

République Algérienne Démocratique Et Populaire.
Ministère De L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira De Bejaia
Faculté Des Sciences Exactes
Département De Mathématiques



Mémoire
présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par : Mokrani Manel

Autour du concept d'attracteur en systèmes
dynamiques

Soutenue le 26/06/2023

Devant le jury composé de :

Mme K. KHELOUFI Prof. U. A. Mira Béjaia Présidente
Mr R. CHEMLAL M.C.A U. A. Mira Béjaia Encadrant
Mr Y. YAHIAOUI M.C.B U. A. Mira Béjaia Examineur

Année Universitaire : 2022/2023

Remerciements

Tout d'abord, je remercie ALLAH le tout-puissant de m'avoir accordé la santé, la force et la persévérance nécessaire pour mener à terme mon modeste travail.

Ensuite, Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon encadrant, Monsieur R. CHEMLAL, pour son aide précieuse et sa patience. Ses conseils éclairés m'ont permis de progresser et de développer mes compétences tout au long de la préparation de ce mémoire.

Et également adresser mes plus sincères remerciements aux membres du jury qui ont accepté de consacrer leur temps pour évaluer et examiner mon travail.

De même exprimer ma profonde gratitude à tous les enseignants du département de Mathématiques pour leurs efforts précieux tout au long de mon parcours.

Enfin sans oublier bien sur mes vifs et chaleureux remerciements à mes chers parents, qui ont été toujours auprès de moi dans des moments difficiles ainsi qu'à mon frère et ma sœur pour leur soutien constant et leurs encouragements qui ont forgé en moi une confiance sans précédent.

Résumé

Le mémoire intitulé "Autour du concept d'attracteur en systèmes dynamiques" explore les attracteurs dans les systèmes dynamiques discrets.

Dans ce travail, nous aborderons les définitions et les notions fondamentales des systèmes dynamiques discrets, y compris les concepts de la dynamique symbolique.

Ensuite, nous définirons les attracteurs, et présenterons leur caractérisation ainsi que leur relation avec les ensembles oméga limite et les ensembles invariants par chaînes. Nous fournirons une brève présentation des bifurcations. Par la suite, nous étudierons les exposants de Lyapunov, les fractales et les différentes dimensions fractales, qui sont des outils permettant de classifier les attracteurs.

Nous identifierons les différents types d'attracteurs, notamment les attracteurs réguliers prenant la forme de points fixes et d'orbites périodiques attractives, ainsi que les attracteurs étranges ou chaotiques. Pour illustrer ces concepts, nous présenterons des exemples célèbres tels que les attracteurs de Hénon, de Lozi, de Pichover et de Mira-Gomuwski.

Enfin, nous introduirons les attracteurs des endomorphismes du shift et ceux des sous-shifts, en étudiant leurs caractérisations et en les illustrant avec quelques exemples.

Abstract

The dissertation entitled "Around the Concept of Attractor in Dynamical Systems" explores attractors in discrete dynamical systems.

First we will address the definitions and fundamental notions of discrete dynamical systems, including concepts of symbolic dynamics.

After that, we will define attractors, as well as their characterization and their relation to omega limit sets and chain-invariant sets. We will also provide a brief overview of bifurcations. Following that, we will delve into the study of Lyapunov exponents, fractals, and various fractal dimensions, which will serve as tools for classifying attractors. Then, we will identify different types of attractors, namely regular attractors and strange attractors. To illustrate these concepts, we will present famous examples such as the Henon, Lozi, Pichover, and Mira-Gomuwski attractors.

Finally, we will introduce the attractors of cellular automata and those of subshifts, examining their characterizations and providing a few illustrative examples.

Table des matières

Introduction	9
1 Généralités et notions de bases	12
1.1 Préliminaires	12
1.2 Singularités d'un système dynamique discret	14
1.2.1 Points fixes	14
1.2.2 Points périodiques	14
1.2.3 Cycles	14
1.3 Stabilité des points fixes et des p -cycles	14
1.3.1 Stabilité des singularités dans le cas uni-dimensionnel	17
1.3.2 Stabilité des singularités dans le cas bi-dimensionnel	20
1.4 Bassin d'attraction d'un point fixe	26
1.5 Propriétés topologiques des systèmes dynamiques discrets	27
1.5.1 Sensibilité aux conditions initiales	27
1.5.2 Équicontinuité	28
1.5.3 Transitivité et mélange topologiques	29
1.5.4 Chaînes	29
1.5.5 Propriété de l'ombre	30
1.6 Notions de la dynamique symbolique	31
1.6.1 Espaces symboliques	32
1.6.2 Topologie de l'espace $A^{\mathbb{Z}}$	33
1.6.3 Décalage de Bernoulli (shift)	34

1.6.4	Sous-décalage (sous-shift)	35
1.6.5	Endomorphismes du shift (automates cellulaires)	35
1.6.6	Quelques propriétés des endomorphismes du shift	37
2	Attracteurs au sens topologique	39
2.1	Ensemble oméga limite	39
2.2	Attracteurs	42
2.3	Caractérisation des attracteurs	44
2.4	Attracteurs et ensembles invariants par chaîne	47
2.5	Bifurcation	50
2.5.1	Bifurcation nœud-col (fold)	50
2.5.2	Bifurcation doublement de période (flip)	51
2.5.3	Bifurcation Neimark-Sacker	52
2.6	Exposant de Lyapunov	53
2.6.1	Cas d'un système dynamique uni-dimensionnel	54
2.6.2	Cas d'un système dynamique de dimension N	55
2.7	Les Fractales	57
2.8	Dimension fractale	57
2.9	Types d'attracteurs	62
2.9.1	Attracteurs réguliers	63
2.9.2	Attracteurs étranges	63
2.9.3	Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov	65
2.10	Quelques attracteurs connus	65
2.10.1	Attracteur de Hénon	65
2.10.2	Attracteur de Lozi	67
2.10.3	Attracteur de Pickover	69
2.10.4	Attracteur de Gumowski-Mira	70
3	Attracteurs des endomorphismes du shift	72
3.1	Attracteurs	72

3.2	Caractérisation des attracteurs des endomorphismes du shift	73
3.3	Attracteurs : surjectivité et équicontinuité	76
3.4	Attracteurs sous-shifts	78
3.5	Quelques exemples	80
Conclusion		83
A Liste des programmes Matlab utilisés dans le mémoire		84
A.1	Créer une représentation graphique de l'orbite d'un point x_0	84
A.2	Tracer les premières itérations de l'ensemble de Cantor	85
A.3	Courbe de Von Koch	86
A.4	Triangle de Sierpinski	87
A.5	Attracteur de Lorenz	88
A.6	Attracteur de Hénon	88
A.7	Attracteur de Lozi	89
A.8	Attracteur de Pickover	90
A.9	Attracteur de Gumowski-Mira	90
A.10	Règle produit $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}, P)$	91
A.11	Règle $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}, Q)$	92

Table des figures

1.1	Orbite du point $x_0 = 0.1$	13
1.2	Stabilité et attractivité d'un point fixe	15
1.3	Stabilité du système $([-1, 1], x^3)$	17
1.4	Point fixe de type foyer	21
1.5	Point fixe de type nœud	21
1.6	Point fixe de type col	21
1.7	Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique f_4	28
1.8	Relation de chaîne (ε -chaîne entre x et y)	30
1.9	δ -chaîne ε -ombragé par un point $x \in X$	31
1.10	La règle locale	35
1.11	Schéma explicatif pour la preuve du théorème	36
2.1	Oméga limite	40
2.2	Schéma explicatif pour la preuve de la proposition 2.1	41
2.3	Attracteurs des systèmes $([-1, 1], x^3)$ et $([-1, 1], \sqrt[3]{x})$	44
2.4	Division d'un segment, carré et cube.	58
2.5	Recouvrement d'un ensemble S par des cubes	59
2.6	Ensemble de Cantor	60
2.7	Courbe de Von koch	61
2.8	Triangle de Sierpinski	62
2.9	Attracteur étrange de Lorenz "effet papillon"	64
2.10	Attracteur de Hénon	66

2.11	Auto-similarité de l'attracteur de Hénon observé en agrandissant sur la zone précisée par le carré	67
2.12	Attracteur de Lozi	68
2.13	Auto-similarité de l'attracteur de Lozi	69
2.14	Attracteur de Pickover	70
2.15	Attracteur de Gumowski-Mira pour $a = -0.92768$ et $b = 0.9$	71
3.1	Illustration pour la non surjectivité de la règle produit	81
3.2	diagramme espace temps de la règle produit	81
3.3	diagramme espace temps de la règle de Q	82

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une discipline classique des mathématiques qui possède une histoire riche et intéressante remontant à plusieurs siècles. Son développement a été influencé par de nombreux mathématiciens et scientifiques qui ont contribué à son émergence et à sa compréhension.

L'histoire des systèmes dynamiques discrets trouve ses racines dans l'étude des systèmes dynamiques continus. Isaac Newton, avec sa formulation des lois du mouvement et de la gravité, a jeté les bases de la mécanique classique et a fourni un cadre pour décrire le comportement des systèmes dynamiques continus. Cependant, au fil du temps, des questions se sont posées sur la stabilité et la complexité de ces systèmes.

Au XIXe siècle, Henri Poincaré a joué un rôle central dans le développement de la théorie des systèmes dynamiques. Il a réalisé des travaux novateurs sur la stabilité des systèmes planétaires, notamment dans le cadre du problème des trois corps (soleil, terre, lune). En étudiant les équations différentielles décrivant les mouvements des planètes, Poincaré a réalisé que la résolution analytique complète de ces équations était souvent impossible. Cela l'a conduit à explorer des approches alternatives pour comprendre les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Ainsi, Poincaré a introduit le concept de systèmes dynamiques discrets en remplaçant l'écoulement continu du temps par un analogue discret, dans lequel le temps avance par des sauts réguliers et discontinus.

Dans un système dynamique discret, chaque étape représente un instant de temps distinct. Les trajectoires du système sont déterminées par des règles ou des lois

décrivant l'évolution de l'état du système à partir de l'état précédent. Ces règles peuvent être simples ou complexes, mais elles permettent de prédire l'état futur du système en fonction de l'état actuel.

L'une des caractéristiques fascinantes de ces systèmes est la présence d'attracteurs, qui sont des sous-ensembles de l'espace des états (espace des phases) vers lesquels les trajectoires du système, initialement suffisamment proches, convergent au fil du temps.

Dans ce mémoire intitulé "Autour du concept d'attracteur en systèmes dynamiques", notre objectif est d'explorer en profondeur les attracteurs dans les systèmes dynamiques discrets.

Dans le premier chapitre, nous aborderons les définitions et notions de base des systèmes dynamiques discrets, ainsi que certaines notions de la dynamique symbolique qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons tout d'abord la notion d'ensemble oméga limite, un concept clé pour comprendre les attracteurs. Ensuite, nous définirons les attracteurs et présenterons leurs différentes caractérisations et leurs relations avec les ensembles invariants par chaînes et les ensembles oméga limite. Nous aborderons brièvement les bifurcations, qui peuvent entraîner l'apparition ou la disparition d'attracteurs dans les systèmes dynamiques discrets. Ensuite, nous introduirons les exposants de Lyapunov, ainsi que les fractales et les dimensions fractales, qui sont des outils précieux pour caractériser la complexité des attracteurs et d'identifier leur comportement chaotique. Nous explorerons également différents types d'attracteurs, commençant par les attracteurs réguliers, puis nous nous intéresserons aux attracteurs étranges, connus sous le nom d'attracteurs chaotiques. Pour illustrer ces concepts, nous présenterons quelques exemples bien connus d'attracteurs, tels que l'attracteur de Henon, de Lozi, de Pickover et de Mira-Gumowski.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous nous concentrerons sur les attracteurs des endomorphismes du shift, également appelés automates cellulaires. Nous introduirons leur première caractérisation proposée par Mike Hurley et Peter Kurka, ainsi que les contraintes imposées par l'équicontinuité et la surjectivité sur ces attrac-

teurs. Nous aborderons également les attracteurs des sous-shifts (sous-décalages).
Pour conclure ce chapitre, nous fournirons quelques exemples d'attracteurs.

Chapitre 1

Généralités et notions de bases

Le but de ce premier chapitre est de rappeler les notions et les définitions de base de la théorie des systèmes dynamiques discrets, et d'introduire quelques propriétés essentielles au développement des autres chapitres.

1.1 Préliminaires

Définition 1.1 *Un système dynamique discret est un couple (X, f) , constitué d'un espace métrique compact appelé espace des phases et d'une application continue $f : X \rightarrow X$.*

Étant donné un point $x_0 \in X$, pour $n \in \mathbb{N}$ on définit l'itéré $n^{\text{ème}}$ du point x_0 par :
 $f^n(x_0) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x_0)$ et $f^0 = Id$.

Si f est inversible (bijective) on définit aussi $f^{-n}(x_0) = (f^{-1})^n(x_0)$ qui représente la position de x_0 dans le passé.

Remarque 1.1 *Dans le cas général, un système dynamique discret est décrit par une équation aux récurrences dite aussi transformation ponctuelle sous la forme*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.1}$$

Lorsque la fonction f dépend explicitement de n le système dynamique est dit non-

autonome, dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

Définition 1.2 On appelle **orbite** d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble :

$$\theta(x) = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}. \quad (1.2)$$

Si f est inversible l'orbite de x sera définie par :

$$\theta(x) = \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.3)$$

Représentation graphique de l'orbite

Dans le cas d'un système dynamique discret défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, il est facile de déterminer géométriquement l'orbite d'un point $x_0 \in I$ en procédant comme suit :

À partir du point $(x_0, f(x_0))$ nous traçons une ligne horizontale jusqu'à ce qu'elle coupe la première bissectrice au point $(f(x_0), f(x_0))$, il suffit ensuite de faire une projection verticale de ce point pour obtenir l'image $f(x_0)$ sur l'axe des abscisses, en répétant cette procédure, on obtient les itérés suivants du point x_0 .

Exemple 1.1 On considère la fonction $f(x) = 2.8x(1 - x)$ (dite application logistique) et le point initial $x_0 = 0.1$. La figure suivante représente l'orbite du point x_0 .

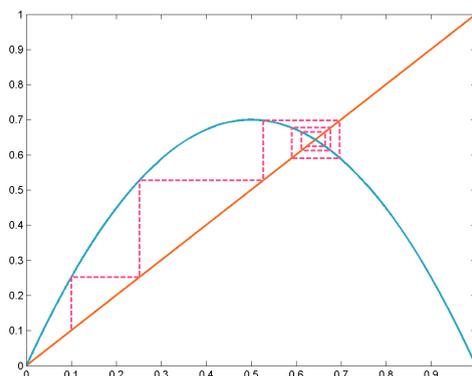


FIGURE 1.1 – Orbite du point $x_0 = 0.1$

1.2 Singularités d'un système dynamique discret

Les systèmes dynamiques discrets peuvent posséder divers types de singularités, correspondant à des points ou états spécifiques du système où des phénomènes particuliers se manifestent. L'étude de ces singularités revêt une importance capitale dans la compréhension du comportement globale du système. Dans cette section, nous présenterons quelques types de singularités fréquemment rencontrées.

1.2.1 Points fixes

Définition 1.3 On appelle **point fixe** du système (X, f) tout point $x^* \in X$ vérifiant :

$$f(x^*) = x^*.$$

1.2.2 Points périodiques

Définition 1.4 Un point $x \in X$ est dit **point périodique** de période $p \in \mathbb{N}^*$ s'il vérifie : $f^p(x) = x$ et pour tout $k < p$; $f^k(x) \neq x$.

Remarque 1.2 S'il existe un entier q tel que $f^q(x)$ est un point périodique, dans ce cas on dit que le point $x \in X$ est **pré-périodiques**.

1.2.3 Cycles

Définition 1.5 On appelle **cycle** d'ordre p toute orbite d'un point p -périodique. Autrement dit c'est l'ensemble $\{f^k(x), 0 \leq k \leq p-1\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ où x est un point p -périodique.

1.3 Stabilité des points fixes et des p -cycles

L'étude du comportement d'un système dynamique discret revient à l'étude de stabilité de ses singularités, dans cette section nous présentons quelques méthodes pour étudier la stabilité des points fixes et des p -cycles.

Définition 1.6 ([3])

1. Un point fixe x^* est **stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, y \in B_\delta(x^*) \Rightarrow \forall n \geq 0, d(f^n(y), x^*) < \varepsilon \quad (1.4)$$

2. Un point fixe x^* est **attractif** si :

$$\exists \delta > 0, \forall y \in X, y \in B_\delta(x^*) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), x^*) = 0 \quad (1.5)$$

3. Un point fixe x^* est **asymptotiquement stable** s'il est stable et attractif.

4. Un point fixe x^* est dit **instable** s'il n'est pas stable. C'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x^*), \exists n \geq 0 : d(f^n(y), x^*) \geq \varepsilon \quad (1.6)$$

5. Un point fixe x^* est dit **répulsif** s'il n'est pas attractif.

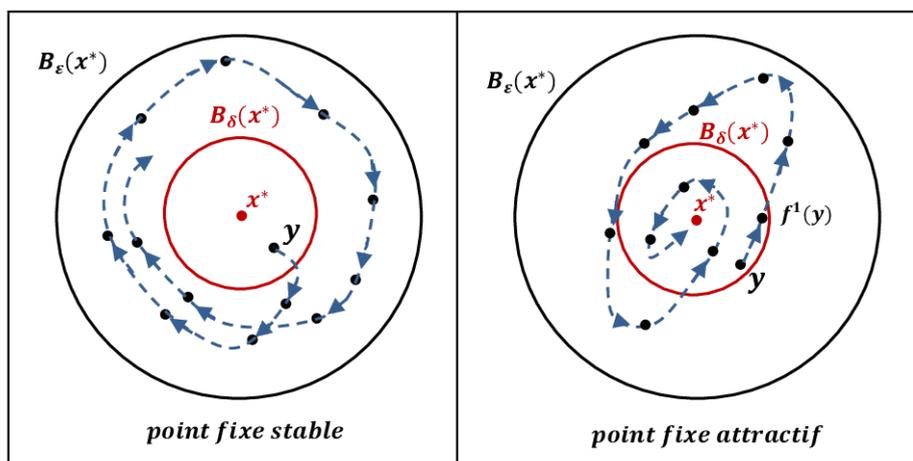


FIGURE 1.2 – Stabilité et attractivité d'un point fixe

Remarque 1.3 Un cycle d'ordre p est dit *stable* (resp. *attractif*) si l'un de ses points est *stable* (resp. *attractif*) en tant que point fixe de l'application f^p .

Exemple 1.2 Le système dynamique $([-1, 1], f)$ avec $f(x) = x^3$ possède trois points fixes $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$.

