

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

En
Mathématiques

Spécialité :
Probabilités Statistique et Applications

Thème

Application des bornes de perturbation de Cho et Meyer dans les modèles de files d'attente

Présenté par :

Encadré par :

M^{lle}. DRIDI Ryma.

Mr SOUFIT Massinissa

Devant le jury :

Mme BOURAINE Louiza

Président

Professeur

U. A/Mira Béjaïa.

Mr SOUFIT Massinissa

Rapporteur

M.C.B

U. A/Mira Béjaïa.

Mme BACHI Katia

Examinatrice

M.C.B

U. A/Mira Béjaïa.

Année universitaire : 2022/2023.

Remerciements

“ *Les mathématiques sont une belle langue pour exprimer les lois de l’univers.* ”
Galilée

Je tiens tout d’abord à exprimer ma profonde gratitude envers mon promoteur, Monsieur Sofit Massinissa, pour son encadrement tout au long de ce mémoire. Ses conseils pertinents et précieux ainsi que nos discussions bénéfiques ont grandement contribué à la réussite de ce travail.

Je souhaite également remercier Madame Louiza Borraine pour son soutien et ses précieux conseils. Mes remerciements vont également à tous les enseignants de département mathématique, qui se sont toujours montrés disponibles pour répondre à mes questions et demandes de savoir. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers tous mes collègues qui m’ont soutenu(e) et encouragé(e) tout au long de cette expérience.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers tous les membres de ma famille et mon fiancé ainsi que ma belle famille pour leur soutien et leurs encouragements. Leur amour et leur soutien indéfectibles ont été une source d’inspiration constante dans la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

À mes très chers parents,

À toute ma famille,

A mon fiancé,

À ma belle famille,

À mes amis(es),

Et à tous ceux qui m'ont soutenu(e) tout au long de ce parcours,

Je dédie ce travail avec amour et gratitude.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	1
1 SYSTÈMES DE FILES D'ATTENTE	3
1.1 Processus stochastique	3
1.2 Chaînes de Markov	3
1.2.1 Classification des états d'une chaîne de Markov	4
1.2.2 Comportement asymptotique	6
1.3 Files d'attente	6
1.3.1 Description du phénomène d'attente	6
1.3.2 la structure d'une file d'attente	7
1.3.3 Classification des files d'attente	7
1.3.4 La notation de Kendall	8
1.3.5 Mesures de performance	9
1.3.6 Formules de Little	9
1.4 Système de files d'attente classique	10
1.4.1 Système d'attente M/M/1	10
1.4.2 Système d'attente G/M/1	11
1.4.3 Système d'attente M/G/1	16
1.5 Conclusion	19
2 BORNES DE PERTURBATION	20
2.1 Analyse de sensibilité	20
2.1.1 Les méthodes d'analyse de sensibilité	21
2.2 Bornes de perturbation	23
2.3 Les bornes de perturbation de cho et meyer	24
2.3.1 Borne de perturbation de <i>Schweitzer</i>	24
2.3.2 Borne de perturbation de <i>Meyer</i>	24
2.3.3 Borne de perturbation <i>Haviv</i> et van <i>Heyden</i>	25
2.3.4 Borne de perturbation de <i>Funderlic</i> et <i>Meyer</i>	25
2.3.5 Borne de perturbation de <i>Seneta</i>	26
2.3.6 Borne de perturbation de <i>Seneta</i>	26
2.4 Conclusion	27
3 APPLICATION NUMÉRIQUE	28
3.1 Analyse de système G/M/1	28
3.1.1 Le système M/M/1	29
3.1.2 Le système $E_2/M/1$	31
3.1.3 Le système $H_2/M/1$	32
3.1.4 Le système D/M/1	33
3.2 Analyse de système M/G/1	36
3.2.1 Le système $M/H_2/1$	36

3.2.2	Le système $M/E_2/1$	38
3.2.3	Le système $M/D/1$	39
3.3	Conclusion	42

CONCLUSION GENERALE	42
----------------------------	-----------

Bibliographie	43
----------------------	-----------

Table des figures

1.1	Représentation schématique d'une file d'attente classique	7
1.2	Représentation schématique d'une file d'attente classique	11
3.1	Sensibilité du modèle M/M/1 à la perturbation Δ	30
3.2	Sensibilité du modèle $E_2/M/1$ à la perturbation Δ	31
3.3	Sensibilité du modèle $H_2/M/1$ à la perturbation Δ	33
3.4	Sensibilité du modèle D/M/1 à la perturbation Δ	34
3.5	Sensibilité du modèle $M/H_2/1$ à la perturbation Δ	37
3.6	Sensibilité du modèle $M/E_2/1$ à la perturbation Δ	39
3.7	Sensibilité du modèle M/D/1 à la perturbation Δ	40

Liste des tableaux

3.1	les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $M/M/1$	30
3.2	les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $E_2/M/1$	31
3.3	les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $H_2/M/1$	32
3.4	les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $D/M/1$	34
3.5	les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $M/H_2/1$	37
3.6	les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $M/E_2/1$	38
3.7	les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $M/D/1$	40

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les problèmes de files d'attente sont omniprésents dans notre vie quotidienne et dans divers domaines tels que les services de santé, les banques, les supermarchés, les centres d'appels et les transports publics. Ces files d'attente peuvent entraîner des temps d'attente excessifs, des retards, une perte de productivité et de la frustration chez les clients. Afin de mieux comprendre ces phénomènes, de nombreux modèles mathématiques ont été développés pour décrire les files d'attente et prédire leur comportement.

Ce domaine de recherche a émergé dans les années 1917 [26], grâce aux travaux de l'ingénieur danois Erlang [15] [16] sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague. Depuis lors, la théorie des files d'attente a connu un développement remarquable grâce aux contributions des mathématiciens Khintchine, Palm, Kendall, Pollaczek [37] et Kolmogorov. Aujourd'hui, cette théorie est largement utilisée et ses applications sont multiples.

Lors de l'étude des systèmes concrets, il est souvent nécessaire de simplifier le système réel complexe en utilisant un modèle simplifié. Ce modèle simplifié est choisi de manière à représenter une approximation précise du système réel. Cependant, la précision de ces modèles dépend de la connaissance des paramètres, qui peuvent être incertains en raison de diverses raisons telles que les coûts élevés des mesures, la difficulté à obtenir des données sur les clients ou la variabilité naturelle des paramètres. L'incertitude des paramètres peut entraîner des erreurs dans les prévisions et les décisions de gestion des files d'attente.

Dans le domaine de la modélisation des systèmes complexes, l'analyse de sensibilité joue un rôle crucial pour évaluer l'impact des paramètres d'entrée sur les mesures de performances. Les bornes de perturbation, parmi les méthodes couramment utilisées, offrent une approche spécifique et puissante pour quantifier la sensibilité des paramètres.

Ainsi, nous nous concentrons sur l'utilisation des bornes de perturbation des chaînes de Markov. Les principaux travaux réalisés dans ce cadre ont été résumés par Heidergott et Hordijk [21]. Une partie de ces travaux concerne l'analyse de la sensibilité de la distribution stationnaire des chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini. Heidergott et al. [20] ont étudié cette sensibilité en utilisant des méthodes d'analyse matricielle. Les bornes de perturbations ont été obtenues en utilisant ces méthodes. Ainsi que dans l'article de Cho et Mayer [10].

Dans ce travail, nous nous appuyons sur les bornes de perturbations présentées dans le papier de Cho et Mayer [10]. Ces bornes de perturbations sont utilisées pour quantifier l'erreur associée à l'estimation des paramètres des modèles de files d'attente. Elles fournissent une estimation de l'effet des variations ou des perturbations sur la distribution stationnaire des chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini. Les méthodes d'analyse matricielle utilisées par Cho et Mayer [10] permettent d'évaluer ces bornes et de comprendre la sensibilité du système

aux perturbations.

L'idée est de perturber les valeurs des paramètres d'entrée en les faisant varier dans leur plage admissible, tout en maintenant les autres paramètres constants. On évalue ensuite la sensibilité des résultats du modèle en effet de ces variations des bornes.

En résumé, ce travail de recherche se concentre sur l'analyse de sensibilité des modèles de files d'attente, en mettant spécifiquement l'accent sur les systèmes $G/M/1$ et $M/G/1$. L'objectif principal est d'utiliser les bornes de perturbation de Cho et Meyer [10] pour quantifier l'erreur associée à l'estimation des mesures de performances lorsqu'il y a des variations dans les paramètres d'entrée. Les résultats obtenus dans cette étude pourraient avoir des implications pratiques significatives pour les entreprises et les organisations qui cherchent à optimiser leurs systèmes de files d'attente et à offrir un service de qualité à leurs clients.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

- Le premier chapitre traite les notions de base de la théorie des files d'attente en citant quelques systèmes de files d'attente en particulier : le système $G/M/1$ et le système $M/G/1$.
- Le deuxième chapitre se résume à certaines définitions concernant les bornes de perturbation en générales et les bornes de perturbation de Cho et Meyer en particulier qui seront utiles pour notre étude.
- le dernier chapitre sera consacré à la présentation des résultats numériques concernant l'application de l'approche basée sur le calcul des bornes de perturbation de Cho et Meyer sur les deux systèmes choisis

Ce mémoire se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

SYSTÈMES DE FILES D'ATTENTE

Les files d'attente sont un phénomène courant dans notre vie quotidienne, nous avons tous connu l'expérience d'attendre pour obtenir un service. Dans ce chapitre, nous présenterons les concepts de base et les éléments essentiels du formalisme de files d'attente. Nous accorderons une attention particulière à la description de certaines files d'attente, à savoir le système M/G/1 et le système G/M/1.

1.1 Processus stochastique

Définition 1 [4] *On appelle processus stochastique une famille indexée $\{X_t, t \in T\}$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans l'espace mesurable (E, ξ) , $t \in T$ représente une date. Lorsque $T \in \mathbb{Z}$, on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et lorsque T est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ on parlera de processus à temps continu.*

Les processus stochastiques peuvent être classés en quatre types [2] :

1. Processus à temps discret avec espace d'états discret,
2. Processus à temps discret avec espace d'états continu,
3. Processus à temps continu avec espace d'états discret,
4. Processus à temps continu avec espace d'états continu.

1.2 Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire : X_n représente l'état du système à l'instant n . La propriété fondamentale des chaînes de Markov, dite propriété de Markov, est que son évolution future ne dépend du passé qu'au travers de sa valeur actuelle.

Chaînes de Markov à temps discret

Définition 2 [4] *On appelle chaîne de Markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire c-à-d : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Un processus stochastique à valeurs dans l'espace mesurable (E, ξ) est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété de Markov :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (1.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états i_0, \dots, i_{n-1} , i pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens.

On peut alors définir la probabilité de transition d'un état i vers un état j , par p_{ij} :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i); \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

La matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infini.

Les matrices de transition sont également appelées "matrices stochastiques" et satisfont les deux conditions suivantes :

1. leurs éléments sont non négatifs

$$p_{ij} \geq 0; \quad \forall i, j \in E.$$

2. la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in E.$$

1.2.1 Classification des états d'une chaîne de Markov

Dans le but d'étudier le comportement de la chaîne de Markov à long terme, nous devons classifier l'espace de ses états que l'on notera $E = \{i, j, \dots\}$, avec i, j, \dots constituant les points de cet espace, pour cela nous définissons quelques types d'états d'une chaîne de Markov discrète.

Chaîne de Markov irréductible

Définition 3 [4] Une chaîne de Markov est dite irréductible, si elle ne contient aucun ensemble fermé (autre que celui de tous ces états)

Un état $j \in S$ est **accessible** à partir d'un état i si la probabilité de transition de i en j en un certain nombre d'étapes est positive [2].

$$\exists n \geq 0, \quad \text{telque } p_{i,j}^{(n)} \geq 0$$

— État communiquant

On dit que l'état j **communique** avec l'état i , si chacun d'eux est accessible à partir de l'autre.

Proposition 1 : La relation de communication est une relation d'équivalence sur \mathbb{E} .

Définition 4 : Les classes d'équivalence suivant la relation de communication sont appelées classes irréductibles.

Réurrence et transience

— état récurrent

$i \in S$ est un état **récurrent** si, en partant de l'état i on repassera presque sûrement par cet état.

$$F_{i,i}(+\infty) = 1$$

où $F_{i,j}(n) = \sum_{k=0}^n f_{i,j}(k)$, représente la probabilité de passage de l'état i à l'état j en au moins de $n+1$ transitions $f_{i,j}(n)$ la probabilité de premier passage en n transitions de l'état i à l'état j

$$f_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j | X_0 = i) \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1.$$

avec

$$f_{i,i}^{(n)} = P(1^{er} \text{ retour en } i)$$

Remarque 1 Il existe deux type d'état récurrent ;

1. **États récurrents non nuls** : Un état i est dit récurrent non nul, si la chaîne partant de i repassera par i au bout d'un temps fini,

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,i}^{(n)} < \infty$$

2. **États récurrents nuls** : Un état i est dit récurrent nul, si la chaîne partant de i repassera par i au bout d'un temps infini,

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,i}^{(n)} = \infty$$

— État transitoire

$i \in S$ est un état transitoire si, en partant de l'état i on risque de ne pas repasser par cet état.

$$F_{i,i}^{(\infty)} < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} < 1$$

Remarque 2 Les états d'une même classe sont de même nature.

— Périodicité d'un état

On appelle période d'un état i noté l'entier $d(i)$ défini par :

$$d(i) = \text{PGCD}\{n \geq 1, p_{i,i}^n > 0\}$$

Si $d(i) = d \geq 2$, on peut dire que l'état i est périodique de période d . Si $d(i) = 1$, l'état i est apériodique.

— État ergodique

Un état est dit ergodique s'il est récurrent non nul et apériodique.

Loi de probabilité de X_n

Nous introduisons les probabilités d'états :

$$\pi_k^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.3)$$

La distribution de X_n peut alors être écrite sous forme de vecteur-ligne :

$$\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots) \quad (1.4)$$

dont la somme des termes vaut 1.

