

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR



جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par :

MAKHLOUFI Yacine & ABBAS Abdelaziz

Thème

**Etude de l'effet de l'amortissement sur une réponse
vibratoire des rotors**

Soutenu le **03/07/2023** devant le jury composé de:

Dr.	K.YAYA	Président
Dr.	S.BOUZIDI	Rapporteur
Dr.	M.METHIA	Examineur

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciements

Avant tout nous désirons exprimer notre plus profonde gratitude envers Dieu tout puissant, qui nous a accordé la force et la patience nécessaire pour accomplir notre objectif.

Nous tenons d'abord à remercier et exprimer notre profonde reconnaissance à Melle S. BOUZIDI, docteur à l'université de Béjaïa, pour son encadrement, sa patience et son orientation.

Nous sommes très reconnaissants à l'honneur que nous fait le docteur K. YAYA en acceptant d'être le président du jury. Ainsi on est heureux que le docteur M. METHIA nous fasse l'honneur d'examiner ce travail.

On adresse nos sincères remerciements à tous les professeurs du département de génie mécanique, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions tout au long ces longue années.

On remercie nos très chers parents, qui ont toujours été là pour nous, Ainsi que nos amis, pour leurs encouragements.

Pour terminer, nous sommes reconnaissants envers toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.



M. Yacine & A. Abdelaziz -

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné à la vie,
qui s'est sacrifié pour mon bonheur et ma réussite,*

*A ma
mère...*

*A mon père, qui à été mon ombre durant toutes les années
des études, qui à veillé à me donner l'aide,*

*A m'encourager et à me protéger, que dieu les gardes et
les protèges.*

A mon adorable sœur et mes frères

A ma très chère nièce

A tout ma famille

A mes très chers amis

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime



- M. Yacine -

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné à la vie,
qui s'est sacrifié pour mon bonheur et ma réussite,*

*A ma
mère...*

*A mon père, qui à été mon ombre durant toutes les années
des études, qui à veillé à me donner l'aide,*

*A m'encourager et à me protéger, que dieu les gardes et
les protèges.*

A mon adorable sœur et mes frères

A ma très chère nièce

A tout ma famille

A mes très chers amis

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime



A. Abdelaziz -

Sommaire

Sommaire

Remerciements

Dédicaces

Sommaire

Liste d'abréviation

Liste des figures

Introduction Générale..... 1

Chapitre I

Modélisation du rotor et équations de mouvement

Introduction 4

I.1. Définitions..... 5

I.2. Le balourd 5

I.3. La vitesse critique..... 6

I.4. L'effet gyroscopique 6

I.5. Le diagramme de Campbell 7

I.6. Les composants de base d'une machine tournante..... 7

I.6.1. Un rotor 7

I.6.2. La structure..... 8

I.6.3. Les liaisons..... 8

I.7. Les vibrations des machines tournantes 9

Chapitre II

Modélisation du rotor et équations de mouvement

Introduction 11

II.1. Caractéristiques énergétiques des éléments d'un rotor..... 11

II.1.1. Le disque..... 13

II.1.2. L'arbre..... 14

II.1.3. Le balourd 16

II.2. Les paliers 20

II.3. Mise en équation..... 21

II.3.1. Les équations finales des énergies cinétiques et énergies de déformation 23

II.4. Équations du mouvement..... 24

II.4.1. Rotor non amorti 25

II.4.2. Rotor amorti 30

II.5. Critères de la stabilité des rotors..... 31

II.5.1. Stabilité vue par l'équation aux fréquences propres 31

Sommaire

II.5.2. Critère de stabilité de Routh-Hurwitz	31
Conclusion	33

Chapitre III

Etude de la stabilité d'un rotor et application numérique

Introduction	35
III.1. Description du modèle du rotor étudié	35
III.2. Application des équations du mouvement.....	37
III.2.1. Cas du rotor non amorti	37
III.2.1.1. Cas de rotor non amorti symétrique	38
III.2.1.2. Cas de rotor dissymétrique	41
III.2.2. Cas de rotor amorti	46
Conclusion Générale	53
Références bibliographiques.....	55

Liste d'abréviation

Liste d'abréviation

EA : Étude d'Amortissement

ERV : Réponse Vibratoire des Rotors

AC : Amortissement Critique

DCA : Damping Characteristic Analysis (Analyse des Caractéristiques d'Amortissement)

FEM : Finite Element Method (Méthode des Éléments Finis)

MAS : Modal Analysis and Synthesis (Analyse et Synthèse Modale)

MD : Modal Damping (Amortissement Modal)

MMC : Modal Mass Contribution (Contribution de Masse Modale)

MR : Mode Ratio (Rapport de Modes)

RPM : Rotations Par Minute

RMA : Réponse Modale Aléatoire

RTD : Rotordynamic Analysis (Analyse Rotodynamique)

SMA : Système de Masse-Amortissement

SRF : Speed Resonance Frequency (Fréquence de Résonance en Vitesse)

VRMS : Vibration Root Mean Square (Vibration Moyenne Quadratique)

FRF : Frequency Response Function (Fonction de Réponse en Fréquence)

TM : Transfer Matrix (Matrice de Transfert)

CR : Campbell Diagram (Diagramme de Campbell)

MI : Mode Indicator (Indicateur de Mode)

OS : Operating Speed (Vitesse de Fonctionnement)

Liste des figures

Figure I-1 : Exemples de machines tournantes	4
Figure I-3 : Source de non-stationnarité.....	6
Figure I-4 : Diagramme de Campbell	7
Figure I-5 : Rotor turbine.	8
Figure I-6 : Eléments générale des machines tournantes	9
Figure II-1 : Exemple simple de rotor.....	12
Figure II-2 : Repère et référence d'un disque monté sur un arbre flexible	13
Figure II-3 : Section élémentaire de l'arbre.	15
Figure II-4 : Repérage du balourd.....	16
Figure II-5 : Section droite de l'arbre.	18
Figure II-6 : Amortisseurs et raideurs d'un palier hydrodynamique.	20
Figure II-7 : Représentation des coordonnées.....	22
Figure III-1 : Modèle mathématique de Lalanne et Ferraris.....	36
Figure III-2 : Diagramme de Campbell (rotor symétrique $k_{xx} = k_{zz} = 0$)	39
Figure III-3 : Diagramme de Campbell pour différentes valeurs de k_{xx}	40
Figure III-4 : Réponse au balourd (rotor symétrique), vitesse critique $N_c = 3550$ tr/min	41
Figure III-5 : Diagramme de Campbell (rotor non symétrique) $k_{xx} = 0, k_{zz} = 106$ N/m	43
Figure III-6 : Diagramme de Campbell (rotor non symétrique) pour $k_{xx} = 0$ et différentes valeur de k_{zz}	43
Figure III-7 : Réponse au balourd (Q1) pour $k_{xx} = 103$ N/m, $k_{zz} = 106$ N/m / $N_{c1} = 3351$ N/m, $N_{c2} = 4800$ N/m.....	45
Figure III-8 : Réponse au balourd (Q2) pour $k_{xx} = 103$ N/m, $k_{zz} = 107$ N/m / $N_{c1} = 3351$ N/m, $N_{c2} = 4800$ N/m.....	45
Figure III-9 : Diagramme de Campbell pour $k_{xx} = k_{zz} = 0$ et pour différentes valeur α	47
Figure III-10 : Diagramme de Campbell pour $k_{xx} = 103$ N/m, $k_{zz} = 106$ N/m et différentes valeurs de α	48
Figure III-11 : Taux de décroissance pour $k_{xx} = k_{zz} = 106$ N/m et différentes valeurs de α	48
Figure III-12 : Taux de décroissance pour $k_{xx} = 103$ N/m, $k_{zz} = 106$ N/m et différentes valeurs de α	49

Liste des figures

Figure III-13 : Amplitude de la réponse au balourd ($Q1 = Q2$) pour $k_{xx} = k_{zz} = 106\text{N/m}$. $N_c = 3555\text{ N/m}$	50
Figure III-14 : Amplitude de la réponse au balourd ($Q1$) pour $k_{xx} = 103\text{N/m}$, $k_{zz} = 107\text{N/m}$ et différentes valeurs de α . $N_{c1} = 3361\text{ N/m}$, $N_{c2} = 4840\text{ N/m}$	51
Figure III-15 : Amplitude de la réponse au balourd ($Q2$) pour $k_{xx} = 103\text{N/m}$, $k_{zz} = 107\text{N/m}$ et différentes valeurs de α . $N_{c1} = 3361\text{ N/m}$, $N_{c2} = 4840\text{ N/m}$	51

Introduction Générale

Introduction Générale

Les machines à rotation telle que les pompes, turbines et compresseurs jouent un rôle clé dans l'industrie moderne, les concepteurs sont constamment à la recherche de moyens pour améliorer leurs produits et augmenter les performances et rendement des machines. Dans ce sens, les efforts imposés requièrent une vigilance supplémentaire en matière de comportement dynamique global et les vibrations peuvent atteindre un niveau trop élevé pour être supporté par la structure.

L'étude dynamique des machines tournantes a capturé l'attention des ingénieurs depuis de nombreuses années, bien que les modèles élémentaires soient souvent peu réalistes, mais faciles à traiter par des méthodes analytiques classiques, ils ont permis de mettre en évidence les aspects primordiaux de la dynamique des machines tournante [1], Par exemple, ils ont montré que les fréquences propres d'un arbre sont affectées par la vitesse de rotation en raison des effets gyroscopiques et des propriétés mécaniques des paliers, le couplage gyroscopique peut entraîner une précession du rotor qui peut être directe ou indirecte en fonction du sens de rotation, des vitesses critiques peuvent, par conséquent, entraîner des vibrations d'amplitude élevée et potentiellement dangereuses pour la machine, l'utilisateur et l'environnement.

New Kirk B. [2] a été le premier à étudier les rotors en rotation en prenant en compte l'amortissement, il a observé expérimentalement que les ensembles disques rotors subissent des amplitudes de vibrations fortes lorsque la vitesse de rotation est supérieure à la première vitesse critique. Kimball A. a montré que l'amortissement déstabilise le mouvement du rotor lorsqu'il passe la vitesse critique[3].

L'étude des vibrations des rotors requiert la prévision des caractéristiques d'amortissements, en particulier l'amortissement dû aux pièces tournantes (amortissement intrinsèque du matériau), qui peut mener à une instabilité dans des régimes supérieurs à la normale, cette prédiction est primordiale dans la conception des machines rotatives afin de déterminer des plages de vitesses de rotation qui sont considérées comme sûres[4].

Le travail présenté concerne l'analyse du comportement vibratoire des rotors en flexion. Il comprend une introduction générale, trois chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre représente quelques notions et connaissances dans le cadre des machines tournantes, il est constitué essentiellement de définitions et composants de base d'une machine tournante.

Introduction Générale

Dans le deuxième chapitre évoque les caractéristiques énergétiques des éléments composants un rotor, et leurs développements qui est nécessaire pour la détermination des expressions des énergies cinétiques et de déformation de chaque élément : disque, arbre, palier et balourd.

En fin, le troisième chapitre est consacré à l'application des équations du mouvement sur le modèle de rotor de Lalanne et Ferraris, et l'étude de la stabilité vue par l'équation aux fréquences propres.

Chapitre I
Modélisation du rotor et
équations de mouvement

Introduction

Les machines tournantes sont présentes dans différents secteurs de l'industriels, également dans les secteurs de sante, les services publics et des services financières, elles varient en taille et en complexité, les machines basique peuvent être rencontrées dans des produits et système varies allant des moteurs électrique des réfrigérateurs et des machines à laver jusqu'aux moteurs d'avion, les exemples sont innombrables tel que les centrifugeuses, les pompes a vides, les turbines à vapeur de toutes tailles, les pompes et compresseurs ainsi que le groupes motopropulseurs automobiles.

L'augmentation rapide des vitesses de fonctionnement des machines tournantes au cours des dernières décennies à poser de nouveaux problèmes aux concepteurs, les arbres tournants sont soumis à des vibrations de plus en plus importantes avec l'augmentation de vitesse de rotation.

Ces vibrations peuvent être dangereuses si elles ne sont pas bien estimées (surtout si elles sont sous estimées), conduisant à un mauvais dimensionnement des pièces dont les conséquences peuvent être catastrophiques à la fois sur la machine ainsi que sur ses utilisateurs.

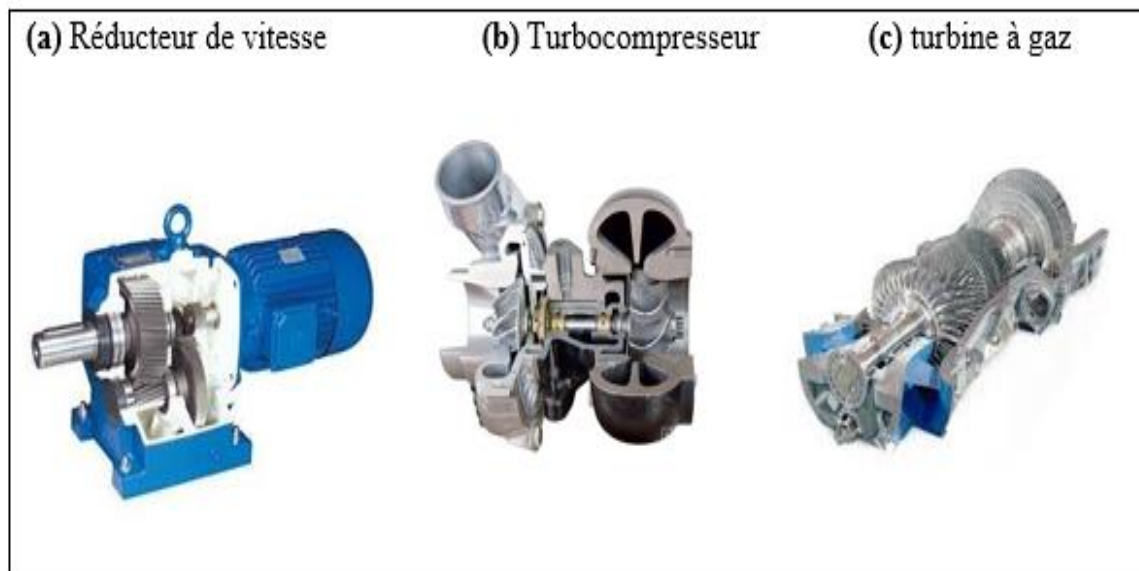


Figure I-1 : Exemples de machines tournantes

I.1. Définitions

Une machine tournante est un assemblage de pièces mécaniques ou électriques à exercer une ou plusieurs fonction données et, en particulier, l'application d'une force modulée, ou non, destinée à vaincre une résistance ou assurer un mouvement avec ou sans transmission de force.