1. Le point fixe $x_1 = 0$ est asymptotiquement stable. En effet :

On a

$$f(x) = x^3, f^2(x) = x^{3^2}, f^3(x) = x^{3^3}, \dots, f^n(x) = x^{3^n}.$$

et

$$|f^n(x) - 0| = |x^{3^n}|$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt[3^n]{\varepsilon} \text{ tel que : } |x - 0| = |x| < \delta \implies |f^n(x) - 0| < \varepsilon.$$

Ainsi x_1 est stable.

De plus on a, pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x^{3^n}| = 0.$$

Ce qui fait que x_1 est attractif.

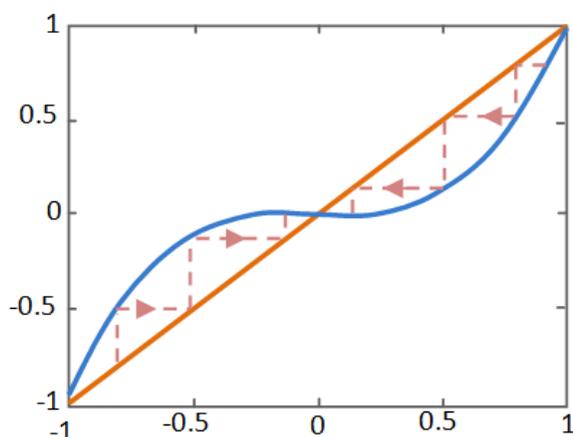
2. Les deux points $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$ sont instables. En effet,

- fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pour tout $\delta > 0$ il existe $x = \frac{3}{4}$ tel que $|x - 1| < \delta$ et il existe $n = 1$ vérifiant :

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{27}{64} - 1 \right| = \frac{37}{64} \geq \varepsilon.$$

D'où, $x_2 = 1$ est instable.

- Pour démontrer l'instabilité de $x_3 = -1$, nous pouvons utiliser la même approche en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{3}{4}$.

FIGURE 1.3 – Stabilité du système $([-1, 1], x^3)$

Remarque 1.4 *Comme nous l'avons remarqué dans cet exemple l'étude de stabilité en utilisant la définition (1.6) doit passer par le calcul de la formule de f^n ce qui n'est pas possible dans la plupart des cas. Pour cela, on va introduire une autre méthode pour étudier la stabilité qui utilise la notion de multiplicateur.*

1.3.1 Stabilité des singularités dans le cas uni-dimensionnel

Considérons le système dynamique (X, f) où f est dérivable, on définit le multiplicateur d'un point fixe $x^* \in X$ par :

$$\lambda = |f'(x^*)|. \quad (1.7)$$

Le multiplicateur d'un p -cycle est le produit des dérivées de f en chaque point du cycle, il est donné par la formule suivante :

$$\lambda = \prod_{i=1}^p |f'(x_i)|, \quad (1.8)$$

où $x_i, i = \overline{1, p}$ sont les points du cycle.

Proposition 1.1 ([5])

1. Un point fixe (resp. p -cycle) est asymptotiquement stable si $|\lambda| < 1$.
2. Un point fixe (resp. p -cycle) est répulsif si $|\lambda| > 1$.

Preuve

1. Choisissons un nombre $d \in]|f'(x^*)|, 1[$. Alors il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in]x^* - \delta_1, x^* + \delta_1[, |f'(x)| < d.$$

Soit $x_0 \in]x^* - \delta_1, x^* + \delta_1[$ avec $x_0 \neq x^*$. D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\exists c_1 \in]x_0, x^*[\text{ tel que : } x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f'(c_1) (x_0 - x^*)$$

Par conséquent,

$$|x_1 - x^*| < d |x_0 - x^*|.$$

Nous appliquons à x_1 le même argument utilisé pour x_0 , on obtient

$$|x_2 - x^*| < d |x_1 - x^*| < d^2 |x_0 - x^*|$$

On continue de la même manière, jusqu'à ce que on arrive après n étapes, à l'inégalité

$$|x_n - x^*| < d |x_{n-1} - x^*| < d^2 |x_{n-2} - x^*| < \dots < d^n |x_0 - x^*|$$

Par passage à la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Ainsi x^* est attractif.

Comme $d < 1$, alors $|x_n - x^*| < |x_0 - x^*| < \delta_1$.

D'où x^* est asymptotiquement stable.

2. Supposons maintenant que $\lambda = |f'(x^*)| > 1$, et choisissons un certain $d \in]1, |f'(x^*)|$, il existe alors $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in]x^* - \delta_2, x^* + \delta_2[, |f'(x)| > d.$$

Soit $x_0 \in]x^* - \delta_2, x^* + \delta_2[$. Par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists c_2 \in]x_0, x^*[\text{ tel que } : x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f'(c_2) (x_0 - x^*)$$

Ceci implique

$$|x_1 - x^*| > d |x_0 - x^*|$$

Par récurrence on obtient

$$|x_n - x^*| > d^n |x_0 - x^*|$$

Comme $d > 1$, on déduit que $|x_n - x^*| \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'où x^* est répulsif. □

Pour les p -cycles, on sait que chaque points x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ du cycle est un point fixe pour f^p . Il suffit donc d'appliquer le critère de stabilité à la fonction f^p .

Considérons le point x_0 du cycle, on a

$$\begin{aligned} (f^p)'(x_0) &= (f \circ f^{p-1})'(x_0) \\ &= f'(f^{p-1}(x_0)) \cdot (f^{p-1})'(x_0) \\ &= f'(x_{p-1}) \cdot (f^{p-1})'(x_0) \\ &\vdots \\ &= f'(x_{p-1}) \cdot f'(x_{p-2}) \cdot \dots \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.3.2 Stabilité des singularités dans le cas bi-dimensionnel

Soit (X, f) un système dynamique de dimension deux où f est différentiable. Dans ce cas les multiplicateurs d'un point fixe sont les valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice jacobienne de l'application f en ce point et les multiplicateurs d'un p -cycle sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de f^p en un points quelconque du cycle. Selon les modules des deux valeurs propres λ_1, λ_2 on distingue plusieurs types de points fixes (resp. p -cycle).

Proposition 1.2 ([2], [6])

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et :

- $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, le point fixe ou le p -cycle est de type **nœud stable**.
- $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$, le point fixe ou le p -cycle est de type **nœud instable**.
- $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, le point fixe ou le p -cycle est de type **col**.

2. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$), et :

- $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$, le point fixe ou le p -cycle est de type **foyer stable**.
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$, le point fixe ou le p -cycle est de type **foyer instable**.
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, le point fixe ou le p -cycle est de type **centre**.

Remarque : Un point fixe de type centre est stable mais il n'est pas attractif.

Ces types sont illustrés par les figures suivantes :

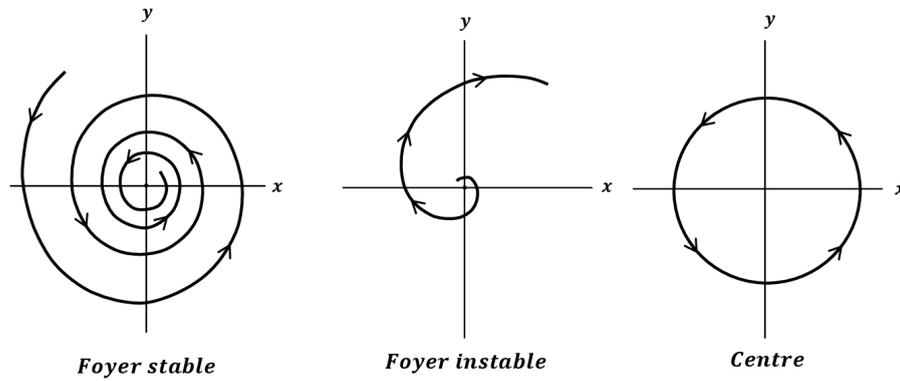


FIGURE 1.4 – Point fixe de type foyer

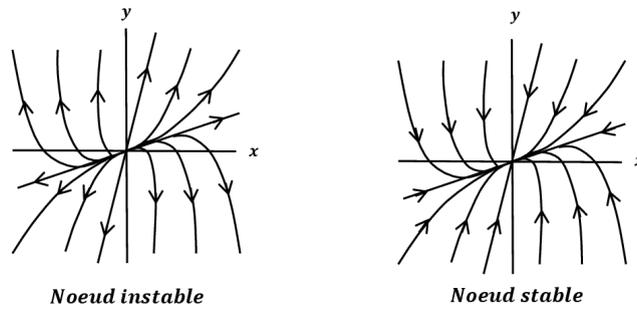


FIGURE 1.5 – Point fixe de type nœud

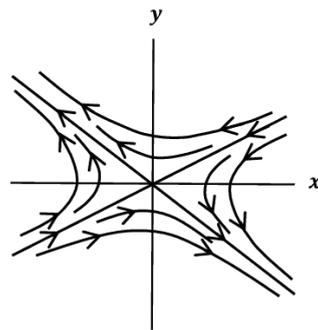


FIGURE 1.6 – Point fixe de type col

Preuve

Avant de procéder à la démonstration de cette proposition, nous devons rappeler quelques propriétés fondamentales de l'algèbre linéaire que nous utiliserons dans la preuve.

Lemme 1.1 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice 2×2 , où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout i et j .

1. Si la matrice A possède deux valeurs propres réelles distinctes, alors il existe une matrice 2×2 inversible P dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice A et une matrice diagonale D , telles que $A = PDP^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

2. Si la matrice A a deux valeurs propres complexes conjugués $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, alors il existe une matrice P inversible et une matrice C , telles que $A = PCP^{-1}$ avec

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Étant donné le système dynamique discret de dimension 2 :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = f_2(x_n, y_n) \end{cases} \quad (1.9)$$

et $X^* = (x^*, y^*)$ un point fixe du système (1.9).

En effectuant un développement de Taylor au voisinage du point fixe X^* on obtient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(X^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + R_1 \\ y_{n+1} = f_2(X^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + R_2 \end{cases}$$

où, R_1 et R_2 sont des termes non-linéaire. Lorsque $X_n = (x_n, y_n)$ est proche de X^* les termes R_1 et R_2 deviennent négligeables devant le terme linéaire, le système sera donc approximé par :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x^* = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) \\ y_{n+1} - y^* = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) \end{cases}.$$

Posons maintenant $\overline{X}_n = X_n - X^*$, le point fixe se ramène alors à l'origine $(0, 0)$ et le système devient :

$$\begin{cases} \overline{x}_{n+1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)\overline{x}_n + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)\overline{y}_n \\ \overline{y}_{n+1} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)\overline{x}_n + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)\overline{y}_n \end{cases} \quad (1.10)$$

C.à.d,

$$\overline{X}_{n+1} = J \overline{X}_n, \quad (1.11)$$

où

$$J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*) & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*) \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*) \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne de f en X^* . La détermination des valeurs propres de la matrice J nous permet d'étudier la stabilité de notre système. En effet

Cas 1 : Si J possède deux valeurs propres réelles distincts λ_1 et λ_2 , alors la matrice J est diagonalisable, c'est-à-dire il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D tel que $J = PDP^{-1}$, dans ce cas le système (1.11) peut s'écrire

$$\overline{X}_{n+1} = D \overline{X}_n, \quad (1.12)$$

où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

i.e. Ici on a fait un changement de variable, on avait $\overline{X}_{n+1} = PDP^{-1} \overline{X}_n$, on a posé $Y_n = P^{-1} \overline{X}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $Y_{n+1} = DY_n$. Pour simplifier on a gardé les mêmes notations.

Considérons la condition initiale $\overline{X}_0 = (\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, on a par récurrence

$$\overline{X}_n = D^n \overline{X}_0 \quad (1.13)$$

ou encore,

$$\overline{X}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \overline{X}_0 \quad (1.14)$$

C.à.d

$$\begin{cases} \bar{x}_n = \lambda_1^n \bar{x}_0 \\ \bar{y}_n = \lambda_2^n \bar{y}_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

- Si $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{x}_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{y}_n = 0$, et comme $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ alors \bar{y}_n tend vers 0 plus vite. Les orbites issu d'un point initial (\bar{x}_0, \bar{y}_0) ont alors une allure parabolique (\overline{X}_n converge vers l'origine tangentiellement au vecteur propre associé à la valeur propre λ_2), dans ce cas le point fixe est un nœud stable.
- Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{x}_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{y}_n = \infty$ (la divergence de \bar{x}_n est plus rapide), les orbites issu d'un point initial (\bar{x}_0, \bar{y}_0) ont une allure parabolique tout en s'éloignant de l'origine, ici le point fixe est un nœud instable.
- Si $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{x}_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{y}_n = \infty$, les orbites dans ce cas ont une allure hyperbolique. Dans ce cas le point fixe est un col.

Cas 2 : Si J possède **deux valeurs propres complexes conjuguées** $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ alors le système (1.11) devient

$$\overline{X}_{n+1} = C \overline{X}_n \quad (1.16)$$

où

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Introduisant les coordonnées polaires $\alpha = r \cos\theta$ et $\beta = r \sin\theta$, avec

$r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Alors

$$C = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} \overline{x_{n+1}} \\ \overline{y_{n+1}} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_n} \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

On va maintenant poser $\overline{x_n} = \rho_n \cos\phi_n$ et $\overline{y_n} = \rho_n \sin\phi_n$ pour tout entier naturel n , où $\rho_n = \sqrt{\overline{x_n}^2 + \overline{y_n}^2}$.

Donc

$$\begin{pmatrix} \rho_{n+1} \cos\phi_{n+1} \\ \rho_{n+1} \sin\phi_{n+1} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n \cos\phi_n \\ \rho_n \sin\phi_n \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \rho_{n+1} \cos\phi_{n+1} \\ \rho_{n+1} \sin\phi_{n+1} \end{pmatrix} = r\rho_n \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi_n - \sin\theta \sin\phi_n \\ \sin\theta \cos\phi_n + \cos\theta \sin\phi_n \end{pmatrix}$$

C.à.d

$$\begin{pmatrix} \rho_{n+1} \cos\phi_{n+1} \\ \rho_{n+1} \sin\phi_{n+1} \end{pmatrix} = r\rho_n \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi_n) \\ \sin(\theta + \phi_n) \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

En résolvant le système (1,17), on obtient

$$\begin{cases} \rho_{n+1} = r\rho_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \theta. \end{cases} \quad (1.18)$$

Par récurrence, on aura

$$\begin{cases} \rho_n = r^n \rho_0 \\ \phi_n = \phi_0 + n\theta. \end{cases} \quad (1.19)$$

- Si $r = 1$, alors $\rho_n = \rho_0$, c'est-à-dire $\bar{x}_n^2 + \bar{y}_n^2 = \rho_0^2$, les orbites issus d'un point initial (x_0, y_0) sont formés d'une suite de points dense donc le cercle du centre $(0, 0)$ et de rayon ρ_0 . Le point fixe dans ce cas est un centre.
- Si $r < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 0$. Donc les orbites s'approchent de l'origine en spirale. Le point fixe dans ce cas est un foyer stable.
- Si $r > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = +\infty$, c'est-à-dire les orbites s'éloignent de l'origine en spirale, le point fixe est alors un foyer instable. \square

Remarque 1.5 Comme dans les deux cas précédents, la stabilité des points fixes (resp. p -cycles) en cas de $\dim X = N > 2$, consiste à calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne de f (resp. f^p) données par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, qui représentent les multiplicateurs de ce point fixe (resp. p -cycle).

- Le point fixe (resp. p -cycles) sera donc stable si $|\lambda_i| < 1, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$.
- il sera instable si $\exists i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, tel que $|\lambda_i| > 1$.

1.4 Bassin d'attraction d'un point fixe

Définition 1.7 Soit (X, f) un système dynamique et soit $x^* \in X$ un point fixe de ce système, on appelle **bassin d'attraction** du point x^* l'ensemble :

$$\mathfrak{B}(x^*) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x^*\} \quad (1.20)$$

Remarque 1.6 Le bassin d'attraction d'un point fixe x^* ne peut jamais être vide car il contient toujours le point fixe x^*

Exemple 1.3 Considérons le système dynamique $([0, 1], x^3)$, qui possède trois points fixes, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$.

Leurs bassin d'attraction sont respectivement : $\mathfrak{B}(0) =]-1, 1[$, $\mathfrak{B}(1) = 1$ et $\mathfrak{B}(-1) = -1$. En effet, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{3^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

1.5 Propriétés topologiques des systèmes dynamiques discrets

Dans cette section, nous allons présenter des propriétés essentielles des systèmes dynamiques discrets qui seront utiles pour les chapitres à venir.

1.5.1 Sensibilité aux conditions initiales

Un concept très important dans l'étude des systèmes dynamiques est de savoir si le système est sensible aux conditions initiales, ce qui se traduit par le fait que deux points sont initialement très proches, mais leurs orbites s'écartent au bout d'un moment.

Définition 1.8 *Un système dynamique (X, f) est dit **sensible aux conditions initiales** si :*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \forall x \in X, \exists y \in B_\delta(x), \exists n > 0, d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon \quad (1.21)$$

Exemple 1.4 *Considérons le système dynamique discret $([0, 1], f_4)$ où f_4 est l'application logistique donnée par la formule suivante :*

$$f_4(x) = 4x(1 - x)$$

Soit $x_0 = 0.09$ et $y_0 = 0.11$ deux points initiaux proches l'un de l'autre, la figure (1.7) montre que les orbites issu de ses points s'écartent après seulement trois itérations ce qui signifie que l'application f_4 est sensible aux conditions initiales.

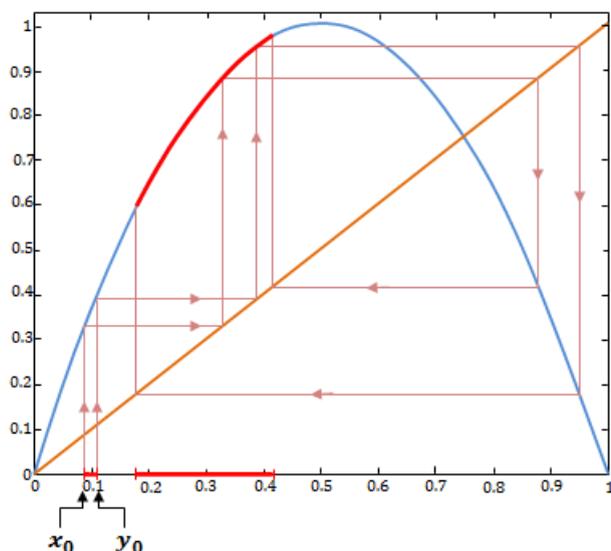


FIGURE 1.7 – Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique f_4

1.5.2 Équicontinuité

L'équicontinuité est une généralisation de la notion de stabilité des cycles et des points fixes pour des points quelconques du système. Un point est considéré comme un point d'équicontinuité s'il reste suffisamment proche des autres points de son voisinage à travers les itérations.