Pour calculer $\pi(n)$, on doit connaître la distribution initiale $\pi(0)$ et la matrice de transition P ; ces probabilités d'états définissent le régime transitoire d'un phénomène aléatoire :

$$\pi(n) = \pi(0)P^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

1.2.2 Comportement asymptotique

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède une distribution limite π si,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(n)} = \pi \quad (1.6)$$

Théorème 1 [2] *Si la matrice de transition P est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors*

$$\pi^{(n)} \rightarrow \pi$$

, quelle que soit la distribution initiale $\pi(0)$, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n = P^*$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. La distribution π est un vecteur de probabilité strictement positif, et P^* une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur limite π . En plus

$$\pi P^* = \pi.$$

1.3 Files d'attente

1.3.1 Description du phénomène d'attente

Les files d'attente sont un phénomène commun dans les systèmes où les clients attendent pour obtenir un service auprès d'un ou plusieurs serveurs. Ces systèmes peuvent inclure des entreprises telles que les banques, les supermarchés, les restaurants, les aéroports, les centres d'appels, les hôpitaux et les transports en commun.

Les clients arrivent au système selon un processus aléatoire, généralement décrit par une distribution d'arrivée, et attendent dans une file d'attente jusqu'à ce qu'un ou plusieurs serveurs soient disponibles pour les servir. Le temps d'attente et le temps de service peuvent également être aléatoires, déterminés par des distributions de temps d'attente et de temps de service respectivement.

Les systèmes de files d'attente sont conçus pour gérer efficacement les flux de clients et maximiser l'utilisation des ressources du système. Les modèles de files d'attente sont utilisés pour analyser les performances du système et pour prédire les mesures de performance telles que le temps d'attente moyen, le temps de service moyen. L'objectif principal est d'optimiser les performances du système d'attente.

1.3.2 la structure d'une file d'attente

La structure d'une file d'attente typique comprend généralement quatre éléments clés :

- **Les clients** : ils constituent la demande pour le service. Ils peuvent être externes ou internes au système et peuvent avoir des caractéristiques telles que des besoins de service différents, des temps d'arrivée différents et des temps de service différents.
- **Les serveurs** : ils fournissent le service demandé par les clients. Ils peuvent être des personnes, des machines ou des processus automatisés.
- **Les files d'attente** : les clients qui arrivent et ne peuvent pas être immédiatement servis sont placés dans une ou plusieurs files d'attente. Les files peuvent être de différentes tailles, formes et politiques de service (FIFO, LIFO, priorités, etc.).
- **La structure physique** : cela comprend les éléments matériels tels que l'espace de service, l'espace d'attente, les équipements, les systèmes informatiques, les dispositifs de surveillance, etc.

En plus de ces éléments clés, d'autres facteurs peuvent également influencer la structure d'une file d'attente, tels que la capacité du système (c'est-à-dire le nombre maximum de clients pouvant être en attente ou en service simultanément), les politiques de service (c'est-à-dire la façon dont les clients sont traités en fonction de leurs caractéristiques et de leur statut dans la file d'attente), et les règles de comportement des clients (c'est-à-dire la façon dont les clients réagissent aux temps d'attente, aux politiques de service, aux informations fournies, etc.).

Une représentation graphique d'une file d'attente classique est donnée par la figure suivante :

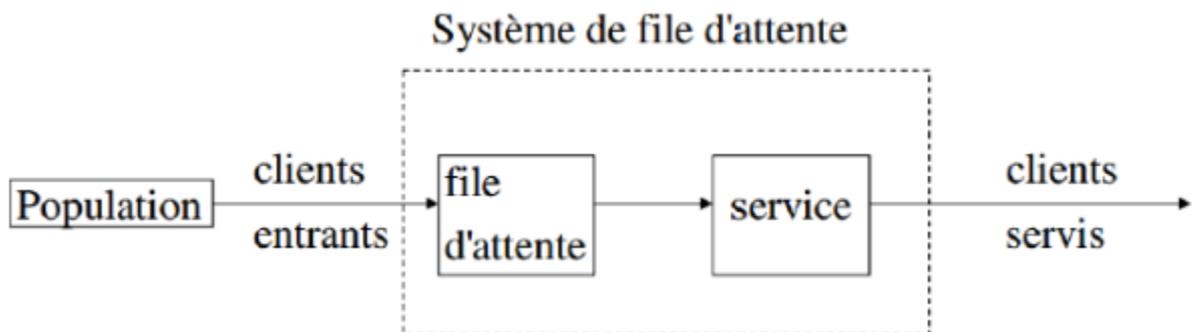


FIGURE 1.1 – Représentation schématique d'une file d'attente classique

1.3.3 Classification des files d'attente

La classification des files d'attente est importante pour la modélisation et l'analyse des systèmes de file d'attente. Les files d'attente peuvent être classées en fonction de diverses caractéristiques, notamment :

- **Processus d'arrivée** : Il s'agit du modèle mathématique utilisé pour décrire l'arrivée des clients dans le système. Les processus d'arrivée couramment utilisés comprennent les processus de Poisson, les processus d'arrivée déterministes, etc.
- **Nombre de serveurs** : Le nombre de serveurs dans le système peut être variable ou

fixe. Les files d'attente à serveur unique sont les plus courantes, mais il existe également des files d'attente à plusieurs serveurs.

- **Durée de service** : La durée de service est le temps qu'un serveur passe à servir un client. La loi probabiliste qui décrit la durée du service peut être exponentielle, normale, uniforme, etc.
- **Nombre de places d'attente** : Le nombre de places d'attente est le nombre maximum de clients qui peuvent attendre dans le système avant d'être servis.
- **Nombre total de clients existants** : Le nombre total de clients existants est la somme des clients en attente et des clients en service.
- **Discipline de service** : Les règles de traitement des clients spécifient l'ordre dans lequel les clients sont traités, appelé la discipline de la file.

Les Disciplines de service

- **FIFO** (*First In First Out*), est une discipline de service dans laquelle les clients sont servis dans l'ordre dans lequel ils sont arrivés. Le client qui arrive en premier est servi en premier. Cette discipline est la plus courante et est généralement adoptée par défaut.
- **LIFO** (*Last In First Out*), est une discipline de service dans laquelle les clients en attente forment une pile, le dernier arrivé étant servi en premier. Cette discipline correspond aux situations dans lesquelles les clients sont traités comme une pile, et le dernier arrivé est le premier à être servi.
- **SIRO** (*Service In Random Order*), est une discipline de service dans laquelle le prochain client à être servi est choisi au hasard parmi tous ceux en attente. Cette discipline est utilisée dans les situations où il n'y a pas d'importance particulière à donner à l'ordre de service des clients.
- **RR** (*Round Robin*), est une discipline de service dans laquelle les clients sont servis à tour de rôle pendant un intervalle de temps fixe, appelé quantum. Cette discipline est utile pour modéliser un serveur multitâche, où les clients sont traités à tour de rôle.
- **PS** (*Processor Sharing*), est une discipline de service dans laquelle chaque client reçoit une part égale du temps de service disponible. Cette discipline est le cas limite de la discipline RR lorsque le quantum tend vers zéro. Elle est utilisée dans les situations où les clients sont tous importants et doivent être traités avec une équité maximale.

1.3.4 La notation de Kendall

La notation de Kendall permet de décrire une file d'attente en utilisant une formule symbolique :

$$A/B/S/N/M/D$$

tels que :

- A : représente la nature du processus d'arrivée des clients ;
- B : représente la nature du processus de service ;
- S : représente le nombre de serveurs disponibles dans le système ;
- N : représente la capacité du système ;
- M : représente la taille de la population ;
- D : représente la discipline de service ;

Dans sa version courte, seuls les trois premiers symboles $A/B/S$ sont utilisés. Il est sous-entendu que $N = +\infty$, $M = +\infty$ et $D = \text{FIFO}$.

1.3.5 Mesures de performance

La théorie des systèmes d'attente a comme objectif de calculer ou estimer les performances d'un tel système à partir de la distribution stationnaire du modèle d'attente.

- L : nombre moyen de clients dans le système ;
- L_q : nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- W : temps moyen de séjour d'un client dans le système ;
- W_q : temps moyen d'attente d'un client dans le système ;
- ρ : l'intensité du trafic ;

1.3.6 Formules de Little

La formule de Little est l'un des résultats les plus utiles en théorie de files d'attente. Soit $\alpha(t)$ le nombre d'arrivées dans le système jusqu'au temps t , et $\lambda_t = \alpha(t)/t$ comme le taux moyen d'arrivée pendant l'intervalle du temps $[0; t]$. Soit W la durée moyenne de séjour dans le système (attente et service). Dénoter enfin le nombre moyen de clients dans le système durant $[0; t]$ par L_t . La relation entre ces deux mesures de performance est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2 (Formules de Little) [2] *Si la limite $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$ et W existent, alors la limite $L = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t$ existe aussi, et la relation suivante est vérifiée :*

$$L = \lambda W \quad (1.7)$$

est vérifiée.

Les valeurs de mesures de performance sont liées les unes aux autres par les relations suivante :

$$L = \lambda W \quad (1.8)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad (1.9)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (1.10)$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (1.11)$$

Tel que μ est le taux de service et λ taux d'arrivée de clients dans le système.

1.4 Système de files d'attente classique

Nous allons décrire ici les files d'attente élémentaires qui seront utilisées dans notre étude sur les systèmes de files d'attente. Nous allons nous concentrer sur l'étude des systèmes G/M/1 et M/G/1, car c'est le sujet principal de notre recherche.

1.4.1 Système d'attente M/M/1

Pour le système d'attente M/M/1, le flot des arrivées est poissonien, de paramètre λ , et la durée de service est exponentielle, de paramètre μ . La capacité d'attente est illimitée et il y a une seule serveur.

La charge de la file, notée ρ est définie comme le produit du taux d'arrivée moyen des clients λ , par le temps moyen de service par client $\frac{1}{\mu}$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

La condition $\rho < 1$ est nécessaire et suffisante pour garantir la stabilité de la file [2]. La figure 1.2 représente un schéma pour une file d'attente classique.



FIGURE 1.2 – Représentation schématique d'une file d'attente classique

Une file d'attente de type M/M/1 peut être décrite par un processus markovien. L'état d'une telle file est décrit par $\{X(t), t \geq 0\}$ qui représente le nombre de clients dans le système à l'instant t .

Générateur infinitésimal

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Distribution Stationnaire

La probabilité qu'il y'ait n clients en régime stationnaire peut être obtenue en utilisant les équations de Chapman-Kolmogorov suivantes [2] :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \end{cases}, n = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Si $\lambda < \mu$, le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ converge vers la solution suivante :

$$p_n = p_0 \rho^n, n = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

avec

$$p_0 = 1 - \rho.$$

Les caractérisent de système M/M/1 :

- $L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$, $W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$, où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ est le taux d'utilisation du serveur.
- $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$, $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$ est le nombre moyen de clients en attente et le temps moyen d'attente.

1.4.2 Système d'attente G/M/1

La file d'attente G/M/1 est un modèle de file d'attente où les arrivées de clients suivent une distribution générale (représentée par G), le temps de service suit une distribution exponentielle (représentée par M) ,et il y a un seul serveur (représenté par 1). Dans ce modèle, les clients arrivent à un taux moyen λ et sont servis avec un taux moyen $1/\mu$.

Soit Z_n la durée entre l'arrivée du $n^{ième}$ client et le $n + 1^{ième}$ client tel que $Z_n = t_{n+1} - t_n$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. avec une fonction de distribution $A(\cdot)$ et la transformée de la place [56].

$$\phi(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} dA(t); \quad \theta \in [0, 1].$$

Lorsqu'un client arrive et trouve le serveur libre, il est immédiatement servi et quitte le système. Si le serveur est occupé lorsqu'un client arrive, ce dernier doit attendre dans une file d'attente jusqu'à ce que le serveur soit disponible pour le servir. Le temps d'attente dépend du nombre de clients qui sont arrivés avant lui et qui attendent encore d'être servis. Le temps de service pour chaque client est choisi de manière aléatoire à partir de la distribution exponentielle.

Remarque 3 *Le système est stable, si le nombre moyen de clients qui arrivent par unité de temps est inférieur au nombre moyen de clients servis.*

Analyse de régime stationnaire avec la méthode des Chaînes de Markov induite [56]

Soit $Q(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t , et Q_n représentant le nombre de clients dans le système juste avant l'arrivée du $n^{ième}$ client, sachant que Q_n est une chaîne de Markov induite aux instants d'arrivées.

Soit X_n le nombre de terminaisons de service potentielles pendant la période d'interarrivée Z_n , qui sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $q = (q_k)$ sur \mathbb{N} . La fonction génératrice de cette loi est notée g .

Remarque 4 *Il est important de noter que X_n représente le nombre de clients qui pourraient être servis pendant la période d'interarrivée, mais cela ne signifie pas nécessairement qu'ils seront effectivement servis.*

A partir de la relation existante entre Q_n et Q_{n+1} :

$$Q_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Q_n + 1 - X_{n+1} \leq 0 \\ Q_n + 1 - X_{n+1} & \text{si } Q_n + 1 - X_{n+1} > 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Notons que puisque X_{n+1} est défini comme le nombre potentiel de départs, $Q_n + 1 - X_{n+1}$ peut être < 0 . Clairement, Q_{n+1} ne dépend d'aucune variable aléatoire avec un paramètre d'indice antérieur à n ; ainsi, $Q_n, n = 0, 1, 2, \dots$ est une chaîne de Markov induite dans le processus de longueur de file d'attente.

Matrice de transition

À partir de (2.14), on déduit la probabilité de transition P_{ij} , qui est la probabilité de passer de l'état i à l'état j .

D'ou

$$P_{ij} = P(Q_{n+1} = j | Q_n = i) = \begin{cases} P(X_{n+1} \geq i - j + 1 | X_n \geq i) = \sum_{k=i-j+1}^{\infty} \beta_k & \text{si } j > 0 \\ P(X_{n+1} \geq i + 1 | X_n = 0) = \sum_{k=i+1}^{\infty} \beta_k & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

Ainsi :

$$P_{ij} = \beta_{i-j+1}, j > 0,$$

Cette probabilité dépendra de la valeur de $X_n + 1$, qui est déterminée par le nombre de clients en attente et le nombre de serveurs disponibles, ainsi que du taux d'arrivée et du taux de service du processus de file d'attente.

La matrice de transition est de la forme suivante

$$P = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & \cdots \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Où

$$\beta_i = \int_0^{+\infty} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} f(t) dt$$

avec $f(t)$ est la fonction de densité de service

Distribution stationnaire

Notons ρ le coefficient d'occupation de la file, à savoir le rapport du nombre d'arrivées au nombre de services par unité de temps. Comme X_n est un nombre de services pour une arrivée, son espérance doit être $1/\rho$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q_k = g'(1) = \frac{1}{\rho}$$

Le comportement asymptotique de la chaîne est toujours le même : si $\rho \geq 1$, la file est saturée, si $\rho < 1$ un régime d'équilibre peut s'établir.