Une machine tournante est un dispositif mécanique qui transforme par rotation de l'énergie absorbe en une autre énergie de même nature ou non, par exemple, un alternateur est une machine tournante qui transforme de l'énergie mécanique, éolienne, hydraulique, thermique ou nucléaire en énergie électrique.

Comme son nom l'indique une machine tournante, d'une façon générale composée d'une partie, d'ensemble de corps tournant autour d'un même axe constituant un (rotor), et une partie fixe (stator).

La dynamique des rotors est un domaine distinct de la dynamique des structures. Les machines tournantes se distinguent des structures fixes/non-tournantes par des phénomènes propres associés à leur mouvement rotatif. La différence fondamentale réside dans le fait que les machines tournantes bénéficient de forces intrinsèques, alors que les structures non-tournantes n'en disposent pas. Par la suite, une liste non exhaustive des principaux phénomènes ou notions spécifiques aux rotors sera présentée.

I.2. Le balourd

On suppose que toutes les machines tournantes comportent un balourd qui produit une force d'excitation dont la fréquence augmente directement avec la vitesse de rotation et dont l'amplitude est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation.

La cause principale de l'apparition du balourd se rattache à :

- Une répartition inégale de la masse du rotor, qui provoque un décalage entre le centre géométrique et le centre de masse ;
- Des paliers qui sont mal alignés par rapport à l'axe géométrique du rotor ;

- La flexion de l'arbre due à son poids propre, qui entraîne également un écart entre le centre géométrique et le centre de rotation de la machine.

I.3. La vitesse critique

Les fréquences propres du rotor, à une vitesse de rotation donnée, étant susceptibles de coïncider avec la fréquence d'excitation due au balourd, on parle de vitesses critiques, en d'autres termes, ces vitesses particulières peuvent induire une résonance de la machine et donc une augmentation des vibrations latérales, ce qui expose à des risques de défaillances.

Afin de limiter ces risques, il est recommandé pour les machines tournantes de petite taille ou à faible masse et supportées par des paliers à haute rigidité de fonctionner à des vitesses inférieures à la première vitesse critique.

Cependant, comme c'est le cas pour les compresseurs centrifuges, les turbines à gaz ou à vapeur et les générateurs d'électricité de grande taille, il est possible que ces machines fonctionnent à des vitesses plus élevées que les vitesses critiques.

I.4. L'effet gyroscopique

La présence d'un effet gyroscopique causant un couplage entre les mouvements orthogonaux à l'axe de rotation peut séparer les fréquences en rotation en deux branches. Cette séparation cause un mouvement de précession. La précession est directe lorsque le sens de rotation du rotor est le même que le sens des orbites et indirecte lorsque c'est le contraire. Ce couplage gyroscopique a une influence considérable sur les comportements des arbres tournants.

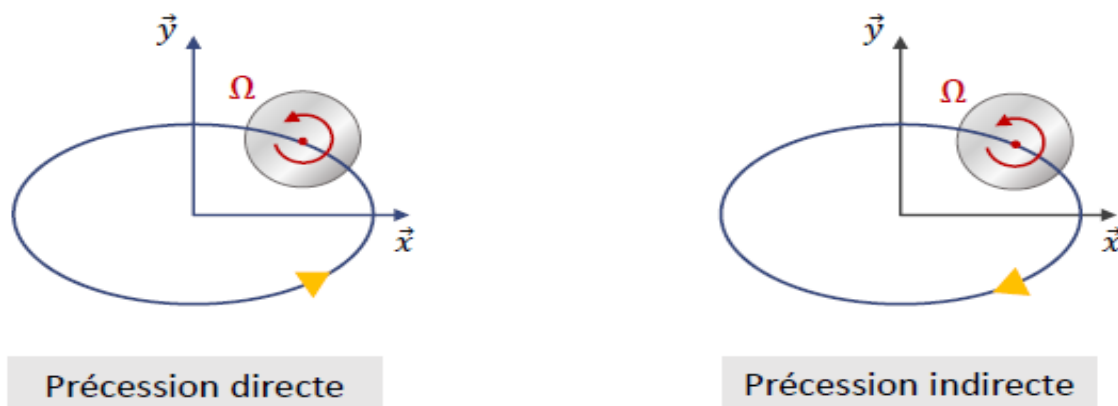


Figure I-2 : Source de non-stationnarité

Différents outils sont utilisés pour rendre compte des effets gyroscopiques dans la représentation des modes propres en précession directe et indirecte, ainsi que des vitesses critiques. Le diagramme de Campbell est un exemple emblématique de ces outils.

I.5. Le diagramme de Campbell

La vitesse angulaire a un impact direct sur les fréquences propres, comme représenté dans le diagramme de Campbell [5] (voir Fig.1.3). Étant donné que les effets gyroscopiques augmentent avec la vitesse angulaire, la solution générale du modèle dynamique d'un rotor implique des vecteurs/fréquences propres complexes qui varient en fonction de la vitesse, le diagramme comprend des modes de précession directe et indirecte dont la divergence ne fait qu'augmenter avec l'intensité des effets gyroscopiques.

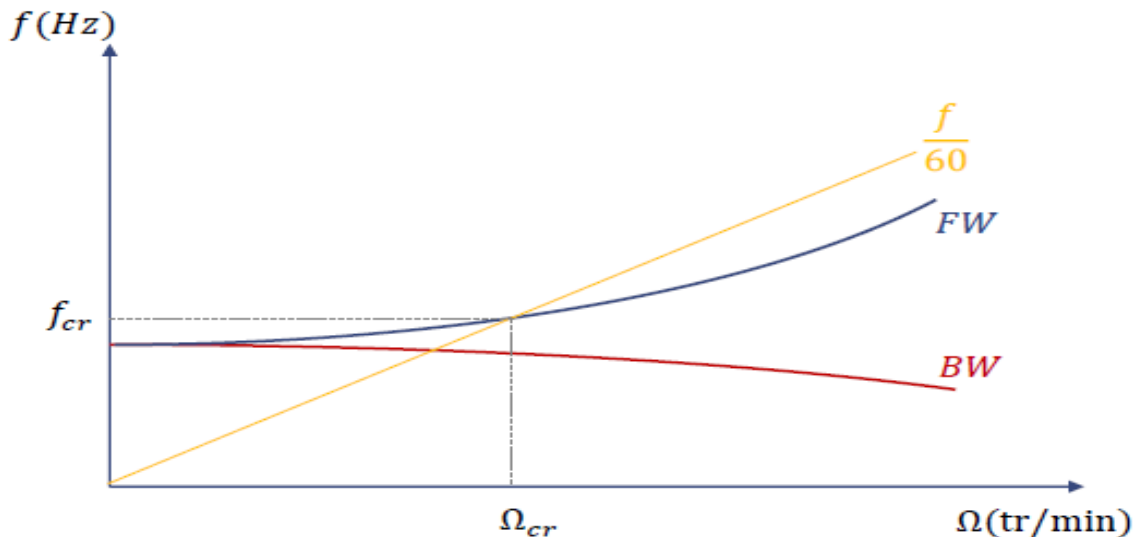


Figure I-3 : Diagramme de Campbell

I.6. Les composants de base d'une machine tournante

Les machines tournantes sont des systèmes qui combinent des pièces mécaniques et électroniques pour réaliser une tâche donnée, on parlant de mécanique en peut distinguer :

I.6.1. Un rotor

Le rotor est une structure qui est composée de plusieurs matériaux (acier, cuivre, bois, plastique...), tourne autour d'une ligne de rotation et a pour fonction principale de manipuler des fluides, des solides.



Figure I-4 : Rotor turbine.

I.6.2. La structure

Les éléments essentiels de la structure non rotative sont :

- Les coussinets ;
- Les paliers ;
- Le stator ;
- Le massif ;
- Le radier ;

I.6.3. Les liaisons

Le rotor est attaché à la structure non rotative par des liaisons qui assurent le guidage et le positionnement du rotor, ces liaisons sont divisées en trois groupes :

- Les liaisons à fluide ;
- Les liaisons magnétiques ;
- Les liaisons à roulements.

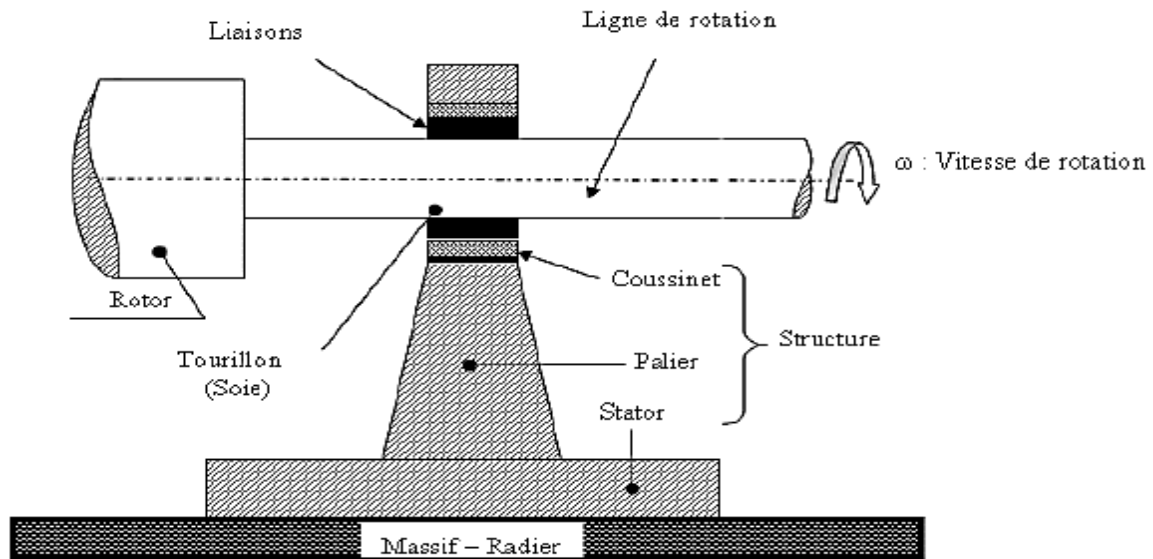


Figure I-5 : Eléments générale des machines tournantes

I.7. Les vibrations des machines tournantes

Une bonne conception produira des niveaux vibratoires faibles dans une machine tournante, cependant, au fur et à mesure qu'elle vieillit, les fondations travaillent, les pièces se déforment et s'usent, et des changements mineurs dans ses propriétés dynamiques apparaissent, les arbres peuvent se désaligner, les paliers s'user, les poutres se déséquilibrent, les courroies se détendent et les jeux peuvent s'augmenter, tous ces facteurs entraînent une augmentation de l'énergie vibratoire qui provoque des résonances et ajoute une charge dynamique considérable aux paliers.

La durée de vie résiduelle du composant peut être estimée à partir des lois d'endommagement [6], les vibrations mesurées peuvent fournir des informations qui décrivent les composants mécaniques d'une machine tournante, grâce à l'analyse de ces vibrations, il est possible de détecter les pièces défectueuses et, si nécessaire, de les localiser.

Chapitre II
Modélisation du rotor et
équations de mouvement

Introduction

Les rotors sont des composants essentiels et cruciaux dans le domaine d'ingénierie mécanique, car ils sont régulièrement mis à contribution dans des systèmes liés au transport ou à la production d'énergie, cependant, leurs performances ne sont pas seulement dictées par leur capacité à porter des charges, mais par aussi leur capacité à résister à des vibrations qui peuvent potentiellement causer des usages prématurés, du bruit, des fissures ou des accidents, dans ce contexte, il est crucial de pouvoir prédire précisément les critères de rotation critique du rotor ainsi que les niveaux vibratoires associés afin de s'assurer de son intégrité mécanique, cette prédiction est compliquée en raison de la présence de nombreux paramètres faisant partie du modèle du rotor, rendant difficile la possibilité d'avoir une vision globale de la dynamique du rotor et de son impacte associé aux variations des paramètres, par conséquent, un défi majeur à relever à ce jour est de proposer des méthodes numériques qui intègrent ces incertitudes et qui sont applicables numériquement à des modèles mécaniques réalistes et de grande taille.

J.W.S. Rayleigh [2] a proposé une méthode approximative fondée sur les méthodes d'énergie pour l'analyse dynamique d'une poutre en flexion continue. La méthode de séparation des variables, connue également sous le nom de méthode de Rayleigh-Ritz, a été utilisée pour calculer les fréquences propres. Cette méthode permet de construire un modèle simple de rotor à deux degrés de liberté, mais elle n'est pas très précise lorsqu'il s'agit d'étudier des systèmes réels.

II.1. Caractéristiques énergétiques des éléments d'un rotor

Cette partie aborde les concepts théoriques qui sous-tendent les équations du mouvement pour des systèmes en rotation. Il définit un modèle analytique pour l'analyse ainsi qu'un modèle Éléments Finis, qui peut être appliqué à une variété de contextes.

Les équations de mouvement d'un système peuvent être établies en utilisant des méthodes énergétiques.

En définissant les énergies cinétiques et potentielles du corps ainsi que la fonction de dissipation de Rayleigh et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques, les équations de Lagrange définissent le mouvement sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0, L = T - U \quad (\text{II.1})$$

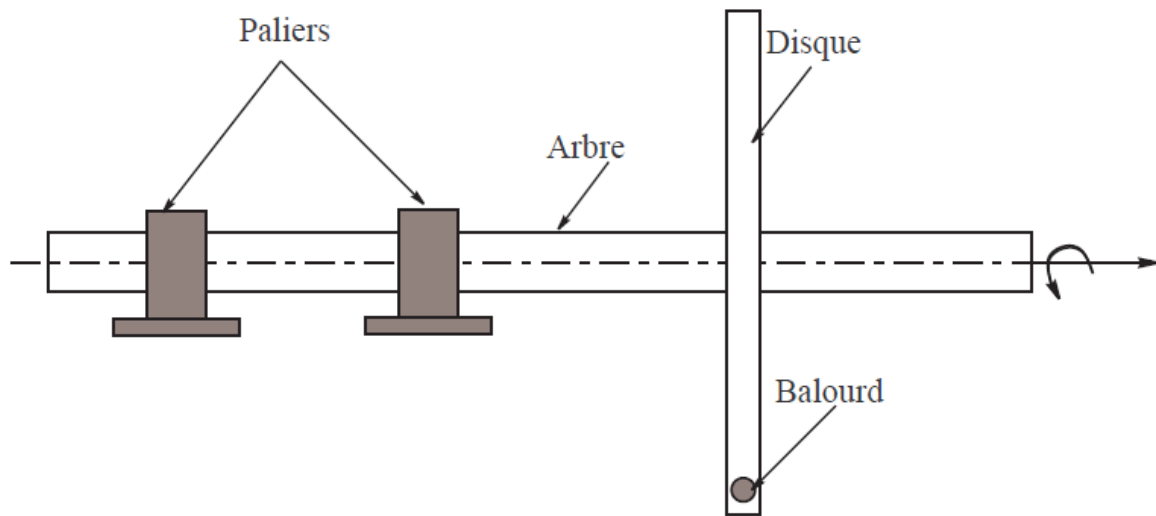


Figure II-1 : Exemple simple de rotor.

