}$$
On résout le système par remontée, c'est-à-dire on intègre la dernière équation, puis on reporte la solution dans l'équation précédente. On répète l'opération jusqu'à avoir toutes les valeurs de x_i.

1.1.1.1 Cas où A est diagonalisable

Proposition 1.1.1.
Soient $A \in M_n(\mathbb{C}), \lambda$ *une valeur propre de* A *et* V *un vecteur propre associé à* λ. *Alors la fonction*
$$t \to x(t) = e^{\lambda t}V$$
est une solution du système différentiel $x' = Ax$.

Démonstration.
On a $x(t) = e^{\lambda t}V$. Alors
$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}(\lambda V) = Ae^{\lambda t}V = Ax(t).$$
Cela prouve que $x(.)$ est une solution du système homogène (1.1). □

Théorème 1.1.2.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice diagonalisable sur* $\mathbb{R}$. *Notons* $(V_1, \ldots, V_n)$ *une base de vecteurs propres et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions* $x_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i$ *forment une base de l'espace des solutions du système (1.1).*

Démonstration.
D'après la proposition 1.1.1 les

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i \tag{1.2}$$

est une solution du système différentiel (1.1). Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes. Soient $c_1, \dots, c_n$ des réels tels que

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Cette égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $t = 0$. En utilisant (1.2) l'égalité (1.3) devient

$$c_1 V_1 + \cdots + c_n V_n = 0$$

Cela implique $c_1 = \cdots = c_n = 0$ car les V_i forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, \dots, V_n$. Alors la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Soit $X(.)$ une solution du système différentiel (1.1) la matrice de passage P étant inversible.Posons $y = P^{-1}x$. Alors

$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = Dy$$

Ainsi y est la solution du système différentiel diagonal : $y' = Dy$

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \quad\vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$$

où $\lambda_1..\lambda_n$ sont les valeurs propres de A.
D'où $y_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}, \quad k_i \in \mathbb{R}$
Comme les colonnes de P sont les vecteurs $V_1, \dots, V_n$, alors

$$x(t) = Py(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} V_n = k_1 x_1(t) + \cdots + k_n x_n(t).$$

On vient de prouver que n'importe quelle solution $x(.)$ est combinaison linéaire des $x_i(.)$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$, engendre l'espace des solutions du système (1.1). □

1.1.1.2 Cas où A n'est pas diagonalisable

Lorsque A n'est pas diagonalisable, pour trouver les solutions du système (1.1) on utilise la méthode de la décomposition de Dunford, qui consiste à trouver deux matrices, S et N, carrées d'ordre n, tel que $A = S + N$ avec S diagonalisable et N nilpotente,$NS = SN$, cette décomposition permet d'écrire $\exp(A) = \exp(S) \cdot \exp(N)$.
On rapelle que N est nilpotente s'il existe un entier naturel m tel que $N^m = 0$.
La matrice S étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $S = PDP^{-1}$, avec

D une matrice diagonale

On note que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\left(P^{-1}DP\right)^k = P^{-1}D^kP$.

Ainsi $S^k = P^{-1}D^kP$.

Sachant que l'exponentielle d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

On aura

$$\exp(S) = \exp\left(P^{-1}DP\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(P^{-1}D^kP) = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}D^k\right)P = P^{-1}\exp(D)P.$$

Exemple 1.1.1. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

.

— *La décomposition de Dunford est $A = S + N$ avec*

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

— *Diagonalisation de S.*
On a

$$p(\lambda) = det(S - \lambda I) = (2-\lambda)^2(-1-\lambda),$$

$\lambda = 2$ est une valeur propre double de S et $\lambda = -1$ une valeur propre simple.
La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $D = P^{-1}SP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ce qui donne

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

— *La matrice* $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est nilpotente car* N^2*=0*

$$\exp(N) = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on aura

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & e^2 \\ 0 & 2e^2 & -e^2 \\ 0 & e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Systèmes non homogènes

On s'intéresse dans cette section au système

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

où $f(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le système (1.4), il suffit de trouver une solution particulière qu'on ajoute à la solution générale du système homogène (1.1).

Recherche d'une solution particulière de (1.4).

Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$. Le système (1.4) s'écrit alors

$$\begin{aligned} x' &= (PDP^{-1})x + f. \\ P^{-1}x' &= DP^{-1}x + P^{-1}f. \end{aligned}$$

En posant $Y = P^{-1}x$, on obtient

$$Y' = DY + g \ \ avec \ \ g = P^{-1}f$$

Donc la résolution du système (1.4) se ramène à la résolution du système diagonal

$$Y = DY + g.$$

Par la suite la résolution de chaque équation de ce système et le fait que $x = py$ permettent de conclure.

1.2 Systèmes différentiels linéairs à coefficients non constants

1.2.1 Cas homogène

On considère le système différentiel linéaire homogène à coefficients non constants

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{1.5}$$

où $t \mapsto A(t)$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans l'espace des matrices carrées d'ordre n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout $(t, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (1.6) admet une unique solution maximale, qui est globale. On sait aussi que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions maximales de système $x'(t) = A(t)x(t)$ est un espace vectoriel de dimension n.

1.2.1.1 Système fondamental

Définition 1.2.1. *Soient $x_1(.), x_2(.), \ldots, x_n(.)$ des solutions du système différentiel linéaire homogène* (1.5).
On dit que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est un système fondamental de solutions lorsque les $x_j, j = \overline{1, n}$ forment un système libre de fonctions, i.e.

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j(t) = 0 \textit{ pour tout } t \in I\Big) \Rightarrow \big(a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\big).$$

Dans ce cas $(x_j)_{j=1,n}$ sont appelés solutions fondamentales du système (1.5).
La matrice dont les colonnes sont les $(x_j)_{j=1,n}$ est dite matrice fondamentale, et on la note

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t)).$$

Définition 1.2.2. *On appelle résolvante $R(t, t_0)$ du système différentiel* (1.6)*, l'application linéaire qui à un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ associe la valeur en t de la solution du système différentiel qui vaut x a l'instant t_0.*

$$R(t, t_0) = \phi(t) \circ (\phi(t_0))^{-1}.$$

où $\phi(t)$ est une matrice fondamentale.

Proposition 1.2.3.
Soit $R : I \times I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système différentiel (1.5)*. On a*

1. $\forall t \in I, R(t,t) = Id.$
2. $\forall t_0, t_1, t_2 \in I, R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$
3. $\forall (t, t_0) \in I, \partial_t (R(t, t_0)) = A(t) R(t, t_0).$
4. $\forall (t, t_0) \in I, R(t, t_0)^{-1} = R(t, t_0).$

1.2.1.2 Solution générale du système homogène

La solution du système homogène (1.5) est

$$x(t) = \phi(t)k,$$

où $\phi(t)$ est une matrice fondamentale et k un vecteur constant.
Si de plus, on a la condition $x(t_0) = x_0$ alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0 \\ &= R(t, t_0)x_0 \end{aligned}$$

où $R(t, t_0)x_0$ est la resolvante du système (1.5).

Le wronskien *est le détérminant d'une matrice fondamentale*

$$w(t) = det(\phi(t)).$$

Formule de Liouville *: le wronskien satisfait l'équation différentielle*

$$\dot{w} = (traceA(t))w(t).$$

Par conséquant,

$$w(t) = det(\phi(t)) = e^{\int (traceA(t))dt}.$$

Ceci permet d'ecrire le wronskien même si la matrice fondamentale n'est pas connue.

1.2.2 Cas non homogène : méthode de la variation de la constante

Pour les systèmes homogènes à coefficients non constants, on a vu que la résolvante $R(t, t_0)$ joue le même rôle que la fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)A}$.
On veut trouver une solution du système

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t). \tag{1.7}$$

On sait que les solutions du système homogène associé s'écrivent $R(t,t_0)\,x_0$, *et l'on cherche une solution du système* (1.7) *sous la forme*

$$x(t) = R(t,t_0)\,U(t) \Leftrightarrow U(t) = R^{-1}(t,t_0)x(t). \tag{1.8}$$

Le système (1.7) *se réécrit donc*

$$R'(t,t_0)U(t) + R(t,t_0)U'(t) = A(t)R(t,t_0)U(t) + f(t),$$

Ce qui donne

$$R(t,t_0)\,U'(t) = f(t) \Rightarrow U'(t) = R^{-1}(t,t_0)f(t). \tag{1.9}$$

Comme, $R(t,t_0)$ *est inversible d'inverse* $R(t_0,t)$ *on aura*
Ainsi

$$U'(t) = R(t_0,t)\,f(t).$$

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)\,f(s)ds + x(t_0).$$

On obtient finalement

$$x(t) = R(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\,f(s)ds.$$

1.3 Système différentiel à coefficients périodiques

Dans cette section, on va exposer certains résultats concernant l'existence de solutions périodiques, du système différentiel

$$x'(t) = A(t)x(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

où $A(t)$ *une matrice carrée d'ordre* n *périodique et continue. C'est-à-dire*

$$A(t+T) = A(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il est possible de transformer ce système en un système différentiel à coefficients constants, (voir[16]).