Proposition 2 [5] *Si $\rho > 1$, la chaîne Q_n tend vers l'infini presque sûrement, elle est donc transiente. Si $\rho < 1$ la chaîne est récurrente.*

Démonstration : [5] on peut démontrer que la chaîne de Markov est récurrente si et seulement si $\rho < 1$ on utilisons la définition suivante :

$$Q_{n+1} = \max\{0, Q_n + 1 - X_n\}$$

pour tout $n \geq 1$, $Q_n \geq Q_0 + n - (X_1 + \dots + X_n)$, par la loi des grands nombres on sait que $(X_1 + \dots + X_n)/n$ converge vers $1/\rho$. Ainsi, on a $n - (X_1 + \dots + X_n)$ converge presque sûrement vers $+\infty$.

En d'autres termes, la différence $n - (X_1 + \dots + X_n)$ tend vers l'infini presque sûrement. Par conséquent, Q_n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, ce qui montre que la chaîne est transiente.

Supposons maintenant que $\rho < 1$. Le même raisonnement que précédemment montre que l'événement " $X_1 + \dots + X_n > n$ " a une probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Si $Q_0 = 0$, cet événement implique qu'il existe $m \leq n$ tel que $Q_m = 0$.

la probabilité de retour en 0 tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, la chaîne est récurrente.

La chaîne (Q_n) admet une mesure stationnaire si et seulement si le coefficient d'occupation ρ est strictement inférieur à 1. Dans ce cas, l'équation $g(z) = z$ admet une unique solution de module inférieur à 1. Cette solution, notée r , est réelle et strictement comprise entre 0 et 1. La mesure stationnaire $\pi = (\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\pi_n = (1 - r)r^n$$

Démonstration : [5] Si une mesure stationnaire existe, alors elle doit vérifier l'équation de récurrence linéaire suivante pour tout $n > 0$.

$$\pi_{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \pi_{n+k-1} \tag{1.15}$$

tel que : La probabilité de transition de i vers $j = 1, \dots, i + 1$ est q_{i-j+1} . La probabilité de transition de i vers 0 est $\sum_{k=i+1}^{\infty} q_k$.

Pour qu'une loi de probabilité soit solution de équation (1) de récurrence linéaire, il est nécessaire que l'équation caractéristique associée ait une racine de module inférieur à 1. Dans notre cas, l'équation caractéristique est $g(z) = z$, et il est possible de déterminer qu'elle a une racine réelle (notée r) comprise entre 0 et 1 en examinant le graphique de la fonction, si et seulement si la dérivée de g au point 1 est supérieure à 1, c'est-à-dire si $\rho < 1$.

En utilisant le théorème de Rouché, il est possible de montrer qu'il n'y a pas de racine de module inférieur à 1 si $\rho \geq 1$, tandis que si $\rho < 1$, la seule racine de module inférieur à 1 est r . Ainsi, il n'existe pas de mesure stationnaire si la valeur de ρ est supérieure ou égale à 1 (car la file sature), tandis que si ρ est strictement inférieure à 1, la mesure stationnaire peut être obtenue en utilisant la valeur de r .

Caractéristiques du système G/M/1

Supposons que la chaîne Q_n soit en régime stationnaire. Notons T la durée de séjour d'un client. La loi de T est la loi exponentielle de paramètre $\mu(1 - r)$, où r est la racine de $z = g(z)$ strictement comprise entre 0 et 1.

La probabilité que le client qui arrive trouve n clients arrivés avant lui dans le système est $\pi_n = (1 - r)r^n$

donc son temps de séjour sera la somme de $n + 1$ temps de service indépendants, exponentiels de paramètre μ . La loi conditionnelle de T sachant qu'il y a n clients dans le système est donc la loi d'Erlang ou loi gamma $\Gamma(n + 1, \mu)$. La densité de T peut donc s'écrire [5] :

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_n \mu^{n+1} t^n}{n!} e^{-\mu t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-r)r^n \frac{\mu^{n+1} t^n}{n!} e^{-\mu t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \\ &= \mu(1-r)e^{-\mu(1-r)t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \end{aligned}$$

Remarquons que l'espérance du temps de séjour est $\frac{1}{\mu(1-r)}$

— le nombre moyen de clients dans le système est :

$$\begin{aligned} L^A &= E(Q_n^A) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-r)r^n \\ &= r \sum_{n=0}^{\infty} n(1-r)^{n-1} \\ &= r \frac{1}{(r-1)^2} \\ &= \frac{r}{1-r} \end{aligned}$$

la formule de Little ne s'applique pas dans ce cas. Ceci est dû au fait que l'on n'observe la file qu'à certains instants particuliers, juste avant une arrivée .

— Temps moyen d'attente Dans la file W_q : Soit T_q la durée d'attente d'un client dans la file.

$$F_q(t) = P(T_q \geq t) = (1-r)e^{-\mu(1-r)t}$$

$$W_q = E(T_q) = \frac{r}{\mu(1-r)}$$

— le temps moyen de séjour :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-r)}$$

— le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \lambda W_q = \frac{r}{E(T)\mu(1-r)}$$

— le nombre moyen de clients dans le système :

$$L = \lambda W = \frac{1}{E(T)\mu(1-r)}$$

1.4.3 Système d'attente M/G/1

La description de modèle

Le système M/GI/1 est une file d'attente avec un seul serveur et une file FIFO à capacité illimitée. Le processus d'arrivée des clients dans la file est toujours supposé Poissonien de taux λ , mais maintenant le temps de service des clients suit une distribution générale. On suppose implicitement que les services successifs sont indépendants les uns des autres et distribués selon la même loi. Il faudrait alors parler d'une file M/GI/1.

Remarque 5 la condition d'existence du régime stationnaire est $\lambda < \mu$ où μ est le temps de service.

Analyse de régime stationnaire avec la méthode de Chaîne de Markov induite

Soit S_n le temps de service du nième client, tel que $\{S_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ avec, $P(S_n \leq x) = B(x), x \leq 0$.

Soit $Q(t)$ le nombre de clients dans le système au temps t et identifions $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$ comme étant les temps de départ des clients. Comme décrit ci-dessus, à ces moments-là, les temps de service restants des clients sont nuls. Soit $Q_n = Q(t_n + 0)$ le nombre de clients dans le système peu de temps après le nième départ. Nous pouvons montrer que $\{Q_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ est une chaîne de Markov comme suit ;

Soit X_n le nombre de clients arrivant pendant S_n . Avec l'hypothèse de Poisson pour le processus d'arrivée, nous avons [55] ;

$$\begin{aligned} k_j &= P(X_n = j) \\ &= \int_0^\infty P(X_n = j | S_n) P(t < S_n < t + dt) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\lambda t^j}{j!} dB(t) \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Sa fonction génératrice est :

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t z)^j}{j!} dB(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^j}{j!} dB(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} dB(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda z)t} dB(t) \\ &= \psi(\lambda - \lambda z). \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K'(z) &= \psi'(\lambda - \lambda z), \\ &= K'(1) = \lambda\psi'(0) \\ &= \lambda b = \rho \end{aligned}$$

On peut considérer l'équation réursive

$$Q_{n+1} = \begin{cases} Q_n + X_{n+1} - 1 & \text{si } Q_n > 0 \\ X_{n+1} & \text{si } Q_n = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

On peut écrire aussi :

$$Q_{n+1} = Q_n - \delta_n + X_{n+1} \quad (1.17)$$

avec

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Comme on peut le voir dans la relation précédente, Q_{n+1} peut être exprimé en fonction de Q_n et d'une variable aléatoire X_{n+1} , qui ne dépend d'aucun événement avant t_n . Comme X_{n+1} est i.i.d., il ne dépend pas non plus de Q_n . Par conséquent, $\{Q_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ est une chaîne de Markov, sous le nom "chaîne de Markov induite".

Matrice de transition

Soit

$$P_{ij} = P(Q_n = j | Q_0 = i), \quad i, j \in S$$

d'après l'équation(2.16) et α_j , on peut écrire [56];

$$P_{ij} = P(Q_{n+1} = j | Q_n = i) = \begin{cases} P(i + X_{n+1} - 1 = j) & \text{si } i > 0 \\ P(X_{n+1} = j) & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

et

$$= \begin{cases} \alpha_{j-i+1} & \text{si } i > 0 \\ \alpha_j & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

D'où la matrice des probabilités de transition de (Q_n)

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Puisque on peut passer d'un états versun autre, la C.M. est irréductible. On peut montrer (en utilisant le critère de Foster) qu'elle converge vers une distribution limite si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Distribution stationnaire

Supposons que $\rho < 1$ et soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ la distribution stationnaire de la chaîne de Markov $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ où ;

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = k]$$

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution π elle-même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi(Z)$. Ceci, en utilisant la définition de la distribution de probabilité discrète stationnaire par rapport à une matrice stochastique $\mathbb{P} : \pi\mathbb{P} = \pi$. On obtient alors [2]

$$\Pi(Z) = \frac{\pi_0 P(z)(Z - 1)}{Z - P(Z)} \quad (1.18)$$

$P(Z) = \sum_{j \leq 0} P_j Z^j = \int_0^{+\infty} e^{\lambda(Z-1)t} dB(t)$ est la transformée de Laplace du temps de service, $Z \in \mathbb{C}$ tel que $|Z| < 1$. La formule (1.18) est connue sous le nom de la première formule de **Pollaczek-Khinchine**.

Remarque 6 Deux méthodes existent pour déterminer les probabilités $\pi_k (k \geq 0)$. On peut les calculer en développant la fonction génératrice $\Pi(Z)$ en série de Mac Laurin.

- On peut montrer que les probabilités stationnaires $\pi_k (k \geq 0)$ de la chaîne de Markov induite $\{Q_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ sont identiques aux probabilités stationnaires P_n du processus continu $\{Q(t), t \geq 0\}$. Notons que ce résultat est valable pour le système M/G/1, ne s'étend généralement pas à d'autres processus non markoviens.
- De la relation (2.17), on tire $X_{n+1} = Q_{n+1} - Q_n + \delta_n$, puisqu'on se trouve en régime stationnaire,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(\delta_n) = P[Q_n > 0] = 1 - P[Q_n = 0]$$

Donc on a :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}[Q_n = 0]$$

Alors

$$\pi_0 = 1 - \rho \quad \text{avec} \quad \rho = \mathbb{E}(X_n).$$

On peut écrire aussi d'après la formule (2.18)

$$\Pi(z) = \psi(\lambda - \lambda Z) \frac{(1 - \rho)(Z - 1)}{Z - \psi(\lambda - \lambda Z)}.$$

Caractéristique du système M/G/1

[56]

- Nombre moyen de clients dans le système

$L = \mathbb{E}(X) = \lim_{z \rightarrow 1} \pi'(z)$, Néanmoins, ce calcul s'avère compliqué. Une méthode élémentaire est utilisée pour montrer la formule dite "deuxième formule de **Pollaczek-Khinchine**", donnant l'expression de L suivante ;

$$L = E(Q^*) = \rho + \frac{\lambda^2 E(S_n^2)}{2(1 - \rho)}$$

sachant que :

$$E(X_n^2) = K''(1) + K'(1).$$

$$K''(1) = \lambda^2 \psi''(0) = \lambda^2 \mathbb{E}(S_n^2).$$

$$K'(1) = \rho$$

— le nombre moyen de clients dans la file

$$L_q = \frac{\lambda^2 E(S_n^2)}{2(1 - \rho)}$$

— Le temps moyen de séjour

$$W = E(S_n) + \frac{\lambda E(S_n^2)}{2(1 - \rho)}$$

— Le temps moyen d'attente dans la file

$$W_q = \frac{\lambda E(S_n^2)}{2(1 - \rho)}$$

1.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté les notions fondamentales des systèmes de files d'attente, Nous avons également introduit le modèle d'attente M/G/1 et G/M/1, qui sont parmi les modèles les plus utilisés pour analyser les systèmes de files d'attente. Ces deux modèles seront les modèles clé que nous étudierons dans ce travail.

Chapitre 2

BORNES DE PERTURBATION

L'analyse de sensibilité joue un rôle crucial dans la modélisation et l'analyse des systèmes complexes. Elle permet d'évaluer l'impact des variations des paramètres et des incertitudes sur les résultats d'un modèle. Pour le but de comprendre comment les changements dans les entrées d'un modèle affectent les sorties, et d'identifier les paramètres les plus influents.

Nous débuterons ce chapitre en explorant les concepts fondamentaux de l'analyse de sensibilité et en mettant en évidence son importance dans la modélisation des systèmes. Ensuite, nous présenterons les bornes de perturbation comme une approche spécifique pour quantifier la sensibilité des paramètres. De plus nous avons passé en revue les six bornes de perturbation différentes en se basant sur les travaux de Cho et Meyer [10] .

2.1 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est une approche essentielle pour comprendre l'impact des paramètres d'entrée sur les sorties d'un modèle mathématique ou d'un système, ce qui permet de prendre des décisions éclairées, d'optimiser les performances du modèle et de réduire l'incertitude associée aux résultats.

Position du problème

Un modèle stochastique est un outil utilisé pour décrire l'état d'un système stochastique. Considérons un modèle mathématique qui est composé d'un ensemble de variables d'entrée aléatoires, d'une fonction déterministe et d'un ensemble de variables de sortie aléatoires. Le modèle peut être représenté sous la forme suivante :

$$F : X \rightarrow Y \tag{2.1}$$

Où

- **X** : représente les paramètres d'entrés du système : la distribution du flux d'arrivées, la loi de la durée de service et la capacité de la file.
- **Y** : représente les sortie du système :les caractéristiques du système ce sont : la distribution stationnaire le nombre moyen de clients dans le système, la durée moyenne de séjour d'un client et le taux d'occupation du système etc.

La stabilité d'un système se réfère à sa capacité à maintenir des caractéristiques cohérentes malgré de petites perturbations dans les paramètres d'entrée. Ainsi, la stabilité d'un système

est liée à la continuité de l'application F .

L'étude de la stabilité dans les systèmes de files d'attente vise à délimiter la plage de valeurs des paramètres dans laquelle un modèle peut être utilisé comme une bonne approximation du système réel. Cela permet de déterminer dans quelle mesure le modèle peut être considéré comme une représentation fidèle du système.