Les composants principaux des rotors sont l'arbre, des disques et des paliers. Les expressions des énergies cinétiques sont requises pour décrire les propriétés de la tige, du disque et du balourd (fig. II.1).

L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre, le travail virtuel est calculé en fonction des forces exercées par les paliers. Afin de résoudre les équations du rotor, il faut suivre ces étapes:

Calculer

- L'énergie cinétique « T » ;
- L'énergie de déformation « U » ;
- Le travail virtuel « dW » pour chaque partie du système;

Choisir une méthode de discrétisation adéquate, telle que l'équation de Lagrange

Avec :

- « $1 \leq i \leq N$ », « N » étant le nombre de degrés de liberté pris en compte,
- « q_i » Les coordonnées indépendantes généralisées,
- « \dot{q}_i » Les coordonnées généralisées dérivées par rapport au temps et

– « f_{q_i} » Les efforts généralisés, l'expression du travail virtuel des forces exercées par les paliers peut être obtenue pour déterminer ces efforts généralisés.

II.1.1. Le disque

Le disque est supposé rigide, donc il ne se caractérise que par son :

▪ **Energie cinétique :**

Nous considérons un repère galiléen $R_0 (X, Y, Z)$, lié au disque représenté sur la figure (II.1).

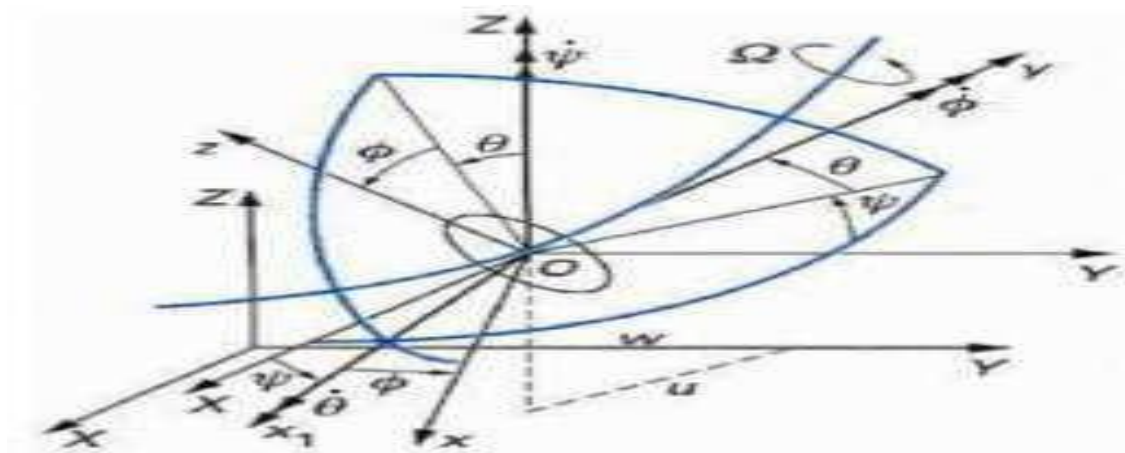


Figure II-2 : Repère et référence d'un disque monté sur un arbre flexible

On suppose que le disque ne se déplace que dans le plan XZ et ses déplacements suivants les axes X et Z sont notés u et w respectivement. Par ailleurs, le système de coordonnées (x, y, z) est relié au système de coordonnées XYZ par l'intermédiaire des angles θ , ϕ et ψ .

Pour déterminer la position du disque, nous le faisons tourner initialement d'un angle θ autour de l'axe Z, puis d'un angle ϕ autour de l'axe X nouvellement créé (noté X1) et enfin d'un angle Ψ autour de l'axe de rotation propre du disque Y. Le vecteur de rotation instantané représentant la position du repère XYZ est :

$$\overrightarrow{\omega_{R/R_0}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \tag{II.2}$$

Le disque de centre C est situé à la position arbitraire $y_s = y$, son énergie cinétique s'écrit :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d \left(\vec{V}^0(C) \right)^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega_{R/R_0}} \overline{\overline{I_C}} \overrightarrow{\omega_{R/R_0}} \quad (II.3)$$

Où :

m_d : La masse de disque ;

$\overline{\overline{I_C}}$: Le tenseur d'inertie principale qui a pour expression dans le repère R ;

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_z} \end{bmatrix} \quad (II.4)$$

Donc l'expression générale de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} M_D (u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) + \frac{1}{2} (I_{D_x} \omega_x^2 + I_{D_y} \omega_y^2 + I_{D_z} \omega_z^2) \quad (II.5)$$

L'expression (II.5) peut être simplifiée car le disque est symétrique, les angles θ et ϕ petits et la vitesse de angulaire $\dot{\phi} = \Omega$ l'équation (II.5) devient :

$$T_d = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{D_x} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (II.6)$$

Dans l'équation (II.6) on distingue les termes usuels de la dynamique des rotors :

- $\frac{1}{2} I_{D_y} \Omega^2$ le terme qui représente l'énergie de rotation de disque et qui n'a aucune influence sur les équations de mouvement.
- $\frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$ le terme qui représente l'énergie cinétique d'un élément en translation dans un plan.
- $\frac{1}{2} I_{D_x} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)$ le terme représente l'expression de l'énergie cinétique de rotation d'un élément autour des axes X et Y.
- $I_{D_y} \Omega \dot{\psi} \theta$ le terme exprime l'effet gyroscopique (Coriolis).

II.1.2. L'arbre

Un élément d'arbre est représenté par une poutre circulaire avec des énergies cinétique et potentielle, ces énergies sont obtenues par intégration de l'énergie cinétique de chaque section élémentaire de l'arbre (équation II.6).

- **Energie cinétique :**

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque.

Elle est calculée en sélectionnant un élément de l'arbre, lequel est considéré comme un disque mince avec une épaisseur « d_y », une section circulaire constante « S », une masse volumique « ρ » et d'inertie de section « I_x » et « I_y ». On calcule son énergie cinétique « dT_a » et intègre sa longueur pour obtenir l'expression finale de l'énergie cinétique de l'arbre.

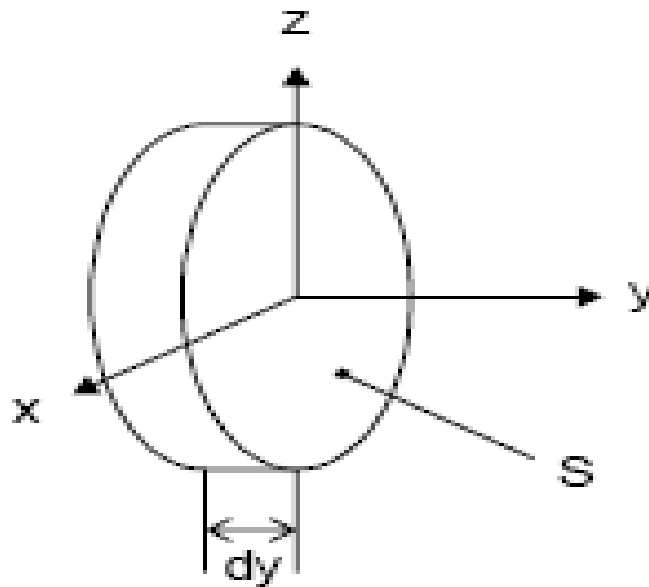


Figure II-3 : Section élémentaire de l'arbre.

La masse élémentaire et les inerties principales sont calculées de la manière suivant :

$$dM_a = \rho S dy \tag{II.7}$$

$$dI_{D_x} = \iiint_V (y^2 + z^2) dm = \left(\iint_S z^2 dS \right) \rho dy = \rho I_x dy \tag{II.8}$$

$$dI_{D_x} = \iiint_V (x^2 + z^2) dm = \left(\iint_S x^2 dS + \iint_S z^2 dS \right) \rho dy = \rho (I_x + I_z) dy \tag{II.9}$$

$$dI_{D_x} = \iiint_V (y^2 + x^2) dm = \left(\iint_S x^2 dS \right) \rho dy = \rho I_z dy \tag{II.10}$$

L'énergie cinétique de la section élémentaire de l'arbre est calculée de la manière suivante :

$$dT_a = \left(\frac{1}{2} \rho S (u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) + \frac{1}{2} (\rho I_x \omega_x^2 + \rho (I_x + I_z) \omega_y^2 + \rho I_z \omega_z^2) \right) dy \quad (II.11)$$

Pour un arbre symétrique on a ($I_x = I_y = I$) et pour un élément de longueur « L » de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy \quad (II.12)$$

L'expression (II.12) donne les termes classiques de la dynamique des rotors :

- $\rho I L \Omega^2$: représente le terme d'énergie de rotation qui n'a aucune influence sur les équations de mouvement.
- $\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$: Le terme exprime l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.
- $\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$: L'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de Timoshenko).
- $2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy$: L'effet gyroscopique.

II.1.3. Le balourd

Une masse concentrée est utilisée pour modéliser un balourd situé à un point « D » d'une section de l'arbre, on suppose que le point « C » est le centre géométrique de ce balourd, lorsqu'aucune déformation de l'arbre n'est encore présente (point « C » sur l'axe Z), le balourd est représenté par la figure (II-4).

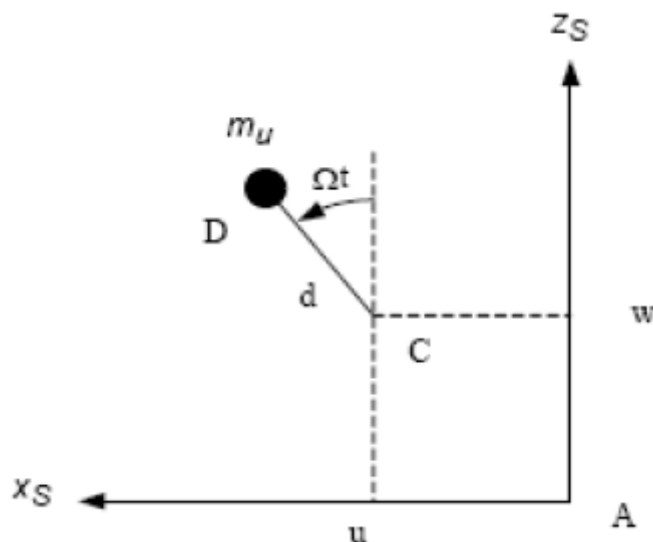


Figure II-4 : Repérage du balourd.

- **Energie cinétique**

L'énergie cinétique de balourd a comme expression :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\vec{V}^0 D)^2 \quad (\text{II.13})$$

Avec

$$\vec{V}^0 D = \frac{d^0}{dt} \overrightarrow{OD} \quad (\text{II.14})$$

Où :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} u + d \sin \Omega t \\ cte \\ w + d \cos \Omega t \end{pmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Donc :

$$\vec{V}^0 = \frac{d^0}{dt} \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} \dot{u} + d \Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d \Omega \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Donc l'énergie cinétique a pour expression :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} \sin \Omega t) \quad (\text{II.17})$$

Le terme $\frac{m_b \Omega^2 d^2}{2}$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement.

La masse m_b est sans commune mesure avec celle du rotor, alors l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$T_b = m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (\text{II.18})$$

II-4/ Energie de déformation

Pour calculer l'énergie de déformation d'un arbre, il est essentiel de décrire la déformation longitudinale de la poutre à un point de sa section droite.

Soit :

- « C » le centre géométrique de la poutre et « B (x, y) » un point de cette section.
- « E » représente le module d'Young,
- « ε » et σ sont les déformations et contraintes,

– « u^* » et « w^* » sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes « x » et « z ».

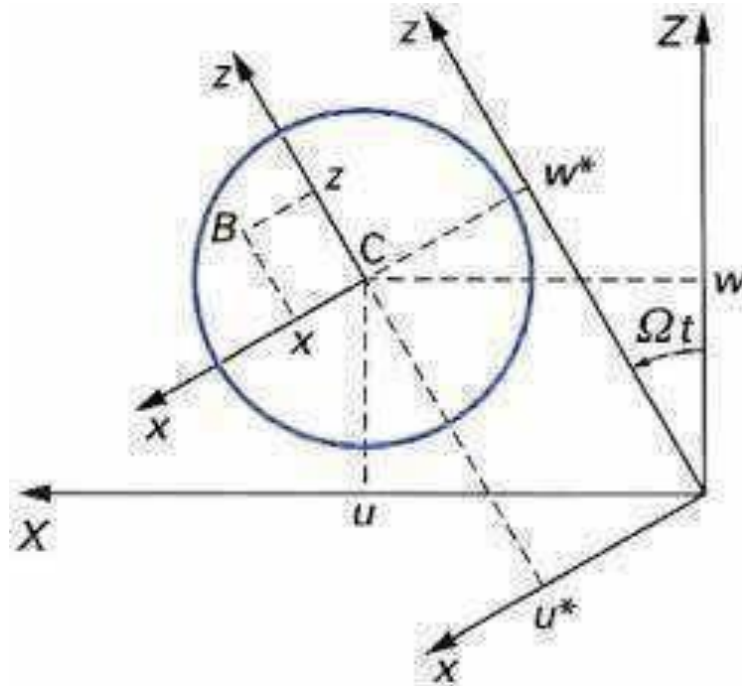


Figure II-5 : Section droite de l'arbre.

Le passage de « u » et « w » a « u^* » et « w^* » s'écrit :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \tag{II.19}$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \tag{II.20}$$

On peut exprimer la déformation d'un point quelconque de l'arbre de coordonnées « x » et « y » dans le repère « R » par : « $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_{nl}$ » avec :

$$\epsilon_1 = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{Déformation linéaire}) \tag{II.21}$$

L'énergie de déformation a comme expression

« $U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon \sigma d\tau$ » ; Avec « τ » est le volume de l'arbre, et « σ » la contrainte de flexion.