Remarque 1.3.1. *Le système (1.10) peut avoir des solutions non périodiques*

En effet, considérons l'équation

$$\dot{x} = (1+\cos(t))x \quad x, t \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

où $A(t) = 1 + \cos(t)$,$A(t)$ est 2π périodique car

$$\begin{aligned} A(t+2\pi) &= 1+\cos(t+2\pi) = \\ &= 1+\cos(t) = A(t) \end{aligned}$$

La solution de cette équation est $x(t) = ce^{t+\sin(t)}$ où c est une constante. On a

$$\begin{aligned} x(t+2\pi) &= ce^{(t+2\pi)+\sin(t+2\pi)} = ce^{(t+2\pi)+\sin(t)} \\ &= ce^{(t+sin(t))}e^{\sin(2\pi)} = x(t)e^{\sin(2\pi)}. \end{aligned}$$

$x(t+2\pi) \neq x(t)$, *D'où $x(.)$ n'est pas une solution périodique de* (1.11)

Théorème 1.3.1. *Soit $\phi(t)$ une matrice fondamentale du système (1.10) alors $\phi(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale. De plus, il existe une matrice inversible C tel que*

$$\phi(t+T) = \phi(t)C.$$

Remarque 1.3.2.

1. *La matrice inversible C du théorème précédent s'appelle matrice principale ou matrice de monodromie.*
2. *Les valeurs propres de la matrice de monodromie sont appelés les multiplicateurs caractéristiques du système* (1.10)*.*
3. *La matrice C est inversiblle, alors elle n'admet pas 0 comme multiplicateur.*
4. *Les multiplicateurs caractéristiques des systèmes ne dépendent pas du choix de la matrice fondamentale mais il dépendent du système (1.10).*

Théorème 1.3.2. *Le système (1.10) admet une solution $T-$périodique (resp. $2T$ périodique) si et seulement si le nombre* 1*(resp.(*-1*)) est un multiplicateur caractéristique.*

Lemme 1.3.3. *Il existe une matrice B tel que $C = e^{BT}$*

Théorème 1.3.4. ***Théorème de Floquet***
Il existe une matrice T-périodique P tel que

$$\phi(t) = P(t)e^{BT},$$

où B est une matrice telle que $C = e^{BT}$ et Cla matrice de monodromie

Démonstration. Soit $P(t) = \phi(t).e^{BT}$ et
Alors, en utilisant le théorème (1.3.1) on aura

$$\begin{aligned}
P(t+T) &= \phi(t+T,0)e^{-B(t+T)} \\
&= \phi(t,0)\phi(T,0)e^{-Bt}e^{-BT} \\
&= \phi(t,0)e^{BT}e^{-Bt}e^{-BT} \\
&= \phi(t,0)e^{Bt} \\
&= P(t)
\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

La bornitude et la Bohr presque périodicité des solutions d'un système différentiel linéaire

2.1 Fonctions Bohr presque périodiques

Dans ce chapitre, on commence par présenter les définitions de la presque périodicité de Bohr. Par la suite on expose un résultat dû à Favard qui affirme l'existence de solutions presque périodiques d'un système différentiel à coefficients presque périodiques dès qu'il possède des solutions bornées et la condition Favard est vérifiée [10]

2.1.1 Définitions et propriétés des fonctions presque périodiques

L'apparition formelle des fonctions presque périodiques remonte aux travaux du mathématicien danois Harald Bohr au début des années vingt[6]. Cette classe de fonctions intervient notamment en mécaniques cèleste.

La presque périodicité de Bohr est une généralisation naturelle de la périodicité, comme le montre la définition suivante (qui utilise les ensembles relativement denses).

Définition 2.1.1. *[6, 10]*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue. On dit que* f *est presque périodique au sens de Bohr (ou simplement presque périodique) si pour tout* $\varepsilon > 0$ *l'ensemble*

$$E\{\varepsilon, f\} = \{\mathrm{T} \in \mathbb{R} \;\; tel \;\; que : \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\mathrm{T}) - f(x)| < \varepsilon\}. \tag{2.1}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\ell_\varepsilon > 0$ *tel que tout intervalle* $[a, a+\ell_\varepsilon]$ *contient un nombre* T *satisfaisant*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+\mathrm{T})-f(x)|\leq\varepsilon.$$

Un nombre T *qui appartient à* $E\{\varepsilon,f\}$ *est appelé* ***ε-presque périodique*** *où* ***ε-nombre de translation*** *de la fonction* f*.*
Le nombre $\ell_\varepsilon>0$ *est appelé* ***longueur d'inclusion*** *de* $E\{\varepsilon,f\}$*.*

$AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *désignera l'espace de ces fonctions.*

Exemple 2.1.1.

— *Toute fonction* $T-$*périodique et continue est presque périodique. Ceci découle du fait que l'ensemble* $\{kT;k\in\mathbb{Z}\}$ *des périodes de* f *est relativement dense dans* $\mathbb{R}$*.*
— *La somme de deux fonctions périodiques continues dont le rapport des périodes est irrationnel est presque périodique. Exemple : les fonctions* $x\mapsto\sin x+\sin\sqrt{2}x$, $x\mapsto\cos x+\cos\sqrt{2}x$*.*

Définition de la presque périodicité par le critère d'approximation

Définition 2.1.2. *[10]*
L'espace $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *est la fermeture de l'espace des polynômes trigonométriques généralisés* $Trig(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *pour la topologie de la convergence uniforme.*

Autrement dit, $f\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon>0$*, il existe* $P_\varepsilon\in Trig(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)-P_\varepsilon(t)|\leq\varepsilon,$$

où

$$Trig(\mathbb{R},\mathbb{C})=\{P_n(t)=\sum_{k=1}^{n}a_ke^{i\lambda_kt},\ avec\ a_k\in\mathbb{C}\ \ et\ \ \lambda_k\in\mathbb{R}\}.$$

2.1.1.1 La presque périodicité au sens de Bochner (La normalité)

La définition de la presque périodicité au sens de Bochner et un moyen efficace pour vérifier les propriétés algebriques et topologiques des fonctions presque périodiques voir par exemple l'ouvrage de A. M. Fink [10].

Théorème 2.1.3. *(Théorème de Bochner)[10]*
Soit f *une fonction définie et continue sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*. Alors,* $f\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *si et seulement si de toute suite réelle* $(\alpha_n)_n$ *on peut extraire une sous suite* $(\alpha'_n)_n$ *telle que la suite* $(f(t+\alpha'_n))$ *soit uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$*.*

Ce théorème est considéré comme la définition de la presque périodicité au sens de Bochner (ou la normalité).

Dans ce qui suit, on introduit quelques notations, utilisées par A.M.Fink [10], pour écrire d'une autre manière la définition précédente.

Dans toute la suite, les notations α et α' vont désigner respectivement la suite $(\alpha_n)_n$ et la sous suite $(\alpha'_n)_n$ de $(\alpha_n)_n$.
L'écriture $\alpha' \subset \alpha$ signifie que $(\alpha'_n)_n$ est une sous suite de $(\alpha_n)_n$.
On va écrire $\mathrm{T}_\alpha f = g$ avec T l'opérateur de translation dans le cas où il existe une suite $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+\alpha_n) = g(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Si de plus, la limite précédente existe uniformément pour $\forall t \in \mathbb{R}$, on écrit $U\mathrm{T}_\alpha f = g$.
Ainsi, la définition d'une fonction presque périodique au sens de Bochner peut être reformulée comme suit [10] :

$f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est presque périodique au sens de Bochner si pour toute suite α, on peut extraire une sous suite $\alpha' \subset \alpha$ telle que $\mathrm{T}_\alpha f$ existe uniformément.

Enveloppe uniforme d'une fonction (uniform hull of f)
On va introduire dans ce qui suit la notion de l'enveloppe uniforme d'une fonction (définie aussi pour les matrices). Cette notion est trés importante en théorie des équations différentielles presque périodiques.

J. Favard dans [12] a introduit la notion de l'enveloppe pour une équation différentielle presque périodique et a relié le problème de l'existence de solutions presque périodiques avec une propriété de séparation des solutions bornées des équations homogènes dont les coefficients appartiennent à l'enveloppe.