Avantages de l'analyse de sensibilité

1. **Modification du modèle** : L'analyse de sensibilité permet d'identifier si une variable d'entrée ayant une importance significative dans le modèle est en réalité non influente. Cela peut indiquer que le modèle ne reflète pas correctement le processus qu'il représente. Dans ce cas, des modifications peuvent être apportées au modèle pour améliorer sa représentation.
2. **Contribution des variables à la variabilité de la sortie** : L'analyse de sensibilité permet de déterminer quelles variables contribuent le plus à la variabilité de la sortie du modèle. Cela permet d'identifier les variables les plus influentes et de prendre des mesures pour améliorer la qualité des résultats. Par exemple, en réduisant les erreurs sur les variables d'entrée les plus influentes ou en adaptant la structure du modèle pour réduire l'impact des erreurs.
3. **Variables non influentes** : L'analyse de sensibilité permet également d'identifier les variables les moins influentes. Ces variables peuvent être considérées comme des paramètres déterministes, fixées à leur espérance par exemple, ce qui permet d'obtenir un modèle plus simple avec moins de variables d'entrée. Dans le cas d'un code informatique, cela peut conduire à la suppression de parties de code qui n'ont aucune influence sur la valeur de sortie.
4. **Interactions entre les variables** : L'analyse de sensibilité permet de mieux comprendre les relations entre les variables d'entrée et la variable de sortie en identifiant les interactions entre elles. Cela peut fournir des informations précieuses pour la compréhension du phénomène modélisé.

L'analyse de sensibilité trouve des applications dans de nombreux domaines tels que l'ingénierie nucléaire, la chimie, l'écologie, la médecine, l'économie, et bien d'autres. Elle est utilisée pour améliorer la qualité des modèles, comprendre les relations entre les variables et guider les décisions dans diverses disciplines.

2.1.1 Les méthodes d'analyse de sensibilité

Les méthodes d'analyse de sensibilité peuvent être regroupées en trois catégories principales :

- **Méthodes de criblage** [57] : Ces méthodes, telles que la méthode de *Morris*, évaluent l'influence des paramètres d'entrée en les faisant varier un par un. Elles permettent d'identifier rapidement les paramètres les plus influents, ce qui les rend adaptées lorsque le modèle comporte un grand nombre de paramètres.

- **Méthodes locales** [57] : Ces méthodes évaluent l'impact d'une petite variation des valeurs d'un paramètre d'entrée sur les sorties du modèle. Elles se concentrent sur des variations locales autour d'une valeur cible et fournissent des informations sur la sensibilité locale des résultats par rapport aux paramètres.
- **Méthodes globales** [57] : Les méthodes globales, telles que les méthodes de *Sobol* et *FAST*, s'intéressent à la variabilité de la sortie du modèle sur l'ensemble de son domaine de variation. Elles utilisent une approche de décomposition de la variance pour quantifier la part de variabilité expliquée par chaque paramètre ou groupe de paramètres.

Ces différentes méthodes offrent des approches complémentaires pour évaluer la sensibilité des modèles. Elles peuvent être choisies en fonction du nombre de paramètres, du niveau de détail souhaité et des objectifs spécifiques de l'analyse de sensibilité. Parmi ces approches on peut citer la stabilité forte, développement en série de Taylor et aussi les bornes de perturbation etc :

- **La stabilité forte**(voir [39]) : Cette méthode, connue également sous le nom de "méthode des opérateurs de la théorie de stabilité", a été développée au début des années 1980 par Aïssani et Kartashov [25]. Les auteurs ont notamment étudié la propriété de stabilité de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov récurrente au sens de Harris dans des espaces de phase quelconques. Les résultats fondamentaux de cette approche ont été publiés en 1996 dans une monographie de Kartashov [24].

Contrairement aux autres approches, la méthode de stabilité forte suppose que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleures estimations pour les distributions stationnaires perturbées. Une synthèse sur les estimations quantitatives de l'ergodicité et de la stabilité des chaînes de Markov quelconques a été présentée dans [36].

Cette méthode est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov homogène.

- **Le développement en série** (voir [57]) : L'approche générale de développement en séries pour les chaînes de Markov a été introduite par Heidergott et Hordijk [20]. Cette méthode a été discutée en détail pour les chaînes de Markov à espace d'états fini et à temps discret par Heidergott et al [20], tandis que son application aux chaînes de Markov à temps continu est abordée dans [21]. Cette approche a pour caractéristique essentielle de fournir une borne sur la précision de l'approximation obtenue. Cependant, son applicabilité est principalement limitée aux systèmes finis, et elle dépend de la définition de la matrice de déviation (Kooale [29]), qui est connue uniquement pour certains systèmes spécifiques.

Par la suite, nous accorderons une attention particulière à la méthode des **bornes de perturbation** (voir [36] [10]) et présenterons ses résultats fondamentaux, qui feront l'objet d'une application sur les systèmes d'attente dans le dernier chapitre.

2.2 Bornes de perturbation

Généralité

La littérature propose différentes formulations et bornes de perturbation pour les chaînes de Markov. Cependant, nous supposons que les changements affectent uniquement la matrice de transition de la chaîne, c'est-à-dire que les chaînes de Markov d'origine et perturbées ont le même espace d'états.

Les premiers travaux sur la stabilité des modèles stochastiques de files d'attente remontent à 1965, avec les contributions de Rossberg [41]. Depuis lors, de nombreuses études ont été menées en considérant différentes situations et approches (voir [1], [3], [9], [8], [29], [39]).

Depuis l'étude de Schweitzer [45], plusieurs auteurs se sont intéressés à l'estimation de la déviation de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov irréductible finie suite à une perturbation de sa matrice de transition (voir par exemple [52] [53]). Les résultats obtenus diffèrent et sont exprimés en fonction de diverses quantités. Schweitzer [45] a utilisé la matrice fondamentale, tandis que Meyer [34] et d'autres auteurs ont utilisé le groupe inverse. Hunter [22] a utilisé les g -inverses, tandis que Seneta [48], [49] a utilisé le coefficient d'ergodicité. Cho et Meyer [10] ont considéré les temps moyens de premier passage. Plus récemment, Balaji et Meyn ont cherché à établir un lien entre les notions d'ergodicité géométrique, exponentielle et uniforme et la stabilité absolue [7]. Cho et Meyer [10] ont examiné et comparé huit bornes de perturbation pour les distributions stationnaires des chaînes de Markov. Mouhoubi et Aïssani [36] ont synthétisé l'ensemble des résultats obtenus dans ce cadre et ont proposé de nouvelles conditions de stabilité ainsi que de nouvelles bornes de perturbation pour les chaînes de Markov. De leur côté, Rabta et Aïssani [38] ont établi un lien entre la méthode de stabilité forte et la méthode de stabilité absolue. Ils ont également abordé la question de la stabilité qualitative, démontrant notamment que toute chaîne de Markov irréductible finie est fortement stable.

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini de dimension N . Supposons que cette chaîne est ergodique, admettant une distribution stationnaire unique π . Celle-ci vérifie :

$$\pi^T P = \pi^T \quad \sum_{i=1}^N \pi_i = 1$$

π^T = le transposée de π .

Supposons que P soit perturbée à une autre matrice de transition \tilde{P} , de même dimension que la matrice P . Celle-ci est associée à une chaîne de Markov ergodique de distribution stationnaire $\tilde{\pi}$. Il est souvent important de décrire le changement de la distribution stationnaire $\pi - \tilde{\pi}$ par rapport au changement de la matrice de probabilités de transition $E \equiv P - \tilde{P}$. Le changement effectué sera quantifié comme suit :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \| \leq k \| E \| . \tag{2.2}$$

Nous allons présenter brièvement les six constantes (les plus connues) k_1, \dots, k_6 intervenant dans la définition de quelques bornes de perturbation. La plupart de ces constantes sont exprimées soit en fonction de la matrice fondamentale soit en fonction de la matrice groupe inverse $A(Z - \Pi)$ relative à la chaîne de Markov P .

2.3 Les bornes de perturbation de cho et meyer

Les bornes de perturbation des chaînes de Markov ergodiques sont données sous la forme suivante :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_{\infty} \leq k_l \| E \|_{\infty} \triangleq BP_l$$

La plupart des bornes de perturbation que nous considérerons sont en termes d'une des deux matrices liées à la chaîne de Markov : soit la matrice fondamentale $Z((\triangleq I - P + \Pi)^{-1})$ ou bien la matrice de déviation $D(\triangleq Z - \Pi)$. Ces bornes de perturbation sont définies en fonction de quelques constantes introduites dans la synthèse de Cho et Meyer [10] comme suit :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \| Z \|_{\infty} && \text{Schweitzer, 1968[46];} \\ \kappa_2 &= \| D \|_{\infty} && \text{Meyer, 1980[31];} \\ \kappa_3 &= \frac{\max_j(D_{jj} - \min_i D_{ij})}{2} && \text{Haviv \& van Heyden 1984[18];} \\ \kappa_4 &= \max_{i,j} |D_{ij}| && \text{Funderlic \& Meyer, 1986[17];} \\ \kappa_5 &= \frac{1}{1 - \tau_1(P)} && \text{Seneta, 1988[51];} \\ \kappa_6 &= \tau_1(D) = \tau_1(Z) && \text{Seneta, 1991[49].} \end{aligned}$$

Ou $\tau_1(M)$ correspond au coefficient d'ergodicité d'une matrice M , [47];

$$\tau_1(M) = \max_{i,j} \sum_{s=1}^n \max(m_{is}, m_{js})$$

2.3.1 Borne de perturbation de *Schweitzer*

Kemeny et Snell [27] appellent Z la matrice fondamentale de la chaîne parce que la plupart des questions liées au sujet de la chaîne peuvent être exprimées en terme de Z . Par exemple, le vecteur stationnaire de la matrice perturbée \tilde{P} peut être exprimée en termes de π et de Z .

$$\tilde{\pi}^T = \pi^T (I + EZ)^{-1}, \quad (2.3)$$

et

$$\pi^T - \tilde{\pi}^T = \tilde{\pi}^T EZ. \quad (2.4)$$

le passage au norme dans la formule précédente , on obtient [46] :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_1 \leq \| Z \|_{\infty} \| E \|_{\infty} .$$

On définit alors :

$$\kappa_1 = \| Z \|_{\infty} .$$

2.3.2 Borne de perturbation de *Meyer*

Dans ses travaux [33] [31], Meyer a prouvé que le groupe inverse de P peut être employé de la même manière que Z . Ainsi, on a la relation suivante entre les deux matrice Z et D :

$$Z = D + e\pi^T,$$

Sachant que toute l'information appropriée à la chaîne est contenue dans D . Ainsi on a [32] :

$$\tilde{\pi}^T = \pi^T (I + ED)^{-1};$$

et

$$\pi^T - \tilde{\pi}^T = \tilde{\pi}^T ED \quad (2.5)$$

Et la borne de perturbation résulte donnée par [31] est :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_1 \leq \| D \|_\infty \| E \|_\infty .$$

On définit alors :

$$\kappa_2 = \| D \|_\infty .$$

2.3.3 Borne de perturbation *Haviv et van Heyden*

Pour tout vecteur d et pour tout vecteur c tels que $c^T e = 0$,

$$|c^T d| \leq \| c \|_1 \frac{\max_{i,j} |d_i - d_j|}{2} .$$

La borne de perturbation résultante est :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_\infty \equiv \frac{\max_j (D_{jj} - \min_i D_{ij})}{2} \| E \|_\infty$$

Relativement à ce cas de bornes de perturbation, Haviv and van Heyden , Kirkland et al. [18], ont défini :

$$\kappa_3 = \frac{\max_j (D_{jj} - \min_i D_{ij})}{2}$$

2.3.4 Borne de perturbation de *Funderlic et Meyer*

l'équation (2.3) fournit une nouvelle borne de perturbation associée au vecteur de distribution stationnaire [17] :

$$|\pi_j - \tilde{\pi}_j| \leq \max_i |D_{ij}| \| E \|_\infty .$$

Par conséquent , on obtient

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_\infty \leq \max_{ij} |D_{ij}| \| E \|_\infty$$

Funderlic et Meyer [17] introduit une autre borne de perturbation en termes de la constante suivante :

$$\kappa_4 \equiv \max_{ij} |D_{ij}| .$$

Le comportement de la borne associée à la constante κ_4 est également étudiée par Meyer [32], [34]. Il a prouvé que la valeur de κ_4 est principalement déterminée par la façon dont les valeurs propres de la chaîne sont très proches de 1 (Cela n'est pas vérifié pour des matrices arbitraires, par exemple, voir [32]). Si on note les valeurs propres de P par $1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, la borne inférieure et la borne supérieure de κ_4 sont donnée par

$$\frac{1}{n = \min_i |1 - \lambda_i|} \leq \kappa_4 \leq \frac{2(n-1)}{\prod_i (1 - \lambda_i)} . \quad (2.6)$$

Par conséquent, si la chaîne est bien conditionnée , alors toutes les valeurs propres seront loins de 1.

2.3.5 Borne de perturbation de *Seneta*

Les constantes κ_1, κ_2 et κ_4 sont définies en terme de norme matricielle. Cependant, Seneta [12], a proposé le coefficient d'ergodicité au lieu de la norme matricielle. Le coefficient d'ergodicité $\tau_1(P)$ de la matrice P est définis par :

$$\tau_1(P) = \frac{1}{2} \max_{i,j} |P_{ik} - P_{jk}|.$$

Notons que $\tau(B)$ est une norme ordinaire de B sur l'hyperplan de \mathbb{R}^n

$$H^n \equiv \{v : v \in \mathbb{R}^n, v^t e = 0\}.$$

Pour plus de détail, nous nous référons les lecteurs á Dobrushin [13, 14], Issacson et Madsen [23], Senta [50, 47], Tan [54] leisanovsky [29] et Rhodius [42].

Pour la matrice stochastique P , le coefficient d'ergodicité satisfait :

$$0 \leq \tau_1(P) \leq 1.$$

Pour le cas où $\tau_1(P) < 1$, nous avons une autre borne de perturbation en fonction toujours de coefficient d'ergodicité de P , cette dernière est donnée par [51] sous la forme :

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_1 \leq \frac{1}{1 - \tau_1(P) \| E \|_\infty}, \quad (2.7)$$

et on note la cinquième constante par

$$\kappa_5 \equiv \frac{1}{1 - \tau_1(P)}.$$

Pour le cas où $\tau_1(P) \neq 1$, on a [49].