Définition 1.9 Soit (X, f) un système dynamique discret.

- Un point $x \in X$ est dit **point d'équicontinuité** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall n > 0, d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon. \quad (1.22)$$

- Le système (X, f) est **équicontinu** si tout point $x \in X$ est un point d'équicontinuité, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, (d(x, y) < \delta \implies \forall n > 0, d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon) \quad (1.23)$$

1.5.3 Transitivité et mélange topologiques

Définition 1.10 ([1]) On dit qu'un système dynamique (X, f) est **transitif** si

$$\forall U, V \subset X (\text{ouverts non vides}), \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Définition 1.11 ([1]) Un système dynamique (X, f) est dit **topologiquement mélangeant** si :

$$\forall U, V \subset X (\text{ouverts non vides}), \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N : f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Remarque 1.7 Le mélange topologique est une notion plus forte qui implique la transitivité, mais la réciproque est fausse.

1.5.4 Chaînes

Les chaînes représentent des orbites qui peuvent présenter de petites erreurs à chaque itération. Par exemple, lors du calcul numérique des orbites d'un système dynamique, des erreurs d'approximation inférieures à un certain pas ε peuvent se produire en raison de l'arrondi effectué avant chaque itération. Ainsi, au lieu d'une orbite exacte, on obtient une ε -chaîne qui capture ces petites erreurs [23].

Définition 1.12

Soit (X, f) un système dynamique discret, et soit $\varepsilon > 0$.

1. Une suite finie $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ($x_i \in X, \forall i$) est une ε -**chaîne** de x_0 jusqu'à x_n , si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout $i < n$.
2. **La relation de Chaîne** notée C avec $C \subseteq X \times X$ est définie par :

$$(x, y) \in C \iff \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe une } \varepsilon\text{-chaîne reliant } x \text{ et } y.$$

3. Le système (X, f) est **transitif par chaîne** si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout points $x, y \in X$, il existe une ε -chaîne $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ reliant x et y ($x_0 = x$ et $x_n = y$), c'est-à-dire $(x, y) \in C$.

4. Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est **invariant par chaîne** ou C -invariant si pour tout point $y \in Y$, tous les points $x \in X$ qui sont reliés à y par des ε -chaînes pour tout $\varepsilon > 0$ sont dans Y , en d'autre terme $C(Y) \subseteq Y$.

Ci-dessous un schéma explicatif du concept de chaîne.

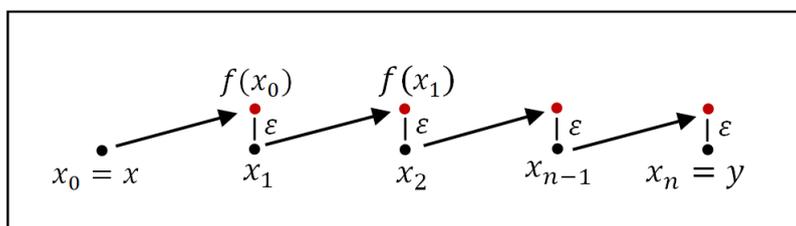


FIGURE 1.8 – Relation de chaîne (ε -chaîne entre x et y)

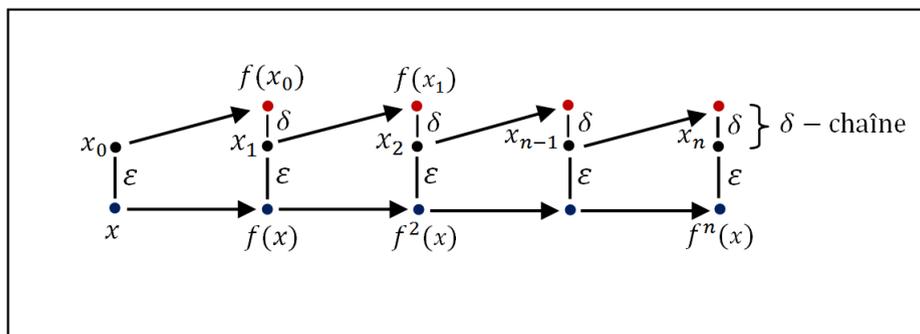
1.5.5 Propriété de l'ombre

Définition 1.13 ([3])

Soit (X, f) un système dynamique discret.

1. Un point $x \in X$ est une ε -ombre d'une suite finie $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, si pour tout $i \leq n$, $d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$.
2. Le système dynamique (X, f) possède la propriété de l'ombre si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toutes les δ -chaînes sont ε -ombragées par un point $x \in X$.
C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_i)_{0 \leq i \leq n}, \forall i, d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta \Rightarrow \exists x, \forall i, d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$$

FIGURE 1.9 – δ -chaîne ε -ombragé par un point $x \in X$.**Proposition 1.3** ([21])

Si le système (X, f) est transitif par chaîne et il possède la propriété de l'ombre, alors il est transitif.

Preuve

Soient $U, V \subseteq X$ deux ouvert non vides. Il existe alors $\varepsilon \geq 0$ tel que

$$x \in B_\varepsilon(x) \subseteq U \quad \text{et} \quad y \in B_\varepsilon(y) \subseteq V.$$

Soit $\delta > 0$ tel que tout δ -chaîne est ε -ombragé par une certaine orbite d'un certain point.

Donc, pour une δ -chaîne $x = x_0, \dots, x_m = y$, il existe un point $z \in X$ tel que $d(f^i(z), x_i) < \varepsilon$. Alors, $f^m(z) \in f^m(U) \cap V$. \square

1.6 Notions de la dynamique symbolique

Dans cette partie, nous allons présenter divers concepts liés à la dynamique symbolique, notamment les espaces symboliques, le décalage de Bernoulli et les endomorphismes du shift.

1.6.1 Espaces symboliques

Définition 1.14 ([4])

Soit A un alphabet, qui est un ensemble fini non vide d'éléments appelés lettres ou symboles.

On appelle espace symbolique $A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble de toute les suites bi-infinies d'éléments de l'alphabet A . Une telle suite est notée par : $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où i désigne la position de la lettre x_i dans cette suite, en d'autre terme x_i est la i -ème coordonnée de x .

On peut noter cet espace comme suit :

$$A^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in A, \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

L'espace $A^{\mathbb{Z}}$ peut aussi être considéré comme le produit infini de l'alphabet A :

$$A^{\mathbb{Z}} = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} A.$$

Exemple 1.5 Étant donné l'alphabet $\{0, 1\}$, l'espace symbolique $2^{\mathbb{Z}} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ est appelé **espace binaire**, il est composé de toutes les suites bi-infinies formées des chiffres "0" et "1", telles que la suite ...101101010... .

Notation 1.1

1. Une suite finie de lettres, par exemple $x = x_1 \dots x_n \in A^n$, est appelée mot ou bloc.
2. La notation $|u| = n$ est utilisée pour représenter la longueur du mot $u \in A^n$.
3. Une configuration sur l'alphabet A est un élément de $A^{\mathbb{Z}}$.
4. On désigne par $x_{[i,j]}$ la partie de la configuration x qui se situe entre les positions i et j .
5. On note par $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$ l'ensemble de tout les mots finis.

1.6.2 Topologie de l'espace $A^{\mathbb{Z}}$

L'espace symbolique $A^{\mathbb{Z}}$ peut être muni de la topologie prodiscrète (topologie produit induite de la topologie discrète sur l'alphabet A), connue dans la littérature sous le nom de topologie de Cantor. Cette topologie est métrisable, ce qui permet de définir une distance entre les configurations.

Une des distances courantes qui génère cette topologie sera présentée dans cette proposition.

Proposition 1.4 ([20])

Considérons l'espace symbolique $A^{\mathbb{Z}}$, l'application d définie par :

$$d : A^{\mathbb{Z}} \times A^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{où } n = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}.$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = 2^{-n}$$

est une distance sur $A^{\mathbb{Z}}$.

Preuve

Soient x, y et $z \in A^{\mathbb{Z}}$, on a :

1. $d(x, x) = \frac{1}{2^n}$ avec $n = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq x_i\} = \infty \iff d(x, x) = 0$.

2. $d(x, y) = 0 \iff n = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\} = \infty \iff x = y$.

3. $d(x, y) = \frac{1}{2^n}$ avec $n = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\} = \min\{i \in \mathbb{Z} : y_i \neq x_i\}$.

D'où $d(x, y) = d(y, x)$.

4. Tout d'abord, posons

$$n = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq z_i\}, \quad m = \min\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\} \quad \text{et} \quad k = \min\{i \in \mathbb{Z} : y_i \neq z_i\}.$$

Remarquons que si on a à la fois, $m > n$ et $k > n$, alors $x_n = y_n = z_n$, on a donc une contradiction.

Par conséquent, nous avons soit $m > n$ ou $k > n$. Ce qui nous permet d'établir l'inégalité triangulaire suivante : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. \square

Ainsi, deux configurations sont considérées comme proches lorsque leurs valeurs coïncident sur une grande partie centrale :

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x, y) < 2^{-i} \iff x[-i, i] = y[-i, i].$$

Définition 1.15 - *Les cylindres* ([20])

Soit $u \in A^n$ un mot fini, le **cylindre** associé au mot u en position $k \in \mathbb{Z}$, noté $[u]_k$ est l'ensemble des configurations contenant u en position k . C'est-à-dire

$$[u]_k = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_{[k, k+|u|-1]} = u\}.$$

En particulier, on note $[u]$ le cylindre centré en position 0 (c.à.d, le mot u est présent dans sa partie centrale).

Propriété 1.1

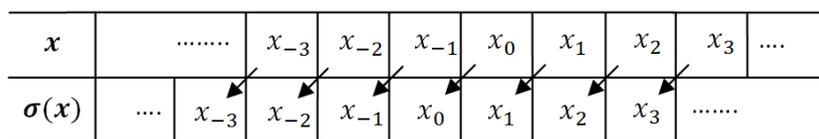
1. Les cylindres représentent des ensembles de $A^{\mathbb{Z}}$ qui sont à la fois ouverts et fermés.
2. Les cylindres forment une base topologique de l'espace $A^{\mathbb{Z}}$, autrement dit, un ensemble est ouvert dans cette topologie s'il peut s'écrire comme une union de cylindres.
3. L'espace $A^{\mathbb{Z}}$ est compact (par le théorème de Tychonoff qui affirme qu'un produit quelconque d'espaces compacts est compact).

1.6.3 Décalage de Bernoulli (shift)

Définition 1.16 Le décalage de Bernoulli est l'application $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \longrightarrow A^{\mathbb{Z}}$ qui décale chaque lettre de la configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$ d'une position vers la gauche, elle est définie comme suit :

$$\sigma(x)_i = x_{i+1}.$$

C.à.d, pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$:



1.6.4 Sous-décalage (sous-shift)

Définition 1.17 ([3])

Soit $\Sigma \subseteq A^{\mathbb{Z}}$, on dit que Σ est un **Sous-décalage** (sous-shift) s'il est fermé et fortement σ -invariant ($\sigma(\Sigma) = \Sigma$).

1.6.5 Endomorphismes du shift (automates cellulaires)

Définition 1.18 ([3])

Une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est dite endomorphisme du shift (automate cellulaire) s'il existe des entiers m, a avec $m < a$ (représentant respectivement la mémoire et l'anticipation) et une règle locale $f : A^{a-m+1} \rightarrow A$ telle que pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$F(x)_i = f(x_{[i+m, i+a]})$$

Cette relation est illustrée dans la figure suivante

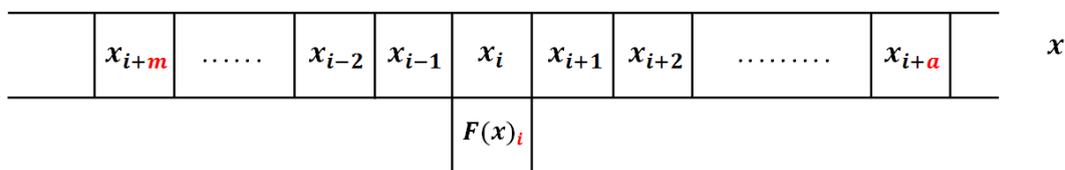


FIGURE 1.10 – La règle locale

- On note par $r = \max\{-m, a\}$, le rayon de F .
- d est son diamètre, il correspond à la différence entre a et m ($d = a - m$).

Le théorème suivant présente une caractérisation essentielle qui met en évidence la relation entre le décalage de Bernoulli et les endomorphismes du shift.

Théorème 1.1 (*théorème de Hedlund [3]*)

L'application $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un endomorphisme du shift si et seulement si elle est continue et commute avec le shift ($\sigma \circ F = F \circ \sigma$).

Preuve

\Rightarrow Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un endomorphisme du shift de rayon $r = \max\{-m, a\}$.

- Tout d'abord on va montrer que F est continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ on a :

$$d(x, y) < 2^{-n-r} \implies x_{[-n-r, n+r]} = y_{[-n-r, n+r]}.$$

$$\implies x_{[-n+m, n+a]} = y_{[-n+m, n+a]}.$$

$$\implies F(x)_{[-n, n]} = F(y)_{[-n, n]}.$$

$$\implies d(F(x), F(y)) = \frac{1}{2^n}.$$

$$\implies F \text{ est continue.}$$

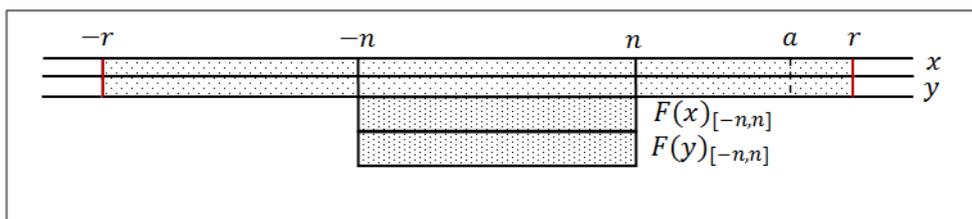


FIGURE 1.11 – Schéma explicatif pour la preuve du théorème

- maintenant montrons que F commute avec le shift.

On a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$(F(\sigma(x)))_i = f((\sigma(x))_{[i+m, i+a]}) = f(x_{[i+m+1, i+a+1]}) = (F(x))_{i+1} = \sigma(F(x))_i.$$

D'où le résultat.

\Leftarrow On suppose que F est continue et qu'elle commute avec le shift. Comme $A^{\mathbb{Z}}$ est compact et F est continu, alors F est de plus uniformément continue.

Donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $r > 0$ tel que pour $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$d(x, y) < \frac{1}{2^r} \Rightarrow d(F(x), F(y)) < 1.$$

ce qui est équivalent

$$x_{[-r, r]} = y_{[-r, r]} \implies F(x)_0 = F(y)_0.$$

Donc il existe $f : A^{2r+1} \implies A$ tel que $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}$:

$$F(x)_0 = f(x_{[-r, r]}).$$

Comme F commute avec le shift on aura donc :

$$F(x)_i = \sigma^i(F(x))_0 = F(\sigma^i(x))_0 = f(\sigma^i(x)_{[-r, r]}) = f(x_{[i-r, i+r]}).$$

Ainsi, on a une règle locale de mémoire $m = -r$ et d'anticipation $a = r$.

D'où, F est un endomorphisme du shift. \square

1.6.6 Quelques propriétés des endomorphismes du shift

Proposition 1.5 (Surjectivité [23])

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift de règle local $f : A^{d+1} \longrightarrow A$. Les condition suivantes sont équivalentes

1. $F : A^{\mathbb{Z}} \longrightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est surjectif.
2. Pour toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}}$, $F^{-1}(x)$ est un ensemble fini.
3. $f : A^* \longrightarrow A^*$ est surjectif.
4. Pour tout $u \in A^*$, $|f^{-1}(u)| = |A|^d$.

Proposition 1.6

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift surjectif. Si $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est un cylindre invariant, alors $F(U) = U$ et $F^{-1}(U) = U$.

Proposition 1.7 (Équicontinuité)

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

1. $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ est équicontinu.
2. Il existe une pré-période $m \geq 0$ et une période $p > 0$, tel que $F^{p+m} = F^m$.

Proposition 1.8

Soient $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift et $\Sigma \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ un sous-shift F -invariant. Si (Σ, F) est transitif alors il est soit sensible aux conditions initiales soit constitué d'une seule orbite périodique.

Chapitre 2

Attracteurs au sens topologique

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur l'étude approfondie des attracteurs en systèmes dynamiques discrets, nous commencerons par introduire les ensembles oméga limites et les attracteurs. Ensuite, nous présenterons les différentes caractérisations des attracteurs ainsi que les différents types que l'on peut rencontrer. Nous aborderons brièvement quelques bifurcations. De plus, nous étudierons les exposants de Lyapunov et les fractales, qui sont des outils puissants pour classifier les attracteurs et identifier leurs comportements chaotiques. Enfin, nous conclurons par quelques exemples d'attracteurs connus.

2.1 Ensemble oméga limite

Dans cette section, nous aborderons le concept d'ensemble oméga limite, qui joue un rôle essentiel dans l'étude des attracteurs.

Définition 2.1 Soit (X, f) un système dynamique. **L'oméga limite** d'un ensemble $Y \subseteq X$ est donné par :

$$\omega(Y) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\bigcup_{m>n} f^m(Y)}. \quad (2.1)$$

Si $Y \subseteq X$ est un fermé invariant, la définition de l'oméga limite devient simplement :

$$\omega(Y) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(Y).$$

Remarque 2.1

1. Soit $y \in X$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(y) = x$ alors x est un point fixe et $\omega(\{y\}) = \{x\}$.
2. Si les itérés de y converge vers une orbite périodique de période p , c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{np}(y) = x$ alors $\omega(\{y\}) = \theta(x)$.
3. Si $Y \subseteq Z$ alors $\omega(Y) \subseteq \omega(Z)$.

Exemple 2.1 Prenons le système dynamique (X, f) , où $X = [0, 1]$ et $f(x) = x^2$.

Soit $[a, b] \subset [0, 1[$, alors $\omega([a, b]) = \{0\}$, comme illustré dans la figure ci-dessous.