Tenant compte de la relation de Hooke : « $\sigma = E\epsilon$ » qui donne la relation entre les contraintes et les déformations, on a :

$$U = \frac{E}{2} \int_{\tau} \varepsilon^2 d\tau \quad (\text{II.22})$$

En utilisant (II.21), l'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^1 \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (\text{II.23})$$

$$U = \frac{E}{2} \left(\int_0^1 \int_S x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (\text{II.24})$$

En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à « x » et « z » on a :

$$I_x = \iint_{(S)} z^2 dS, I_z = \iint_{(S)} x^2 dS \quad (\text{II.25})$$

On trouve :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^1 \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.26})$$

On remplace « u* » et « w* » par leurs valeurs :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^1 \left(I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.27})$$

On peut séparer les termes symétrique et dissymétrique en utilisant l'égalité suivant :

$$\begin{cases} I_m = \frac{I_x + I_z}{2} \\ I_a = \frac{I_x - I_z}{2} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

On trouve :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left[(I_m - I_a) \left(\cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) + (I_m + I_a) \left(\sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \right] dy \quad (\text{II.29})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_m \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{E}{2} \int_0^L I_a \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) (\cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \Omega t \sin \Omega t \right] dy \quad (\text{II.30})$$

Donc finalement l'énergie de déformation de l'arbre a pour expression :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_m \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{E}{2} \int_0^L I_a \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \cos 2\Omega t + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin 2\Omega t \Big] dy \quad (II.31)$$

Pour le cas où l'arbre est symétrique « $I_x = I_z = I$ » on a :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (II.32)$$

II.2. Les paliers

En général, les paliers responsables des forces extérieures exerçant une pression sur l'arbre ont des caractéristiques de rigidité et d'amortissement à l'intérieur de la section droite, comme indiqué sur la figure (II.6).

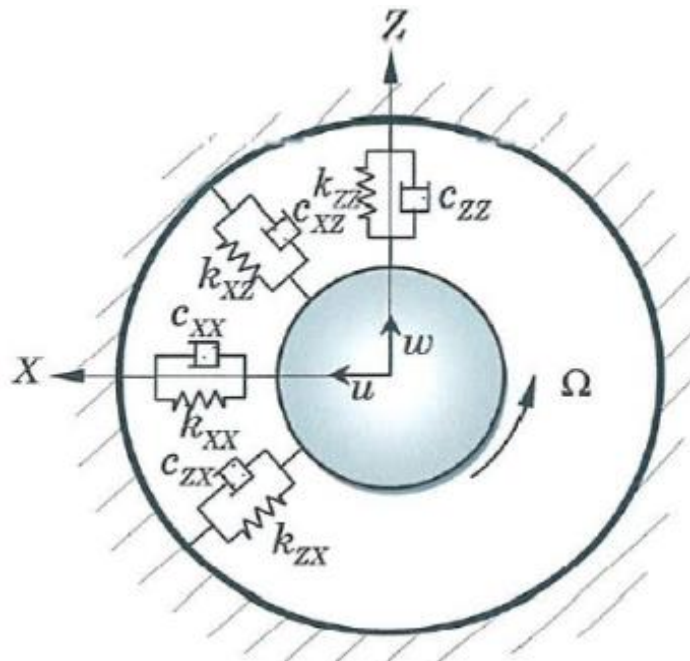


Figure II-6 : Amortisseurs et raideurs d'un palier hydrodynamique.

Avec :

- $k_{XX}, k_{ZZ}, c_{XX}, c_{ZZ}$; les rigidités et les amortisseurs selon les directions X et Z de l'arbre.
- $k_{XZ}, k_{ZX}, c_{XZ}, c_{ZX}$: les rigidités et les amortissements dans une direction (X, Z) mais affecté par l'autre direction, ils représentent des constantes d'accouplement.

Le travail virtuel des forces agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta w = -K_{xx}u\delta u - K_{xz}w\delta u - K_{zz}w\delta w - K_{zx}u\delta w - C_{xx}\dot{u}\delta u - C_{xz}\dot{w}\delta u - C_{zz}\dot{w}\delta w - C_{zx}\dot{u}\delta w \quad (\text{II.33})$$

Ou d'autre écriture :

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (\text{II.34})$$

Avec « F_u » et « F_w » sont les forces généralisées :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

II.3. Mise en équation

La modélisation est effectuée à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz, le modèle étudié est un rotor composé d'un arbre symétrique de longueur « L » et un disque balourdé située a $y = L_1$ et un palier hydrodynamique a la position $y = L_2$.

Les expressions des déplacements « \mathbf{u} » et « \mathbf{w} » dans les directions « x » et « z » s'écrivent après séparation des variables :

$$\begin{cases} U(y, t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \\ W(y, t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

- « q_1 » et « q_2 » coordonnées généralisés indépendants, dans le repère fixe ;
- « $f(y)$ » est la déformée modale choisie (dynamique de poutre appuyée-appuyée).

Comme l'angle « θ » et « ψ » sont petits, ils peuvent être approximés par :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2(t) = f'(y)q_2 \\ \varphi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1(t) = -f'(y)q_1 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

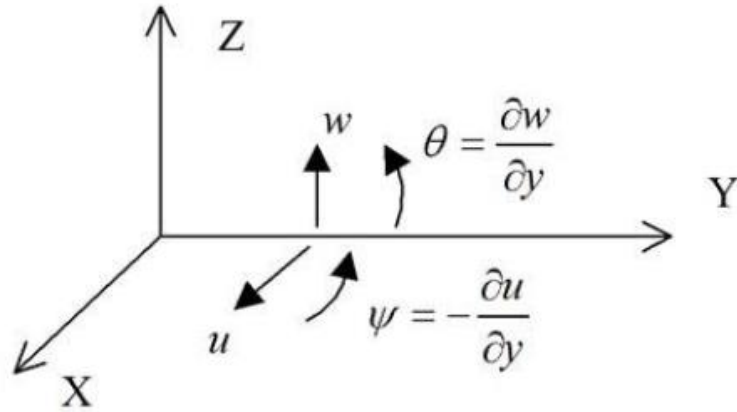


Figure II-7 : Représentation des coordonnées

Pour exprimer l'énergie élastique de l'arbre, il est nécessaire de faire appel au second ordre des dérivées des déplacements « U » et « W ».

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_1 = f''(y) q_1 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_2 = f''(y) q_2 \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Pour modeler précisément la forme du premier mode d'une poutre de section constante en flexion, nous avons choisi la fonction de déplacement « f »

$$f(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (\text{II.38})$$

D'où

$$f'(y) = \frac{\pi}{L} \cos\frac{\pi y}{L} \quad (\text{II.39})$$

$$f''(y) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{\pi y}{L} \quad (\text{II.40})$$

$$\frac{df}{dy} = f'(y), \frac{d^2 f}{dy^2} = f''(y) \quad (\text{II.41})$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{df(y)}{dy} q_2(t) \right) = \frac{df}{dy} \dot{q}_2 = f'(y) \dot{q}_2 = f'(L_1) \dot{q}_2 \quad (\text{II.42})$$

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{df(y)}{dy} q_1(t) \right) = -\frac{df}{dy} \dot{q}_1 = -f'(y) \dot{q}_1 = -f'(L_1) \dot{q}_1 \quad (\text{II.43})$$

II.3.1. Les équations finales des énergies cinétiques et énergies de déformation

Remplacer les variable « u, w, φ, θ » dans l'équation de l'énergie cinétique :

• **Pour le disque**, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{d_x} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{d_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\Psi}\theta) \quad (\text{II.44})$$

Le disque est à la distance (y = L₁), donc l'énergie cinétique de disque est :

Pour : y = L₁ f(y) = f(L₁)

$$T_d = \frac{1}{2} [m_d f^2(L_1) + I_{D_x} f'^2(L_1)] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{D_y} \Omega f'^2(L_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (\text{II.45})$$

• **Pour l'arbre**, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T_a = \frac{1}{2} [\rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L f'^2(y) dy] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I \Omega \int_0^L f'^2(y) dy \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (\text{II.46})$$

• **Pour le balourd**, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T_b = m_b d \Omega f(L_1) [\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t] \quad (\text{II.47})$$

Finalement l'énergie cinétique total « T » de rotor s'écrit :

$$T = T_d + T_a + T_b$$

On aura :

• **L'énergie cinétique :**

$$T = \frac{1}{2} [m_d f^2(L_1) + I_{D_x} f'^2(L_1) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L f'^2(y) dy] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega [I_{D_y} f'^2(L_1) + 2\rho I \int_0^L f'^2(y) dy] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_b d \Omega f(L_1) [\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t] \quad (\text{II.48})$$

• **L'énergie de déformation :**

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L f''^2(y) dy (q_1^2 + q_2^2) \quad (\text{II.49})$$

• Le travail virtuel total du a la raideur des paliers :

$$\delta w = -k_{xx}f^2(L_2)q_1\delta q_1 - k_{zz}f^2(L_2)q_2\delta q_2 - C_{xx}f^2(L_2)\dot{q}_1\delta q_1 - C_{zz}f^2(L_2)\dot{q}_2\delta q_2 \quad (\text{II.50})$$

II.4. Équations du mouvement

Les équations du mouvement sont obtenues à partir des énergies cinétiques et de déformation des composants du rotor et de l'application de l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = F_{q_i}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.51})$$

En introduisant les équations de l'énergie cinétique, l'énergie de déformation et le travail virtuel dans l'équation de Lagrange, on aura

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + C_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = e\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + C_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = e\Omega^2\cos\Omega t \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

Sa forme matricielle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & -a\Omega + C_{zx} \\ a\Omega + C_{xz} & C_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & K_{21} \\ K_{12} & K_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e\Omega^2\sin\Omega t \\ e\Omega^2\cos\Omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Avec :

$$m = m_d f^2(L_1) + I_{D_x} f'^2(L_1) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L f'^2(y) dy \quad (\text{II.54})$$

$$a = I_{D_y} f'^2(L_1) + 2\rho I \int_0^L f'^2(y) dy$$

$$e = m_b d f(L_1)$$

$$C_1 = C_{xx}, C_{12} = -a\Omega + C_{zx}$$

$$C_2 = C_{zz}, C_{21} = a\Omega + C_{zx}$$

$$K_1 = K_0 + K_{xx}$$

$$K_2 = K_0 + K_{zz}$$

$$K_0 = EI \int_0^L f'^2(y) dy$$

$$K_{12} = K_{xz}, K_{21} = K_{zx}$$

C_1, C_2, C_{xz} et C_{zx} sont des termes d'amortissement

K_1, K_{12}, K_{21} et K_2 sont les raideurs

II.4.1. Rotor non amorti

Dans ce cas on a les amortissements sont nuls

$$C_1 = C_2 = C_{xz} = C_{zx} = 0$$

Les équations du mouvement deviennent alors :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega a \\ \Omega a & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e\Omega^2 \sin\Omega t \\ e\Omega^2 \cos\Omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

Fréquences naturelles :

L'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse critique est un facteur essentiel pour le traçage du diagramme de Campbell.

L'étude des solutions homogènes sans second membre permet d'avoir les fréquences propres, pour cela on cherche les solutions qui vérifient le système homogène suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 e^{rt} \\ q_2 = Q_2 e^{rt} \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

En reportant (II.52) dans (II.53) on aura :

$$\begin{cases} mQ_1 r^2 e^{rt} - a\Omega r Q_2 e^{rt} + k_1 Q_1 e^{rt} = 0 \\ mQ_2 r^2 e^{rt} + a\Omega r Q_1 e^{rt} + k_2 Q_2 e^{rt} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

Avec : $e^{rt} \neq 0$

$$\text{Alors : } \begin{cases} mQ_1 r^2 - a\Omega r Q_2 + k_1 Q_1 = 0 \\ mQ_2 r^2 + a\Omega r Q_1 + k_2 Q_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Qu'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} mr^2 + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

La solution $Q_1 = Q_2$ est sans intérêt, on cherche les valeurs de r qui annulent le déterminant de $\begin{pmatrix} mr^2 + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + k_2 \end{pmatrix}$:

▪ Cas de rotor symétrique

Dans ce cas, on a :

$$K_{xx} = K_{zz} \text{ alors } k_1 = k_2 = K$$

$$\text{Le déterminant s'écrit: } (mr^2 + K)^2 + \Omega^2 a^2 r^2 = 0 \quad (\text{II.60})$$

On pose : $r^2 = x$

$$\Rightarrow (mx + K)^2 + \Omega^2 a^2 x = 0 \quad (\text{II.61})$$

$$\Delta = (2mK + \Omega^2 a^2)^2 - 4m^2 K^2 \quad (\text{II.62})$$

Si $\Omega = 0$

$$x = j^2 w_0^2 = \frac{-2mK}{2m^2} = -\frac{K}{m} / j^2 = -1 \quad (\text{II.63})$$

$$w_{10} = w_{20} = w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{II.64})$$

w_{10} et w_{20} sont les pulsations naturelles à l'arrêt.