2.3.6 Borne de perturbation de *Seneta*

Dans les sous-sections précédentes, nous avons vu que la matrice de déviation D associée á la matrice P peut être employée á la place de la matrice Z . En fait, si nous employons des coefficients d'ergodicité comme mesure de sensibilité de la distribution stationnaire, alors des deux matrices Z et D donnent exactement la même information [19] :

$$\kappa_6 \equiv \tau_1(D) = \tau_1(Z).$$

Cette constante intervient dans la définition de la borne de perturbation obtenu par Seneta [49] : Á la différence de la borne supérieure associée á la constante κ_4 , la borne supérieure de κ_6 prend seulement en compte la valeur propre la plus proche de 1 . Par conséquent, cela affirme également que tant que la valeur propre de P est plus proche de 1 , la chaine est bien conditionnée.

Relation entre les différentes bornes

Dans l'analyse comparative effectuée par Cho & Meyer [10], il est établi que :

- $\kappa_3 \leq \kappa_4 \leq 2\kappa_3 \leq \kappa_6 \leq \kappa_l$, pour $l = 1, 2, 5$;
- $\kappa_6 \leq n\kappa_3$;

- $\kappa_2 - 1 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 + 1$,

Remarque 7

$$\frac{\|\pi - \tilde{\pi}\|_\infty}{\|E\|_\infty} \leq \frac{\|\pi - \tilde{\pi}\|_1}{\|E\|_\infty} \leq \kappa_l$$

Noter que $(\pi - \tilde{\pi})^T e = 0$ implique

$$(\pi - \tilde{\pi})^T \leq (1/2) \|\pi - \tilde{\pi}\|_1,$$

et de sorte que :

$$\frac{\|\pi - \tilde{\pi}\|_\infty}{\|E\|_\infty} \leq \kappa'_l,$$

où $\kappa'_l = (1/2)\kappa_l$, pour tout $l = 1, 2, 5, 6$. La comparaison de cette nouvelle condition avec κ_3 est donnée ci-dessous

$$\kappa_3 \leq \kappa'_l,$$

pour $l = 1, 2, 5, 6$.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le concept commun des méthodes de stabilité des processus stochastiques, en mettant en évidence les résultats clés et les différentes bornes de perturbation existantes dans la littérature des chaînes de Markov.

Notre attention s'est particulièrement portée sur la méthode des bornes de perturbation, qui sera appliquée dans le prochain chapitre consacré aux modèles d'attente G/M/1 et M/G/1.

Chapitre 3

APPLICATION NUMÉRIQUE

Dans cette analyse, nous appliquerons les bornes de perturbation de Choe et Meyer aux systèmes d'attente classiques $G/M/1$ et $M/G/1$. L'objectif est d'étudier l'influence de paramètres spécifiques sur la distribution stationnaires de chaque modèle d'attente. Cette analyse sera divisée en deux parties distinctes, chacune se concentrant sur un paramètre différent.

- ▷ Dans la première partie, nous examinerons le système d'attente $G/M/1$ et nous nous intéresserons particulièrement à l'influence du taux moyen d'arrivée sur les performances du système. Nous utiliserons les bornes de perturbation pour estimer l'erreur commise lors de l'approximation de la distribution stationnaire. Nous présenterons les résultats numériques correspondants et analyserons les effets de la perturbation du taux moyen d'arrivée sur la sortie de ce modèle " la distribution stationnaire".
- ▷ Dans la deuxième partie, nous aborderons le système d'attente $M/G/1$. Ici, nous étudierons l'influence du taux moyen de service sur les performances du système. En appliquant les bornes de perturbation, nous estimerons l'erreur d'approximation de la distribution stationnaire perturbée par rapport a la distribution stationnaire de modèle classique. Des résultats numériques seront présentés, mettant en évidence les effets de la perturbation du taux moyen de service sur les mesures de performance du modèle $M/G/1$.

3.1 Analyse de système $G/M/1$

Nous considérons le modèle d'attente $G/M/1$, où les arrivées des clients suivent une distribution générale et sont servis à un taux moyen μ par un seul serveur.

Dans cette section, nous examinons quatre cas de files d'attente avec des distributions spécifiques, couvrant une gamme de coefficients de variation, afin de prendre en compte différentes lois de probabilité et de réaliser une analyse complète du système $G/M/1$. Les cas de systèmes que nous considérons sont les suivants :

- ✓ $M/M/1$: distribution Exponentielle, coefficient de variation ($CV = 1$) égal à 1.
- ✓ $H_2/M/1$: distribution Hyperexponentielle à deux niveaux, coefficient de variation ($CV \geq 1$) .
- ✓ $E_2/M/1$: distribution Erlang d'ordre 2, coefficient de variation ($CV \leq 1$) .
- ✓ $D/M/1$: distribution Déterministe, coefficient de variation ($CV = 0$) .

En examinant ces différents cas, nous serons en mesure de réaliser une analyse complète de la sensibilité du système $G/M/1$ en fonction de la variabilité de la distribution d'arrivée des clients. Pour ce faire, nous fixerons les paramètres spécifiques dans chaque cas des quatre modèles.

- on définit la matrice de transition associée à ce système comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 - \beta_1 - \beta_0 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & \cdots \\ 1 - \beta_2 - \beta_1 - \beta_0 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Où

$$\beta_i = \int_0^{+\infty} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} f(t) dt$$

avec $f(t)$ est la fonction de densité des inter-arrivées. Ensuite ;

- on fixe le temps de service $\mu = 4$ pour tout les modèle
- On définit $\lambda = \bar{\lambda} + \Delta$.
avec $\Delta \in [0; 0.1]$
- Pour chaque constante κ_i , où $i = 1, \dots, 6$ nous effectuons les calculs nécessaires pour obtenir sa valeur. En fin on calcule les bornes de perturbation correspondante pour chaque constantes en fonction de l'ordre donner dans le chapitre 2.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \| Z \|_{\infty} & BP_1 &= \kappa_1 \| E \|; \\ \kappa_2 &= \| D \|_{\infty} & BP_2 &= \kappa_2 \| E \|; \\ \kappa_3 &= \frac{\max_j (D_{jj} - \min_i D_{ij})}{2} & BP_3 &= \kappa_3 \| E \|; \\ \kappa_4 &= \max_{i,j} |D_{ij}| & BP_4 &= \kappa_4 \| E \|; \\ \kappa_5 &= \frac{1}{1 - \tau_1(P)} & BP_5 &= \kappa_5 \| E \|; \\ \kappa_6 &= \tau_1(D) = \tau_1(Z) & BP_6 &= \kappa_6 \| E \|; \end{aligned}$$

où $\| E \|_{\infty} = \| \pi - \bar{\pi} \|_{\infty}$

3.1.1 Le système M/M/1

Dans ce premier cas on va supposer que la loi des arrivées est exponentielle avec un paramètre λ , ou nous fixons ce paramètre comme suit : $\lambda = 2$. Par la suite, nous nous intéresserons au calcul de l'erreur commise dans l'estimation de la distribution stationnaire de la file d'attente M/M/1. Les valeurs des bornes de perturbation BP_i $i = 1, \dots, 6$ sont données dans le tableau ci-dessous :

Δ/BP_i	BP_1	BP_2	BP_3	BP_4	BP_5	BP_6
0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.0227	0.0201	0.0043	0.0098	0.0368	0.0388
0.02	0.0454	0.0402	0.0087	0.0195	0.0736	0.0776
0.03	0.0681	0.0603	0.0130	0.0292	0.1104	0.1164
0.04	0.0907	0.0804	0.0172	0.0388	0.1472	0.1552
0.05	0.1134	0.1004	0.0215	0.0484	0.1840	0.1939
0.06	0.1361	0.1205	0.0257	0.0580	0.2209	0.2326
0.07	0.1587	0.1405	0.0299	0.0677	0.2578	0.2713
0.08	0.1814	0.1605	0.0341	0.0775	0.2946	0.3099
0.09	0.2040	0.1806	0.0383	0.0873	0.3315	0.3486
0.1	0.2266	0.2006	0.0424	0.0971	0.3684	0.3871

TABLE 3.1 – les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle M/M/1.

le graphe représentatif de ces bornes de perturbation en fonction de la variation du paramètre λ est donnée dans la figure 3.1.

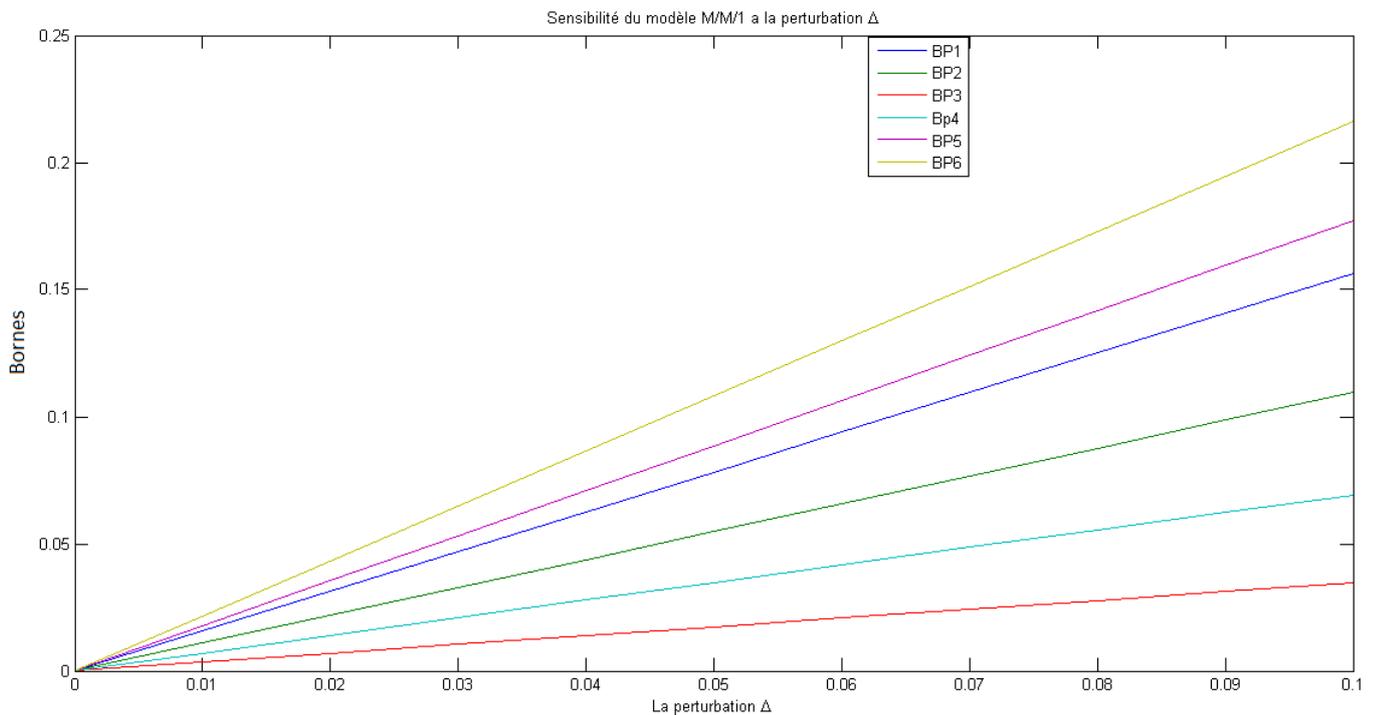


FIGURE 3.1 – Sensibilité du modèle M/M/1 à la perturbation Δ

Cette figure montre que les valeurs des bornes est une fonction croissante de la perturbation Δ . Cela signifie que, plus la perturbation est importante, plus l'erreur dans l'estimation de la distribution stationnaire de la file d'attente M/M/1 est élevée.

3.1.2 Le système $E_2/M/1$

Pour le modèle d'attente $E_2/M/1$, nous considérons une distribution des temps d'inter-arrivées suivant une loi d'Erlang d'ordre 2 ; $k = 2$. Tandis que le temps de service est toujours exponentiel avec un paramètre $\mu = 4$. Nous fixons les paramètres d'arrivée $\lambda = 2$.

En suivant le même concept que pour le modèle précédent, nous avons obtenu les résultats numériques suivants pour ce modèle.

Δ/BP_i	BP_1	BP_2	BP_3	BP_4	BP_5	BP_6
0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.0227	0.0201	0.0043	0.0098	0.0368	0.0388
0.02	0.0454	0.0402	0.0087	0.0195	0.0736	0.0776
0.03	0.0681	0.0603	0.0130	0.0292	0.1104	0.1164
0.04	0.0907	0.0804	0.0172	0.0388	0.1472	0.1552
0.05	0.1134	0.1004	0.0215	0.0484	0.1840	0.1939
0.06	0.1361	0.1205	0.0257	0.580	0.2209	0.2326
0.07	0.1587	0.1405	0.0299	0.0677	0.2878	0.2713
0.08	0.1814	0.1605	0.0341	0.0775	0.2946	0.3099
0.09	0.2040	0.1806	0.0383	0.0873	0.3315	0.3486
0.1	0.226	0.2006	0.0424	0.0971	0.3684	0.3871

TABLE 3.2 – les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $E_2/M/1$

le graphe représentatif de ces résultats sont données dans la figure 3.2

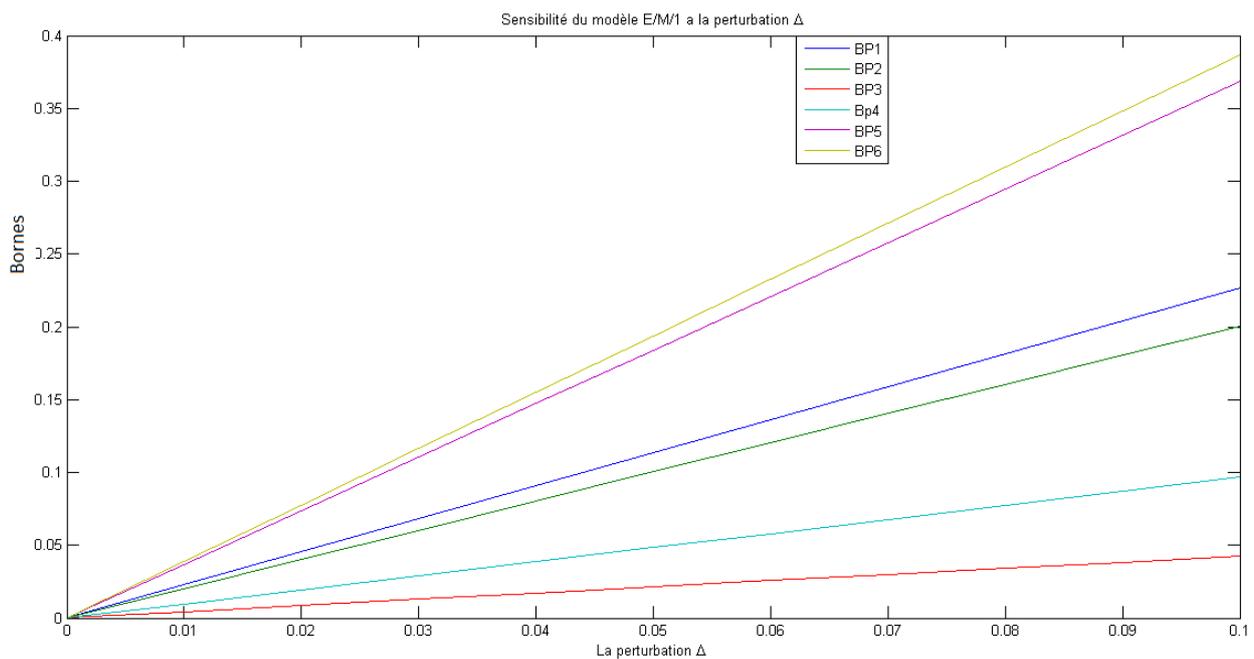


FIGURE 3.2 – Sensibilité du modèle $E_2/M/1$ à la perturbation Δ

D'après la figure 3.2, il est remarquable que les résultats du modèle d'attente $E_2/M/1$ sont plus au moins similaire a ceux du modèle $M/M/1$.