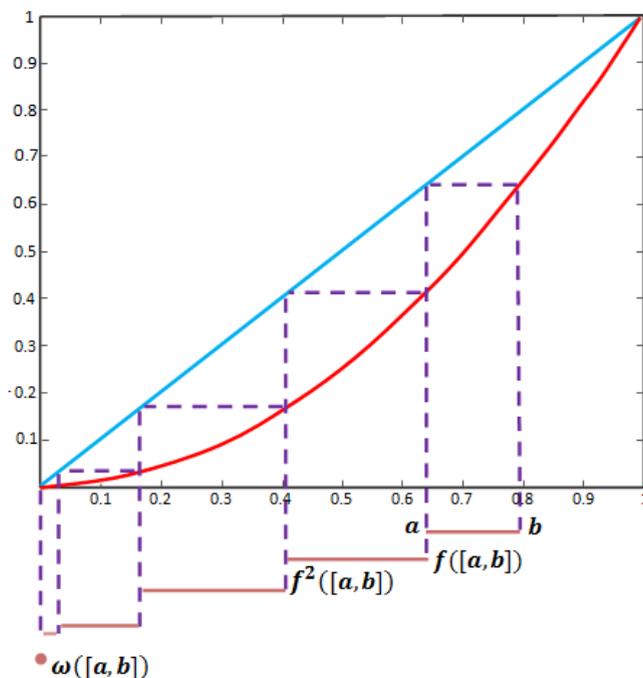


FIGURE 2.1 – Oméga limite

Proposition 2.1 ([3])

Soient (X, f) un système dynamique et $Y \subseteq X$.

Un point $y \in X$ appartient à $\omega(Y)$, si et seulement si il existe une suite de point $y_k \in Y$ et une suite numérique croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(y_k) = y$.

Preuve

\Rightarrow) Soit $y \in \omega(Y)$, on construit des suites de y_k et n_k par récurrence avec $y_0 \in Y$ et $n_0 = 0$ (car $Y \neq \emptyset$).

Supposons maintenant qu'on a y_{k-1} et n_{k-1} .

Comme $y \in \overline{\bigcup \{f^m(Y), m > n_{k-1}\}}$, alors $B_{\frac{1}{k}}(y) \cap \overline{\bigcup \{f^m(Y), m > n_{k-1}\}} \neq \emptyset$.

Par conséquent, il existe $y_k \in Y$ et $n_k > n_{k-1}$ tel que $d(f^{n_k}(y_k), y) < \frac{1}{k}$.

D'où $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(y_k) = y$.

\Leftarrow) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(y_k) = y$, alors pour tout $n > 0$ et pour tout voisinage U de y , il existe $y_k \in Y$ et $n_k > n$ tel que $f^{n_k}(y_k) \in U$ (Figure 2.2). Ainsi $y \in \overline{\bigcup \{f^m(Y), m > n\}}$. D'où $y \in \omega(Y)$.

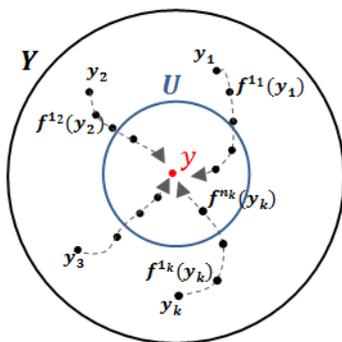


FIGURE 2.2 – Schéma explicatif pour la preuve de la proposition 2.1

□

Proposition 2.2 ([3])

Soit (X, f) un système dynamique et soit $Y \subseteq X$ un sous ensemble non vide. Alors $\omega(Y)$ est un fermé non vide, de plus

$$\omega(Y) = f(\omega(Y)) = \omega(\omega(Y)) = \omega(\overline{Y})$$

Preuve

- Comme X est compact et $\omega(Y)$ est une intersection d'une suite décroissante d'ensembles fermés non vide, alors $\omega(Y)$ est non vide et fermé.
- Soit $y \in \omega(Y)$, il existe donc $y_k \in Y$ et une suite croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(y_k) = y$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k+1}(y_k) = f(y)$. D'où $f(\omega(Y)) \subseteq \omega(Y)$.
- On va montrer maintenant que $\omega(Y) \subseteq f(\omega(Y))$. X étant compact, alors d'après la propriété de **Bolzano-Weierstrass** la suite $f^{n_k-1}(y_k)$ possède une sous suite convergente, c'est-à-dire $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_{k_i}-1}(y_{k_i}) = z$, ainsi $z \in \omega(Y)$ et $f(z) = y$. D'où $\omega(Y) \subseteq f(\omega(Y))$.
- Comme $f(\omega(Y)) = \omega(Y)$, alors $f^m(\omega(Y)) = \omega(Y)$ il en résulte donc $\omega(\omega(Y)) = \omega(Y)$.
- D'une part on a, $Y \subseteq \overline{Y}$ alors $\omega(Y) \subseteq \omega(\overline{Y})$.
D'autre part, comme $f^n(\overline{Y}) \subseteq \overline{f^n(Y)} \subseteq \overline{\bigcup\{f^n(Y) : m > n\}}$, alors $\omega(\overline{Y}) \subseteq \omega(Y)$. D'où $\omega(\overline{Y}) = \omega(Y)$. □

2.2 Attracteurs

Les attracteurs sont des objets géométriques particuliers décrivant le comportement à long terme des systèmes dynamiques et vers lesquels converge toutes les orbites voisines quelques soient les conditions initiales. Notre objectif dans cette partie est de définir ses singularités ensuite de donner leurs caractérisations.

Définition 2.2 (*Ensemble invariant*).

1. On dit qu'un sous ensemble $A \subset X$ est invariant si $f(A) \subset A$.
2. Un sous ensemble A est dit fortement invariant si $f(A) = A$.

Définition 2.3 ([3]) Soit (X, f) un système dynamique discret.

1. Un sous-ensemble non vide $Y \subseteq X$ est un **attracteur** s'il est fermé invariant et asymptotiquement stable, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ vérifiant pour tout point $x \in X$:

$$d(x, Y) < \delta \implies \forall n \geq 0, d(f^n(x), Y) < \varepsilon \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), Y) = 0.$$

2. Y est un **attracteur minimale** si tout sous ensemble $Z \subset Y$ n'est pas attracteur.
3. Y est **quasi-attracteur** s'il est l'intersection d'un ensemble dénombrable d'attracteurs mais pas un attracteur.

Remarque 2.2 On rappelle que la distance entre un point x et un ensemble Y est donnée par :

$$d(x, Y) = \inf\{d(x, y) : y \in Y\}$$

Définition 2.4 (*Bassin d'attraction*)

Le bassin d'attraction d'un attracteur Y est l'ensemble des points de l'espace des phases dont les orbites convergent vers l'attracteur considéré. Cela s'exprime par la formule suivante :

$$\mathfrak{B}(Y) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), Y) = 0\}.$$

Exemple 2.2

- (i) Les attracteurs du système dynamique $([-1, 1], f)$ avec $f(x) = x^3$ sont : $[-1, 0]$, $\{0\}$ et $[0, 1]$.

Leurs bassins d'attraction :

$$\mathfrak{B}([-1, 0]) = [-1, 1[, \mathfrak{B}([0, 1]) =]-1, 1], \mathfrak{B}(\{0\}) =]-1, 1[.$$

L'attracteur minimale est : $\{0\}$.

(ii) Les attracteurs du système dynamique $([-1, 1], g)$ avec $g(x) = \sqrt[3]{x}$ sont : $[-1, 1]$, $\{-1\}$ et $\{1\}$.

Leurs bassins d'attraction :

$$\mathfrak{B}([-1, 0]) = [-1, 1[, \mathfrak{B}([0, 1]) =]-1, 1], \mathfrak{B}(\{0\}) =]-1, 1[.$$

Les attracteurs minimaux sont : $\{-1\}$ et $\{1\}$.

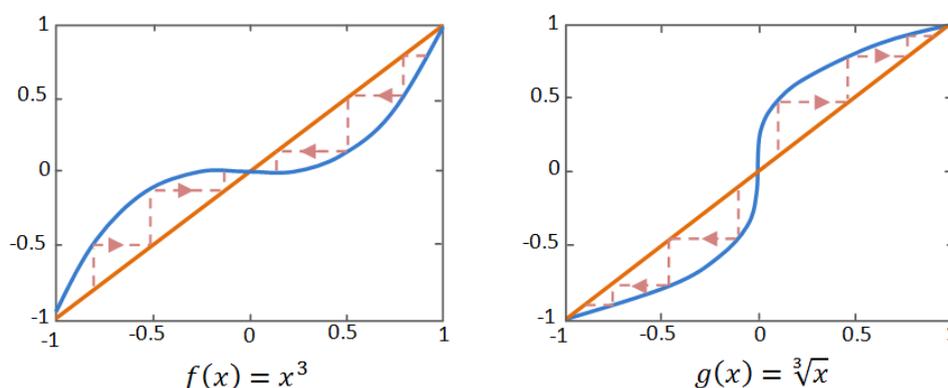


FIGURE 2.3 – Attracteurs des systèmes $([-1, 1], x^3)$ et $([-1, 1], \sqrt[3]{x})$.

2.3 Caractérisation des attracteurs

Définition 2.5 ([3]) Soit (X, f) un système dynamique. Un sous ensemble $V \subseteq X$ est dit entrant si $f(\bar{V}) \subseteq \overset{\circ}{V}$.

Proposition 2.3 ([3])

Soit (X, f) un système dynamique et $V \subseteq X$ un sous ensemble entrant non vide. Alors $Y = \omega(V)$ est un attracteur.

Preuve

- $Y = \omega(V)$ alors d'après la proposition 2.2, Y est non vide, fermé et invariant.
- Supposons que Y n'est pas stable, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta = \frac{1}{k} > 0, \exists x_k \in X \text{ tel que } d(x_k, Y) < \frac{1}{k} \text{ et } \exists n_k \geq 0 : d(f^{n_k}(x_k), Y) \geq \varepsilon.$$

Comme $Y \subseteq f(V) \subseteq \overset{\circ}{V}$ et X est compact alors $\exists k_0 > 0$ tel que $B_{k_0}(Y) \subseteq V$. Ainsi $\forall k \geq k_0, x_k \in V$.

D'un autre coté on sait que la suite $(f^{n_k}(x_k))$ possède une sous suite convergente, c'est-à-dire $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_{k_i}}(x_{k_i}) = x$ donc $x \in \omega(V) = Y$. Contradiction avec $d(f^{n_k}(x), Y) \geq \varepsilon$.

- Comme $Y \subseteq \overset{\circ}{V}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B_\delta(Y) \subseteq \overset{\circ}{V}$. Supposons que Y n'est pas attractif c'est-à-dire qu'il existe $x \in V \subseteq X$ tel que $d(x, Y) < \delta$ et $d(f^n(x), Y)$ ne converge pas vers 0. Cela implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(f^n(x), Y) \geq \varepsilon$. Ainsi il existe une sous suite convergente $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ lorsque $i \rightarrow \infty$ tel que $d(f^{n_i}(x), Y) \geq \varepsilon$. comme $x \in V$ alors $y \in \omega(V) = Y$ et (par continuité de la distance) $d(y, Y) \geq \varepsilon$ qui est une contradiction. \square

Proposition 2.4 ([3])

Soit $Y \subseteq X$ un attracteur. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé entrant $V \subseteq B_\varepsilon(Y)$ tel que $Y = \omega(V)$.

Preuve

Y est un attracteur alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point $x \in X$:

$$d(x, Y) < \delta \implies \forall n \geq 0, d(f^n(x), Y) < \varepsilon \text{ Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), Y) = 0.$$

On choisit $0 < \varepsilon_0 < \delta$ et $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$ tel que pour tout $x \in X$

$$d(x, Y) < \delta_0 \implies \forall n \geq 0, d(f^n(x), Y) < \varepsilon_0.$$

Choisissons un ensemble fermé W avec $B_{\varepsilon_0}(Y) \subseteq \overset{\circ}{W} \subseteq B_\delta(Y)$ on aura donc

$$B_{\delta_0}(Y) \subseteq B_{\varepsilon_0}(Y) \subseteq \overset{\circ}{W} \subseteq \overline{W} \subseteq B_\delta(Y) \subseteq B_{\varepsilon_0}.$$

Si $x \in W$, alors $d(f^n(x), Y) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $\exists n_x > 0$ tel que $f^{n_x}(x) \in$

$B_\delta(Y)$. Par continuité de f il existe un ouvert $W_x \subseteq B_\delta(x)$ tel que $x \in W_x$ et $f^{n_x}(W_x) \subseteq B_{\delta_0}(Y)$. Alors pour tout $n \geq n_x$, $f^n(W_x) \subseteq B_{\varepsilon_0}(Y)$.

Ainsi $\{W_x : x \in W\}$ est un recouvrement ouvert de W , il possède donc un sous recouvrement fini $\{W_{x_1}, W_{x_2}, W_{x_3}, \dots, W_{x_n}\}$.

Pour $n = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_n}\}$, on obtient

$$f^n(W) \subseteq B_{\varepsilon_0}(Y) \subseteq \overset{\circ}{W}.$$

W est donc un ensemble entrant pour f^n contenu dans $B_\varepsilon(Y)$. Pour obtenir un ensemble entrant pour f on considère les itérés de l'ensemble W . Posons $W_0 = W$, comme $f(f^{n-1}(W)) \subseteq \overset{\circ}{W}_0 \subseteq B_\varepsilon(Y)$ et $d(f^n(W), X \setminus \overset{\circ}{W}) > 0$, il existe un ensemble fermé $W_1 \subseteq B_\varepsilon(Y)$, tel que pour tout $f^{n-1}(W) \subseteq \overset{\circ}{W}_1$, $f(W_1) \subseteq \overset{\circ}{W}_0$.

En itérant on obtient des ensembles fermés, tel que

$$f^{n-k}(W) \subseteq \overset{\circ}{W}_k, f(W_k) \subseteq \overset{\circ}{W}_{k-1} \text{ et } f(W_0) \subseteq \overset{\circ}{W}_{n-1}.$$

Pour $V = W_0 \cup W_1 \dots \cup W_{n-1}$, on obtient

$$f(V) \subseteq \overset{\circ}{W}_{n-1} \cup \overset{\circ}{W}_0 \dots \cup \overset{\circ}{W}_{n-2} \subseteq \overset{\circ}{V}.$$

D'où pour tout k , $f^k(W) \subset B_\varepsilon(Y)$ et $W(V) = Y$. □

Proposition 2.5 ([3])

Soit (X, f) un système dynamique, on a alors les propriétés suivantes :

1. Il existe un attracteur maximale $\omega(X)$.
2. Si Y_0 et Y_1 sont des attracteurs, alors $Y_0 \cup Y_1$ est un attracteur.
3. Si Y_0 et Y_1 sont deux attracteurs tel que $Y_0 \cap Y_1 \neq \emptyset$, alors $\omega(Y_0 \cap Y_1)$ est le plus grand attracteur contenu dans chaque attracteurs .
4. Si Y est un attracteur et B une base dénombrable, alors il existe un ensemble entrant $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ tel que $V_i \in B$ et $\omega(V) = Y$.

5. L'ensemble des attracteurs est au plus dénombrable.

Preuve

1. X est un ensemble entrant ($f(\overline{X}) \subseteq \overset{\circ}{X}$), alors $\omega(X)$ est un attracteur.
2. Soit V_0 et V_1 deux ensembles entrant et $Y_0 = \omega(V_0)$, $Y_1 = \omega(V_1)$. Comme

$$f(\overline{V_0 \cup V_1}) = f(\overline{V_0} \cup \overline{V_1}) \subseteq \overset{\circ}{V_0} \cup \overset{\circ}{V_1} \subseteq V_0 \overset{\circ}{\cup} V_1,$$

alors $\omega(V_0 \cup V_1)$ est un attracteur. On a $Y_0 \cup Y_1 \subset \omega(V_0 \cup V_1)$. Si $y \in \omega(V_0 \cup V_1)$, donc $\exists y_k \in V_0 \cup V_1$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(y_k) = y$. Comme $y_k \in V_0 \cup V_1$ donc $y_k \in V_0$ ou $y_k \in V_1$ alors $y \in \omega(V_0)$ ou $y \in \omega(V_1)$. Ainsi $\omega(V_0 \cup V_1) = Y_0 \cup Y_1$, d'où $Y_0 \cup Y_1$ est un attracteur.

3. si $Y_0 \cup Y_1 \neq \emptyset$ alors $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$.

$$f(\overline{V_0 \cup V_1}) \subseteq f(\overline{V_0} \cup \overline{V_1}) \subseteq \overset{\circ}{V_0} \cup \overset{\circ}{V_1} \subseteq V_0 \overset{\circ}{\cup} V_1.$$

$\omega(V_0 \cup V_1)$ est donc un attracteur. Comme $\omega(Y_0 \cap Y_1) = \omega(V_0 \cap V_1) \subseteq Y_0 \cap Y_1$. Alors $\omega(Y_0 \cap Y_1) = \omega(V_0 \cap V_1)$ est un attracteur.

4. Soit W un ensemble entrant et $\omega(W) = Y$. Pour tout $x \in \overline{W}$, il existe un ensemble $x \in V_x \in B$ tel que $f(\overline{V_x}) \subseteq \overset{\circ}{W}$.

le recouvrement ouvert $\{V_x : x \in \overline{W}\}$ possède un sous recouvrement $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}\}$ et $V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \dots \cup V_{x_n}$ est un ensemble entrant tel que $\omega(V) = Y$.

5. Le nombre d'unions finies d'ensembles de la base B est dénombrable. Alors l'ensemble des attracteurs est aussi dénombrable. □

2.4 Attracteurs et ensembles invariants par chaîne

Donc cette section, nous allons découvrir la relation existante entre les attracteurs et les ensemble invariants par chaîne.

Pour tout sous-ensemble $Y \subseteq X$ et $\delta > 0$, notons

$$C_\delta(Y) = \{x \in X, \exists y_0, y_1, \dots, y_n, y_0 \in Y, y_n = x, \forall i < n, d(f(y_i), y_{i+1}) < \delta\}$$

l'ensemble de tous les points $x \in X$ que l'on peut atteindre à partir de Y par des δ -chaînes.

Remarque 2.3 Si $\delta < \varepsilon$, alors $\overline{C_\delta(Y)} \subseteq C_\varepsilon(Y)$.

Avant de passer à la proposition suivante, on aura besoin de démontrer le lemme suivant

Lemme 2.1 Soit X un espace métrique compact et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ des sous-ensembles fermés non vides.

Si $V_{n+1} \subseteq V_n$ et $V = \bigcap_{n \geq 0} V_n$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif n tel que $V_n \subseteq B_\varepsilon(V)$.

Preuve

on raisonne par l'absurde, et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $x_n \in V$ tel que $d(x_n, V) \geq \varepsilon$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous suite convergente, c'est-à-dire il existe $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $x_{n_k} \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Ainsi pour tout $m \geq n_k \geq n$, $x_m \in V_m \subseteq V_n$, donc $x \in V_n$, par conséquent $x \in V$ (contradiction). \square

Proposition 2.6 Soit (X, f) un système dynamique et $Y \subseteq X$. Alors

1. $C_\delta(Y)$ est un ouvert entrant, c'est-à-dire $f(\overline{C_\delta(Y)}) \subseteq C_\delta(Y)$.
2. Tout ensemble entrant est invariant par chaîne.
3. Tout voisinage d'un ensemble invariant par chaîne contient un ensemble entrant.