Définition 2.1.4. *[10] L'ensemble*

$$H(f) = \{g \text{ continue, il existe une suite } \alpha, \text{ avec } U\mathrm{T}_\alpha f = g\}$$

est appellé ***enveloppe uniforme de*** *f.*

Théorème 2.1.5. *[10]*
Si f est presque périodique et $g \in H(f)$ alors $H(g) = H(f)$.

Démonstration. On a $g \in H(f)$, montrons que $H(g) = H(f)$.

1. Montrons que $H(g) \subset H(f)$.
   Par hypothèse $g \in H(f)$, alors $U\mathrm{T}_\alpha f = g$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+\alpha_n) = g(t)., \text{uniformément pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

   Soit $h \in H(g)$, on choisit $\beta = (\beta_n)_n$ tel que $U\mathrm{T}_\beta g = h$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} g(t+\beta_n) = h(t), \text{uniformément pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

En combinant (2.3) et (2.4) on aura :

$$|f(t+\beta_n) - g(t+\alpha_n)| < \frac{1}{n}.$$

Donc $H(g) \subset H(f)$.

2. Montrons que $H(f) \subset H(g)$.
   On a par hypothèse $g \in H(f)$, alors

$$|f(t+\alpha_n) - g(t)| \longrightarrow 0, \text{quand} \;\; n \longrightarrow \infty.$$

   En faisant le changement de variable $t+\alpha_n \longrightarrow s$, quand $n \longrightarrow \infty$, on aura

$$|f(s) - g(s-\alpha_n)| \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

   C'est-à-dire, $\mathrm{T}_{-\alpha} g = f$. Ainsi $f \in H(g)$ et donc

$$H(f) \subset H(g).$$

   Par conséquent, $H(f) = H(g)$.

□

La proposition qui suit résume certaines propriétés des fonctions presque périodiques.

Proposition 2.1.6. *[1]*

1. *L'espace $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a une structure d'espace vectoriel.*
2. *Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$*
3. *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions presque périodiques converge uniformément dans $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est aussi presque périodique.*
4. *Soit f une fonction réelle où complexe presque périodique et F une primitive de f. Alors la fonction F est presque périodique si et seulement si F est bornée.*

2.1.1.2 Définition de la presque périodicité par le critère de suites doubles

En plus de la définition de la presque périodicité (normalité), en utilisant la compacité relative de l'ensemble des translatés, Bochner [4]a donné une autre définition appelée " le critère de suites doubles", très efficace pour l'étude des solutions presque périodiques des équations d'évolution.

Théorème 2.1.7. *[4]*

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si et seulment si, pour toute paire de suites $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}$, il existe deux sous suites $\alpha' \subset \alpha$ et $\beta' \subset \beta$ telles que

$$\mathrm{T}_{\alpha'+\beta'} f, \;\; \mathrm{T}_{\beta'} f \;\; \textit{et} \;\; \mathrm{T}_{\alpha'}(\mathrm{T}_{\beta'} f) \;\; \textit{existent et} \;\; \mathrm{T}_{\alpha'+\beta'} f = \mathrm{T}_{\alpha'}(\mathrm{T}_{\beta'} f).$$

Remarque 2.1.1. *Les différentes définitions,exposées précédemment, de la presque périodicité de Bohr sont équivalentes voir [1, 10].*

2.1.2 La presque périodicité des fonctions à paramètre

Pour chercher la presque périodicité des solutions des équations differentielles de type

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{2.5}$$

où f est une fonction presque périodique en t avec x un paramètre, on doit imposer la presque périodicité de la fonction f uniformément par rapport à x sur les compacts. Dans le cas contraire, la fonction composée $f(t,x(t))$ où x est une solution de l'équation ne pourrait pas être presque périodique, comme le montre l'exemple suivant [10] :

$$f(t,x) = sin(tx), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est périodique et continue en t. Alors f est presque périodique (car toute fonction continue périodique est presque périodique). Par contre la fonction composée

$$f(t, sint) = sin(tsint)$$

n'est pas uniformément continue donc elle n'est pas presque périodique.
En effet, si f était uniformément continue on aurait

$$\lim_{n\to+\infty} \sin[(m\pi + \frac{1}{n})\sin(m\pi + \frac{1}{n})] = 0 \text{ uniformément en } m.$$

Mais pour $m = \frac{n}{2}$ et n pair, on constate que

$$(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(n\pi + \frac{1}{n}) = (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n})$$

peut être éstimé par

$$\begin{array}{rcl} (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n}) & \leq & (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \\ (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n}) & \geq & (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\frac{2}{n\pi} = 1 + \frac{2}{n^2\pi}. \end{array}$$

De sorte que

$$\sin 1 \leq \sin(1 + \frac{2}{n^2\pi}) \leq \sin[(m\pi + \frac{1}{n})\sin(m\pi + \frac{1}{n})],$$

pour n pair $m > \frac{n}{2}$ et n grand.

Cet exemple montre quelle sorte d'hypothèse est requise. Pour plus de les détails voir[10].

Définition 2.1.8. *[19]*
Une fonction $f \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{C},\mathbb{C})$ est dite presque périodique en t uniformément par rapport à $x \in \mathbb{X}$ si, pour tout compact K de $\mathbb{C}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\tau \in [\alpha, \alpha + l]$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{x\in K}|f(t+\tau,x) - f(t,x)| \leq \varepsilon.$$

Le théorème qui suit est un théorème de superposition dans l'espace $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il est indispensable pour les applications de ces fonctions pour les équations différentielles.

Théorème 2.1.9. *Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que pour tout $x \in \mathbb{C}$ la fonction $f(.,x)$ est presque périodique uniformément en $t \in \mathbb{R}$.*
Supposons que f est lipschtizienne en $x \in \mathbb{C}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire il existe $L > 0$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,\ \forall x,\ y \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est presque périodique, alors la fonction $f(.,g(.))$ est aussi presque périodique.

2.2 Solutions presque pèriodiques d'un système différentiel à coefficients constants

La presque périodicité des solutions des équations différentielles a été longuement étudiée depuis le tout début du vingtième siècle.

Les ouvrages classiques d'Amerio et Prouse [1], Corduneanu [9] donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence des solutions presque périodiques d'un système différentiel linéaire à coefficients constants du premier ordre dont le second membre est presque périodique.

$$\dot{y} = Ay + f, \tag{2.6}$$

où $f = (f_1, ..., f_n)^t$ telle que chaque composante $f_i \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice carrée à coefficients complexes et $y = (y_1, ..., y_n)^t$ une fonction inconnue.

Le système (2.6) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\dot{y} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + f_i(x),\ i \in \{1, ..., n\} \tag{2.7}$$

Définition 2.2.1. *Une solution du système (2.7) est dite presque périodique (resp. bornée) si toutes ses composantes sont presque périodiques (resp. bornées).*

Théorème 2.2.2. *[1, 10]*

Soit l'équation :

$$y' = Ay + f(t) \tag{2.8}$$

où A est une matrice constante et $f = (f_i)_i$ avec les fonctions f_i, $i = 1, 2, ..., n$, sont presque périodiques. Alors y est une solution bornée de (2.8) si et seulement si elle est presque périodique.

Démonstration.

Cas d'une équation scalaire

$$y' = \lambda y + f, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.9}$$

la solution générale de (2.9) est donnée par

$$y(x) = e^{\lambda x}\left(K + \int_0^x e^{-\lambda s} f(s)ds\right).$$

Pour étudier la bornitude de ces solutions, on va distinguer trois cas :

On pose $\lambda = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Premier cas : a > 0

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left|e^{\lambda x}\right| = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{ax} = +\infty$, alors pour que la solution y soit bornée au voisinage de $(+\infty)$, on doit avoir

$$\lim_{x \to +\infty} (K + \int_0^x e^{-\lambda s} f(s)ds) = 0.$$

C'est à dire que,

$$K = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s)ds.$$

Par hypothèse $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors il existe $M > 0$ tele que $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Ce qui donne :

$$0 \leq \left|e^{-\lambda s} f(s)\right| \leq M e^{-as} \left|e^{-ibs}\right| \leq M e^{-as}.$$

C'est à dire que, l'intégrale $\left[-\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s)ds\right]$ existe et est finie.

La solution y s'écrit alors

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x}\left(-\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s)ds + \int_0^x e^{-\lambda s} f(s)ds\right) = -\int_x^{+\infty} e^{-\lambda(s-x)} f(s)ds \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(s+x)ds. \end{aligned}$$

Il est clair que y est bornée,

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq \int_0^{+\infty} \left|e^{-\lambda s} f(s+x)\right| ds \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-as} ds = \frac{M}{a}. \end{aligned}$$

Maintenant on vérifie que la solution de l'équation (2.9) est bien presque périodique. Soit $\mathrm{T} \in E\{\varepsilon a, f\}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|y(x+T)-y(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\left[f(s+x+T)-f(s+x)\right] ds \right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-as}\left|f(s+x+T)-f(s+x)\right| ds \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T)-f(x)| \int_0^{+\infty} e^{-as} ds \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T)-f(x)| \frac{1}{a} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la solution y est une fonction presque périodique.