3.1.3 Le système $H_2/M/1$

Pour le modèle d'attente $H_2/M/1$, nous considérons une distribution des temps d'inter-arrivées suivant une loi hyperexponentielle à deux niveaux ca densité s'écrit ;

$$f_i(y) = P_1\lambda_1e^{-\lambda_1y} + P_2\lambda_2e^{-\lambda_2y} \quad , y \geq 0$$

. Les paramètres d'arrivée pour chaque niveau sont fixés comme suit : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, avec $P_1 = 0.7$, $P_2 = 1 - P_1$

Après avoir analyser ce système, nous avons obtenus les résultats suivants :

Δ/BP_i	BP_1	BP_2	BP_3	BP_4	BP_5	BP_6
0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.0289	0.0230	0.1144	0.0107	0.0254	0.0193
0.02	0.0575	0.0458	0.0088	0.0213	0.0507	0.0383
0.03	0.0860	0.0684	0.0131	0.0317	0.0760	0.572
0.04	0.1142	0.0908	0.0174	0.0420	0.1012	0.0759
0.05	0.1421	0.1129	0.0216	0.0522	0.1264	0.0943
0.06	0.1699	0.1347	0.0258	0.0622	0.1515	0.1126
0.07	0.1973	0.1564	0.0298	0.0721	0.1765	0.1306
0.08	0.2246	0.1778	0.0339	0.0813	0.2015	0.1484
0.09	0.2515	0.1989	0.0379	0.0915	0.2264	0.1661
0.1	0.2782	0.2198	0.0418	0.1011	0.2512	0.1837

TABLE 3.3 – les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $H_2/M/1$.

le graphe représentatif de ces bornes de perturbation en fonction de la variation des paramètres λ_1 et λ_2 est donnée dans la figure 3.3.

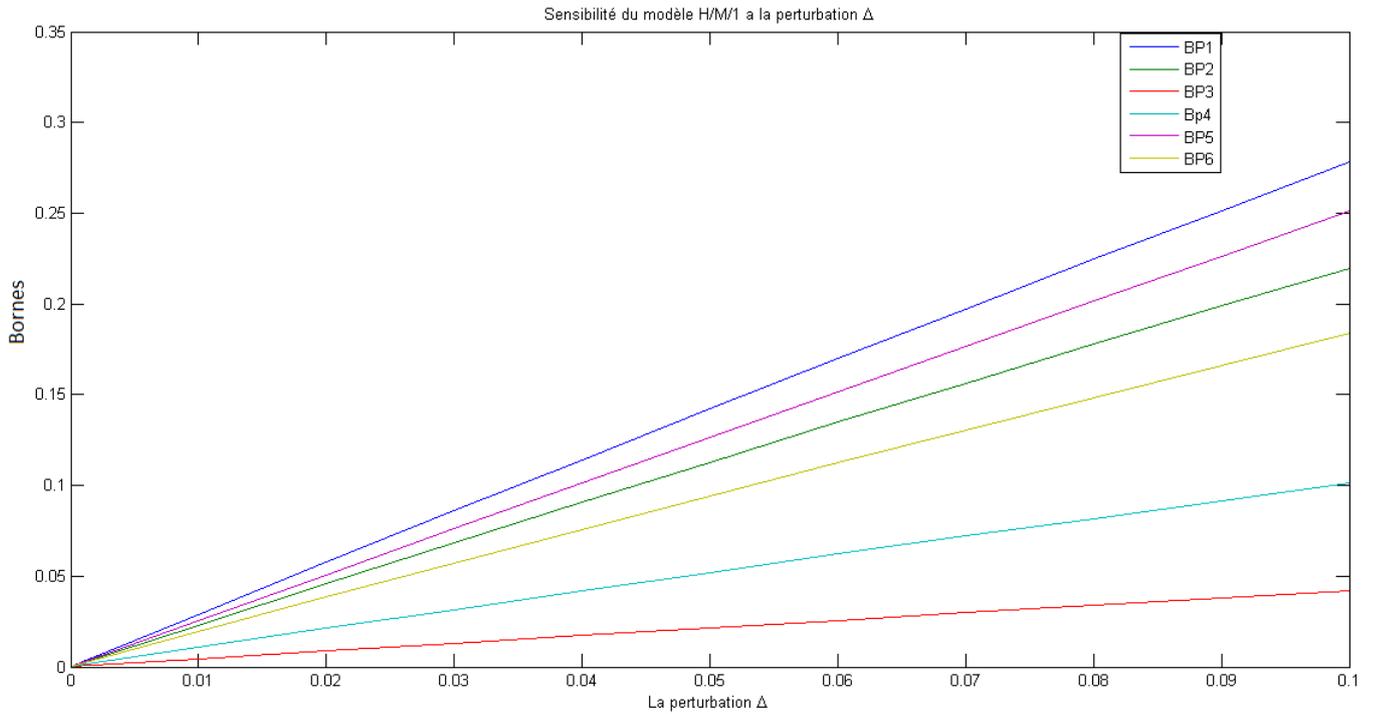


FIGURE 3.3 – Sensibilité du modèle $H_2/M/1$ à la perturbation Δ

Concernant ce modèle les résultats sont aussi de même nature que les résultats des modèles précédents, ou les bornes sont des fonctions croissantes de la perturbations. Autrement dit, plus la perturbation Δ augmente les valeurs des bornes augmentent.

3.1.4 Le système D/M/1

Pour le modèle d'attente D/M/1, nous considérons une distribution des temps d'inter-arrivées déterministe $\lambda = 2$: Après avoir suivi la même démarche, nous avons obtenu ces résultats suivants :

Δ/BP_i	BP_1	BP_2	BP_3	BP_4	BP_5	BP_6
0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.0361	0.0311	0.0047	0.0111	0.0362	0.0362
0.02	0.0713	0.0615	0.0094	0.0220	0.0710	0.0710
0.03	0.1057	0.0912	0.0140	0.0327	0.1045	0.1045
0.04	0.1393	0.1202	0.0186	0.0434	0.1367	0.1367
0.05	0.1721	0.1485	0.0231	0.0539	0.1678	0.1678
0.06	0.2042	0.1761	0.0276	0.0643	0.1977	0.1977
0.07	0.2355	0.2031	0.0321	0.0745	0.2266	0.2266
0.08	0.2661	0.2294	0.0364	0.0847	0.2545	0.2545
0.09	0.2960	0.2552	0.0408	0.0947	0.2815	0.2815
0.1	0.3253	0.2804	0.451	0.1045	0.3076	0.3076

TABLE 3.4 – les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle D/M/1.

La représentation graphique des résultats du tableau ci-dessus sont données dans la figure 3.4

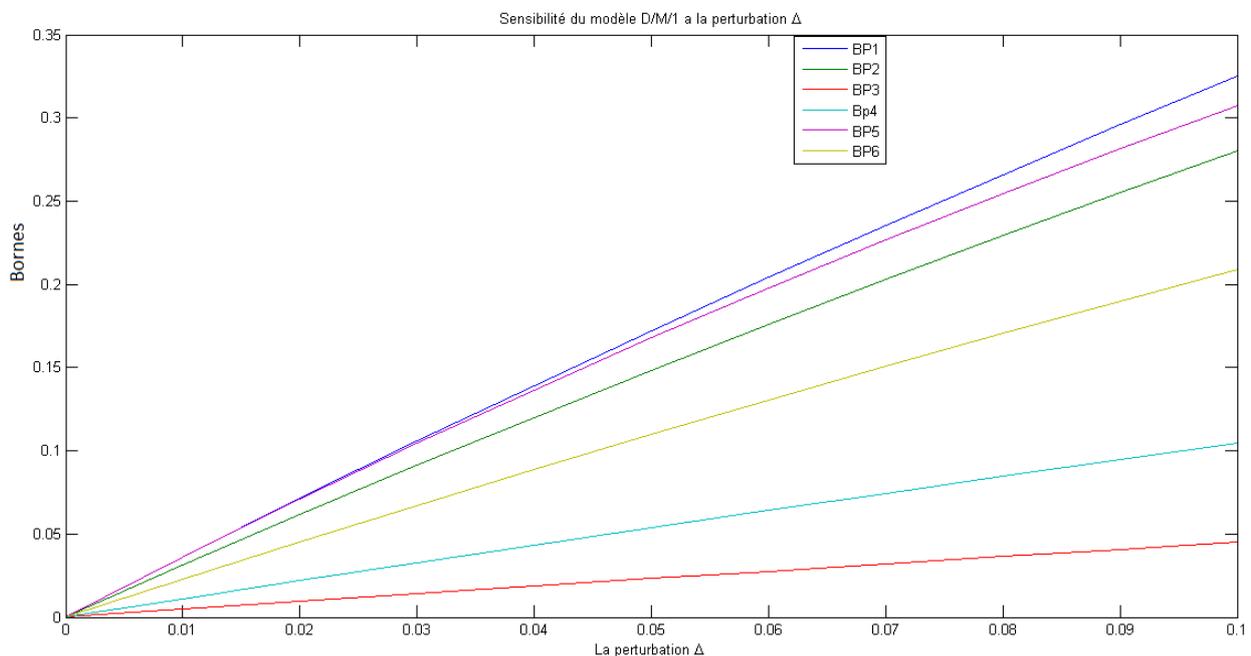


FIGURE 3.4 – Sensibilité du modèle D/M/1 à la perturbation Δ

Cette figure montre que les valeurs des bornes est une fonction croissante de la perturbation Δ . Cela signifie que, plus la perturbation est importante, plus l'erreur dans l'estimation de la distribution stationnaire de la file d'attente M/M/1 est élevée.

Discussion des résultats pour la file d'attente $G/M/1$

- On remarque que quel que soit la nature du paramètre des arrivées l'erreur engendrée par la perturbation de ce dernier est une fonction croissante par rapport à Δ pour les différentes bornes de perturbation utilisées (borne de Cho et Meyer).

- D'après les résultats obtenus, il est observé que la borne BP_3 offre les meilleurs résultats pour la file $G/M/1$. Cela signifie que l'erreur commise lors du calcul de la distribution stationnaire avec cette borne est la plus faible, ce qui indique une plus grande précision.

- Le classement des bornes de perturbation diffèrent d'un modèle à un autre. Autrement dit, pour les modèles $H_2/M/1$ et $D/M/1$ on a : $\kappa_3 \leq \kappa_4 \leq \kappa_6 \leq \kappa_2 \leq \kappa_5 \leq \kappa_1$. Pour les modèles $M/M/1$ et $E_2/M/1$ on a : $\kappa_3 \leq \kappa_4 \leq \kappa_2 \leq \kappa_1 \leq \kappa_5 \leq \kappa_6$.

3.2 Analyse de système M/G/1

On considère le système d'attente M/G/1, où les arrivées suivent une distribution exponentielle et le temps de service suit une distribution générale. Dans cette analyse, nous adoptons une approche similaire à celle utilisée pour le système G/M/1. Cependant, cette fois-ci, nous examinons l'effet de la perturbation du temps de service sur le système M/G/1.

- ✓ M/H/1 : distribution Hyperexponentielle à deux niveaux.
- ✓ M/E/1 : distribution Erlang d'ordre 2.
- ✓ M/D/1 : distribution Déterministe.

Remarque 8 *Il convient de noter qu'au cours de notre analyse du système M/G/1, nous avons choisi de ne pas examiner le modèle M/M/1. En raison du fait que le modèle M/M/1 a déjà été étudié et discuté en détail dans la première partie de ce chapitre. Par conséquent, afin d'éviter des redondances et de se concentrer sur les aspects spécifiques du système M/G/1.*

— La matrice de transition de système M/G/1 :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Où

$$\alpha_i = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

avec $f(t)$ est la fonction de densité de service. Ensuite ;

- On fixe les paramètres du modèle avec un temps moyen d'inter-arrivées $\lambda = 2$ pour tous les cas, tandis que le temps de service reste à déterminer en fonction de sa loi de distribution.
- On pose $\mu = \bar{\mu} + \Delta$.
- On recalcule les constantes κ_i en perturbent le paramètre de temps de service de chaque modèle, ensuite on calcule les bornes de perturbation associé.

3.2.1 Le système M/H₂/1

Nous considérons un modèle d'attente où la distribution du temps de service suit une loi hyperexponentielle avec des paramètres $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$, $p = 0.7$. Dans cette analyse, nous étudions les effets de perturber ces paramètres sur la distribution stationnaire du modèle M/H₂/1, nous serons en mesure de déterminer l'ampleur de l'erreur commise.