Preuve

1. $C_\delta(Y)$ est un ouvert (évidant). Il reste à montrer que $f(\overline{C_\delta(Y)}) \subseteq C_\delta(Y)$.

On sait que f est uniformément continue (par le théorème de Heine), c'est à dire

$$\exists \eta > 0, \forall u, v \in X, d(u, v) < \eta \implies d(f(u), f(v)) < \delta$$

Soit $x \in \overline{C_\delta(Y)}$, il existe alors $y \in C_\delta(Y)$ tel que $d(x, y) < \eta$.

Ceci donc implique, $d(f(x), f(y)) < \delta$.

Étant donné que $y \in C_\delta(Y)$, alors il existe une δ -chaîne $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y$ avec $y_0 \in Y$, on peut conclure donc que $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y, f(x)$ est aussi une δ -chaîne (du fait que, $d(f(x), f(y)) < \delta$).

D'où, $f(x) \in C_\delta(Y)$.

2. Soit V un ensemble entrant, si $V = X$ alors la propriété est simplement vérifiée.

Si $V \neq X$, alors $d(f(V), X \setminus \overset{\circ}{V}) = \varepsilon > 0$, ce qui fait que toute ε -chaîne qui part d'un point initial dans V reste à l'intérieur de V .

D'où V est invariant par chaîne.

3. Soit Y un ensemble invariant par chaîne. Pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $V_\delta = \overline{C_\delta(Y)}$ est chaîne-invariant et $Y = \bigcap_{\delta > 0} V_\delta$, d'après le lemme 2.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $V_\delta \subseteq B_\varepsilon(Y)$. \square

Théorème 2.1

Un attracteur est minimal si et seulement s'il est transitif par chaîne.

Preuve

\implies) Supposons que $Y \subseteq X$ est un attracteur contenant un attracteur plus petit $Y_0 \subset Y$. Si $y_0 \in Y_0$ et $y \in Y \setminus Y_0$, alors il n'existe aucune chaîne reliant y_0 et y (étant donné que Y_0 et Y sont invariants), d'où Y n'est pas chaîne-transitif.

\impliedby) Inversement, supposons que l'attracteur Y n'est pas chaîne-transitif, c'est-à-dire il existe $y_0, y \in Y$ et $(y_0, y) \notin C$. Alors pour un certain $\delta_0 > 0$, il existe pas de δ_0 -chaîne entre y_0 et y .

Soit δ tel que $0 < \delta < \delta_0$. Alors $V = \overline{C_\delta(y_0)} \subseteq C_{\delta_0}(y_0)$ est un ensemble entrant représentant tout les points de Y qui sont reliés à y_0 par des δ -chaînes, comme $y \notin V$, par conséquent $\omega(V) \subset Y$. D'où Y n'est pas minimale.

2.5 Bifurcation

La théorie des bifurcations repose sur l'étude des changements de comportement d'un système dynamique dépendant d'un paramètre de contrôle lorsque celui-ci varie. Ces changements peuvent prendre plusieurs formes comme l'apparition ou disparition d'attracteurs, changement de type des singularités, changement de stabilité...etc. La valeur du paramètre pour laquelle une bifurcation se produit est dite point de bifurcation.

Une bifurcation est dite locale si elle ne concerne que le comportement des orbites au voisinage des singularités. Elle est dite globale si elle concerne le comportement global des orbites.

Un système dynamique discret (X, f_μ) qui dépend d'un paramètre réel μ est défini comme suit :

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu) \quad (2.2)$$

Présentons maintenant quelques types classiques de bifurcation fréquemment rencontrés.

2.5.1 Bifurcation nœud-col (fold)

Ce type de bifurcation correspond à l'apparition de deux cycles d'ordre p de nature différente (l'un asymptotiquement-stable et l'autre instable). Cette bifurcation aura lieu lorsque l'un des multiplicateurs égale à 1 pour une certaine valeur du paramètre de contrôle μ . Cette situation peut être représentée par :

$$\emptyset \xleftrightarrow{\lambda=1} p\text{-cycle stable} + p\text{-cycle instable}.$$

où \emptyset veut dire absence de cycle.

Exemple 2.3 ([7]) *Considérons le système dynamique discret défini par l'application*

$$f(x, \mu) = x^2 + x + \mu, \quad (2.3)$$

où, $\mu \in \mathbb{R}$

- Si $\mu > 0$, alors il existe aucun point fixe.
- Pour $\mu = 0$, l'application f possède un unique point fixe $x_0 = 0$ avec un multiplicateur $\lambda_0 = 1$. Le système dynamique décrit par (2.3) présente alors une bifurcation **nœud-col**. Le paramètre $\mu = 0$ est donc un point de bifurcation.
- Si $\mu < 0$, alors l'application f possède deux points fixes :

$$x_1 = +\sqrt{-\mu} \text{ et } x_2 = -\sqrt{-\mu}$$

Leurs multiplicateurs sont respectivement

$$\lambda_1 = 2\sqrt{-\mu} + 1 \text{ et } \lambda_2 = -2\sqrt{-\mu} + 1.$$

Comme $\lambda_1 > 1$ et $0 < \lambda_2 < 1$, alors x_1 est instable et x_2 est asymptotiquement stable.

2.5.2 Bifurcation doublement de période (flip)

Cette bifurcation se produit lorsque l'un des multiplicateurs associés au cycle d'ordre p traverse la valeur $\lambda = -1$, Celui-ci devient alors instable et engendre un cycle d'ordre $2p$ stable. On peut représenter cette situation par :

$$p\text{-cycle attractif} \xleftrightarrow{\lambda=-1} p\text{-cycle répulsif} + 2p\text{-cycle attractif}$$

Exemple 2.4 ([11]) *Considérons le système dynamique discret dit **Modèle de Ricker** défini comme suit :*

$$x_{k+1} = \mu x_k e^{x_k}, \quad (2.4)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, qui décrit la croissance d'une population d'une certaine espèce au fil des années.

Le système possède un point fixe trivial $x_0 = 0$ pour la valeur du paramètre $\mu = 1$.

Pour $\mu \neq 1$, le système a un unique point fixe positif

$$x_1 = \ln(\mu).$$

Le multiplicateur de ce point est donné par l'expression suivante

$$\lambda_1 = 1 - \ln(\mu).$$

- Si $1 < \mu < e^2$, alors le point fixe x_1 est stable.
- Si $\mu > e^2$, alors x_1 est instable.
- Si $\mu = e^2$, le point fixe aura un multiplicateur $\lambda_1 = -1$, on déduit donc que la valeurs $\mu = e^2$ est un point de bifurcation **doublement de période**.

2.5.3 Bifurcation Neimark-Sacker

La bifurcation de Neimark-Sacker est définie pour un système de dimension plus grand que 1, Cette bifurcation a lieu lorsqu'un cycle d'ordre p stable a deux multiplicateurs complexes conjugués $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, dont les modules passent par la valeur 1. Dans le cas ou $\dim X = 2$ cette dernière est représenté par :

Foyer stable d'ordre $p \longleftrightarrow^{|\lambda|=1}$ foyer instable d'ordre p + courbe fermée invariante stable

Exemple 2.5 ([7]) *Étant donné un système dynamique discret défini par l'applica-*

tion *logistique retardé* :

$$\begin{cases} x_{k+1} = rx_k(1 - y_k) \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette application a deux points fixes $(x_1, y_1) = (0, 0)$ et $(x_2, y_2) = (1 - \frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r})$. La matrice jacobienne évalué au point fixe (x_2, y_2) est donnée par :

$$J(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après avoir calculé l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda + r - 1 = 0$$

On obtient donc les deux valeurs propres suivantes :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - r}.$$

Si $r > \frac{5}{4}$, les valeurs propres sont complexe et $|\lambda_{1,2}|^2 = r - 1$. Pour $r < 2$ le point fixe (x_2, y_2) est un foyer stable, il devient instable si $r > 2$, et pour $r = 2$ on a $|\lambda_{1,2}|^2 = 1$ le système présente alors une bifurcation de **Neïmark-Sacker**.

2.6 Exposant de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer le taux de convergence ou de divergence de deux orbites initialement voisines dans un système dynamique et permet de quantifier le degré de stabilité et de sensibilité aux conditions initiales, cette quantité est appelée exposant de Lyapunov. Dans cette section nous allons définir cette notion et nous allons montrer par la suite comment on s'en sert pour caractériser les attracteurs [13].

2.6.1 Cas d'un système dynamique uni-dimensionnel

Considérons le système dynamique discret uni-dimensionnel défini par :

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Étant donné deux points initiaux très proches x_0 et $x_0 + \varepsilon$. Supposons que les orbites issus de ses points s'écartent exponentiellement après n itérations, c'est-à-dire il existe un réel γ vérifiant l'équation suivante :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| = \varepsilon e^{n\gamma}.$$

À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et $n \rightarrow \infty$, on obtient l'expression suivante :

$$\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right|,$$

ou encore,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right|.$$

Notons que $x_i = f^i(x_0)$, on aura donc

$$\frac{df^n(x_0)}{dx} = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\dots\dots f'(x_1)f'(x_0).$$

D'où

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \tag{2.6}$$

L'exposant de Lyapunov noté γ , caractérise le comportement des orbites. Selon sa formule, si cet exposant est négatif ($\gamma < 0$), les deux orbites convergent l'une vers l'autre. En revanche, s'il est positif ($\gamma > 0$), les orbites qui sont initialement très proches s'écartent exponentiellement au fil du temps, avec une vitesse déterminée par γ . Dans ce cas, on dit qu'il y a sensibilité aux conditions initiales.

Exemple 2.6 *Considérons le système dynamique suivant :*

$$x_{n+1} = T(x_n),$$

où $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est l'application tente définie de par :

$$T(x_n) = \begin{cases} 2x_n & \text{si } 0 < x_n \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x_n & \text{si } \frac{1}{2} < x_n \leq 1 \end{cases}.$$

Remarquons que pour tout $x_n \in [0, 1]$ on a, $|T'(x_n)| = 2$. Alors d'après (2.6) l'exposant de Lyapunov de l'application T est donné par

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln 2 = \ln 2.$$

γ est positif, l'application tente est alors sensible aux conditions initiales.

2.6.2 Cas d'un système dynamique de dimension N

Maintenant, généralisons la notion de l'exposant de Lyapunov dans le cas multidimensionnel [14]. Considérons le système dynamique discret de dimension N défini par :

$$X_{n+1} = F(X_n).$$

Pour chaque $n > 1$, considérons la matrice jacobienne de l'application f^n évalué en un point x_0 qu'on note $J_n(X_0)$ et soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$ les valeurs propres de la matrice $J_n(X_0)$ ordonnées dans l'ordre décroissant suivant leur module, alors les N exposants de Lyapunov d'une orbite sont déterminés par :

$$\gamma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_i|. \quad (2.7)$$

Chaque exposant de Lyapunov représenté par λ_i , évalue le taux de divergence le long d'un des axes du système.

Si au moins l'un de ces exposants est strictement positif, cela indique que le système est sensible aux conditions initiales.

Exemple 2.7 Soit $E = [0, 1] \times [0, 1]$, et soit $f : E \rightarrow E$ une application définie par

$$f(x_n, y_n) = \begin{cases} (2x_n, ay_n) & \text{si } 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ (2x_n - 1, ay_n + \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x_n < 1 \end{cases},$$

avec $0 < a \leq 1$.

Cette application est dite **transformation du boulanger**. Sa matrice jacobienne évaluée en un point initial X_0 est donnée par :

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}.$$

Or, on sait que

$$J_n(X_0) = J(X_n)J(X_{n-1})\dots J(X_1)J(X_0).$$

Et, comme $\forall X \in E : J_n(X) = J(X_0)$

Donc

$$J_n(X_0) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2}a)^n \end{pmatrix}.$$

Qui a pour valeurs propres $\lambda_1 = (\frac{1}{2}a)^n$ et $\lambda_2 = 2^n$. D'après la formule (2.7) on aura

$$\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_1| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |2^n| = \ln 2.$$

$$\gamma_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_2| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(\frac{1}{2}a)^n| = \ln \frac{1}{2}a.$$

Remarque 2.4 Pour certains systèmes dynamiques, le calcul analytique des exposants de Lyapunov est difficile, ce qui incite plutôt à utiliser des logiciels de programmation pour des calculs numériques.

2.7 Les Fractales

Un type d'attracteurs que nous incluons dans les prochaines sections est caractérisés par sa structure et sa dimension fractale. Pour cela, nous nous consacrons les parties suivantes à présenter et définir ses deux concepts.

Le terme fractale a été introduit par le mathématicien Benoît Mandelbrot en 1974 provenant du terme latin "fractus" qui signifie brisé ou fragmenter, afin de décrire les objets mathématiques qui ne peuvent pas être facilement décrits avec la géométrie usuelle.

Une fractale est une forme géométrique complexe présentant au moins une des propriétés suivantes ([8],[9]) :

1. **Irrégularité à toutes les échelles** : Cela signifie qu'une structure fractale est dotée des détails observables quelque soit l'échelle à laquelle on l'observe.
2. **Auto-similarité** : Un objet F est auto-similaire s'il se décompose en un nombre fini de parties F_1, F_2, \dots, F_N qui sont toutes similaires à l'objet entier F . Une partie F_i est similaire à F s'il existe un facteur de dilatation s tel que si l'on dilate F_i d'un facteur s , on retrouve F au complet.
3. **Dimension non entière (dimension fractale)** : Contrairement à la géométrie euclidienne, les dimensions des fractales ne sont pas nécessairement des valeurs entières. En géométrie euclidienne, les points ont une dimension nulle, les lignes ont une seule dimension, les surfaces ont deux dimensions et les volumes ont trois dimensions. Dans le cas de la dimension fractale, il s'agit d'une quantité fractionnaire qui représente à quel point une structure occupe l'espace qui la contient.

2.8 Dimension fractale

Dans cette section nous allons aborder quelques définitions différentes de dimension fractales qui peuvent être utilisées selon l'aspect de la figure que l'on veut

caractériser.

1. Dimension de similitude

Si nous divisons un segment, un carré et un cube en des formes semblables mais de longueur de côté moitié, comme sur la figure (2.4), nous obtenons respectivement 2^1 petits segments, 2^2 petits carrés et 2^3 petits cubes. Les exposants 1, 2 et 3 coïncident dans chacun des cas avec la dimension de l'espace euclidien correspondant. Nous généralisons cette discussion de la manière suivante : si une figure se compose de N copies d'elle même dilaté d'un facteur s alors on aura toujours

$$N = s^{D_s} \quad (2.8)$$

où D_s est la dimension de l'espace.

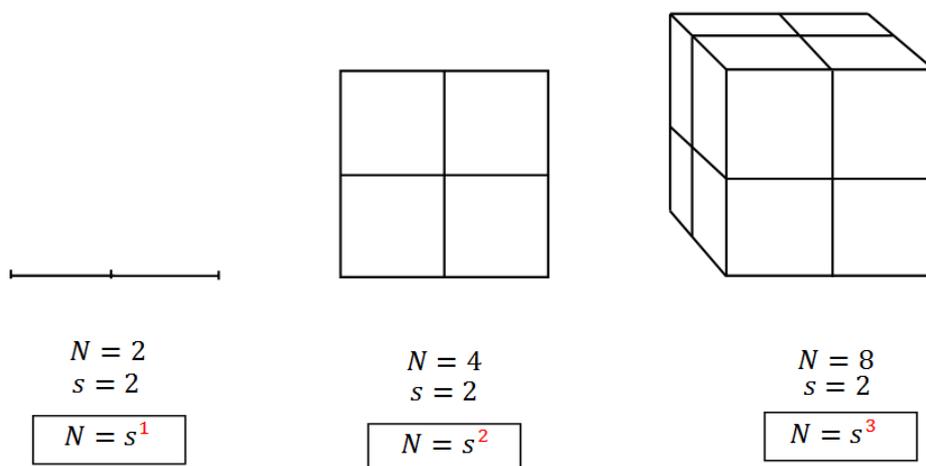


FIGURE 2.4 – Division d'un segment, carré et cube.

La dimension d'un objets auto-similaires est donc donnés par la formule suivantes [8] :

$$D_s = \frac{\log N}{\log s}, \quad (2.9)$$

où N est le nombre de parties similaires à l'objet et s est le facteur de dilatation.

La dimension de similitude ne s'applique que pour des figures auto-similaire,

son champ d'application est donc réduit. Pour cela nous allons introduire une autre définition de la dimension, plus générale : la dimension de capacité.

2. Dimension de capacité (Box-counting)

L'idée de la dimension de capacité est la suivante. Soit S un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^N , et soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimum de cube de dimension N (segment dans \mathbb{R} , carrés dans \mathbb{R}^2 , cubes dans \mathbb{R}^3 ,... etc.) de côté ε nécessaire pour couvrir l'ensemble S (figure 2.5)

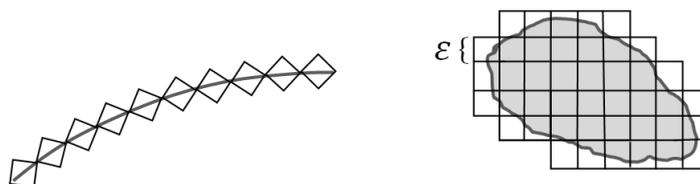


FIGURE 2.5 – Recouvrement d'un ensemble S par des cubes

La dimension de capacité est donnée par la formule suivante [8] :

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (2.10)$$

Enfin, nous proposons une autre dimension plus facile à calculer que la dimension de capacité, la dimension de Lyapunov.

2. Dimension de Lyapunov

Soit $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \dots \geq \gamma_N$ les N exposant de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le plus grand entier naturel satisfaisant

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_j \geq 0.$$

La dimension de Lyapunov D_L est définie par [7] :

$$D_L = j - \frac{\sum_{i=1}^j \gamma_i}{\gamma_{j+1}} \quad (2.11)$$

Si aucun j existe, alors $D_L = 0$.

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques exemples des fractales.

Exemple 2.8 (Ensemble de Cantor)

L'ensemble triadique de Cantor a été introduit en 1883 par le mathématicien allemand Georg Cantor. Il a été construit en partant de l'intervalle unité $[0, 1]$ et en le divisant en 3 segments de longueur $\frac{1}{3}$, puis en enlève à chaque étape le tiers central de chaque segment, on répète cette procédure une infinité de fois à chaque segments obtenus. À la n -ème étape nous aurons besoin de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$ pour couvrir l'ensemble de Cantor, d'où si on choisit $\varepsilon = (\frac{1}{3})^n$, alors $N(\varepsilon) = 2^n$ (qui le nombre de ses intervalles nécessaire pour couvrir l'ensemble). Comme $\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors la dimension de capacité de l'ensemble de Cantor est donnée par :

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63\dots$$

Cet ensemble est illustré par la figure suivantes.