Deuxième cas : $\mathbf{a < 0}$

On procède de la même manière, cette fois-ci en considérant le fait que

$$\lim_{x\to-\infty} \left|e^{\lambda x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{ax} = +\infty.$$

Troisième cas : $\mathbf{a = 0}$

On a donc que $\lambda = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors la solution y est de la forme

$$y(x) = e^{ibx}(K + \int_0^x e^{-ibs} f(s))ds.$$

Si on suppose que y est bornée alors on aura nécessairement

$$x \mapsto \int_0^x e^{-ibs} f(s) ds$$

est aussi bornée.

Puisque

$$s \mapsto e^{-ibs} f(s)$$

est presque périodique en tant que produit de deux fonctions presque périodiques, on en déduit que

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{-ibs} f(s) ds$$

est une primitive bornée d'une fonction presque périodique. Donc elle est presque périodique . Ainsi y l'est aussi. □

Cas d'un système triangulaire

On se donne une solution bornée y du système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}y_j + f_i(x), \quad i \in \{1, ..., n\} \tag{2.10}$$

où $T = (t_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ est une matrice telle que $t_{ij} \in \mathbb{C}$ avec $t_{ij} = 0$ si $i > j$ et les fonctions f_i sont presque périodique à valeurs complexes.

On peut faire une récurrence sur l'ordre de la matrice T. Quand la matrice est d'ordre 1, toute solution bornées est presque périodiques (voir cas d'une équation scalaire).

Supposons que le résultat est vrai pour les matrices tiangulaire supérieure de taille n, et montrons le pour les matrices de taille $(n+1)$, c'est-à-dire montrons que le résultat est vrai pour le système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{ij}y_j + f_i(x), \quad i \in \{1, ..., n+1\}$$

On considère $y = (y_1, ..., y_{n+1})^t$ une solution bornée de (3.17). La dernière équation est

$$\dot{y}_{n+1} = t_{n+1,n+1}y_{n+1}(x) + f_{n+1}(x).$$

D'apres le peremier cas y_{n+1} est presque périodique.

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, donc le résultat est vrai pour les matrices de taille $n+1$, et par conséquent il est vrai pour les matrices de taille n. Ce qui achève la démonstration du théorème pour les matrices triangulaires supérieures.

***cas d'une matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)*

D'après un résultat d'algébre linéaire, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de A sur sa diagonale telle que

$$A = P^{-1}TP.$$

Soit y une solution bornée de (2.7), alors on a en multipliant à gauche par P que

$$Py' = TPy + Pf$$

où $y = (y_1, ..., y_n)^t$ et $f = (f_1, ..., f_n)^t$, on pose $z = Py$ et $g = Pf$, on aura

$$\frac{dz}{dx} = Tz + g.$$

Les composantes de g sont toutes presque périodiques en tant que combinaisons linéaires à coefficients constants de fonctions presque périodiques.

Puisque y est bornée alors $z = Py$ est bornée, et le deuxième cas z est presque périodique.

Les composantes du vecteur y étant des combinaisons linéaires à coefficients constants des composantes de z, on en déduit alors que les composantes de y sont presque périodiques, et par conséquent la solution y est presque périodique.

Remarque 2.2.1. *Ce théorème ne garantit pas l'existence d'une solution bornée, alors la question qui se pose est : quelles conditions sur la matrice A doit-on imposer pour avoir une solution bornée ?*

Le théorème suivant répond à la question précédente.

Théorème 2.2.3. *Si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ la fonction f_i est presque périodique et si A ne possède aucune valeur propre de partie réelle nulle ($spectre(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$) alors le système (2.7) admet une unique solution bornée presque périodique.*

Démonstration. On a vu dans la démonstration du Théorème 2.2.2 que le système

$$Y' = AY + f$$

se ramène à un système

$$Z' = TZ + g.$$

Chaque équation de ce système est de la forme

$$z_i' = \lambda_i z_i + g_i.$$

Puisque, par hypothèse la matrice A ne possède aucune valeur propre de partie réelle nulle, alors deux cas peuvent se présenter : ($Re\lambda_i < 0$ ou $Re\lambda_i > 0$).

D'après le Théorème 2.2.2, les z_i sont déterminés de manière unique, car la constante qui résulte de la résolution de l'équation a été fixée de sorte que la solution soit bornée.

Ainsi si on imite la preuve du Théorème 2.2.2 par récurrence sur l'ordre de la matrice A, on trouve que chaque y_i est bornée.

Alors, l'unique solution Y est presque périodique. $\square$

2.3 Solutions presque périodiques d'un système différentiel à coefficients non constants

On va s'intéressé dans cette section à l'équation différentielle donnée par

$$x' = A(t)x + f(t)$$

où la matrice A et le vecteur f dépendent de t.
Dans la section précédente on a vu que si f est presque périodique alors une solution de l'équation

$$x' = Ax + f$$

est presque périodique si et seulment si elle est bornée.
La question suivante se pose naturellement : est ce que ce résultat (cas constant) reste valable si A est une matrice dépendante de t ?.

En général, l'existence des solutions bornées ne suffit pas pour avoir l'existence de solutions presque périodiques [10].
Hu et Mingarelli [3] ont donné un exemple d'une équation qui admet une solution bornée qui n'est pas presque périodique voir exemple 2.3.1.

2.3.1 Cas homogène

Théorème 2.3.1. *[11, théorème 5.7]*

Soit le système différentiel homogène

$$x' = A(t)x \tag{2.11}$$

avec $A(t)$ une matrice de fonctions presque périodiques.

Soit $x(t)$ une solution presque périodique de l'équation (2.11). *Alors on a soit*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| > 0 \quad \textit{où bien} \quad x(t) \equiv 0.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0.$$

Supposons que $\inf_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = 0$, alors d'après la caractérisation de la borne inférieure il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que $\lim_{n\to\infty} |x(\alpha_n)| = 0$.
Comme $A(.)$ et x sont presque périodiques, alors d'après le critère de Bochner, il existe une sous suite $\alpha' \subset \alpha$ telle que

$$\mathrm{T}_{\alpha'}A = B, \quad \mathrm{T}_{-a}B = A, \quad \mathrm{T}_{\alpha'}x = y, \quad \mathrm{T}_{-\alpha'}y = x \quad \text{(existent uniformément)}$$

Soit $\dot{y} = By$ le système différentiel associé au système (2.11), avec $B \in H(A) = \overline{\{A_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}}$ et $A_\tau = A(t+\tau)$,
On a $y(0) = \mathrm{T}_{\alpha'}x(0) = \lim_{n\to\infty} x(t+\alpha'_n) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
Or on a l'équation $\dot{y} = By$ admet 0 comme solution, par unicité de la solution , on a $y(t) \equiv 0$.
Comme $\mathrm{T}_{-\alpha'}y = x$, on aura $x(t) \equiv 0$.

□

2.3.2 Cas non homogène : condition de Favard

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{2.12}$$

avec $A(t)$ une matrice de fonctions presque périodiques et f une fonction presque périodique.

Afin d'assurer l'existence d'au moins une solution presque périodique non triviale du système (2.12), dans le cas où il admet une solution bornée, Favard [12] a établi une condition appellée : **la condition de séparation de Favard**.

L'hypothèse de Favard est la suivante [12] :

Pour chaque équation

$$\dot{y} = B(t)y, \tag{2.13}$$

avec $B \in H(A) = \overline{\{A_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}}$ et $A_\tau = A(t+\tau)$, on a

toute solution bornée non triviale y de (2.13) est séparé de zero, dans le sens que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| > 0. \tag{2.14}$$

Remarque 2.3.1.

1. *la fermeture est par rapport à la norme de la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$.
2. $H(A)$ *est compact (grâce à la caractérisation de Bochner de la presque périodicité).*

Sous la condition Favard affirme que le système (2.12) possède une solution presque périodique dès qu'il possède une solution bornée.Une autre demonstration de ce résultat est donnée dans [10]. La condition de separation de Favard a été largement étudiée dans la littérature, ainsi que ses consequences. elle est devenue une sorte de division (de separation)dans la théorie des équations differentielles presque périodiques. Notons que la condition de séparation de Favard n'est pas facilment testable et est connue pour ne pas être vérifiée dans de nombreux cas intéressants

Hu et Mingarelli [14] ont affaibli la condition de séparation de Favard en exigent plutôt que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2l} \int_{t-l}^{t+l} |y(s)| ds \right) > 0, \tag{2.15}$$

où $l > 0$ est un nombre réel, garantie également l'existence des solutions presque périodiques de l'équation differentielle correspondante.