Les résultats d'analyse pour ce modèle sont sous forme d'un tableau et figure représentatif :

Δ/BP_i	BP_1	BP_2	BP_3	BP_4	BP_5	BP_6
0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.0052	0.0043	0.0014	0.0028	0.0053	0.0041
0.02	0.0104	0.0085	0.0028	0.0056	0.0106	0.0082
0.03	0.0155	0.0127	0.0042	0.0083	0.0159	0.0123
0.04	0.0206	0.0169	0.0055	0.0111	0.0211	0.0163
0.05	0.0257	0.0210	0.0069	0.0138	0.0263	0.0203
0.06	0.0307	0.0252	0.0083	0.0165	0.0315	0.0243
0.07	0.0357	0.0293	0.0096	0.0193	0.0366	0.0283
0.08	0.0407	0.0334	0.0110	0.0220	0.0418	0.0322
0.09	0.457	0.0374	0.0123	0.0246	0.0469	0.0362
0.1	0.0506	0.0415	0.0137	0.0273	0.0519	0.0401

TABLE 3.5 – les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $M/H_2/1$.

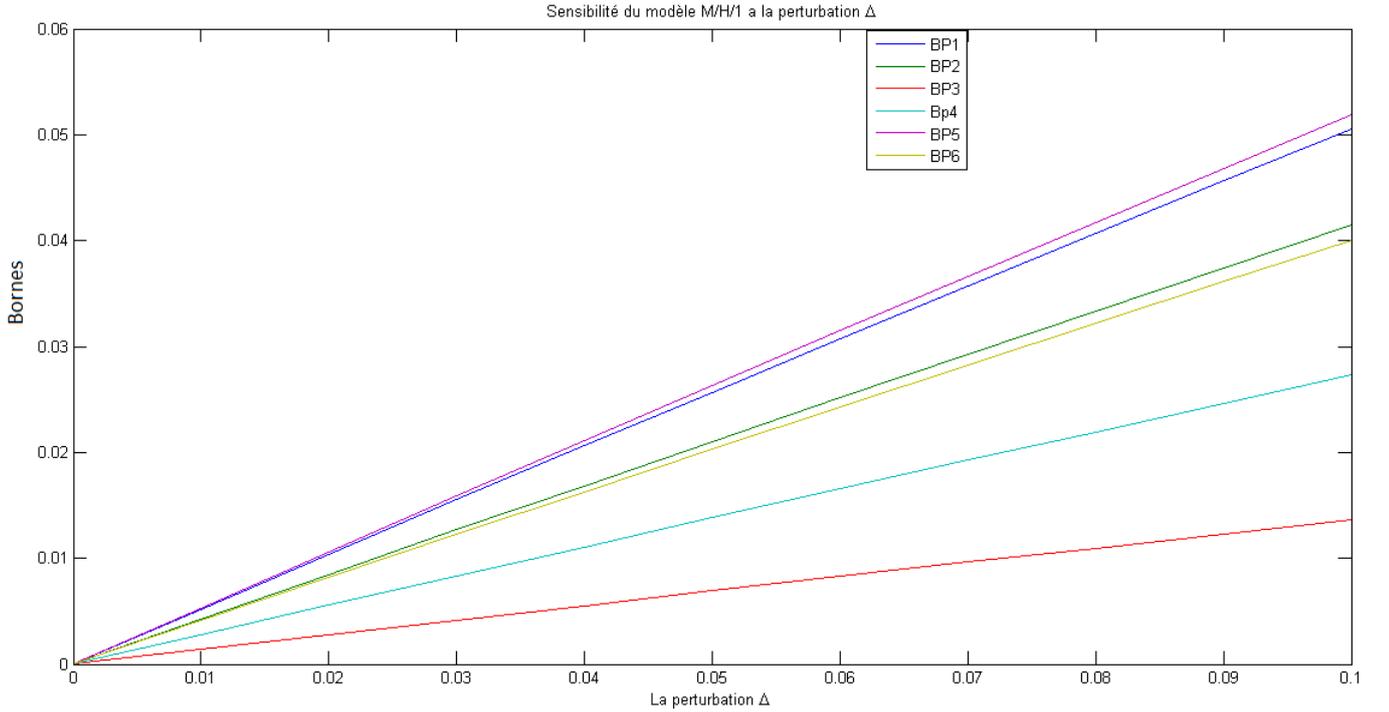


FIGURE 3.5 – Sensibilité du modèle $M/H_2/1$ à la perturbation Δ

D'après ces résultats, il est clair que les valeurs des bornes sont une fonction croissante de la perturbation. On obtient le classement suivant ;

$$BP_3 < BP_4 < BP_6 < BP_2 < BP_1 < BP_5.$$

En examinant les données, nous constatons que la borne BP_3 donne la meilleure calculé de la distribution stationnaire pour ce modèle. En revanche, la borne BP_5 présente un taux d'erreur

significativement plus élevé que les autres bornes, ce qui indique que cette borne fournit de moins bons résultats pour le modèle $H_2/M/1$.

3.2.2 Le système $M/E_2/1$

Pour le système $M/E_2/1$, le temps de service suit une loi Erlang d'ordre 2 $k = 2$. Dans cette configuration, nous fixons le paramètre de taux de service $\mu = 4$. Nous suivons le même raisonnement que dans le système précédent pour analyser les effets de cette perturbation sur le modèle $M/E_2/1$, on présente les résultats suivants :

Δ/BP_i	BP_1	BP_2	BP_3	BP_4	BP_5	BP_6
0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.0126	0.0095	0.0019	0.0040	0.0098	0.0080
0.02	0.0251	0.0183	0.0037	0.0080	0.0195	0.0159
0.03	0.0376	0.0282	0.0056	0.0119	0.0292	0.0237
0.04	0.0499	0.0375	0.0074	0.0159	0.0388	0.0316
0.05	0.0622	0.0467	0.0093	0.0198	0.0483	0.0393
0.06	0.0744	0.0559	0.0111	0.0237	0.0578	0.0471
0.07	0.0866	0.0649	0.0130	0.0276	0.0673	0.0548
0.08	0.0986	0.0739	0.0148	0.0315	0.0767	0.0625
0.09	0.1106	0.0829	0.0167	0.0353	0.0860	0.0702
0.1	0.1225	0.0918	0.0185	0.0392	0.0953	0.0779

TABLE 3.6 – les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle $M/E_2/1$.

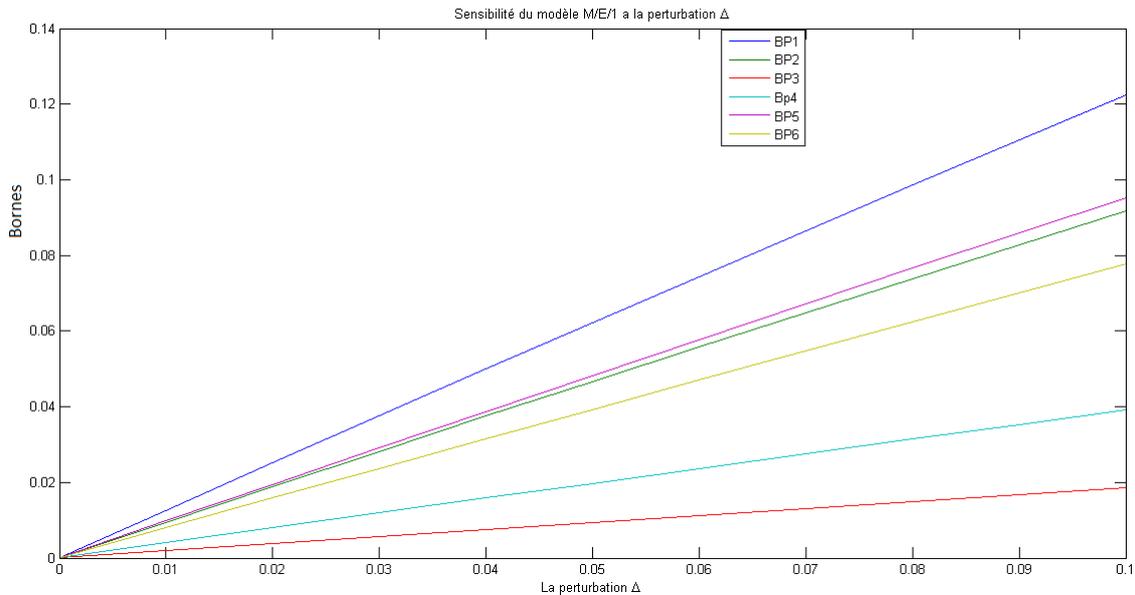


FIGURE 3.6 – Sensibilité du modèle $M/E_2/1$ à la perturbation Δ

En analysant les données, nous observons que la borne BP_3 fournit les meilleurs résultats : car elle présente la plus petite erreur dans l'estimation de la distribution stationnaire pour ce modèle.

$$BP_3 < BP_4 < BP_6 < BP_2 < BP_5 < BP_1.$$

En revanche, la borne BP_1 affiche un taux d'erreur significativement plus élevé que les autres bornes, ce qui indique qu'elle fournit des résultats moins précis pour le modèle $E_2/M/1$.

3.2.3 Le système M/D/1

Considérons un le temps de service est déterministe $\mu = 4$, on analyse le système et on obtient ces résultats :

Δ/BP_i	BP_1	BP_2	BP_3	BP_4	BP_5	BP_6
0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.0513	0.0440	0.0035	0.0093	0.3291	0.0289
0.02	0.1017	0.0874	0.0069	0.0185	0.6441	0.0574
0.03	0.1514	0.1302	0.0104	0.0275	0.9456	0.0855
0.04	0.2003	0.1724	0.0138	0.0365	1.2340	0.1132
0.05	0.2484	0.2140	0.0172	0.0454	1.5100	0.1404
0.06	0.2957	0.02551	0.0206	0.0542	1.7740	0.1672
0.07	0.3434	0.2955	0.0239	0.0629	2.0266	0.1936
0.08	0.3882	0.3354	0.0272	0.0715	2.2683	0.2197
0.09	0.4334	0.3748	0.0305	0.0800	2.4994	0.2453
0.1	0.4779	0.4136	0.0338	0.0884	2.7204	0.2706

TABLE 3.7 – les valeurs des bornes de perturbation pour le modèle M/D/1.

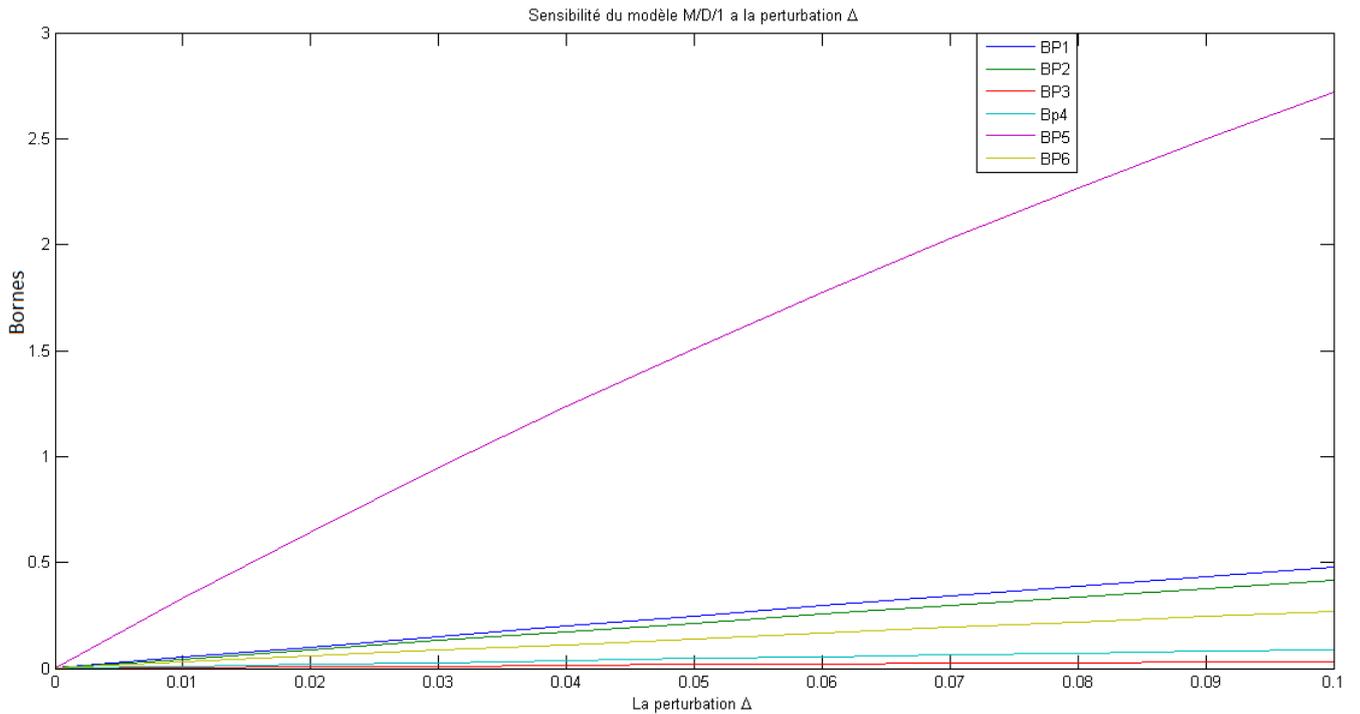


FIGURE 3.7 – Sensibilité du modèle M/D/1 à la perturbation Δ

D'après les résultats du système M/D/1, nous observons que le classement des bornes est le suivant :

$$BP_3 < BP_4 < BP_6 < BP_2 < BP_1 < BP_5.$$

Cela signifie que, parmi les bornes étudiées, la borne BP_3 présente la meilleure performance dans le contexte du système M/D/1. Par contre, la borne BP_5 est classée comme la moins performante parmi les bornes évaluées.

Discussion des résultats pour la file d'attente $M/G/1$

- On remarque que quel que soit la nature du paramètre de service l'erreur engendrée par la perturbation de ce dernier est une fonction croissante par rapport à Δ pour les différentes bornes de perturbation utilisées (borne de Cho et Meyer).

- D'après les résultats obtenus, il est observé que la borne BP_3 offre les meilleurs résultats pour la file $M/G/1$. Cela signifie que l'erreur commise lors du calcul de la distribution stationnaire avec cette borne est la plus faible, ce qui indique une plus grande précision.

- Le classement des bornes de perturbation diffèrent d'un modèle à un autre. Autrement dit, pour les modèles $M/H_2/1$ on a : $\kappa_3 \leq \kappa_4 \leq \kappa_6 \leq \kappa_2 \leq \kappa_1 \leq \kappa_5$.
Pour le modèle $M/E_2/1$ et $M/D/1$ on a : $\kappa_3 \leq \kappa_4 \leq \kappa_6 \leq \kappa_2 \leq \kappa_5 \leq \kappa_1$.