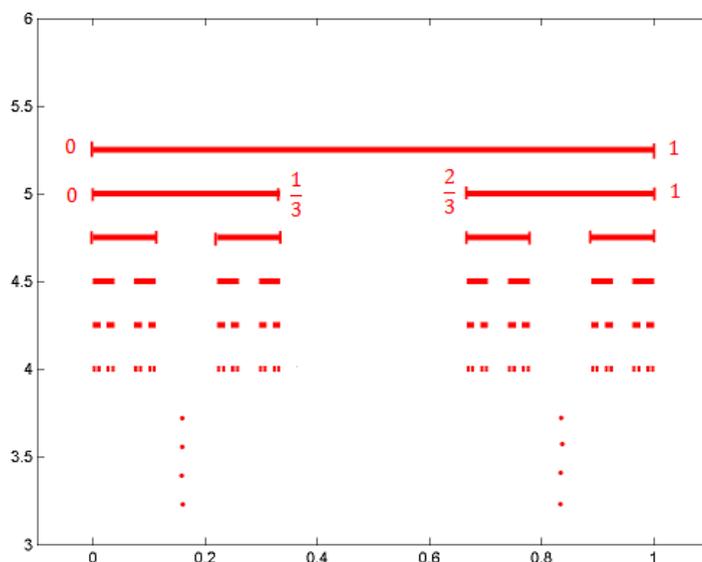


FIGURE 2.6 – Ensemble de Cantor

Exemple 2.9 (Courbe de Von Koch)

L'une des figures de base des fractals est la courbe de Von Koch (décrite en 1904

par le mathématicien suédois Helge von Koch), elle est obtenus récursivement a partir d'un segment que l'on découpe en trois tiers, on retire le tiers du milieu et le remplace par deux segments de longueur $\frac{1}{3}$ formant un triangle équilatéral, on répète cette procédure une infinité de fois sur chacun des segment de droite obtenu on obtient la courbe de Von koch.

Cette courbe est constitué de 4 copies d'elle même avec un facteurs de dilatation qui vaut 3, sa dimension d'auto-similitude est alors donnée par

$$D_s = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26\dots$$

Ci-dessous une illustration de la courbe de Von koch réalisé par le logiciel matlab.

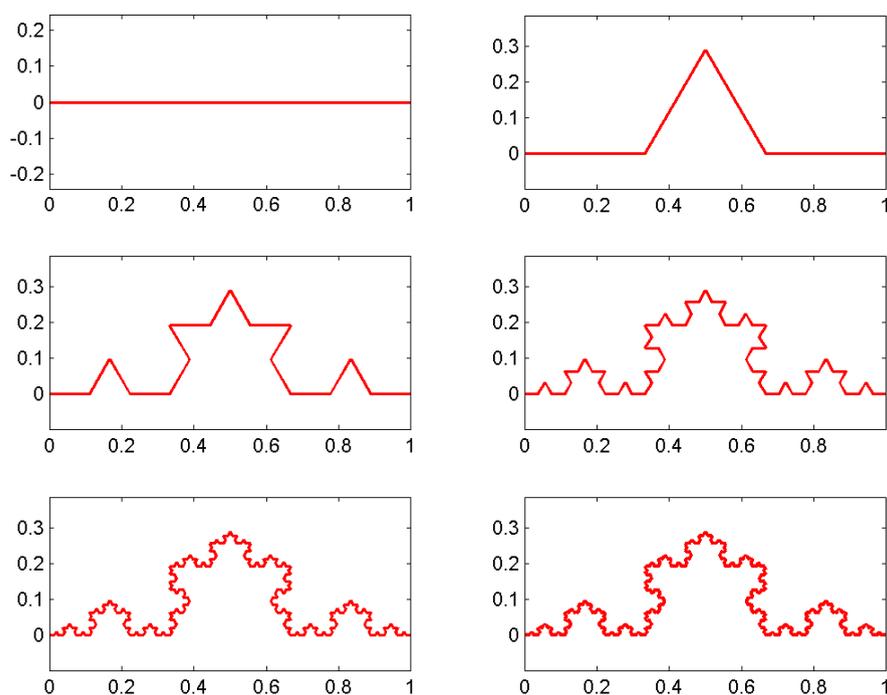


FIGURE 2.7 – Courbe de Von koch

Exemple 2.10 (*Triangle de Sierpinski*)

Le triangle de Sierpinski du nom du mathématicien Waclaw Sierpinski est un exemple de fractale autosimilaire stricte qui se construit par récurrence de la manière suivante : On commence par tracer un triangle équilatéral et on relie les points du milieu de chaque coté du triangle, on obtient donc quatre triangles similaires, il suffit ensuite de retirer le triangle centrale. en itérant à l'infini ce processus on obtient la figure du triangle de Sierpinski.

Ci-dessus une représentation de la courbe obtenue

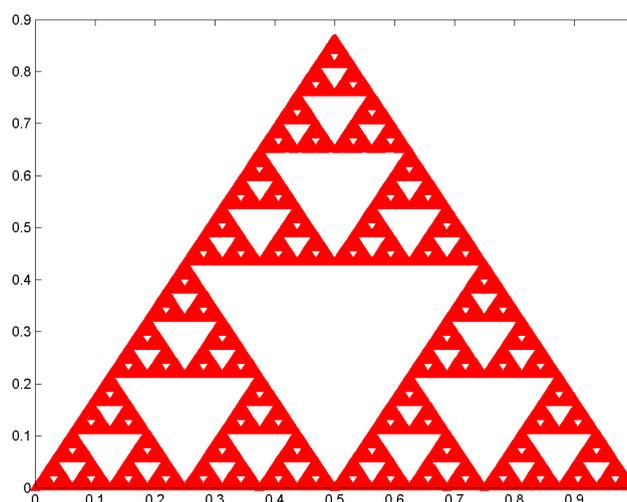


FIGURE 2.8 – Triangle de Sierpinski

Le triangle de Sierpinski a une dimension qui vaut :

$$D_s = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.58\dots$$

2.9 Types d'attracteurs

Dans un système dynamique, On distingue deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

2.9.1 Attracteurs réguliers

Jusqu'à présent, nous n'avons vu que des attracteurs d'une géométrie assez simple, qui ne présentent pas de comportements chaotiques comme les cycles (orbites périodiques) et les points fixes attractifs [12], ces attracteurs sont regroupés sous l'appellation d'attracteurs réguliers.

Généralement les systèmes dynamiques possédant des attracteurs réguliers sont souvent utilisés en modélisation mathématique pour étudier des phénomènes physiques, biologiques, économiques ou sociaux, car ils permettent de prédire l'évolution future du système avec une certaine précision.

2.9.2 Attracteurs étranges

2.9.2.1 Aperçu historique

L'histoire des attracteurs étranges est étroitement liée à la théorie du chaos, qui est apparue dans les années 1960 et 1970. Dans cette période, des chercheurs tels que Edward Lorenz, David Ruelle et d'autres ont commencé à étudier des systèmes dynamiques non linéaires et ont découvert des phénomènes tels que la bifurcation et la sensibilité aux conditions initiales.

En 1961, Edward Lorenz, un météorologue américain, a travaillé sur un modèle simplifié de la convection atmosphérique et a découvert qu'un petit changement dans les conditions initiales pouvait avoir un effet dramatique sur les prévisions météorologiques à long terme. C'est ainsi qu'il a formulé ses fameuses équations différentielles couplées pour décrire ce phénomène et qu'il a étudié numériquement. Le système de Lorenz s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{cases} \quad (2.12)$$

A partir de ce système et pour les valeurs des paramètres $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ et $r = 28$ Lorenz venait d'observer le premier attracteur étrange comme allait le qualifier le physicien-mathématicien David Ruelle qui a développé par la suite la théorie ma-

thématique derrière les attracteurs étranges. Il s'agit d'un objet extraordinairement compliqué et qui est sensible aux conditions initiales, Lorenz a nommé cet effet "l'effet papillon", suggérant que le battement d'aile d'un papillon au Brésil pouvait potentiellement déclencher une tempête au Texas [15], [16].

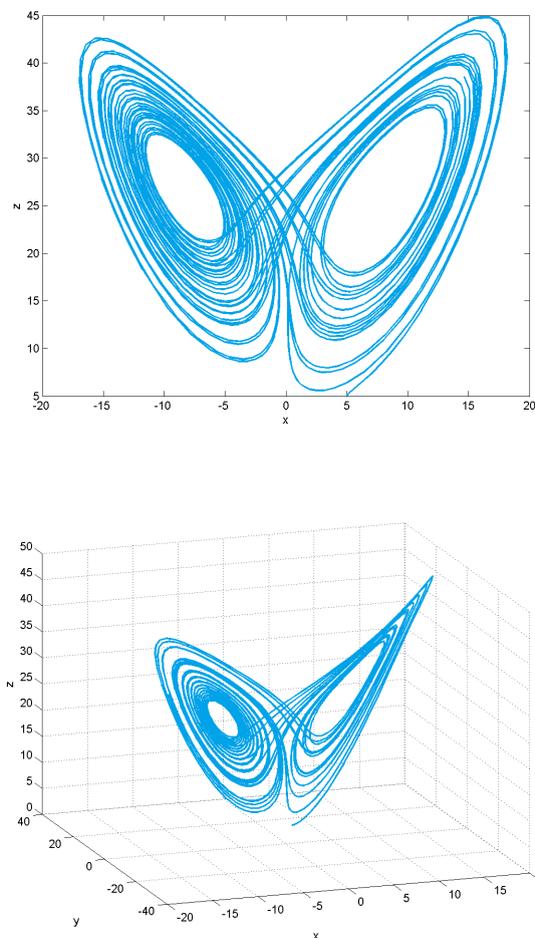


FIGURE 2.9 – Attracteur étrange de Lorenz "effet papillon"

Définition 2.6 ([12])

Un sous ensemble Y de l'espace des phases est dit attracteur étrange (chaotique) sous l'action de f s'il vérifie :

1. Y est un attracteur.
2. Il est sensible aux conditions initiales.
3. Il est topologiquement transitif.
4. Il possède une structure fractale.

2.9.3 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

1. Si il existe au moins un exposant de Lyapunov d'un attracteur qui est positif, cela signifie qu'il y a une sensibilité aux conditions initiales, ce qui caractérise un attracteur **étrange**.
2. Si tous les exposants de Lyapunov d'un attracteur sont négatifs, cet attracteur est alors **régulier**.

2.10 Quelques attracteurs connus

Dans cette section, nous allons explorer certains attracteurs connus, ainsi que certains de leurs propriétés .

2.10.1 Attracteur de Hénon

En 1976, l'astronome français Michael Hénon a proposé un modèle simplifié du système de trois équations différentielles de Lorenz qui présente les mêmes propriétés essentiels pour certains valeurs des paramètres, la motivation de cette recherche était de fournir un modèle plus pratique pour les exploration numérique. Ainsi Hénon a réussi à créer un système dynamique discret très simple qui donne un attracteur

étrange [17], [18]. Ce système est connu sous le nom de Hénon et est défini comme suit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = by_n \end{cases}, \quad (2.13)$$

avec $a > 0$ et b sont deux paramètres de contrôle réels.

Hénon a étudié numériquement ce système en évaluant différentes valeurs possibles pour les paramètres a et b , et finalement il a trouvé que la combinaison de valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$ produisent un attracteur étrange.

la figure (2.10) illustre le résultat de 10 000 itérations de l'attracteur de Hénon avec une condition initiale de $(x_0, y_0) = (0,0)$.

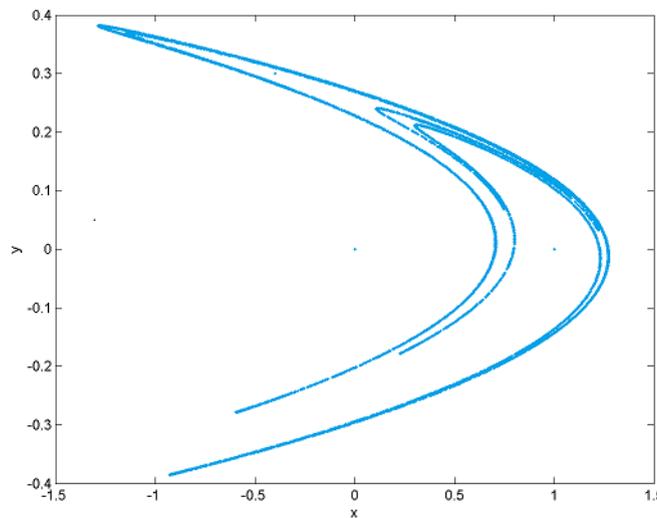


FIGURE 2.10 – Attracteur de Hénon

Le système de Hénon possède deux exposants de Lyapunov qui sont calculés numériquement pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ [7] :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0.603 \\ \gamma_2 &= -2.341 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que l'attracteur de Hénon est sensible aux conditions initiales.

Sa dimension fractale (dimension de Lyapunov) d'après la formule (2.11), est donnée

par :

$$D_L = 1 + \frac{0.603}{2.341} = 1.258\dots$$

L'attracteur de Hénon est caractérisé par sa structure fractale (distingué par son auto-similarité), qui se manifeste par des répétitions de sa forme à des échelles de plus en plus réduites, cet effet est illustré dans la figure (2.11)

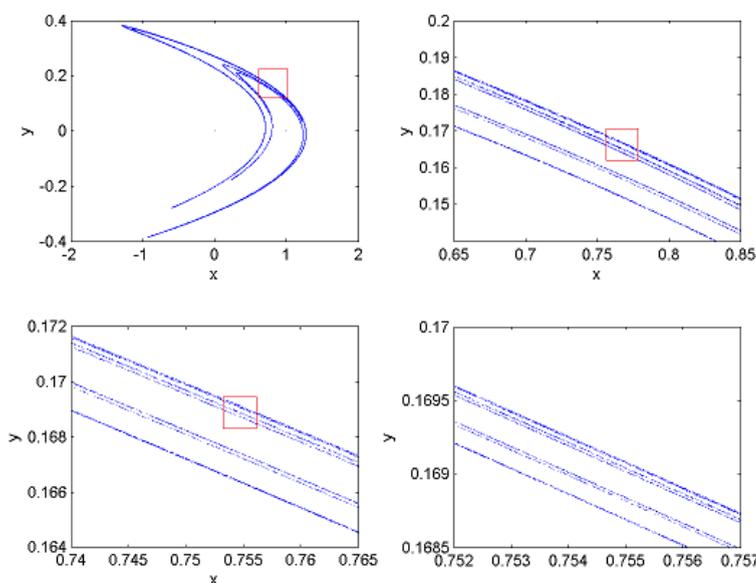


FIGURE 2.11 – Auto-similarité de l'attracteur de Hénon observé en agrandissant sur la zone précisée par le carré

2.10.2 Attracteur de Lozi

En 1978, René Lozi, un mathématicien à l'université de Nice, a proposé une autre application pour laquelle l'attracteur obtenu paraît plus simple que celui de Hénon [19], la seule différence entre les deux systèmes réside dans le fait que Lozi a remplacé le terme quadratique x^2 de l'application de Hénon par la valeur absolue de x , ce qui lui a permis d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a |x_n| \\ y_{n+1} = by_n \end{cases} \quad (2.14)$$

Lozi a montré dans son article que pour les valeurs des paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.5$ la suite de points itérés par son application converge vers un attracteur étrange représenté par la figure (2.12)

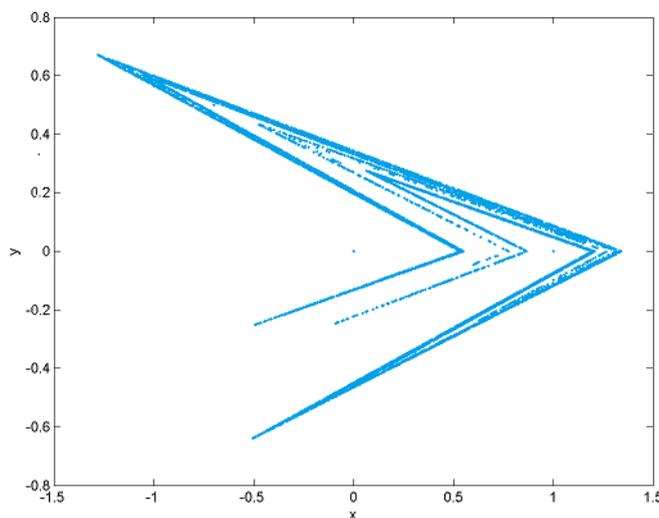


FIGURE 2.12 – Attracteur de Lozi

De même que pour l'attracteur de Henon, l'attracteur de Lozi présente une structure d'auto-similarité, qui peut être observé en faisant un agrandissement d'une région de l'attracteur tout en remarquant que la structure se répète à des échelles différents, comme le montre la figure ci-dessous (figure(2.13)).

Pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ l'application de Lozi a deux exposant de Lyapounov qui vaut :

$$\gamma_1 = 0.69314$$

$$\gamma_2 = -1.204$$

Dans ce cas, la dimension de Lyapunov est égale à

$$D_L = 1 + \frac{0.69314}{1.204} = 1.575.. .$$

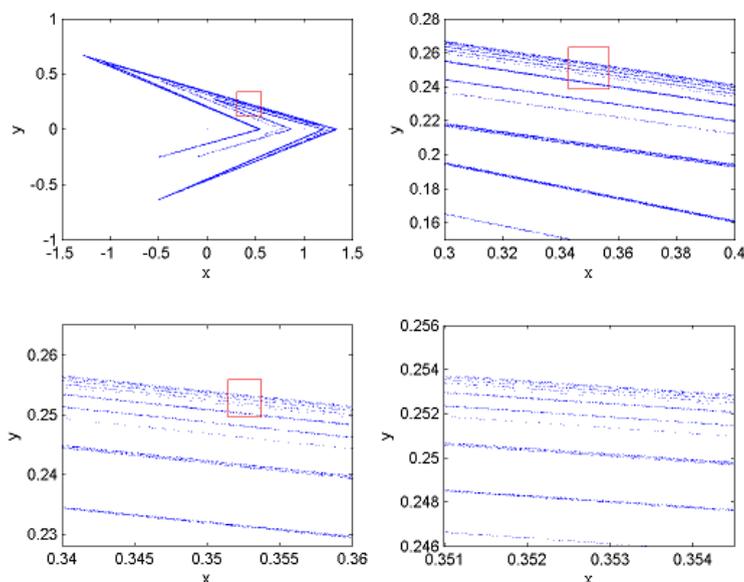


FIGURE 2.13 – Auto-similarité de l'attracteur de Lozi

2.10.3 Attracteur de Pickover

Clifford Pickover a créé une méthode innovante pour combiner des fractales, du chaos, et le graphisme sur ordinateur, en 1990 il a proposé un système de quatre paramètres de contrôles réels qui mènent à la convergence vers un attracteur étrange pour certaines valeurs. Ce système est défini comme suit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sin(bx_n) + c \sin(bx_n) \\ y_{n+1} = \sin(ax_n) + d \sin(ax_n) \end{cases} . \quad (2.15)$$

Pickover choisit les valeurs des paramètres de contrôle du système comme suit :

$$a = -0.966918, \quad b = 2.879879, \quad c = 0.765145 \quad \text{et} \quad d = 0.744728$$

Il a obtenu pour ses valeurs l'attracteur étrange illustré par la figure (2.14). L'attracteur de Pickover est caractérisé par des formes complexes et irrégulières, cela signifie que la structure de l'attracteur est fractale.