Dans ce qui suit, on donne l'exemple qui justifie que la bornitude des solutions ne garantie pas leur presque périodicité comme c'est le cas pour un système différentiel à coefficients constants.

Exemple 2.3.1. *[3]*

Soit la suite de fonctions $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$f_n(t) = -\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{t}{n^3}\right) \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Alors f_n *est impaire,* $2\pi n^3-$*périodique et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty, \tag{2.17}$$

alors d'après le test de Weierstrass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *donc uniformément. On pose*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t). \tag{2.18}$$

Alors g *est presque périodique, car elle est limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'une suite de fonctions périodiques et continues.*

$$|f_n'(t)| = \left| \frac{1}{n^5} \cos(\frac{t}{n^3}) \right| \leq \frac{1}{n^5}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on a la presque périodicité de $g'(t)$*. On considére l'équation suivante*

$$\ddot{x}(t) + a(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

avec $a(.)$ *une fonction presque périodique définie par* $a(t) = -(g^2(t) + g'(t))$*.*

Cette équation s'écrit sous forme d'un système différentiel $\dot{X} = A(t)X(t)$ *avec*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la convergence uniforme de (f_n) *vers* g *on aura*

$$\int_0^t g(s)ds = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} -n\left(1 - cos\left(\frac{t}{n^3}\right)\right) \leq 0.$$

$$x(t) = e^{\int_0^t g(s)ds} \tag{2.19}$$

est une solution bornée non triviale de l'équation differentielle

$$\ddot{x} - (g^2(t) + g'(t))x = 0, \tag{2.20}$$

elle vérifie

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |x^2(t) + \dot{x}^2(t)| = 0 \tag{2.21}$$

En effet, on a

$$x^2(t) + \dot{x}^2(t) = e^{2\int_0^t g(s)ds}[1 + g^2(s)].$$

On a $(1 + g^2(s)) > 0$ *et fini, donc on s'interesse à* $\inf |e^{2\int_0^t g(s)ds}|$ *.*
Posons $t_n = \frac{3\pi}{2}n^3$, $n \geq 1$

$$\gamma(t) = \int_0^t g(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(t)ds = \sum_{n=1}^{\infty} -n(1 - cos(\frac{t}{n^3})). \tag{2.22}$$

Donc

$$\gamma(t_n) = \sum_{n=1}^{\infty} -n = -\infty.$$

Alors

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}(\gamma(t)) = -\infty.$$

D'où

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}(exp(\gamma(t))) = 0.$$

Alors pour $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ *solution de* $(2.3.1)$ *on a*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|X(t)\| = 0.$$

Donc x(t) n'est pas presque périodique.

Chapitre 3

La bornitude et la Stepanov-presque périodicité des solutions d'un système différentiel linéaire

Ce chapitre est consacré au concept da la Stepanov presque périodicité (ou la S^p- presque périodicité), qui est une généralisation de la notion de la presque périodicité de Bohr. Cette notion a été introduite dans la première moitié du vingtième siècle par le mathématicien russe V. Stepanov. Par la suite elle est développée par les travaux de plusieurs mathématiciens, comme par exemple Amerio et Prouse [1], J.Andres [2],...
On a vu dans le chapitre précédent, que pour les systèmes

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{3.1}$$

le fait que les solutions soient bornées n'implique pas qu'elles soient Bohr presque périodiques, Mingarelli et Hu [3] ont donnée un exemple de système (3.1) à coefficients presque périodiques qui admet une solution bornée qui n'est pas presque périodique . Hu et Mingarelli[13] ont construit une classe de systèmes linéaires presque périodiques dans lesquelle toutes les solutions sont bornées, mais aucune solution non triviale n'est presque périodique. La question qui se pose naturellement alors est de savoir si la bornitude des solutions peut impliquer leur presque périodicité au sens de Stepanov qui est une presque périodicité plus faible que la Bohr presque périodicité.

La norme de Stepanov

Soient $l > 0$ et $1 \leqslant p < \infty$, on note $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions f localement $p-$intégrables sur $\mathbb{R}$. Si $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors

$$\int_x^{x+l} |f(t)|^p dt < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.0.1. *Soient $l > 0$ et $1 \leqslant p < \infty$, et f une fonction localement $p-$integrable. La* *norme de Stepanov est définie comme suit*

$$\|f\|_{S_l^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

Si on note

$$S_l^p(t,f) = \left(\frac{1}{l}\int_t^{t+l} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Alors

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} S_l^p(t,f).$$

On a pour tout $t, s \in \mathbb{R}$

$$S_l^p(t,f_s) = S_l^p(t+s,f)$$

où f_s est la translatée de f.

Remarque 3.0.1. *$\forall 1 \leqslant p < \infty$, les normes de Stepanov sont équivalentes .C'est-à-dire : pour tout $l_1, l_2 > 0$, il existe α β dépendant de l_1, l_2 tels que :*

$$\alpha\ \|f\|_{S_{l_1}^p} \leq \|f\|_{S_{l_2}^p} \leq \beta\ \|f\|_{S_{l_1}^p}.$$

Démonstration. Montrons qu'il existe $\alpha\ > 0$ tel que $\alpha\ \|f\|_{S_{l_1}^p} \leq \|f\|_{S_{l_2}^p}$.
Soit $0 < l_1 < l_2$ alors on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt &= \frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_1} |f(t)|^p dt + \frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2} |(t)|^p dt \\ &\geq \frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_1} |f(t)|^p dt \times \left(\frac{l_1}{l_1}\right) \geq \frac{l_1}{l_2}\left(\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} |f(t)|^p dt\right).\end{aligned}$$

D'où :

$$\|f\|_{S_{l_2}^p} \geq \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S_{l_1}^p}.$$

Montrons qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \beta \|f\|_{S^p_{l_1}}$.

$$\begin{aligned}
\|f\|_{S^p_{l_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_1} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{l_1}{l_1 \times l_2}\int_x^{x+l_1} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(t)\|_{S^p_{l_1}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l_1}\int_{x+l_1}^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} |f|_{S^p_{l_1}} + |f|_{S^p_{l_1}} \\
&\leq \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right) |f|_{S^p_{l_1}}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right) ||f||_{S^p_{l_1}}.$$

Ce qui achève la démonstration ■ □

Grâce à cette équivalence on peut remplacer l dans la formule (3.2) par un nombre positif arbitraire. Nous adopterons la notation S^p au lieu S^p_l.

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} S^p(t,f) \tag{3.4}$$

Définition 3.0.2. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. f est dite Stepanov bornée si*

$$\|f\|_{S^p} < \infty.$$

C'est-à-dire

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 |f(t+x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

L'espace de ces fonctions sera noté $BS^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il est muni de la norme

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+.)\|_{L^p([0,1],\mathbb{C})}.$$

3.1 Les différentes définitions et les propriétés de la presque périodicité de Stepanov

Comme dans le cas des fonctions presque périodiques au sens de Bohr, il existe plusieurs définitions équivalentes de la presque périodicité au sens de Stepanov.

3.1.1 Les fonctions Stepanov presque périodiques en utilisant les ensembles relativement denses

Définition 3.1.1. *Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dite presque périodique au sens de Stepanov et on écrit $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $S^pE(\varepsilon, f)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, où*

$$S^pE(\varepsilon, f) = \left\{ \mathrm{T} \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \right\}. \tag{3.5}$$

Autrement dit :
si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$, tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T *vérifiant :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{3.6}$$

Le nombre $\mathrm{T} \in S^pE(\varepsilon, f)$ *est appelé* ε***-Stepanov presque période*** *de f.*

On désignera par $S^P_{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions presque périodiques au sens de stepanov)

3.1.2 Définition de la Stepanov presque périodicité par le critère d'approximation

Définition 3.1.2. *Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est presque périodique au sens de Stepanov, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P_ε tel que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t) - P_\varepsilon(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Remarque 3.1.1. *La définition 3.1.2 signifie que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

3.1.2.1 Les propriétés des fonctions Stepanov presque périodiques

Proposition 3.1.3. *Toute fonction presque périodique au sens de Stepanov est S^p-bornée sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Montrons que si $f \in S^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors $\|f\|_{S^p} < \infty$
Par hypothése, f est S^p presque périodique. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $l > 0$ tel que tout intervalle