Comparaison des résultats théoriques de Cho et meyer [10] avec nos résultats pratiques

Il est a noté que d'après les résultats obtenus par les auteurs (Cho et Meyer) dans leurs article [10] On a le classement théorique suivants :

$$\kappa_3 \leq \kappa_4 \leq \kappa_6 \leq \kappa_l$$

Ou $l = \{1, 2, 5\}$

Dans notre étude, on a constaté que : Pour la file d'attente $M/G/1$ les résultats obtenus coïncide parfaitement avec les résultats théoriques de cho est meyer. Par contre, dans le cas de la file d'attente $G/M/1$ les résultats sont un peu différents que prévu. C'est-à-dire, si la distribution des arrivées est hyper-exponentielle ou déterministe alors ca coïncide avec les résultats théoriques. Néanmoins, dans le cas contraire les résultats pratiques sont différents des résultats théoriques.

Pour les modèles $M/M/1$ et $E_2/M/1$ le classement est le suivant :

$$\kappa_3 \leq \kappa_4 \leq \kappa_2 \leq \kappa_1 \leq \kappa_5 \leq \kappa_6$$

Cela va nous permettre de dire que les classements théoriques des bornes de perturbation de Cho et Meyer sont vraie dans le cas d'étude des files d'attente si est seulement si la loi des arrivées diffère des loi Exponentielle ou Erlang.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une analyse numérique pour étudier l'effet de la variation des paramètres des systèmes d'attente $G/M/1$ et $M/G/1$ avec un seuil de 10% sur le calcul de la distribution stationnaire.

cette analyse de sensibilité est effectuer à l'aide de l'approche des bornes de perturbation de Cho et Meyer , Ce qui nous a permis d'évaluer cette sensibilité et de qualifier les erreurs commises sur le calcul de la distribution stationnaire pour chaque modèle.

À la suite de cette étude, nous concluons que la borne PB_3 offre la meilleure précision pour le calcul de la distribution stationnaire. En d'autres termes, elle est la plus appropriée pour obtenir des résultats précis dans le contexte des systèmes d'attente $G/M/1$ et $M/G/1$.

CONCLUSION GENERALE

L'étude des systèmes stochastiques réels devient de plus en plus complexe, ce qui nécessite des théories et des techniques d'analyse et d'approximation pour résoudre les problèmes liés à l'analyse des performances de ces systèmes complexes. La précision des caractéristiques de ces systèmes est d'une importance majeure.

Dans ce mémoire, nous avons étudié les files d'attente et réalisé une analyse de sensibilité des modèles G/M/1 et M/G/1 en utilisant l'approche des bornes de perturbation de Cho et Meyer. L'objectif était de mettre en évidence l'importance de l'analyse de sensibilité dans la modélisation des systèmes complexes. Les bornes de perturbation ont été présentées comme une approche spécifique pour quantifier la sensibilité des paramètres, en se basant sur les travaux de Cho et Meyer.

Nous avons appliqué les bornes de perturbation de Cho et Meyer aux systèmes d'attente G/M/1 et M/G/1 pour étudier l'influence du temps moyen d'arrivée dans le système G/M/1 et du temps moyen de service dans le système M/G/1. Nous avons choisi différentes distributions pour chaque système, avec des coefficients de variation différents, afin d'englober toutes les lois de probabilité et d'effectuer une analyse complète des deux systèmes. Nous avons estimé les erreurs d'approximation de la distribution stationnaire perturbée par rapport à la distribution stationnaire de référence. Les résultats numériques ont été présentés pour mettre en évidence les effets de la perturbation des paramètres sur les performances des modèles d'attente.

Nous avons constaté que la borne des auteurs *Haviv et van Heyden* [18] offrait la meilleure précision pour le calcul de la distribution stationnaire, se révélant ainsi la plus appropriée dans le contexte des systèmes d'attente étudiés.

Nous espérons que cette étude contribuera à une meilleure compréhension des files d'attente et à des améliorations dans la modélisation et l'analyse des systèmes d'attente. Des recherches futures pourraient se baser sur ce travail on peut cité quelque perspectives :

- ✓ Analyse de sensibilité de système d'attente G/G/1 où le temps de service et les arrivées suivent des distribution générales.
- ✓ Applications de ces bornes sur d'autres modèles stochastiques.
- ✓ Applications des autres méthodes d'analyse de sensibilité sur les mêmes modèles de file d'attente.
- ✓ Comparer les résultats obtenus avec d'autres résultats dans la littérature.

Bibliographie

- [1] Abbas, K. and Aïssani, D. Strong stability of the embedded Markov chain in an GI/M/1 queue with negative customers. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 2806-2812, (2010).
- [2] Alan, R. Processus stochastique. Presses polytechniques romandes, Lausanne, Suisse, (1989).
- [3] Aïssani, D. Estimate of the strong stability in an M/G/1 system. *VINITI 4119-82 R. Journal Matematika*, IB 83, 1-33, (1982).
- [4] Baynat. B, Théorie de Files d'Attente. Hermes Science Europe, France, (2000).
- [5] B. Ycart, Notion de fiabilité files d'attente. Centre de Publication Universitaire (CPU), Tunis, (2004).
- [6] B. Heidergott and A. Hordijk. Taylor series expansions for the stationary Markov chains ;*Adv. Appl. Prob.* 35, 1046-1070,(2003) .
- [7] Balaji, S., and Meyer, S.P. Multiplicative ergodicity and large deviations for an irreducible Markov chain. *Stochastic Processes and their Applications*, 90(1), 123-144,(2000).
- [8] Benaouicha, M., and Aïssani, D. Estimate of the strong stability in the G/M/1 queueing system. In *Applied Stochastic Model and Data Analysis*, G. Govaert, J. Jansen, and N. Limnios (Editors), **1**, 172-177, Compiègne,(2001).
- [9] Boualem née Bareche, A. Application de Méthodes d'Estimation non Paramétrique dans l'Étude de Stabilité des Systèmes d'Attente. Thèse de Doctorat, Université A. MIRA BE-JAIA, (2008).
- [10] Cho, G.E and Meyer, C. Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain.*Lin. Alg. Appl.* **335**, 137-150,(2001).
- [11] D. Gross and C. Hariss, *Fundamentals of Queueing Theory*. Wiley, New York, (1985).
- [12] De Vylder, F., and Marceau, E. *Explicit Analytic Ruin Probabilities for Bounded Claims*. Insurance : Mathematics and Economics, **16**, 79-105, (1995).
- [13] Dobrushin, R. Central limit theorem for non stationary Markov chains .*theory of Probability and its Applications* **10**, 65-80,(1956)
- [14] Dobrushin, R. Central limit theorem for non stationary Markov chains .*theory of Probability and its Applications* **10**, 329-383,(1956)
- [15] Erlang, A. Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges. *Elektroteknikerer*, **13**,(1917).
- [16] Erlang, A. K. The theory of probability and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, b, **20**,(1909).
- [17] Funderlic, R. Meyer, C. Sensitivity of the stationary distribution vector for an ergodic Markov chain.*Lin. Alg. Appl.* **76**, 1-17,(1986).
- [18] Haviv. M, and Heyden, L. V. Perturbation bounds for the stationary probabilities of a finite Markov chain. *Advances in Applied Probability*, 16, 804-818,(1984).

- [19] Heche, J.F, de Werra, D. et Liebling, T.M Recherche Opérationnelle pour ingénieurs 2. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Suisse,(2003).
- [20] Heidergott. B, Hordijk. A, and Leabu, H.Strong bounds on perturbations. *Math Meth Oper Res*, **70**, 99-127, (2009).
- [21] Heidergott.B, Hordijk, A, and Uitert, M.Series expansions for finite-state Markov chains. *Probability in Engineering and Informational Sciences*, **21**, 381-400,(2005).
- [22] Hunter, J. Stationary distributions of perturbed Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, **82**, 201-214,(1986).
- [23] Issacson, D.and Madsen, R. Markov Chains : Theory and Application.John Wiley Sons Inc., New York,(1976).
- [24] Kartachov, N. V. Strong Stable Markov Chains. VSP Utrecht, TbiMC Scientific Publishers,(1996).
- [25] Kartachov, N. V., and Aïssani, D. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR, ser. A*. **11**, 3-5,(1983).
- [26] Kaufmann, A. et Cruon, R. Les phénomènes d'attente : théorie et applications. Paris : Dunod,(1961).
- [27] Kemeny, J. et Snell, J. Finite Markov Chains.Van Nostrand , Londres, **12**,61-62,(1960).
- [28] Kirkland, S. Neumann, M.and Shader,B .Applications of Paz's inequality to perturbation bounds for Markov chains..**268**, 183-196,(1998).
- [29] Koole, G. The deviation matrix of the M/M/1/1 and M/M/1/N queue, with applications to controlled queueing models. Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Tampa, . 56-59,(1996).
- [30] Leisanovsky ,A. Coefficients of orgodicity generated by non-symmetrical vector norms. *Czechoslovak Mathematical journal* .**40**, 284-294,(1993).
- [31] Meyer C.The Condition of a Finite Markov Chain and Perturbation Bounds for the Limiting Probabilities. *SIAM J.Alg.Disc.Meth*, **1**, 273-283, (1980).
- [32] Meyer, C. The character of a finite Markov chain, in Proceedings of the IMA Workshop on Linear Algebra, Markov Chains, and Quening Models .*Springer-Verlag*.**47**,58,(1993).
- [33] Meyer, C. The Role of the Group Generalized Inverse in the Theory of Finite Markov Chains. *SIAM Rev*, **17**, 443-464,(1975).
- [34] Meyer, C. Sensitivity of finite Markov chains under perturbation.*Statist.and Proba.Lett.* **17**,163-168,(1993)
- [35] Meyer, C.D. The condition of finite Markov chain and perturbation bounds for the limiting probability. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **1**, 273-283,(1980).
- [36] Mouhoubi, Z. Bornes de perturbation des caractéristiques transitoires et stationnaires des chaînes de Markov à espace d'états général. Application aux systèmes avec impatience et aux modèles de production et de gestion des stocks [Thèse de doctorat, Université de Béjaia], (2010).
- [37] Pollaczek, F. Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés. Paris : Gauthier-Villars. Collection Mémorial des Sciences Mathématiques, (1957).
- [38] Rabta, B., and Aïssani, D. Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, 428(8-9), 1921-1927, (2008).
- [39] Rabta, B. Estimations de la stabilité forte des chaînes de Markov. *LA.M.O.S,Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des systèmes*. **3**,45-51,(2005).

- [40] Rachev, S.T. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, 4, 287-318,(1989).
- [41] Rossberg, H.J. Über die Verteilung von Wartezeiten. *Mathematische Nachrichten*, **30**(1/2), 1-16,(1965).
- [42] Rothblum, U. and Tan, C. Upper bounds on the maximum modulus of sub-dominant eigenvalues of nonnegative matrices. *Lin. Alg. Appl* , **66**, 45-86, (1985).
- [43] Saltelli. A, Chan. K, and Scott, E. M. Sensitivity Analysis. Wiley,(2000).
- [44] Saltelli, A, Ratto, M., Tarantola, S., Campolongo, F., and others. *Sensitivity analysis practices : Strategies for model-based inference*. Reliability Engineering and System Safety, **91**, 1109-1125, (2006).
- [45] Schweitzer, P.J. Perturbation theory and finite Markov chains 1. *Journal of Applied Probability*, **5**, 401-413,(1968).
- [46] Schweitzer, P.J. Perturbation Theory and Finite Markov Chains 2. *Journal of Applied Probability*,**5**, 401-413,(1968).
- [47] Seneta , E. Sensitivity of finite Markov chains under perturbation. *Statist.and Proba.Lett.* **17**,163-168,(1993).
- [48] Seneta, E. Explicit forms for ergodicity coefficients and spectrum localization. *Lin. Alg. Appl* , **60**, 187-197, (1984).
- [49] Seneta, E. Sensitivity analysis , ergodicity coefficients, and rank-one updates for finite markov chains, in W.J. Stewart(ed). Numerical Solution of Markov Chains. *Statist.and Proba.Lett.* **11**, 21-129,(1991).
- [50] Seneta,E.Coefficients of ergodicity : Structure and applications. *Advances in Applied Probability*, **11**,576-590, (1979).
- [51] Seneta,E. Perturbation of the stationary distribution measured by ergodicity coefficients. *Advances in Applied Probability*, **20**, 228-230.(1988).
- [52] Smith, J. Approximative stationary probability vectors of a finite Markov chain. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **20**, 612-618.(1971).
- [53] Takahashi, Y. On the effects of small deviations in the transition matrix of a finite Markov chain. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **16**, 104-129,(1973).
- [54] Tan, C. A Functional Form for a Coefficient of Ergodicity. *Journal of Applied Probability*, **19**, 858-863, (1982).
- [55] Turányi, T. *Sensitivity analysis of complex kinetic systems : Tools and applications*. Journal of Mathematical Chemistry, **5**, 203-248,(1990).
- [56] U. Narayan Bhat, An Introduction to Queueing Theory. Birkhäuser.
- [57] Vanden Bulcke, R. . Analyse de sensibilité pour la réduction de dimension en optimisation sans dérivée [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal],(2020)

Résumé

Dans ce modeste travail on s'est focalisé sur l'analyse de sensibilité des modèles de files d'attente. L'objectif principal est d'appliquer une approche spécifique à savoir les bornes de perturbation, aux systèmes d'attente G/M/1 et M/G/1.

Notre objectif est d'essayer de quantifier l'impact de l'incertitude des paramètres sur les mesures de performance, plus précisément la distribution stationnaire de ces systèmes, en perturbant les valeurs des paramètres d'entrée de ces derniers.

De plus nous avons fait une comparaison des résultats théorique de Cho et Meyer avec les résultats pratiques obtenus. Plusieurs exemples numériques illustratifs ont été présentés pour montrer l'efficacité de l'approche utilisée.

Mots-clés : files d'attente ; chaîne de Markov ; analyse de sensibilité ; bornes de perturbation ; mesures de performance.

Abstract

In this work, we try to exploit the sensitivity analysis in queueing theory. The main objective is to apply a specific approach, specially perturbation bounds, to the G/M/1 and M/G/1 queueing systems.

Our intention is to quantify the impact of parameter uncertainty on performance measures, specifically the steady-state distribution of these systems, by perturbing the input parameter values.

Furthermore, we compared the theoretical results of Cho and Meyer with the practical results obtained. Several illustrative numerical examples were presented to demonstrate the strength of the approach used.

Keywords : Queueing theory ; Markov chain ; sensitivity analysis ; perturbation bounds ; performance measures.