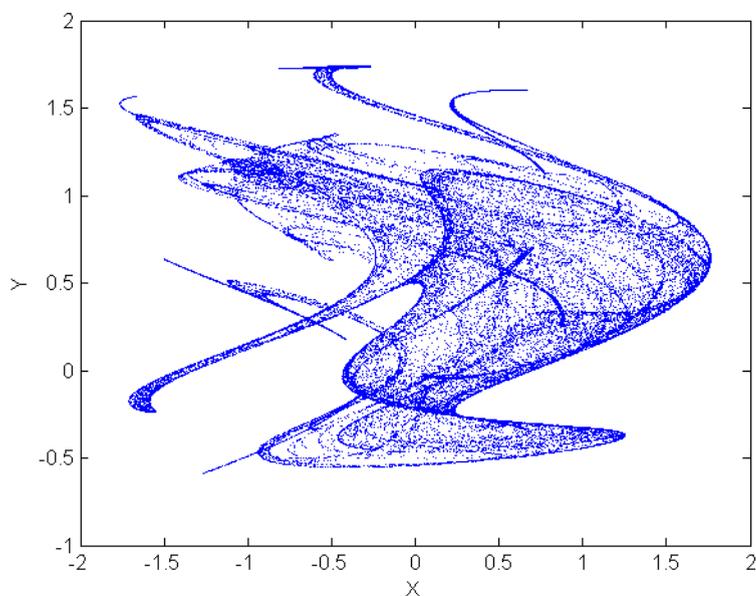


FIGURE 2.14 – Attracteur de Pickover

2.10.4 Attracteur de Gumowski-Mira

Les deux physiciens, Igor Gumowski et Christian Mira ont découvert dans le cadre de leur travail au CERN à Genève en 1980 un nouveau type d'attracteurs qui est décrit par le système

$$\begin{cases} x_{n+1} = by_n + f(x_n) \\ y_{n+1} = f(x_{n+1}) - x_n \end{cases}, \quad (2.16)$$

où $f(x) = ax + \frac{2(1-a)x^2}{1+x^2}$.

Ce système dynamique donne pour les valeurs du paramètre $a = -0.92768$ et $b = 0.9$ un attracteur étrange (présenté dans la figure suivante)

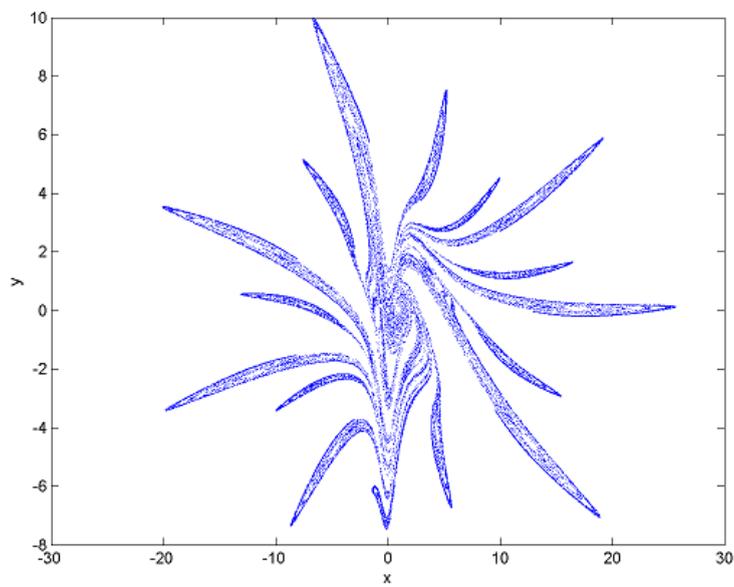


FIGURE 2.15 – Attracteur de Gumowski-Mira pour $a = -0.92768$ et $b = 0.9$

Chapitre 3

Attracteurs des endomorphismes du shift

Dans ce chapitre, nous introduisons les attracteurs des endomorphismes du shift, en examinant leurs principales caractérisations proposées par M. Hurly et P. Kurka. Nous abordons ensuite les attracteurs des sous-shifts (sous-décalages), et enfin, nous illustrerons ces concepts à l'aide de quelques exemples.

3.1 Attracteurs

Dans cette section nous adapterons les notions d'attracteur et ω -limite (introduits dans le deuxième chapitre) à la topologie particulière des systèmes dynamiques symboliques.

Définition 3.1 ([23]) *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift*

- *Pour tout cylindre (ouvert fermé) $U = [u]_k \subseteq A^{\mathbb{Z}}$, si U est invariant alors il est un ensemble entrant.*
- *Un sous-ensemble $Y \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est un attracteur, s'il existe un cylindre invariant U tel que*

$$Y = \omega(U) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(U).$$

- Une configuration périodique $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est attractive si son orbite $\theta(x)$ est un attracteur.

3.2 Caractérisation des attracteurs des endomorphismes du shift

Les résultats suivants introduits par Mike Hurley et Peter Kurka représentent les premières caractérisations des attracteurs et des quasi-attracteurs dans les endomorphismes du shift.

Proposition 3.1 (Hurley [22])

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un endomorphisme du shift et $x \in A^{\mathbb{Z}}$ une configuration F -périodique attractive. Alors $\sigma(x) = x$ et $F(x) = x$.

Preuve

Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$ une configuration périodique d'une période p , c'est-à-dire $F^p(x) = x$. x étant attractive, donc son orbite $\theta(x)$ est un attracteur, alors il existe un cylindre invariant U tel que $\theta(x) = \omega(U)$.

Il existe un ouvert non vide $V \subseteq U$ tel que si $y \in V$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{np}(y) = x$.

Comme le décalage de Bernoulli $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est mélangeant, alors pour k assez grand $\sigma^k(V) \cap V \neq \emptyset$ et $\sigma^{k+1}(V) \cap V \neq \emptyset$.

Soit $y \in \sigma^k(V) \cap V$ et $z \in \sigma^{k+1}(V) \cap V$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{np}(y) = x = \sigma^k(x).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{np}(z) = x = \sigma^{k+1}(x).$$

Ainsi, $\sigma(x) = x$ (c'est-à-dire, $\forall i \in \mathbb{Z}, x_{i+1} = x_i$), il existe donc $a \in A$, tel que $x = a^\infty$.

D'autre part, on a $\sigma(x) = x$ alors $F(\sigma(x)) = F(x)$, comme F commute avec le décalage, ceci implique $\sigma(F(x)) = F(x)$, il existe donc $b \in A$ tel que $F(x) = b^\infty$.

On a, $a^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{np}(a^\infty.b^\infty) = b^\infty$, donc $a = b$, d'où $p = 1$. □

Théorème 3.1 (*Hurley [22]*)

Si un endomorphisme du shift a deux attracteurs disjoints, alors chacun de ses attracteurs contient deux attracteurs disjoints et un nombre indénombrable de quasi-attracteurs.

Preuve

Soient $Y_1, Y_2 \subset A^{\mathbb{Z}}$ deux attracteurs disjoints et U_1, U_2 deux cylindres invariants tels que $Y_1 = \omega(U_1)$ et $Y_2 = \omega(U_2)$.

Si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, alors $\omega(U_1 \cap U_2)$ est un attracteur contenu dans Y_1 et Y_2 , ceci contredit le fait que $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, on doit avoir donc $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Soit maintenant Y un autre attracteur et U un cylindre invariant tel que $Y = \omega(U)$.

Le but est de montrer que Y contient deux attracteurs disjoints.

($A^{\mathbb{Z}}, \sigma$) étant mélangeant, il existe donc un entier $n > 0$ tel que

$$V_1 = \sigma^n(U_1) \cap U \neq \emptyset \quad \text{et} \quad V_2 = \sigma^n(U_2) \cap U \neq \emptyset$$

V_1 et V_2 sont deux cylindres invariants, en effet on a

$$\begin{aligned} F(\sigma^n(U_1) \cap U) &\subset F(\sigma^n(U_1)) \cap U \\ &\subset \sigma^n(F(U_1)) \cap U \\ &\subset \sigma^n(U_1) \cap U. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\omega(V_1)$ et $\omega(V_2)$ sont deux attracteurs contenus dans Y .

Comme V_1 et V_2 sont invariants, c'est-à-dire $F(V_1) \subset V_1$ et $F(V_2) \subset V_2$, on a de plus $F^n(V_1) \subset V_1$ et $F^n(V_2) \subset V_2$ pour tout $n \geq 0$, alors $\omega(V_1) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(V_1) \subset V_1$ et $\omega(V_2) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(V_2) \subset V_2$.

Or, comme V_1 et V_2 sont disjoints, alors $\omega(V_1)$ et $\omega(V_2)$ sont aussi disjoints. \square

Théorème 3.2 (*Hurley [22]*)

Si un endomorphisme du shift possède un attracteur minimal Y , alors

1. Y est contenu dans toute autre attracteurs.

2. Y un sous-shift.
3. Son bassin d'attraction est un ouvert dense.

Preuve

1. Soit Y un attracteur minimal et Z un autre attracteur tel que $Y \cap Z = \emptyset$, alors d'après le théorème (3.1) il existe Q_1, Q_2 deux attracteurs disjoints tel que $Q_1, Q_2 \subset Y$ (contradiction).
D'où, on aura forcément $Y \subset Z$.
2. Soit V un cylindre invariant tel que $Y = \omega(V)$. On a

$$\sigma^{-1}(Y) = \sigma^{-1}(\omega(V)) \iff \sigma^{-1}(Y) = \omega(\sigma^{-1}(V)), \quad (\sigma \circ F = F \circ \sigma).$$

$\sigma^{-1}(V)$ est un cylindre invariant ($F(\sigma^{-1}(V)) \subset \sigma^{-1}(F(V)) \subset \sigma^{-1}(V)$), et Y est minimal, alors

$$Y \subseteq \omega(\sigma^{-1}(V)) = \sigma^{-1}(Y).$$

D'où, $\sigma(Y) \subseteq Y$, de même $\sigma^{-1}(Y) \subseteq Y$.

3. Pour montrer que $\mathfrak{B}(Y)$ est un ouvert il suffit de montrer que

$$\forall x \in \mathfrak{B}(Y), \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B_\varepsilon(x) \subset \mathfrak{B}(Y).$$

Soit $x \in \mathfrak{B}(Y)$, alors $\forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0, F^n(x) \in B_\delta(Y)$.
Comme F est continue, alors $\exists \varepsilon > 0$, tel que $F^n(B_\varepsilon(x)) \subset B_\delta(Y)$. D'où $B_\varepsilon(x) \subset \mathfrak{B}(Y)$.

Il reste à montrer que $\mathfrak{B}(Y)$ est dense.

$\mathfrak{B}(Y)$ est σ -invariant, en effet

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{B}(Y) &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = y \text{ avec } y \in Y \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(F^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\sigma(x)) = \sigma(y) \\ &\implies \sigma(x) \in \mathfrak{B}(Y), \text{ (car } \sigma(Y) \subset Y, \text{ donc } \sigma(y) \in Y). \end{aligned}$$

Comme $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est transitif, alors pour tout cylindre $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$, il existe un entier $n > 0$ tel que

$$\emptyset \neq \sigma^n(\mathfrak{B}(Y)) \cap U = \sigma(\mathfrak{B}(Y)) \cap U.$$

D'où, $\mathfrak{B}(Y)$ est dense. □

Corollaire 3.1 (*Kurka [3]*)

Pour tout endomorphisme du shift $(A^{\mathbb{Z}}, F)$, l'une des affirmations suivantes est vérifiées :

1. Il existe deux attracteurs disjoints et un continuum de quasi-attracteurs.
2. Il existe un unique quasi-attracteur. C'est un sous-shift et il est contenu dans n'importe quel autre attracteur.
3. Il existe un unique attracteur minimal contenu dans tout autre attracteur.

Preuve

S'il n'existe pas d'attracteurs disjoints, alors deux attracteurs quelconques sont comparables par inclusion. D'après la proposition (2.5) le nombre d'attracteurs est au plus dénombrable, Par conséquent, l'intersection de tous les attracteurs est soit un quasi-attracteur, soit un attracteur. Dans les deux cas, il est σ -invariant. □

3.3 Attracteurs : surjectivité et équicontinuité

L'équicontinuité ainsi que la surjectivité imposent des contraintes fortes sur les attracteurs, ces contraintes seront présentées dans les propositions suivantes, mais avant nous devons tout d'abord introduire un lemme qui sera nécessaire pour la démonstration de la première proposition.

Lemme 3.1 *Tout système dynamique équicontinu sur $A^{\mathbb{Z}}$ possède la propriété de l'ombre.*

Preuve

Soit $(A^{\mathbb{Z}}, f)$ un système dynamique symbolique. Supposons qu'il est équicontinu, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon = 2^{-n}, \exists \delta = 2^{-k} \text{ tel que si } x_{[-k,k]} = y_{[-k,k]} \implies \forall i \geq 0, f^i(x)_{[-n,n]} = f^i(y)_{[-n,n]}.$$

Soit $(x_i \in A^{\mathbb{Z}})_{i \geq 0}$ une δ -Chaîne. Donc

$$\forall i \geq 0, d(f(x_i), x_{i+1}) < \frac{1}{2^k} \quad (f(x_i)_{[-k,k]} = (x_{i+1})_{[-k,k]})$$

Alors pour $m > 0$, on a

$$f^m(x_0)_{[-n,n]} = f^{m-1}(x_1)_{[-n,n]} = \dots = f^1(x_{m-1})_{[-n,n]} = (x_m)_{[-n,n]}$$

D'où la suite $(x_i \in A^{\mathbb{Z}})_{i \geq 0}$ est ε -ombragé par x_0 . □

Proposition 3.2 (*kurka [3]*)

Tout endomorphisme du shift équicontinu a soit deux attracteurs disjoints, soit un attracteur unique qui est un point fixe attractif.

Preuve

Supposons que $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ est équicontinu, et qui ne contient pas d'attracteurs disjoint. D'après la proposition (1.7) il existe une pré-période $m \geq 0$ et une période $p > 0$ tel que $F^{m+p} = F^m$.

Admettons qu'il existe deux attracteurs distincts $Z \subset Y \subset A^{\mathbb{Z}}$. Pour $y_0 \in Y \setminus Z$ on peut construire une suite $(y_n \in Y)_{n \geq 1}$ avec $F(y_{n+1}) = y_n$ (possible car $F(Y) \subseteq Y$), c'est claire que $y_n \in Y \setminus Z$. Il existe une sous suite $(n_k)_{k \geq 0}$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x \in Y$, donc comme x est un point pré-périodique alors il est aussi périodique, c'est-à-dire $F^p(x) = x$.

Comme $x \in Y \setminus Z$ (qui est invariant), il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(F^i(x)) \cap Z = \emptyset$, pour tout $i < p$.

x étant équicontinu, alors il existe $\xi > 0$ tel que

$$d(x, z) < \xi \implies \forall n > 0, d(F^n(x), F^n(z)) < \varepsilon.$$

D'après le lemme (3.1), le système $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ possède la propriété de l'ombre, donc $\exists \delta > 0$, tel que tout δ -Chaîne partant de x est ξ -ombragée par certain point, cette Chaîne reste donc ε -proche de l'orbite de x .

Notons par $C_\delta(x)$ l'ensemble de tous les points que l'on peut atteindre par des δ -Chaînes à partir du point x et $V = \overline{C_\delta(x)}$. Alors $V \cap Z = \emptyset$.

D'après la proposition (2.6) V est un ensemble entrant et $\omega(V)$ est un attracteur disjoint de Z ($\omega(V) \cap Z = \emptyset$), on a donc une contradiction avec l'hypothèse. On constate alors que $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ possède un unique attracteur $Y = \omega(A^{\mathbb{Z}})$.

Il reste à montrer que Y est un point fixe.

Comme Y est minimal (il ne contient aucun attracteur), d'après (2.1) Y est **transitif par chaîne** et comme Y a la propriété de l'ombre donc il est transitif, il vient donc que Y est constitué d'une seule orbite périodique (d'après (1.8)), cette orbite périodique d'après la proposition de Hurley (d'après (3.1)) doit être un point fixe. \square

Proposition 3.3 (Kurka [3])

Tout endomorphisme du shift surjectif a soit un attracteur unique, soit deux attracteurs disjoints.

Preuve

Supposons qu'un endomorphisme du shift surjectif $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ possède au moins deux attracteurs.

Si $U \neq A^{\mathbb{Z}}$ est un cylindre invariant, d'après la proposition (1.6), $V = U \setminus A^{\mathbb{Z}}$ est aussi un cylindre invariant. Ainsi $\omega(U)$ et $\omega(V)$ sont disjoints. \square

3.4 Attracteurs sous-shifts

Un attracteur sous-shift d'un endomorphisme du shift est un attracteur qui est un sous-shift, comme l'attracteur maximal $\omega(A^{\mathbb{Z}})$. Avant de présenter une propo-

sition caractérisant ces attracteurs, nous introduirons d'abord quelques définitions nécessaires.

Définition 3.2 ([23])

1. Un cylindre F -invariant $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est un **ensemble envahissant à droite** si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $F^k(U) \subseteq \sigma^{-1}(U)$.
2. Un cylindre F -invariant $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est un **ensemble envahissant à gauche** si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $F^k(U) \subseteq \sigma(U)$.
3. Un cylindre F -invariant $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est un **ensemble envahissant** s'il est envahissant à gauche et à droite.

Proposition 3.4 (*Formenti et Kurka* [25])

Soit (X, F) un endomorphisme du shift et $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ un cylindre F -invariant. Alors $\omega(U)$ est un attracteur sous shift si et seulement si U est envahissant.