Les fréquences naturelles à l'arrêt :

$$f_{10} = f_{20} = \frac{w_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{2\pi} \quad (\text{II.65})$$

Si $\Omega \neq 0$

$$x_1 = r_1^2 = j^2 w_1^2, x_1 = \frac{(2mK + a^2 \Omega^2) - \sqrt{\Delta}}{2m^2} \quad (\text{II.66})$$

$$x_1 = \left[w_0^2 + \frac{(n\Omega)^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2mw_0}{a\Omega} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{II.67})$$

$$w_1 = \sqrt{\left[w_0^2 + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2mw_0}{a\Omega} \right)^2} \right) \right]} \quad (\text{II.68})$$

$$f_1 = \frac{w_1}{2\pi} \quad (\text{II.69})$$

$$x_2 = r^2 = j^2 w_2^2, \quad x_2 = \frac{(2mK + a^2 \Omega^2) + \sqrt{\Delta}}{2m^2} \quad (\text{II.70})$$

$$x_2 = \left[w_0^2 + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2mw_0}{a\Omega} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{II.71})$$

$$w_2 = \sqrt{\left[w_0^2 + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2mw_0}{a\Omega} \right)^2} \right) \right]} \quad (\text{II.72})$$

$$f_2 = \frac{w_2}{2\pi} \quad (\text{II.73})$$

Réponse aux forces d'excitation

Dans le cas de présence de force d'excitation due au balourd, l'étude de la solution particulière se fait avec second membre, or :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + Kq_1 = e\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + Kq_2 = e\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (\text{II.74})$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_1 \sin\Omega t \\ q_2(t) = Q_2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (\text{II.75})$$

On remplace (II.71) dans (II.72) :

$$\begin{cases} -mQ_1\Omega^2 \sin\Omega t + a\Omega^2 Q_2 \sin\Omega t + KQ_1 \sin\Omega t = e\Omega^2 \sin\Omega t \\ -mQ_2\Omega^2 \cos\Omega t + a\Omega^2 Q_1 \cos\Omega t + KQ_2 \cos\Omega t = e\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (\text{II.76})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -mQ_1\Omega^2 + a\Omega^2 Q_2 + KQ_1 = e\Omega^2 \\ -mQ_2\Omega^2 + a\Omega^2 Q_1 + KQ_2 = e\Omega^2 \end{cases} \quad (\text{II.77})$$

$$\text{Qui donne : } (Q_2 - Q_1)(m\Omega^2 + a\Omega^2 - K) = 0 \quad (\text{II.78})$$

$$Q_2 - Q_1 = 0 \Rightarrow Q_2 = Q_1$$

On remplace $Q_2 = Q_1$ dans l'équation " $-mQ_1\Omega^2 + a\Omega^2Q_2 + KQ_1 = e\Omega^2$ " :

$$Q_1(-m\Omega^2 + a\Omega^2 + K) = e\Omega^2 \quad (\text{II.79})$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{e\Omega^2}{-m\Omega^2 + a\Omega^2 + K} = \frac{e\Omega^2}{\Omega^2(a-m) + K} \quad (\text{II.80})$$

La vitesse critique Ω_c est la solution de l'équation suivante :

$$\Omega^2(a - m) + K = 0$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{K}{m-a}} \quad (\text{II.81})$$

▪ **Cas de rotor symétrique :**

Dans ce cas $k_{xx} \neq k_{zz}$

Le calcul des fréquences naturelles donne :

Si $\Omega = 0$:

On obtient :

Les pulsations propres à l'arrêt :

$$w_{10} = \sqrt{\frac{K_1}{m}} \quad (\text{II.81})$$

$$w_{20} = \sqrt{\frac{K_2}{m}} \quad (\text{II.82})$$

Et les fréquences naturelles à l'arrêt :

$$f_{10} = \frac{w_{10}}{2\pi} \quad (\text{II.83})$$

$$f_{20} = \frac{w_{20}}{2\pi} \quad (\text{II.84})$$

Si $\Omega \neq 0$:

$$w_1 = \sqrt{\left[\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} - \left(\sqrt{\left(\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \right)^2} - w_{10}^2 w_{20}^2 \right) \right]} \quad (\text{II.85})$$

$$f_1 = \frac{w_1}{2\pi} \quad (\text{II.86})$$

$$w_2 = \sqrt{\left[\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} + \left(\sqrt{\left(\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \right)^2} - w_{10}^2 w_{20}^2 \right) \right]} \quad (\text{II.87})$$

$$f_2 = \frac{w_2}{2\pi} \quad (\text{II.88})$$

Réponse aux forces d'excitation 'balourd'

Les solutions particulières des équations différentielles du mouvement sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t \\ q_2(t) = Q_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{II.89})$$

On aura des solutions de la forme suivante :

$$Q_1 = \frac{(K_2 - (M+a)\Omega^2)e\Omega^2}{(K_1 - M\Omega^2)(K_2 - M\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (\text{II.90})$$

$$Q_2 = \frac{(K_1 - (M+a)\Omega^2)e\Omega^2}{(K_1 - M\Omega^2)(K_2 - M\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (\text{II.91})$$

Et les vitesses critiques sont les solutions de l'équation suivante :

$$(K_1 - m\Omega^2)(K_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4 = 0 \quad (\text{II.92})$$

On a : $\Delta = m^2(K_1 + K_2)^2 - 4(m^2 - a^2)K_1K_2$

$$\Omega_{c1} = \sqrt{\frac{m(K_1+K_2) - \sqrt{\Delta}}{2(m^2 - a^2)}} \quad (\text{II.93})$$

$$\Omega_{c2} = \sqrt{\frac{m(K_1+K_2) + \sqrt{\Delta}}{2(m^2 - a^2)}} \quad (\text{II.94})$$

II.4.2. Rotor amorti

Dans ce cas l'amortissement est considérable $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$.

On suppose que $C_{zx} = C_{xz} = 0$

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & -a\Omega \\ a\Omega & C_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & K_{21} \\ K_{12} & K_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e\Omega^2 \sin\Omega t \\ e\Omega^2 \cos\Omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{II.95})$$

Détermination des fréquences naturelles :

L'étude des solutions homogènes permet d'avoir la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} mr^2 + C_1 r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + C_2 r + k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

Les solutions $Q_1=Q_2 = 0$ sont sans intérêt, on cherche les valeurs de r qui annulent le déterminant, soit :

$$m^2 r^4 + m(C_1 + C_2)r^3 + (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2 + C_1 C_2)r^2 + (k_1 C_2 + k_2 C_1)r + k_1 k_2 = 0 \quad (\text{II.97})$$

Les racines de cette équation sont des paires de quantités complexes conjugués qui se mettent de la forme suivante :

$$r_i = H(\Omega) \pm j\omega(\Omega) \quad (\text{II.98})$$

Avec :

r_i la fréquence complexe,

$\omega(\Omega)$ la fréquence naturelle du mouvement libre du système (partie imaginaire),

$H(\Omega)$ le taux de décroissance.

Réponse aux forces d'excitation :

Comme le système est amorti, les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t) = A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t \\ q_2(t) = A_2 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{II.99})$$

L'application de ces expressions dans l'équation du mouvement donne un ensemble d'équations linéaires, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -C_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ C_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega^2 & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 & -C_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & C_2\Omega & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ e\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

Donc $Q_1(\Omega)$ et $Q_2(\Omega)$ sont cherchés à partir de :

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \\ Q_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \end{cases} \quad (\text{II.101})$$

II.5. Critères de la stabilité des rotors

Les critères d'analyse stabilité des rotors peuvent être étudiés par :

II.5.1. Stabilité vue par l'équation aux fréquences propres

On a précédemment la solution en mouvement libre est écrite sous la forme suivante :

$$r_i = H(\Omega) \pm j\omega(\Omega)$$

Avec une valeur négative de $H(\Omega)$ caractérise un mouvement qui diminue avec le temps alors le mouvement est stable, et vice versa pour une valeur positive de $H(\Omega)$ qui caractérise un mouvement instable.

II.5.2. Critère de stabilité de Routh-Hurwitz

L'équation caractéristique est donnée par l'expression suivante [7]:

$$r^4 + \left(\frac{c_1+c_2}{M}\right)r^3 + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{C_1C_2}{m^2} + \frac{a^2\Omega^2}{m^2}\right)r^2 + \left(\frac{K_2C_1}{m^2} + \frac{K_1C_2}{m^2}\right)r + \frac{K_1k_2}{m^2} = 0 \quad (\text{II.102})$$

Où les coefficients a_1, a_2, a_3 et a_4 définis dans le critère de Routh-Hurwitz sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{(c_1 + c_2)}{m} \\ a_2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{c_1 c_2}{m^2} + \frac{a^2 \Omega^2}{m^2} \\ a_3 = \frac{K_2 c_1}{m^2} + \frac{K_1 c_2}{m^2} \\ a_4 = \frac{K_1 k_2}{m^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.103})$$

D'après l'expression (II.101) l'équation caractéristique (II.100) prend la forme suivante :

$$r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0 \quad (\text{II.104})$$

La matrice suivante \hat{H} est constante :

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.105})$$

Où les 4 quantités h_1, h_2, h_3 et h_4 sont données par les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = a_1 \\ h_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_3 \\ h_3 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} = a_1 (a_2 a_3 - a_4 a_1) a_3^2 \\ h_4 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1^2 a_4^2 - a_3^2 a_4 \end{array} \right. \quad (\text{II.106})$$

En remplace les coefficients (a_1, a_2, a_3 et a_4) dans l'expression (2.104) on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = \frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m} \\ h_2 = \frac{c_1 k_1}{m^2} + \frac{c_2 k_2}{m^2} + \frac{c_1^2 c_2}{m^3} + \frac{c_1 c_2^2}{m^3} + \frac{(c_1 + c_2)}{m^3} a^2 \Omega^2 \\ h_3 = \left[\frac{c_1 k_2}{m^2} + \frac{c_2 k_1}{m^2} \right] h_2 - \frac{2k_1 k_2 c_1 c_2}{m^4} - \frac{k_1 k_2 c_2^2}{m^4} - \frac{k_1 k_2 c_1^2}{m^4} \\ h_4 = \frac{k_1 k_2}{m^2} h_3 \end{array} \right. \quad (\text{II.107})$$

Si toutes les quantités du critère de Routh-Hurwitz (h_1, h_2, h_3 et h_4) sont des quantités positives, alors le système est stable.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons déterminé les expressions de l'énergie cinétique, l'énergie de déformation ainsi que le travail virtuel, avec lesquelles nous avons écrit les équations du mouvement d'un rotor amorti et non amorti.

En cherchant les fréquences propres et les pulsations naturelles en fonction de la vitesse de rotation nous avons aussi déterminé les équations du diagramme de Campbell, et les réponses au balourd qui permettent d'étudier la stabilité du rotor.

Chapitre III

Etude de la stabilité d'un rotor et application numérique

Introduction

Selon l'étude réalisée précédemment, nous avons déterminé les équations du mouvement d'un rotor (amorti et non amorti), qui nous permet de d'évaluer la stabilité de ces rotors.

Pour atteindre cet objectif, dans ce chapitre on appliquera ces équations sur les deux modèles de rotor.

Le but de cette étude est de résoudre les équations décrivant le comportement dynamique d'un rotor amorti afin d'évaluer la stabilité du système en question. Nous utiliserons pour cela le modèle de Lalanne et Ferrarais [8] qu'on trouve dans pas mal de travaux de recherche, qui a été obtenu grâce à la méthode Rayleigh-Ritz. De plus, nous examinerons la stabilité du système grâce aux diagrammes de Campbell et les vitesses critiques.

Cette étude offre une vue d'ensemble de l'impact de l'amortissement du palier hydrodynamique sur la stabilité des rotors.

III.1. Description du modèle du rotor étudié

Le modèle de rotor étudié est illustré sur la figure (III-1), sa structure est composée d'un arbre symétrique de longueur L , un disque situé à une distance de L_1 comportant un balourd sur son extrémité.

Les paliers sont positionnés à une distance L_2 , sur leurs extrémité les amortissements est les raideurs.

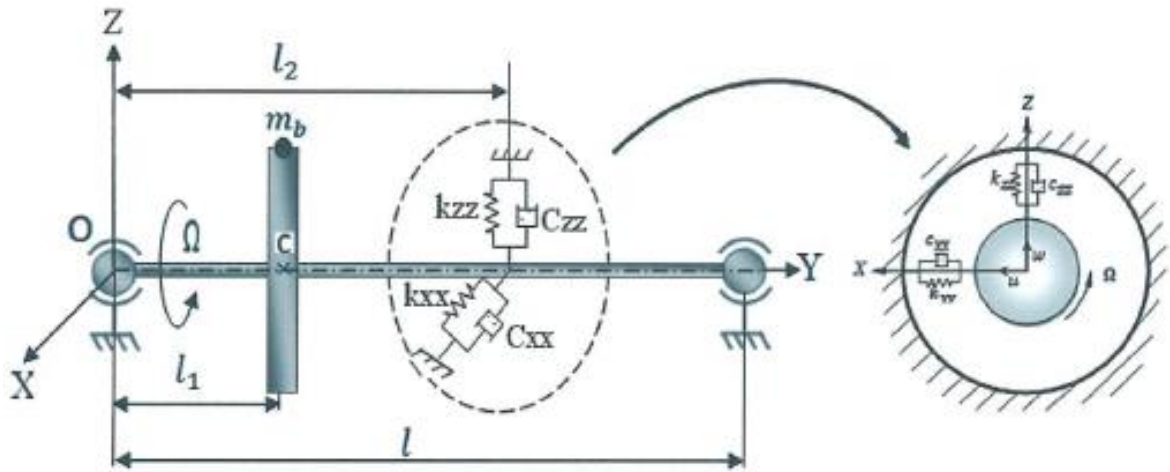


Figure III-1 : Modèle mathématique de Lalanne et Ferraris

Les caractéristiques du rotor sont :

Pour l'arbre :

- Longueur $L = 1.5\text{m}$
- Rayon de section droite $R_1 = 0.04\text{m}$
- Air de section droite $S = \pi R_1^2$
- Moment d'inertie quadratique $I = \frac{\pi R_1^4}{4}$
- Module de Young $E = 10^{11}\text{N/m}$
- Masse du balourd $m_b = 10^{-4}\text{kg}$

Pour le disque :

- Rayon intérieur R_1
- Rayon extérieur $R_2 = 0.18\text{m}$
- Epaisseur $h = 0.05\text{m}$
- Position $L_1 = \frac{L}{3}$
- Masse volumique $\rho = 7800\text{kg/m}^3$

Pour les paliers

- Position $L_2 = \frac{2L}{3}$
- Les raideurs $k_{xz} = k_{zx} = 0$
- Les amortissements $C_{xz} = C_{zx} = 0$

III.2. Application des équations du mouvement

L'énergie cinétique du système est :

$$T = \frac{1}{2} [m_d f^2(L_1) + I_{D_x} f'^2(L_1) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L f'^2(y) dy] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega [I_{D_y} f'^2(L_1) + 2\rho I \int_0^L f'^2(y) dy] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_b d \Omega f(L_1) [\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t] \quad (III.1)$$

Avec :

$$f(L_1) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$f^2(L_1) = \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^2$$

$$f'^2(L_1) = \frac{\pi^2}{4L^2}$$

$$\int_0^L f^2(y) dy = \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L f'^2(y) dy = \frac{\pi^2}{3}$$

L'expression finale de l'énergie cinétique est :

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a \Omega \dot{q}_1 \dot{q}_2 + e \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (III.2)$$