$[\alpha, \alpha + l_\varepsilon]$ contient un nombre T vérifiant :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{3.8}$$

On prend $\mathrm{T} \in [-x, -x+l] \cap S^pE(\varepsilon, f)$, alors $0 \leqslant x + \mathrm{T} \leqslant l$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_x^{x+1} |f(t) - f(t+\mathrm{T}) + f(t+\mathrm{T})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_x^{x+1} |f(t) - f(t+\mathrm{T})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon + \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En posant le changement de variable $u = t + \mathrm{T}$ on aura pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{x+\mathrm{T}}^{x+\mathrm{T}+1} |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^{l+1} |f(u)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ainsi on a $\|f\|_{S^p} < \infty$, c'est a dire f est S^p bornée. □

Proposition 3.1.4. *Toute fonction presque périodique au sens de Stepanov est S^p-uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, l la longueur d'inclusion de $S^pE(\varepsilon, f)$, alors :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Prenons $\delta = l$ et posons $t_1 = t$ et $t_2 = t + \mathrm{T}$, où $t \in \mathbb{R}$, alors $|t_1 - t_2| < \delta$ et

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t_1) - f(t_2)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où le résultat . □

Proposition 3.1.5. *Si $f \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Alors $|f| \in S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0, \mathrm{T} \in S^pE(\varepsilon, f)$ Alors

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1} ||f(t+\mathrm{T})| - |f(t)||^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{T} \in S^pE(\varepsilon, |f|)$. Donc $S^pE(\varepsilon, |f|)$ est relativement dense car il contient $S^pE(\varepsilon, f)$ qui est relativement dense. par conséquent $|f|$ est presque périodique au sens de Stepanov. □

Proposition 3.1.6. *Toute fonction Bohr presque périodique est Stepanov presque périodique.*

$$AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset S^P AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Démonstration. Montrons que $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
$f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors f est continue et $\forall\varepsilon > 0$, il existe $l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + l_\varepsilon]$ contient un nombre T vérifiant

$$|f(t+\mathrm{T}) - f(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

f est continue alors $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $\mathrm{T} \in E(f, \varepsilon)$. En intégrant (3.10) on aura
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon. \tag{3.11}$$

Ce qui donne

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1} |f(t+\mathrm{T}) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon. \tag{3.12}$$

Donc $\mathrm{T} \in S^pE(f, \varepsilon)$. Ceci implique que $S^pE(f, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est S^p- presque périodique. □

La réciproque n'est pas vraie, il existe des fonctions Stepanov presque périodiques qui ne sont pas Bohr presque périodiques, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.1. *[13]*
Nous montrons qu'il existe une fonction C^1 Stepanov presque périodique, qui n'est pas Bohr presque périodique.
Soit ε_n $(n = 1, 2, ...)$ tel que :

$$0 < \varepsilon_n < 1 \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

Pour chaque n, on définit une fonction $f_n(x)$ comme suit

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2(x-y_{n,k}+\varepsilon_n)^2}{\varepsilon_n^2} & x \in]y_{n,k}-\varepsilon_n, y_{n,k}-\frac{\varepsilon_n}{2}] \\ 1-\frac{2(x-y_{n,k})^2}{\varepsilon_n^2} & x \in]y_{n,k}-\frac{\varepsilon_n}{2}, y_{n,k}+\frac{\varepsilon_n}{2}] \\ \frac{2(x-y_{n,k}-\varepsilon_n)^2}{\varepsilon_n^2} & x \in]y_{n,k}+\frac{\varepsilon_n}{2}, y_{n,k}+\varepsilon_n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$y_{n,k} = (2k+1)n, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Alors, pour chaque n,f_n est une fonction périodique de période $2n$ et continue.
Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Alors, f(.) est continue sur $]-\infty, \infty[$. Pour tout nombre A et tout $x \in [-A, A]$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),$$

où

$$f_n'(x) = \begin{cases} \frac{4(x-y_{n,k}+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2} & x \in]y_{n,k}-\varepsilon_n, y_{n,k}-\frac{\varepsilon_n}{2}] \cap [-A, A] \\ -\frac{4(x-y_{n,k})}{\varepsilon_n^2} & x \in]y_{n,k}-\frac{\varepsilon_n}{2}, y_{n,k}+\frac{\varepsilon_n}{2}] \cap [-A, A] \\ \frac{4(x-y_{n,k}-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2} & x \in \ ]y_{n,k}+\frac{\varepsilon_n}{2}, y_{n,k}+\varepsilon_n] \cap [-A, A] \\ 0 & \text{sinon sur } [-A, A] \end{cases}$$

Alors, f est continue sur $[-A, A]$ pour tout $A > 0$.
Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, $f(.)$ est Stepanov presque périodique.
$f'(.)$ n'est pas bornée, donc elle n'est pas uniformément continue.Par conséquent elle n'est pas Bohr presque périodique.

3.1.3 Définition de la Stepanov presque périodicité au sens de Bochner

Nous utilisons $S^P C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour designer l'ensemble de toutes les fonctions S^P continues. On a $C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset S^P C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On introduit d'autres définitions d'une fonction presque périodique de Stepanov.

Définition 3.1.7. *[13]S^P* ***normalité***
Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est presque périodique au sens de Stepanov, si pour toute suite de

nombres réels $(\alpha_n)_n$ *on peut extraire une sous suite* $(\alpha_{n_k})_k$ *telle que la suite* $(f(.+\alpha_{n_k}))_k$ *est* S^p*-uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$.

Autrement dit,

Soit $f \in S_l^P C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, f est dite S^p-presque périodique sur $\mathbb{R}$. Si pour toute suite $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}$, il existe une sous suite $(\alpha'_n)_n$ de $(\alpha_n)_n$ et une fonction $g \in S^P C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} S^P(t, f_{\alpha'_n} - g) = 0, \text{ uniformément sur } \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

où $f_{\alpha'_n}$ est la translatée de f. C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_t^{t+1} |f(\alpha'_n + s) - g(s)|^P ds \right)^{\frac{1}{P}} = 0.$$

Définition 3.1.8. *Soit* $f \in S^P C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *l'ensemble*

$$S^P H(f) = \{g/g \in SC(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \textit{il existe une suite } (\alpha_n)_n \subset \mathbb{R} \ \ \textit{telque} \ \ US^p\mathrm{T}_\alpha f = g\}$$

l'enveloppe uniforme de Stepanov de f *ou* ***l'enveloppe*** S^p***-uniforme*** *de* f.
$US^p\mathrm{T}_\alpha f = g$ *veut dire que*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_t^{t+1} |f(s+\alpha_n) - g(s)|^P ds \right)^{\frac{1}{P}} = 0 \textit{ uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Pour tout $f \in S^p C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $S^P H(f)$ n'est pas vide puisque $f \in S^P H(f)$.

3.1.4 Propiétés de l'enveloppe S^p-uniforme d'une fonction

Proposition 3.1.9. *[13]*
Si f *est Bohr presque périodique sur* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$H(f) \subset S^P H(f),$$

où $H(f)$ *est l'enveloppe uniforme de* f.

Proposition 3.1.10. *[13]*
Si $f \in S^P AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in S^P H(f)$. *Alors*

$$g \in S^P AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ \ \textit{et} \ \ f \in S^P H(g).$$

Démonstration. Puisque $g \in S^P H(f)$, il existe une suite $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} S_l^P(t, f_{\alpha_n} - g) = 0 \ \ \text{uniformément sur} \ \ \mathbb{R}.$$

Pour toute suite $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\gamma_n = \beta_n + \alpha_n, n = 1, 2, ...$$

Puisque $f \in S^P AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il existe une sous suite $(\gamma'_n)_n \subset (\gamma_n)_n$ et une fonction $g_1 \in S^P H(f)$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} S^P(t, f_{\gamma'_n} - g_1) = 0 \text{ uniformément sur } \quad \mathbb{R}.$$

Ceci veut dire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_t^{t+1} |f(\gamma'_n + s) - g_1(s)|^P ds\right)^{\frac{1}{P}} = 0, \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Donc

$$S^P(t, g_{\beta'_n} - g_1) \leq S^P(t, g_{\beta'_n} - f_{\gamma'_n}) + S^P(t, f_{\gamma'_n} - g_1).$$