Preuve

\Rightarrow) Supposons que $\omega(U)$ un sous-shift, alors

$$\omega(U) = \omega(\sigma(U)) \subseteq \sigma(U)$$

Par compacité $\exists k > 0$ tel que $F^k(U) \subseteq \sigma(U)$ (on applique le même argument pour σ^{-1} , puisque U est fortement σ -invariant), d'où U est envahissant.

\Leftarrow) Réciproquement, on suppose que U est envahissant. C'est-à-dire $F^k(U) \subseteq \sigma(U) \cap \sigma^{-1}(U)$.

Si $y \in \omega(U)$, il existe au moins un $n \geq 0$ tel que $y \in F^{n+k}(U)$, alors il existe $x \in U$ tel que $y = F^{n+k}(x) = F^n(F^k(x)) \in F^n(\sigma^{-1}(U))$ et $y \in \omega(\sigma(U)) = \bigcap_{n \geq 0} \sigma^{-1}(F^n(U))$, d'où $\sigma(y) \in \omega(U)$, et $\sigma(\omega(U)) \in \omega(U)$. (on montre de la même manière que $\sigma^{-1}(\omega(U)) \in \omega(U)$). D'où $\omega(U)$ est un sous-shift.

3.5 Quelques exemples

Exemple 3.1 (*Attracteurs de la règle produit*)

La règle produit $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}, Q)$ est un endomorphisme du shift de rayon $r = 1$, sa règle locale est donné par

$$P(x)_i = x_{i-1}x_i x_{i+1}$$

Les différentes valeurs de la fonction locale de P sont illustrées dans le tableau ci-dessous.

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	1

L'endomorphisme du shift P possède deux attracteurs, en effet

1. Le cylindre $[0] = \{x \in A^{\mathbb{Z}}, x_0 = 0\}$ est invariant, car on a $F([0]) = [000] \subseteq [0]$

De plus, on a

$$\begin{aligned} F^2([0]) &= [00000] \\ &\vdots \\ F^n([0]) &= [0\underbrace{0\dots 0}_n 0] \end{aligned}$$

Donc, $\omega([0]) = \{0^\infty\}$ est un attracteur qui est une configuration fixe.

2. Le deuxième attracteur de P est $\omega(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}})$, pour le montrer on doit d'abord trouver $F^n(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}})$.

L'endomorphisme de shift P n'est pas surjectif. En effet

supposons que $y \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}}$ possède une préimage x , c'est-à-dire $F(x) = y$ et que $y_{[0,2]} = 101$. Alors $x_{[-1,1]} = x_{[1,3]} = 111$ (figure(3.1)), or $y_1 = 0$ on a donc une contradiction (même argument pour $y = 1001$). Par conséquent

$$\begin{aligned} F(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}) &= \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}} : 101 \not\subseteq x \text{ et } 1001 \not\subseteq x\} \\ F^n(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}) &= \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}} : \forall m \in [1, 2n], 10^m 1 \not\subseteq x\} \\ \omega(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}) &= \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}} : \forall m \geq 0, 10^m 1 \not\subseteq x\} \end{aligned}$$

D'où, $\omega(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}})$ est bien un attracteur.

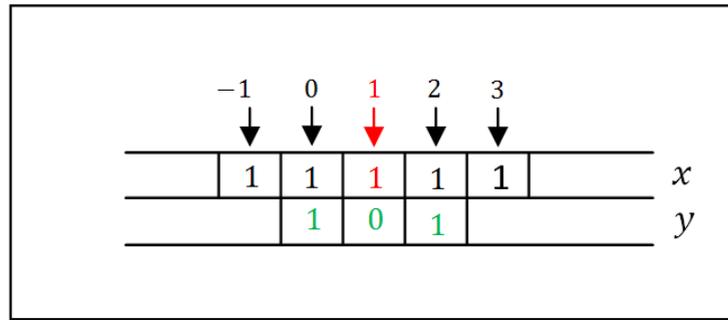


FIGURE 3.1 – Illustration pour la non surjectivité de la règle produit

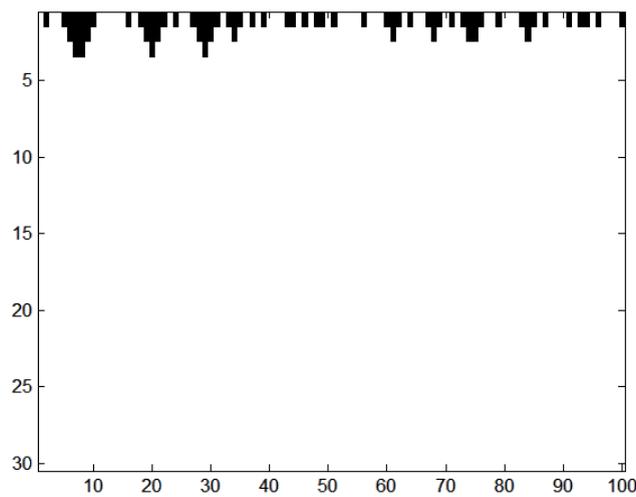


FIGURE 3.2 – diagramme espace temps de la règle produit

Exemple 3.2

Considérons l'endomorphisme du shift $(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}, Q)$ de mémoire 0 et d'anticipation 1, défini par sa règle locale comme suit

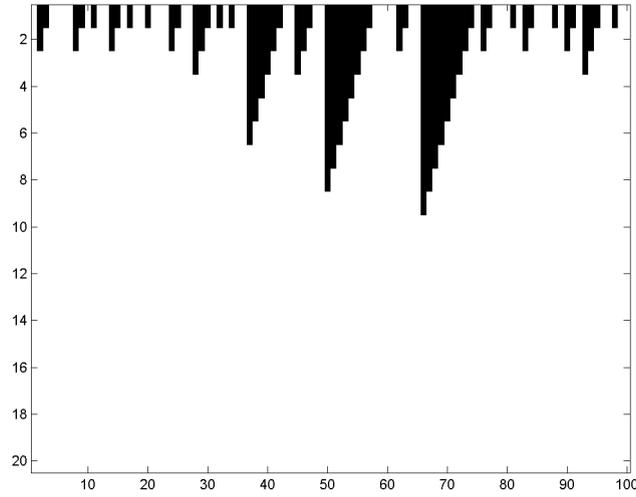
$$Q(x)_i = x_i x_{i+1}$$

Les valeurs possible de sa règle locale, sont présentés dans le tableau suivant

00	01	10	11
0	0	0	1

Comme l'exemple précédant on a

$$Y = \omega(\mathbf{2}^{\mathbb{Z}}) = \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}} : \forall m \geq 0, 10^m 1 \notin x\}$$

FIGURE 3.3 – diagramme espace temps de la règle de Q

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $[0]_k$ est un cylindre invariant et

$$Y_k = \omega([0]_k) = Y \cap \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{Z}} : \forall i \leq k, x_i = 0\}.$$

est un attracteur. Par exemple Y_0 qui est constitué de tous les points $0^\infty.1^n 0^\infty$, $0 \leq n \leq \infty$.

On a $Y_{k+1} \subset Y_k$, et $\bigcap_{k \geq 0} Y_k$ est un quasi-attracteur minimale (du fait que, 0^∞ est stable mais pas attractif).

Conclusion

En conclusion, ce mémoire a permis d'approfondir notre compréhension des attracteurs dans les systèmes dynamiques discrets.

Au cours des différents chapitres, nous avons abordé les définitions et notions de base des systèmes dynamiques discrets, ainsi que des concepts de la dynamique symbolique qui ont jeté les bases nécessaires pour les chapitres ultérieurs.

Dans le deuxième chapitre, nous avons examiné les différentes caractérisations des attracteurs et leur lien avec les ensembles oméga limites et les ensembles invariants par chaînes. Les bifurcations ont également été brièvement abordées. De plus, nous avons étudié les exposants de Lyapunov qui permettent de détecter le comportement chaotique de l'attracteur, ainsi que les fractales et la dimension fractale, ce qui nous a permis d'apprécier la complexité et la richesse des attracteurs. Nous avons ensuite identifié différents types d'attracteurs, notamment les attracteurs réguliers prenant la forme de points fixes et d'orbites périodiques attractives, ainsi que les attracteurs étranges ou chaotiques. Pour illustrer ces concepts, nous avons présenté quelques exemples connus.

Dans le dernier chapitre, nous nous sommes concentrés sur les attracteurs des endomorphismes du shift. Nous avons présenté leur première caractérisation introduite par Mike Hurley et Peter Kurka, et puis nous avons abordé les contraintes imposées par l'équicontinuité et la subjectivité sur ces attracteurs. Et enfin, nous avons introduit les attracteurs des sous-shifts.

Annexe A

Liste des programmes Matlab utilisés dans le mémoire

Dans cette annexe nous présentons une liste des programmes Matlab utilisés tout au long de ce mémoire pour réaliser les différentes figures.

En incluant cette Annexe, nous fournissons une référence pratique pour ceux qui souhaitent examiner de plus près les codes sources Matlab employés.

A.1 Créer une représentation graphique de l'orbite d'un point x_0

```
x=[0:0.0001:1];  
f=@(x) x;  
g=@(x) 2.8.*x.*(1-x);  
plot(x,f(x),'r-','Linewidth',1.5)  
hold on  
plot(x,g(x),'b-','Linewidth',1.5)  
x0=0.1;  
x1=g(x0);
```

```

figure(1)
for i=1:8
plot ([x0 x0],[x0 g(x0)], 'm—', 'Linewidth',1.5)
plot ([x0 x1],[g(x0) g(x0)], 'm—', 'Linewidth',1.5)
x0=x1;
x1=g(x0);
end

```

A.2 Tracer les premières itérations de l'ensemble de Cantor

```

n = input('Input_number_of_iteratio:');
a = cell(1,n);
for j = 1:n
    a{j} = linspace(0, 1, 3^j+1);
end
m = n;
z = ones(1, 2) * (m+(1/4));
plot ([0 1], z, 'r—', 'linewidth',3)
    hold on
for j = 1:n
    b_old = a{j}/;
    b = reshape(b_old,2, []);
    l = ones(1, 2) * m;
    for k = 1:size(b, 2)
        plot(b(:, k), l, 'r—', 'linewidth',3), hold on
    end

```

```
    m = m - (1/4);  
end  
xlim([-0.1 1.1]), ylim([3 n+1])
```

A.3 Courbe de Von Koch

```
subplot(3,2,1)  
k=0;  
mmax=4^k;  
x=zeros(1,mmax);y=zeros(1,mmax);segment=zeros(1,mmax);  
h=3^(-k);  
x(1)=0;y(1)=0;  
angle(1)=0;angle(2)=pi/3;angle(3)=-pi/3;angle(4)=0;  
for a=1:mmax  
    m=a-1;ang=0;  
    for b=1:k  
        segment(b)=mod(m,4);  
        m=floor(m/4);  
        r=segment(b)+1;  
        ang=ang+angle(r);  
    end  
    x(a+1)=x(a)+h*cos(ang);  
    y(a+1)=y(a)+h*sin(ang);  
  
end  
plot(x,y,'r','linewidth',1.5);  
axis equal
```

Remarque A.1

Le sous-graphique spécifié par `subplot(3,2,1)` indique que nous aurons une grille de 3 lignes et 2 colonnes, et le premier sous-graphique sera actif pour $k = 0$.

Pour afficher les sous-graphiques suivants, il suffit simplement de modifier la valeur de k .

A.4 Triangle de Sierpinski

```
x(1)=0; y(1)=0;
n=input('le nombre des iterations est: ')

for k=1:n
    base=randi([1 3],1,1);
    if base==1
        x(k+1)=0.5*x(k);
        y(k+1)=0.5*y(k);
    elseif base==2
        x(k+1)=0.5*x(k)+0.25;
        y(k+1)=0.5*y(k)+sqrt(3)/4;
    elseif base==3
        x(k+1)=0.5*x(k)+0.5;
        y(k+1)=0.5*y(k);
    end
    plot(x,y,'r^')
end
saveas(gcf,'shirpiski1','png')
```

A.5 Attracteur de Lorenz

```
sigma = 10;
beta = 8/3;
rho = 28;

x0 = [1, 2, 3];
temps = [0,35];
dt = 0.01;
lorenz = @(t, x) [sigma * (x(2) - x(1));
                  x(1) * (rho - x(3)) - x(2);
                  x(1) * x(2) - beta * x(3)];
[t, x] = ode45(lorenz, temps, x0);
plot3(x(:,1), x(:,2), x(:,3), 'b', 'LineWidth', 1.5);
grid on
view(-19,20)
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```

A.6 Attracteur de Hénon

```
a = 1.4;
b = 0.3;
x0 = 0;
y0 = 0;
```

```
n=10000;
x = zeros(n, 1);
y = zeros(n, 1);
for i = 1:n
    x(i+1) = 1 - a * x(i)^2 + y(i);
    y(i+1) = b * x(i);
end
plot(x, y, '.', 'MarkerSize', 2, 'Color', 'b');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

A.7 Attracteur de Lozi

```
a = 1.7;
b = 0.5;
x0 = 0;
y0 = 0;
n = 10^4;
x = zeros(n, 1);
y = zeros(n, 1);
for i = 1:n
    x(i+1) = 1 - a * abs(x(i)) + y(i);
    y(i+1) = b * x(i);
end
plot(x, y, '.', 'MarkerSize', 2, 'Color', 'b');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

```
xlim([-1.5 1.5])  
ylim([-1 1])
```

A.8 Attracteur de Pickover

```
a = -0.966918;  
b = 2.879879;  
c = 0.765145;  
d = 0.744728;  
  
x(1) = 1;  
y(1) = 1;  
n = 50000;  
for i = 1:n  
    x(i+1) = sin(b*y(i)) + c*cos(b*x(i));  
    y(i+1) = sin(a*x(i)) + d*cos(a*y(i));  
end  
  
plot(x,y, '.', 'MarkerSize', 2.8);  
xlabel('X');  
ylabel('Y');
```

A.9 Attracteur de Gumowski-Mira

```
a = -0.92768;  
b = 0.9 ;
```

```

x(1) = 1;
y(1) = 1;
n = 50000;
f = @(x) a*x+(2*(1-a)*x^2)/(1+x^2);
for i = 1:n
    x(i+1) =f(x(i)) + b*y(i) ;
    y(i+1) =f(x(i+1)) - x(i);
end

plot(x,y, '.', 'MarkerSize', 2.8);
xlabel('x');
ylabel('y');

```

A.10 Règle produit ($2^{\mathbb{Z}}, P$)

```

M = 100;
numIterations = 20;
tab = randi([0 1], M, M);
diagr = zeros(numIterations, M);
for iteration = 1:numIterations
    diagr(iteration, :) = tab(:, 1);
    nouv_tab = zeros(size(tab));

    for i = 1:M
        G_i = mod(i - 2, M) + 1;
        D_i = mod(i, M) + 1;
        nouv_tab(i, :) = tab(G_i, :) .* tab(i, :) .* tab(D_i, :);
    end
end

```

```
    end
    tab = nouv_tab;
end

imagesc(diagr);
colormap(flipud(gray));
```

A.11 Règle ($2^{\mathbb{Z}}, Q$)

```
M = 100;
numIterations = 20;
tab = randi([0 1], M, M);
diagr = zeros(numIterations, M);
for iteration = 1:numIterations
    diagr(iteration, :) = tab(:, 1);

    nouv_tab = zeros(size(tab));

    for i = 1:M
        D_i = mod(i, M) + 1;
        nouv_tab(i, :) = tab(i, :) .* tab(D_i, :);
    end
    tab = nouv_tab;
end

imagesc(diagr);
colormap(flipud(gray));
```

Bibliographie

- [1] M. Brin et G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Reprint of the 2002 hardback edition, Cambridge : Cambridge University Press, 2015.
- [2] H. Sayama, *Linear stability analysis of discrete-time nonlinear dynamical systems* [En ligne], Binghamton University, State University of New York, 2022, consulté le (20/02/2023) sur : https://math.libretexts.org/Bookshelves/Scientific_Computing_Simulations_and_Modeling/Book.
- [3] P. Kurka, *Topological and Symbolic Dynamics*, Cours spécialisés, Société Mathématiques de France, n°11, Institut Henri-Poincaré, Paris, 2003.
- [4] D. Lind et B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, 2nd updated edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2021.
- [5] M. Martelli et D. Marshall, *Stability and attractivity in discrete dynamical systems*, Mathematical Biosciences, Volume 128, 1995, Pages 347-355.
- [6] O. Galor, *Discrete Dynamical Systems*, Springer Science et Business Media, 2007.
- [7] H. Dang-vu et C. Delcarte, *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Ellipses Ed. Marketing, 2000.
- [8] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos : With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, CRC Press, 2015.

-
- [9] J. Gervais, *Introduction aux fractals et aux systèmes dynamiques* [En ligne], Université de Lavale, Québec, 2009, consulté le (11/04/2023) sur : https://www2.mat.ulaval.ca/fileadmin/Cours/MAT-2430/Notes_de_cours/NotesDeCours.pdf.
- [10] O. Knill, *Dynamical systems*, Harvard University, Spring semester, 2005.
- [11] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory, Second Edition*, Springer, 1995.
- [12] R. Abraham, L. Gardini and C. Mira, *Chaos in discrete dynamical systems*, Springer, 1997.
- [13] S.N. Elaydi, *Discrete chaos : With applications in science and engineering (2nd edition)*, Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [14] F. Balibrea et M. Caballero, *Examples of Lyapunov exponents in two-dimensional systems*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Volume 166, 2014, Pages 9-15.
- [15] E.N. Lorez, *Deterministic nonperiodic flows*, Journal of the atmospheric sciences, 1963, Pages 130–141.
- [16] J.R. Chazottes, M. Monticelli, *L'expérimentation numérique dans les sciences : Une brève histoire*, Gazette des Mathématiciens, 2015.
- [17] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys, Volume 50, 1976, 69-76.
- [18] S.I. Khan, S. Islam, *Chaotic Behavior and Strange Attractors in Dynamical Systems*, IOSR Journal of Mathematics, Volume 2, 2012, 25-31.
- [19] R. Lozi, *Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon*, Journal de Physique, Volume 39, 1978, 9-10.

- [20] H. Bruin, *Topological and ergodic theory of symbolic dynamics*, American Mathematical Society, 2022.
- [21] P. kurka, E. Formenti, *Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. Ergodic theory and dynamical systems*, Volume 17, n°2, 1997, p. 417-433.
- [22] M. Hurley, *Attractors in cellular automata. Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Volume 10, n°1, 1990, 131–140.
- [23] P. kurka, E. Formenti, A. Dennunzio, *Cellular Automata Dynamical Systems*, 2012, 25-27.
- [24] E. Akin, *The general topology of dynamical systems*, American mathematical society , 1991.
- [25] P. kurka, E. Formenti, *Subshift attractors of cellular automata*, Volume 20, n°1, 2006, p. 105.