L'énergie de déformation :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L f''^2(y) dy (q_1^2 + q_2^2)$$

$$\Rightarrow U = \frac{EI}{2} \times \frac{\pi^4}{2L^3} \times (q_1^2 + q_2^2) \quad (III.3)$$

$$\Rightarrow U = \frac{K_0}{2} (q_1^2 + q_2^2) \quad (III.4)$$

III.2.1. Cas du rotor non amorti

Le rotor est non amorti, alors :

$$C_{xx} = C_{zz} = C_{xz} = C_{zx} = 0$$

III.2.1.1. Cas de rotor non amorti symétrique

Dans ce cas : $k_{xx} = k_{zz}$

D'où : $k_1 = k_2 = k$

Le travail virtuel est donné par :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w$$

$$\delta W = -k_{xx} f^2(L_2) q_1 \delta q_1 - k_{zz} f^2(L_2) q_2 \delta q_2 \tag{III.5}$$

$$f_{q_1} = -k_{xx} f^2(L_2) q_1 \tag{III.6}$$

$$f_{q_2} = -k_{zz} f^2(L_2) q_2 \tag{III.7}$$

$$f_{q_1} = f_{q_2} \tag{III.8}$$

L'application des équations de Lagrange conduit aux équations du mouvement suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = F_{q_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = e\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = e\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases}$$

Fréquences naturelles

A l'arrêt ($\Omega = 0$) la racine double est

$$r_0 = j^2 w_0^2 = -\frac{k}{m}$$

Et la pulsation propre est

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La fréquence naturelle à l'arrêt est :

$$f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$$

En rotation les racines sont r_1 et r_2 , les pulsations sont w_1 et w_2 .

$$r_1^2 = j^2 w_1^2 = \left[w_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{4m^2 w_0^2}{a^2 \Omega^2} \right)} \right) \right]$$

$$w_1 = \sqrt{\left[w_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{4m^2 w_0^2}{a^2 \Omega^2} \right)} \right) \right]}$$

$$f_1 = \frac{w_1}{2\pi}$$

$$r_2^2 = j^2 w_2^2 = \left[w_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4m^2 w_0^2}{a^2 \Omega^2} \right)} \right) \right]$$

$$w_2 = \sqrt{\left[w_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4m^2 w_0^2}{a^2 \Omega^2} \right)} \right) \right]}$$

$$f_2 = \frac{w_2}{2\pi}$$

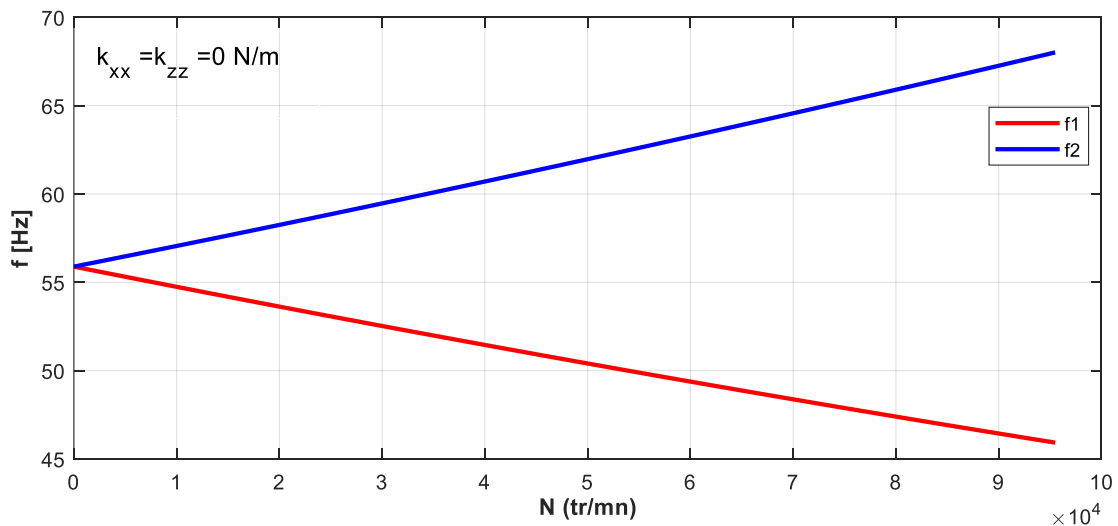


Figure III-2 : Diagramme de Campbell (rotor symétrique $k_{xx} = k_{zz} = 0$)

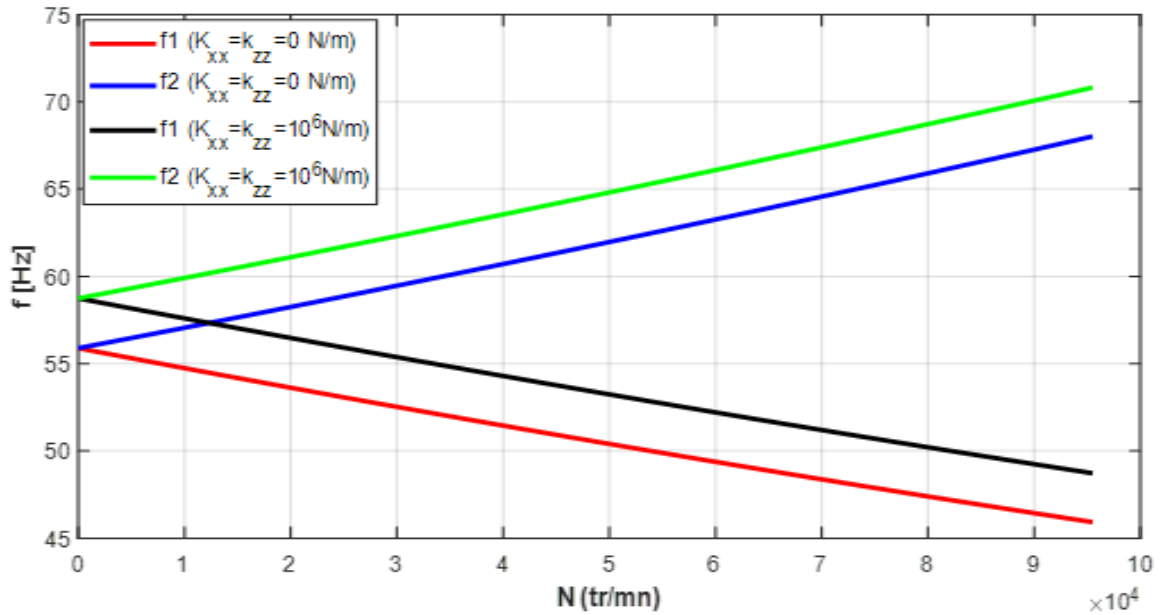


Figure III-3 : Diagramme de Campbell pour différentes valeurs de k_{xx}

Le diagramme de Campbell tracé pour différentes valeurs de k_{xx} comme illustré dans les figures (III-2) et (III-3), d'où on peut constater que la fréquence propre croît avec la valeur de la raideur k_{xx} et sont égales à l'arrêt.

Réponse aux forces d'excitation

Les solutions particulières des équations différentielles du mouvement sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t \\ q_2(t) = Q_2 \cos \Omega t \end{cases}$$

Nous donne :

$$Q_1 = Q_2 = Q = \frac{e\Omega^2}{k+(a-m)\Omega^2},$$

La vitesse critique Ω_c est la solution de l'équation suivante :

$$-m\Omega_c^2 + a\Omega_c^2 + k = 0$$

$$\Omega_c^2 = -\frac{k}{a-m} = \frac{k}{m-a}$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m - a}}$$

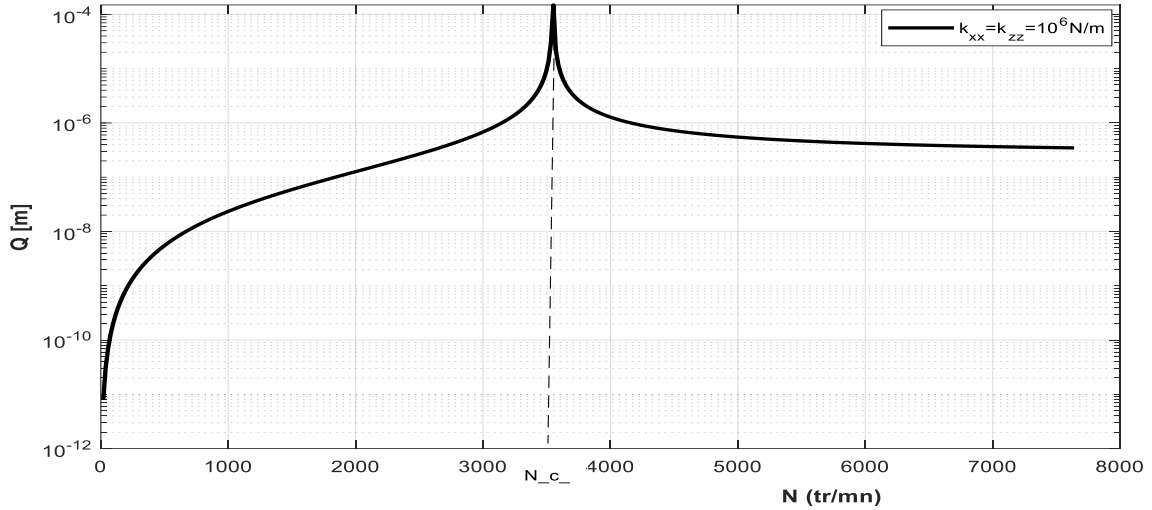


Figure III-4 : Réponse au balourd (rotor symétrique), vitesse critique $N_c = 3550$ tr/min

La figure (III-4) représente l'évolution de l'amplitude de la réponse Q en fonction de la vitesse de rotation N pour la valeur $k_{xx} = 10^6$ N/m.

La vitesse critique N_c correspond à la vitesse qui rend les déplacements infinis, elle augmente avec l'augmentation de la raideur k_{xx} .

III.2.1.2. Cas de rotor dissymétrique

Dans ce cas, nous avons : $k_{xx} \neq k_{zz}$

Le travail virtuel :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w$$

$$\delta W = -k_{xx} f^2(L_2) q_1 \delta q_1 - k_{zz} f^2(L_2) q_2 \delta q_2 \quad (\text{III.5})$$

$$f_{q_1} = -k_{xx} f^2(L_2) q_1 \quad (\text{III.6})$$

$$f_{q_2} = -k_{zz} f^2(L_2) q_2 \quad (\text{III.7})$$

L'application des équations de Lagrange donne :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = e\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = e\Omega^2\cos\Omega t \end{cases}$$

Fréquences naturelles

Les pulsations propres à l'arrêt ($\Omega = 0$) sont :

$$w_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

$$w_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

Les fréquences naturelles à l'arrêt sont :

$$f_{10} = \frac{w_{10}}{2\pi}$$

$$f_{20} = \frac{w_{20}}{2\pi}$$

En rotation, les pulsations sont :

$$w_1 = \sqrt{\left[\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} - \left(\sqrt{\left(\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \right)^2 - w_{10}^2 w_{20}^2} \right) \right]}$$

$$w_2 = \sqrt{\left[\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(n\Omega)^2}{2m^2} + \left(\sqrt{\left(\frac{w_{10}^2}{2} + \frac{w_{20}^2}{2} + \frac{(a\Omega)^2}{2m^2} \right)^2 - w_{10}^2 w_{20}^2} \right) \right]}$$

Les fréquences naturelles sont alors :

$$f_1 = \frac{w_1}{2\pi}, f_2 = \frac{w_2}{2\pi}.$$

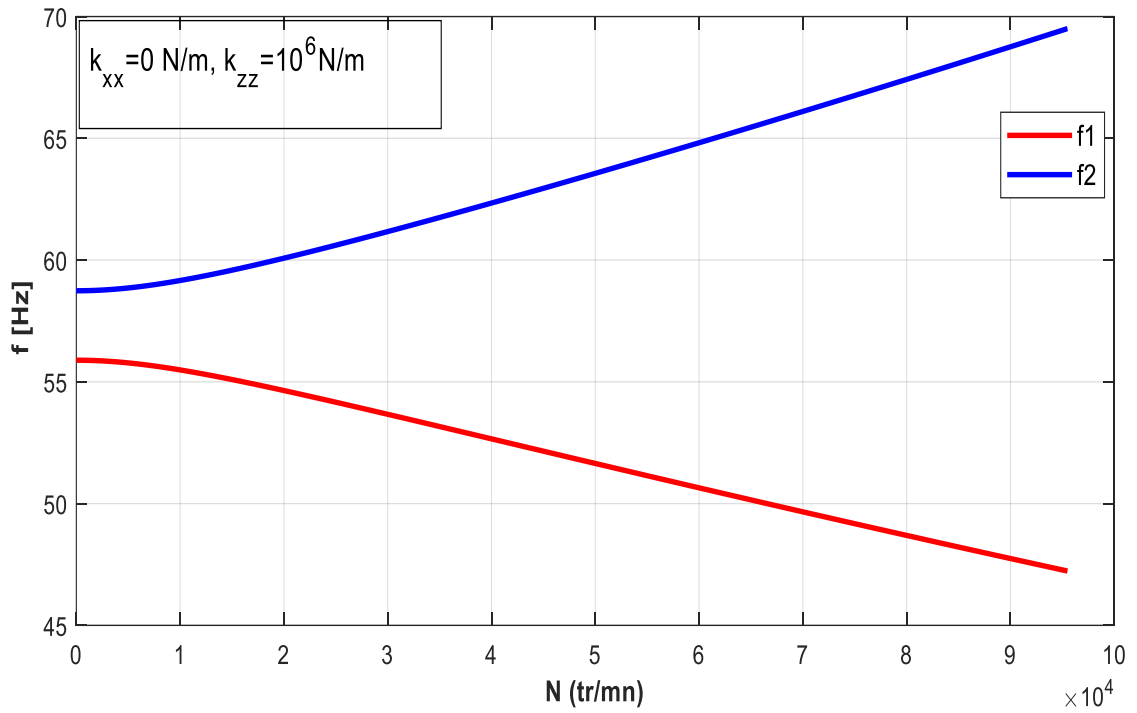


Figure III-5 : Diagramme de Campbell (rotor non symétrique) $k_{xx} = 0, k_{zz} = 10^6 \text{ N/m}$

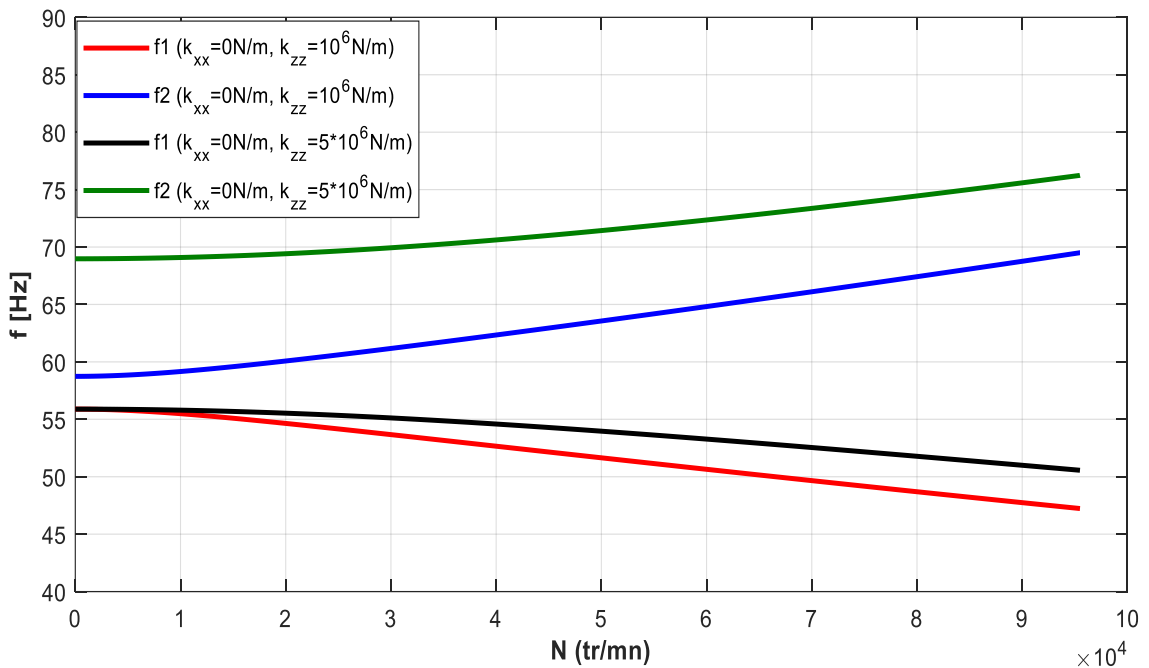


Figure III-6 : Diagramme de Campbell (rotor non symétrique) pour $k_{xx} = 0$ et différentes valeur de k_{zz}

Les deux fréquences propres du diagramme de Campbell illustrées sur les figures (III-5) et (III-6) sont différentes à l'arrêt, due à la dissymétrie des valeurs de la raideur k_{xx} et k_{zz} .