En effet,

$$\begin{aligned} S^P(t, g_{\beta'_n} - g_1) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_t^{t+1} |g(\beta'_n + s) - g_1(s)|^P ds\right)^{\frac{1}{P}} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \left(\int_t^{t+1} |g(\beta'_n + s) - f(\gamma'_n + s)|^P ds\right)^{\frac{1}{P}} \\ &+ \lim_{n\to+\infty} \left(\int_t^{t+1} |f(\gamma'_n + s) - g_1(s)|^P ds\right)^{\frac{1}{P}}. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = s + \beta'_n$

$$\begin{aligned} S^P(t, g_{\beta'_n} - g_1) &\leq \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{t+\beta'_n}^{t+\beta'_n+l} |g(s) - f(\alpha'_n + s))|^P ds\right)^{\frac{1}{P}} \\ &+ \lim_{n\to+\infty} \left(\int_t^{t+l} |f(\gamma'_n + s) - g_1(s)|^P ds\right)^{\frac{1}{P}} \\ &= S^P(t + \beta'_n, g - f_{\alpha'_n}) + S^P(t, f_{\gamma'_n} - g_1). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} S^P(t, g_{\beta'_n} - g_1) = 0 \text{ uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Ceci implique que $g \in S^P AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, En considérons la suite $(-\alpha_n)_n$, on obtient $f \in S^P H(g)$. $\square$

Proposition 3.1.11. *[13]*
Si $f \in S^P AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, Alors pour tout $g \in S^P H(f)$,

$$S^P H(g) = S^P H(f)$$

Démonstration. Montrons d'abord que pour tout$f \in S^P H(f)$, on a $S^P H(g) \subset S^P H(f)$.
Soit $h \in S^P H(g)$. Alors il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} S^P(f_{\alpha_n} - g) = 0 \text{ uniformément sur } \mathbb{R}.$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} S^P(g_{\beta_n} - h) = 0 \text{ uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} S^P(f_{\alpha_n+\beta_n} - h) \leq \lim_{n \to +\infty} S^P(f_{\alpha_n+\beta_n} - g_{\beta_n}) + \lim_{n \to +\infty} S^P(g_{\beta_n} - h) = 0 \text{ uniformément sur } \mathbb{R}$$

Donc $h \in S^P H(f)$. Ceci implique que $S^P H(g) \subset S^P H(f)$.
D'aprés la proposition (3.1.10), $f \in S^P H(g)$. Comme on a dejà montrer que $S^P H(f) \subset S^P H(g)$.
Donc $S^P H(g) = S^P H(f)$. □

3.1.5 Formulation d'un théorème de type Bochner

Nous étendons le Théorème de Bochner sur les fonctions presque périodiques au cas des fonctions presque périodiques. Ce théorème joue un rôle important dans l'étude de l'existence de solutions Stepanov presque périodiques pour des équations différentielles à coefficients Stepanov presque périodiques.
Le théorème qui suit est un théorème de type Bochner pour les fonctions Stepanov presque périodiques .

Théorème 3.1.12. *[13]*

Soit $f \in S^P C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors f est Stepanov presque périodique sur $\mathbb{R}$. si et seulement si pour toute paire de suites $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}$, on peut extraire deux sous suites $\alpha' \subset \alpha$ et $\beta' \subset \beta$ telles que

$$S^P \mathrm{T}_{\alpha'+\beta'} f = S^P \mathrm{T}_{\alpha'}(S^P \mathrm{T}_{\beta'} f).$$

C'est-à-dire, il existe deux fonctions $g, h \in S^P C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} S^P(t, f_{\alpha'_n+\beta'_n} - g) &= 0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R} \\
\lim_{n \to +\infty} S^P(t, f_{\beta'_n} - h) &= 0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R} \\
\lim_{n \to +\infty} S^P(t, h_{\alpha'_n} - g) &= 0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3.2 Solutions Stepanov presque périodiques d'une équation differentielle scalaire

On considére l'équation suivante :

$$\dot{x} = ax + f(t) \tag{3.14}$$

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est essentiellement bornée et S^p presque périodique.

Théorème 3.2.1. *[13] Toute solution bornée $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation differentielle* (3.14) *est S^p-normale.*

Démonstration. La solution générale de l'équation (3.14)

$$x(t) = e^{at}\left(x(0) + \int_0^t f(s)e^{-as}ds\right)$$

On peut distinguer trois possibilités selon le signe de la constante a.

1. **Si** $a > 0$
   Pour avoir une solution bornée pour $t \longrightarrow +\infty$, il faut prendre

$$x(0) = -\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{a\tau}d\tau.$$

   La solution particulière de l'équation (3.14) est :

$$x(t) = -e^{at}\int_t^{+\infty} f(s)e^{-as}ds. \tag{3.15}$$

   $x(.)$ est une solution de l'équation (3.14) et x est bornée sur $\mathbb{R}$ donc x est S^p bornée .
   Montrons x est S^p-presque périodique. soit $\tau \in s^p(f, a\varepsilon)$

$$x(t+\tau) = -e^{a(t+\tau)}\int_{t+\tau}^{+\infty} f(s)e^{-as}ds.$$

   Ainsi

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(t+\tau)| &= \left|-e^{a(t+\tau)}\int_{t+\tau}^{+\infty} f(s)e^{-as}ds - e^{at}\int_t^{+\infty} f(s)e^{-as}ds\right| \\
&= \left|e^{a(t+\tau)}\int_t^{+\infty} f(s+\tau)e^{-a(s+\tau)}ds - e^{at}\int_t^{+\infty} f(s)e^{-as}ds\right| \\
&= |e^{at}\int_t^{+\infty} (f(s+\tau) - f(s))e^{-as}ds|
\end{aligned}$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\int_u^{u+1} |x(t+\tau)-x(t)| &= \int_u^{u+1} \left| e^{at}\int_t^{+\infty} (f(s+\tau)-f(s))e^{-as}ds \right| dt \\
&= \int_u^{u+1} \left| e^{at}\int_0^{+\infty} (f(s+t+\tau)-f(s+t))e^{-a(s+t)}ds \right| dt \\
&= \int_u^{u+1} \left| \int_0^{+\infty} (f(s+t+\tau)-f(s+t))e^{as}ds \right| dt \\
&\leq \int_u^{u+1} \int_0^{+\infty} |(f(s+t+\tau)-f(s+t))e^{as}| ds dt \\
&= \int_u^{u+1} \int_t^{+\infty} |(f(s+t+\tau)-f(s+t))e^{as}| dt ds \\
&= \int_0^{+\infty} |e^{-as}| \left(\int_u^{u+1} |f(s+t+\tau)-f(s+t)|dt \right) ds
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |x(t+\tau)-x(t)|dt &\leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |e^{-as}| \left(\int_u^{u+1} |f(s+t+\tau)-f(s+t)|dt \right) ds \\
&= \int_0^{+\infty} |e^{-as}| \left(\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+1} |f(s+t+\tau)-f(s+t)|dt \right) ds \\
&< a\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-as}ds = \frac{\varepsilon}{a} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $S^P E(\varepsilon, x)$ est relativement dense, alors x est une solution S^1presque périodique.

2. Si $a < 0$:
   On prend la condition initiale

$$x(0) = \int_{-\infty}^0 f(s)e^{-as}ds.$$

   Au lieu de (3.15), la solution particulière de l'équation (3.14) peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = e^{at}\int_{-\infty}^t f(s)e^{-as}ds,$$

   il se traite de la même manière que le cas $a > 0$.

3. Si $a = 0$:
   L'équation (3.14) se simplifie à

$$\dot{x} = f(t). \tag{3.16}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, on obtient la solution

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds$$

Donc

$$x(t+\tau) - x(t) = \int_0^{t+\tau} f(s)ds - \int_0^t f(s)ds.$$

□

3.3 Solutions Stepanov presque périodiques d'un système différentiel à coefficients constants

On considére le système :

$$x' = Ax + f(t) \tag{3.17}$$

où $A = (a_{i,j})$ est une matrice complexe d'ordre n et la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est bornée .

Théorème 3.3.1. *On suppose que f est $S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et bornée, alors toute solutions bornée du système* (3.17) *est S^p-normale (ou Stepanov presque périodique au sens de Bochner) .*

Démonstration. D'apres le résultat d'algèbre linéaire A est semblable a une matrice triangulaire supérieure.
C'est à dire il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = P^{-1}TP \quad , \quad avec \quad T \text{ matrice triangulaire supérieure}$$

dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A.
Le systéme (3.17) peut s'écrire :

$$x' = (P^{-1}TP)x + f(t), \tag{3.18}$$

on pose $y = px$
Ceci implique que

$$y' = Ty + g, \qquad avec \;\; g = pf.$$

La $n^{iéme}$ équation de ce systéme s'écrit

$$y'_n = T_{n,n}y_n + g_n. \tag{3.19}$$

D'après l'équation scalaire (3.2.1), toute solution bornée de l'équation (3.19) est $S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
La $(n^{iéme} - 1)$ équation s'écrit :

$$\begin{aligned} y'_{n-1} &= T_{n-1,n-1}y_{n-1} + T_{n,n}y_n + g_{n-1} \\ y'_{n-1} &= T_{n-1,n-1}y_{n-1} + h_{n-1} \quad Avec \quad h_{n-1} \quad borné \quad et \quad S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

D'après le théorème (3.2.1), si y_{n-1} est bornée alors est $S^pAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .On refait ce procéde pour les autres équations. □

3.4 Solutions Stepanov presque périodiques pour un système différentiel non autonome

3.4.1 Théorie de Favard d'un système Stepanov presque périodique

On considère le système linéaire S^p presque périodique

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{3.20}$$

où $A(t)$ est une fonction matricielle carée d'ordre n et $f(t)$ est une fonction vectorielle.

Lemme 3.4.1. *[13]*
On suppose que $A(t)$ et $f(t)$ sont S^2- presque périodique, bornés presque partout sur tout ensemble compact$K \subset \mathbb{R}$. Soit $B \in S^2H(A)$ et $g \in S^2H(f)$ tels qu'il existe une suite $\alpha \subset \mathbb{R}$ où

$$US^2\mathrm{T}_\alpha A = B \quad ,US^2\mathrm{T}_\alpha f = g.$$

Si toute solution bornée non triviale $y(t)$ de l'équation

$$y' = B(t)y \tag{3.21}$$

satisfait

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} S^2(t, y) > 0, \tag{3.22}$$

alors l'équation

$$x' = B(t)x + f(t) \tag{3.23}$$

a au plus une solution dans K de norme S^2 minimale .

Démonstration. Supposons le contraire, C'est-à-dire qu'il existe deux solutions distinctes $x_1(.)$, $x_2(.)$ de l'équation (3.23) avec une norme S_l^2 minimisante, c'est-à-dire

$$\|x_1\|_{S^2} = \|x_2\|_{S^2}.$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) \quad et \quad y_2(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) - x_2(t))$$

Alors $y_1(.)$ est une solution de l'équation (3.23) et $y_2(.)$ est une solution de l'équation (3.21). D'après la condition de Favard (3.22) on a

$$\delta = \inf_{t\in\mathbb{R}} S^2(t, y_2) > 0$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}
[S_l^2(t,y_1)]^2+[S_l^2(t,y_2)]^2 &= \left[\left(\int_t^{t+l}|y_1(t)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+\left[\left(\int_t^{t+l}|y_2(t)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\
&= \left[\left(\int_t^{t+l}|\frac{1}{2}(x_1(t)+x_2(t))|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\
&+ \left[\left(\int_t^{t+l}|\frac{1}{2}(x_1(t)-x_2(t))|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\
&= \frac{1}{2}\left[S^2(t,x_1)\right]^2+\frac{1}{2}\left[S^2(t,x_2)\right]^2\\
&\leq \|x_1\|_{S^2}^2=\left[\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\left(\frac{1}{l}\int_t^{t+l}|x_1(t)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente, pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a ,

$$[S_l^2(t,y_1)]^2+[S_l^2(t,y_2)]^2 \quad \leq \quad \|x_1\|_{S^2}^2.$$

Donc

$$\begin{aligned}
[S_l^2(y_1)]^2 &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}(\|x_1\|_{S^2}^2-[S_l^2(t,y_2)]^2\\
&\leq \|x_1\|_{S^2}^2-\inf_{t\in\mathbb{R}}[S_l^2(t,y_2)]^2\\
&\leq [S_l^2(x_1)]^2-\delta^2\\
&\leq \|x_1\|_{S^2}^2
\end{aligned}$$

On obtient $\|y_1\|_{S^2}^2\leq\|y_2\|_{S^2}^2$, cela contredit le fait que x_1 minimise la norme S_l^2.

Conclusion

Notre objectif dans ce mémoire est de voir si la bornitude des solutions d'un système différentiel linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{3.24}$$

implique leurs presque périodicité. Finalement, on a les résultats suivants

- Si A est constante et f est presque périodique au sens de Bohr où au sens de Stepanov alors une solution de 3.24 est presque périodique dans le même sens que f dès qu'elle est bornée.
- Si $A(t)$ est une matrice dépendent de t l'existence de solutions bornées ne garantit pas l'existence de solutions presque périodiques. Deux cas sont étudiés dans ce mémoire
  - Si $A(t)$ et f sont Bohr presque périodique, dans ce cas Favard à établit une condition sous laquelle le système admet une solution Bohr presque périodiques dès qu'il admet une solution bornée
  - Si $A(t)$ et f sont Stepanov presque périodiques et bornés, Mingarelli et Hu [14] ont montré que sous une condition du type Favard le système (3.24) admet au plus une solution Stepanov presque périodique.

Bibliographie

[1] L. Amerio and G. Prouse, *Almost-periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold Co, New York-Toronto, Ont.-Melbourne, (1971).

[2] J. Andres, D. Pennequin, *On the nonexistence of purely Stepanov almost-periodic solutions of ordinary differential equations*. Proc. Am. Math. Soc. 140 (8), 2825-2834, (2012).

[3] A.B.Mingarelli,F.Q.Pu,L.Zheng *A counter example in the theory of almost periodic differential equations*proc.Amer..Math.Soc.Vol,(1974).

[4] S.Bochner, *A new approach to almost periodicity* ,proc.Nat. Acad . Sci. U.S.A. MR 26 :2816, 2039-2043, (1962).

[5] S.Bochner, *abstrake Fast periodische Funktionen*, Acta Mathematica,(1933).

[6] H.Bohr,*Zur theorie der fastperiodischen Funktionen I* ; II ; III, Acta Math. 45 (1924), 29(127), H6 (1925), 101-214, HT , 237-281, (1926).

[7] H.Bohr., *Almost periodic functions*,Chelsea, New York, (1956).

[8] C.Conely, R.K.Miller , *Asymptotic stability without uniform stability :almost periodic coefficients,* J. Deffrential Equations, 1333-336, (1965).

[9] Corduneanu.C, *Almost Periodic Functions*, 2nd edn. Chelsea, New York, (1989).

[10] A. M. Fink, *Almost Periodic Differential Equations,* Lecture Notes in Mathematics Math.vol 377, Springer-Verlag, Berlin, (1974).

[11] A.M.Fink, *separated solutions of almost periodic differentiel equations*Mat-Fys.Madd . Danske vid Selsk 42,87-92(1989).

[12] J.Favard, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque périodiques* Acta Math, 51 :31-81,(1927).

[13] Hu.Z, A. B. Mingarelli, *Bochner's theorem and Stepanov almost periodic functions*, Annali di matematica 187 : 719-736, (2008).

[14] Hu.Z, A. B. Mingarelli, *On a theorem of Favard* ,proccedings of the American Mathematical Society,132(2) : 417 428, (2004) .

[15] B. M. Levitan, V. V. Zhikov, *Almost Periodic Functions and Differential Equations,* Cambridge Univ. Press, London, (1982).

[16] Po-Fang Hsieh et Yasutaka Sibuya ,*Basic theory of ordinary differential equations*Springer-Verlay New York,(1999).

[17] W.Stepanoff, *Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen.* Mathematische Annalen,vol.95, 473-498, (1926).

[18] H. Xiang, J.Cao, *Almost periodic solutions of recurrent neural networks with continuously distributed delays*, Nonlinear analysis, **71** , 6097-6108, (2006).

[19] T.Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, applied mathematical sciences 14, (1975).

Résumé

Ce mémoire s'articule autour de la presque périodicité des solutions bornées d'un système différentiel linéaire d'ordre un et à coefficients presque périodiques (au sens de Bohr et au sens de Stepanov). On a commencé par exposer les différentes méthodes de résolution des systèmes différentiels à coefficients constants, non constants et périodiques. Par la suite, on s'est intéressé à la Bohr presque périodicité des solutions bornées d'un système différentiel avec un second membre Bohr presque périodique quand les coefficients sont constants où Bohr presque périodiques. Dans la dernière partie de ce mémoire, on a introduit les différentes définitions de la presque périodicité au sens de Stepanov puis on a donné une version du théorème de Favard pour les systèmes Stepanov presque périodiques.

Abstract

This dissertation focuses on the almost periodicity of the bounded solutions of a linear differential system of order one with almost periodic coefficients (in the Bohr sense and the Stepanov sense). We began by exposing different methods for solving differential systems with constant, non-constant and periodic coefficients.

Subsequently, we were interested in the Bohr almost periodicity of the bounded solutions of a differential system with a second member Bohr almost periodic when the coefficients are constant or Bohr almost periodic. In the last part of this dissertation, we introduced several definitions of the Stepanov almost periodicity then we gave a version of Favard's theorem for Stepanov-almost periodic systems.