Réponse aux forces d'excitation

Les solutions particulières des équations différentielles du mouvement sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t \\ q_2(t) = Q_2 \cos \Omega t \end{cases}$$

Nous donne :

$$Q_1 = \frac{(K_2 - (m + a)\Omega^2)e\Omega^2}{(K_1 - m\Omega^2)(K_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4}$$

$$Q_2 = \frac{(K_1 - (M + a)\Omega^2)e\Omega^2}{(K_1 - m\Omega^2)(K_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4}$$

Les vitesses critiques sont les solutions de l'équation suivante :

$$(K_1 - m\Omega^2)(K_2 - m\Omega^2) + a^2\Omega^2 = 0$$

$$\Delta = m^2(K_1 + K_2)^2 - 4(m^2 - a^2)K_1K_2$$

$$\Omega_{c1} = \sqrt{\frac{m(K_1 + K_2) - \sqrt{\Delta}}{2(m^2 - a^2)}}$$

$$\Omega_{c2} = \sqrt{\frac{m(K_1 + K_2) + \sqrt{\Delta}}{2(m^2 - a^2)}}$$

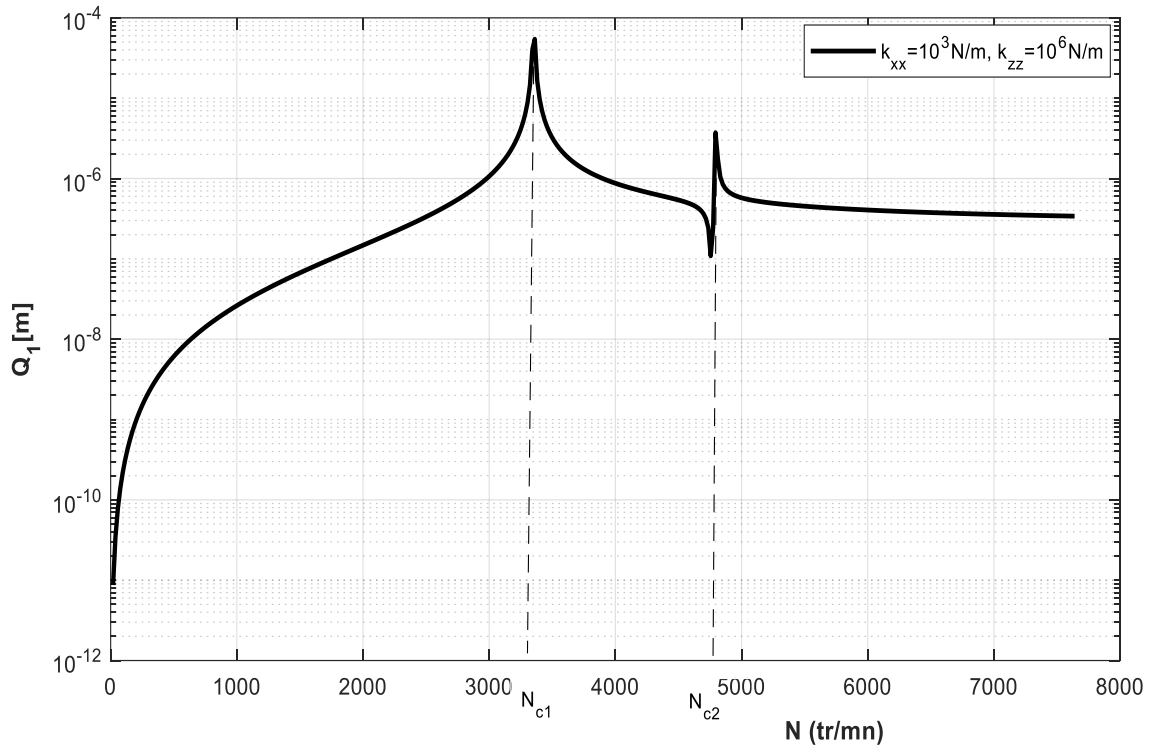


Figure III-7 : Réponse au balourd (Q_1) pour $k_{xx} = 10^3 \text{ N/m}$, $k_{zz} = 10^6 \text{ N/m}$
 $/N_{c1} = 3351 \text{ N/m}$, $N_{c2} = 4800 \text{ N/m}$.

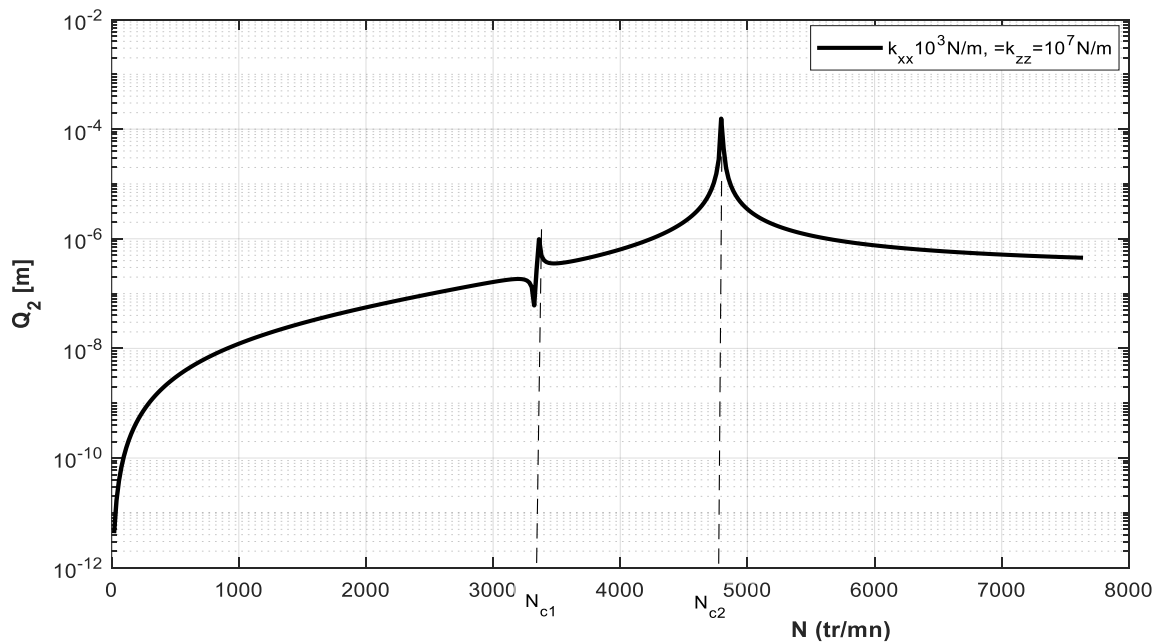


Figure III-8 : Réponse au balourd (Q_2) pour $k_{xx} = 10^3 \text{ N/m}$, $k_{zz} = 10^7 \text{ N/m}$ / $N_{c1} =$
 3351 N/m , $N_{c2} = 4800 \text{ N/m}$.

Les figures (III-7) et (III-8) montrent la variation des amplitudes Q_1 et Q_2 en fonction de vitesse de rotation N , On voit bien que le phénomène de résonance se produit pour deux valeurs critiques contrairement au cas symétrique où il se produit pour une seule valeur.

III.2.2. Cas de rotor amorti

Les données numériques sont les mêmes que le modèle précédent, avec un palier hydrodynamique caractérisé par deux amortissements visqueux différents

$$C_{xx} = \alpha \times k_{xx}, C_{zz} = \alpha \times k_{zz},$$

Avec α est le facteur d'amortissement.

L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a\Omega \dot{q}_1 q_2 + e\Omega (\dot{q}_1 \cos\Omega t - \dot{q}_2 \sin\Omega t)$$

L'énergie de déformation est :

$$U = \frac{k_0}{2} (q_1^2 + q_2^2)$$

Le travail virtuel des paliers :

$$\delta w = -k_{xx} f^2(L_2) q_1 \delta q_1 - k_{zz} f^2(L_2) q_2 \delta q_2 - C_{xx} f^2(L_2) \dot{q}_1 \delta q_1 - C_{zz} f^2(L_2) \dot{q}_2 \delta q_2 \quad (\text{III.9})$$

Ce qui donne :

$$Fq_1 + F\dot{q}_1 = [-k_{xx} f^2(L_2)]q_1 + [-C_{xx} f^2(L_2)]\dot{q}_1 \quad (\text{III.9})$$

$$Fq_2 + F\dot{q}_2 = [-k_{zz} f^2(L_2)]q_2 + [-C_{zz} f^2(L_2)]\dot{q}_2 \quad (\text{III.10})$$

L'introduction de ces relations dans l'équation de Lagrange donne :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega \dot{q}_2 + C_1 \dot{q}_1 + k_1 q_1 = e\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega \dot{q}_1 + C_2 \dot{q}_2 + k_2 q_2 = e\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases}$$

Détermination des fréquences naturelles

L'étude des solutions homogènes permet d'obtenir la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} mr^2 + C_1r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + C_2r + k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les solutions $Q_1=Q_2 = 0$ sont sans intérêt, on cherche les valeurs de r qui annulent le déterminant, soit :

$$m^2r^4 + m(C_1 + C_2)r^3 + (k_1m + k_2m + a^2\Omega^2 + C_1C_2)r^2 + (k_1C_2 + k_2C_1)r + k_1k_2 = 0$$

Les racines sont de la forme :

$$r(\Omega) = H(\Omega) + j\omega(\Omega)$$

La résolution de l'équation s'effectue à l'aide d'un programme en langage MATLAB.

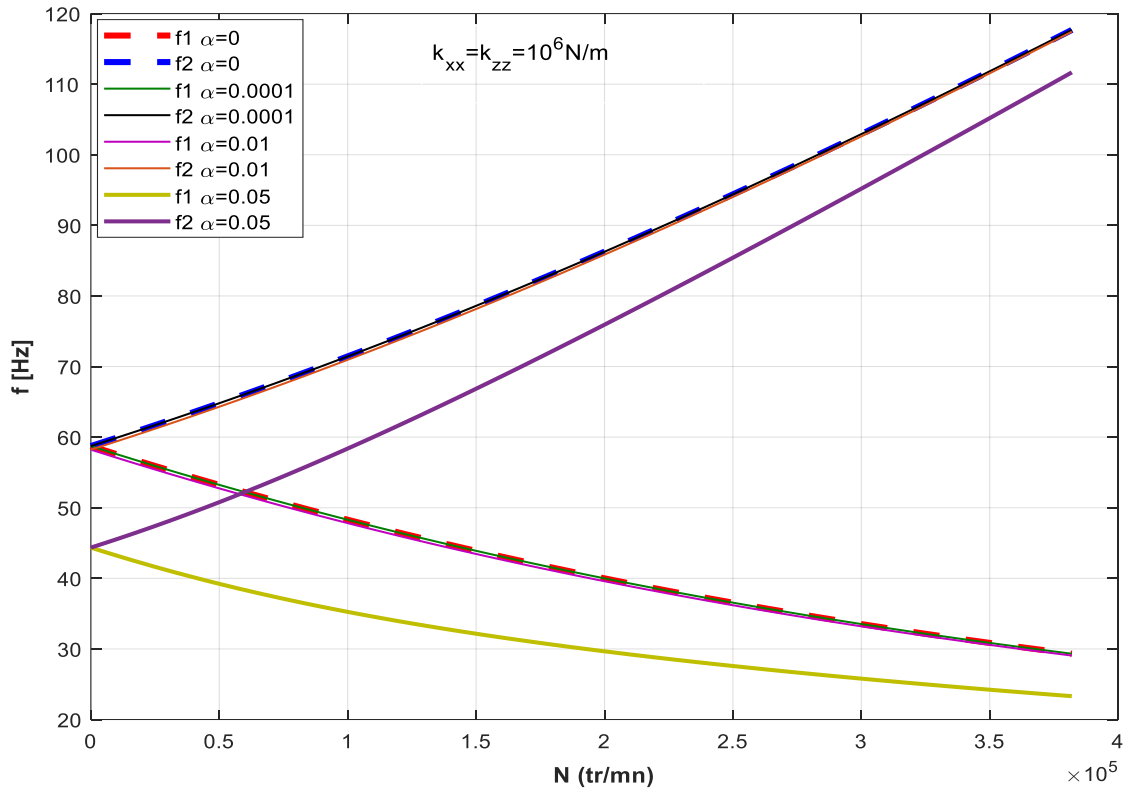


Figure III-9 : Diagramme de Campbell pour $k_{xx} = k_{zz} = 0$ et pour différentes valeur α

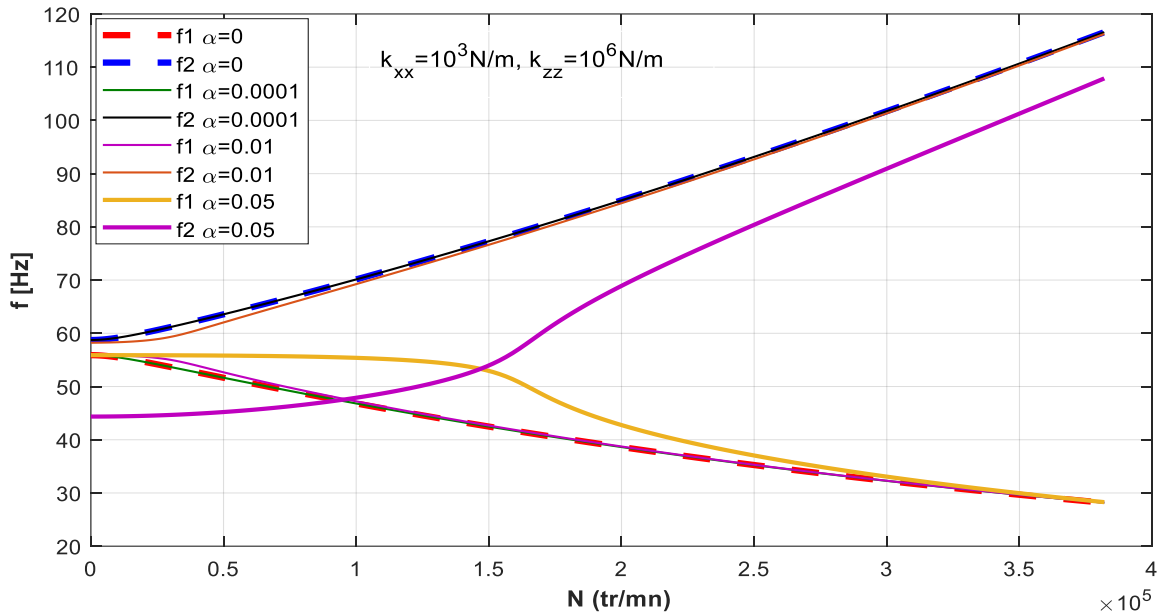


Figure III-10 : Diagramme de Campbell pour $k_{xx} = 10^3 \text{ N/m}$, $k_{zz} = 10^6 \text{ N/m}$ et différentes valeurs de α

Les figures (III-9) et (III-10) représentent l'évolution des fréquences propres du rotor en fonction de la vitesse de rotation N pour différentes valeurs de α , et l'on voit que plus le facteur d'amortissement α est important plus les fréquences propres diminuent.

Pour $\alpha = 0.05$, l'évolution des fréquences est différente.

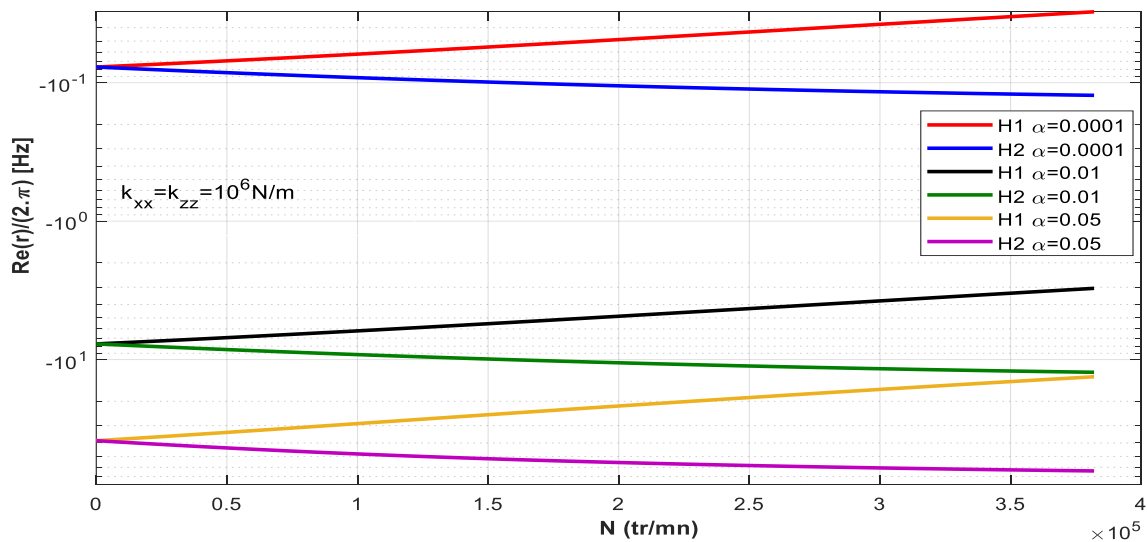


Figure III-11 : Taux de décroissance pour $k_{xx} = k_{zz} = 10^6 \text{ N/m}$ et différentes valeurs de α

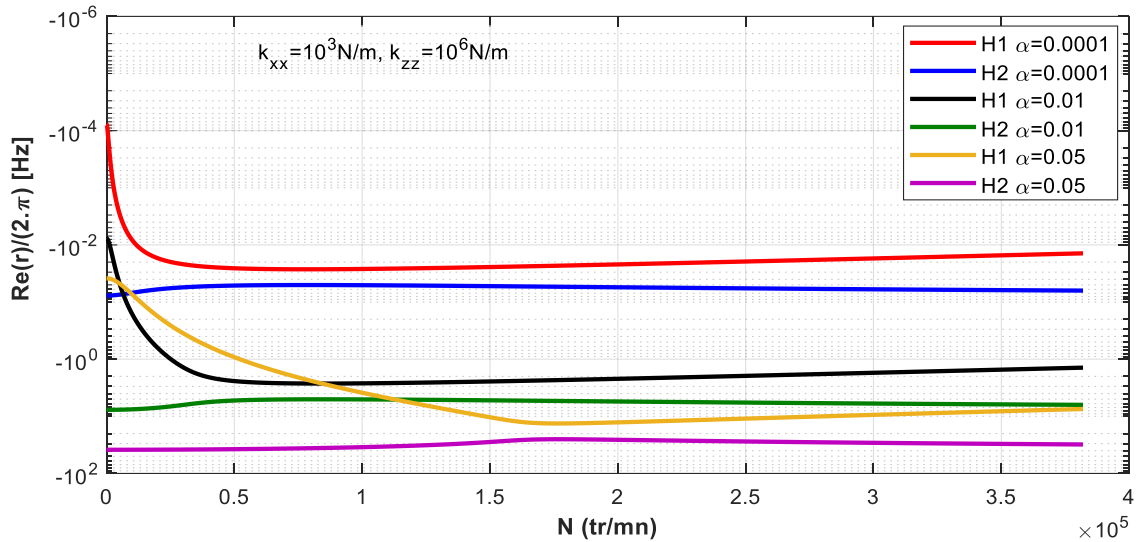


Figure III-12 : Taux de décroissance pour $k_{xx} = 10^3 \text{N/m}$, $k_{zz} = 10^6 \text{N/m}$ et différentes valeurs de α

Les figures (III-11) et (III-12) représentent la variation du taux de décroissance H qui est la partie réelle de la fréquence complexe, on constate que le taux de décroissance varie avec l'augmentation du facteur d'amortissement α et que toutes les valeurs du taux de décroissances sont négatives qui caractérisent un mouvement qui diminue dans le temps, d'où le système est stable.

Réponse aux forces d'excitations :

L'étude de la solution particulière avec second membre :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + C_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = e\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + C_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = e\Omega^2\cos\Omega t \end{cases}$$

Comme le système est amorti, les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\begin{cases} q_1(t) = A_1\sin\Omega t + B_1\cos\Omega t \\ q_2(t) = A_2\sin\Omega t + B_2\cos\Omega t \end{cases}$$

L'application de ces expressions dans l'équation du mouvement donne un ensemble d'équations linéaires, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -C_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ C_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega^2 & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 & -C_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & C_2\Omega & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ e\Omega^2 \end{bmatrix}$$

Pour une valeur donnée de Ω , la résolution numérique de ce système d'équation donne :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -C_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ C_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega^2 & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 & -C_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & C_2\Omega & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ e\Omega^2 \end{bmatrix}$$

La résolution de cette équation se fait à partir de :

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \\ Q_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \end{cases}$$

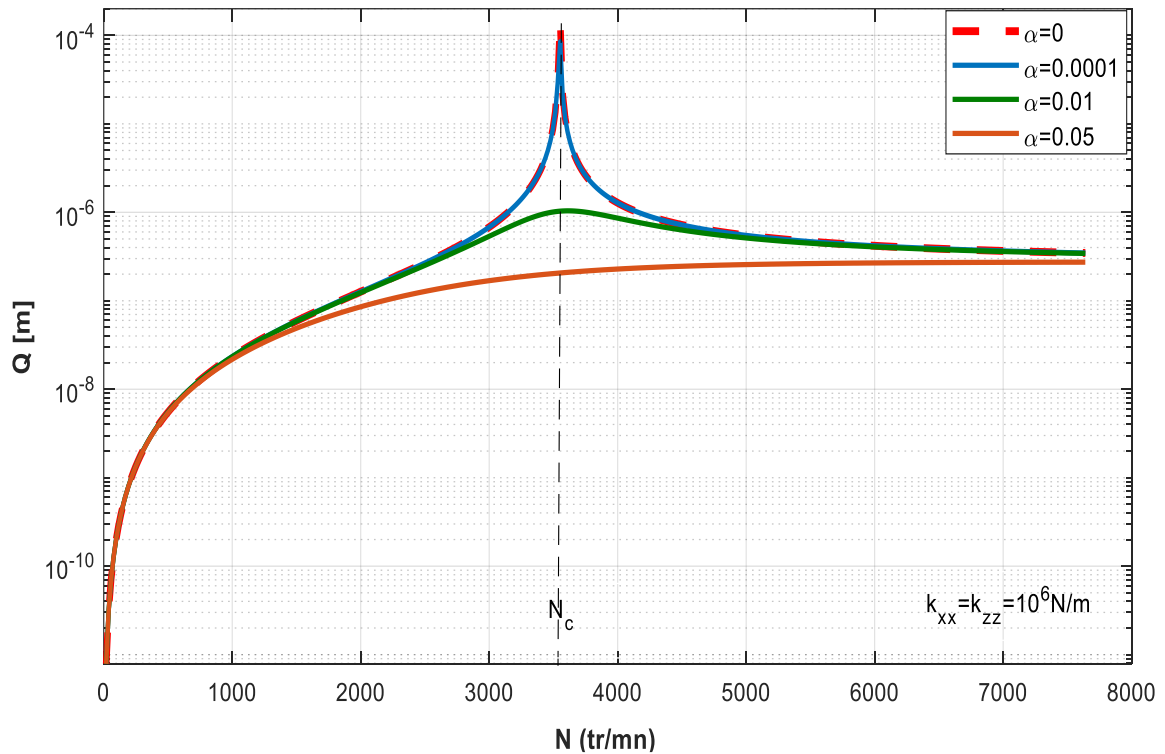


Figure III-13 : Amplitude de la réponse au balourd ($Q_1 = Q_2$) pour $k_{xx} = k_{zz} = 10^6$ N/m. $N_c = 3555$ N/m

La figure (III-13) représente l'amplitude de la réponse due au balourd en fonction de la vitesse de rotation N pour $k_{xx} = k_{zz} = 10^6 \text{N/m}$ et pour différentes valeurs de α . On peut voir que pour une valeur nulle du facteur d'amortissement α un pic correspondant à la vitesse critique, cette dernière diminue avec l'augmentation de α jusqu'à la disparition totale pour $\alpha = 0.05$.

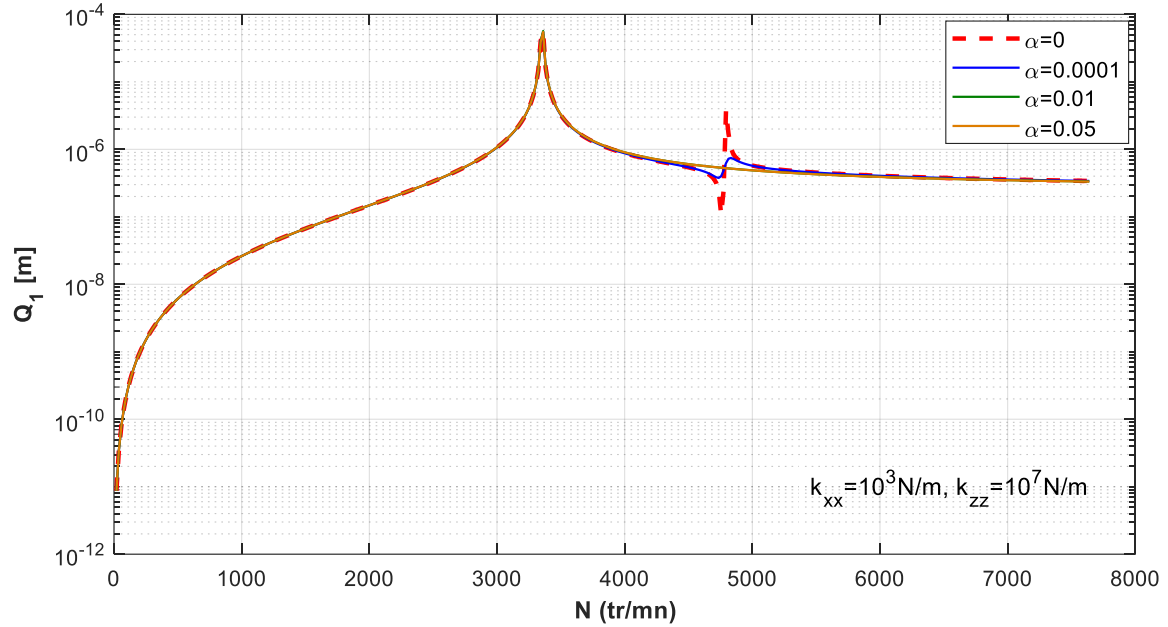


Figure III-14 : Amplitude de la réponse au balourd (Q_1) pour $k_{xx} = 10^3 \text{N/m}$, $k_{zz} = 10^7 \text{N/m}$ et différentes valeurs de α . $N_{c1} = 3361 \text{N/m}$, $N_{c2} = 4840 \text{N/m}$

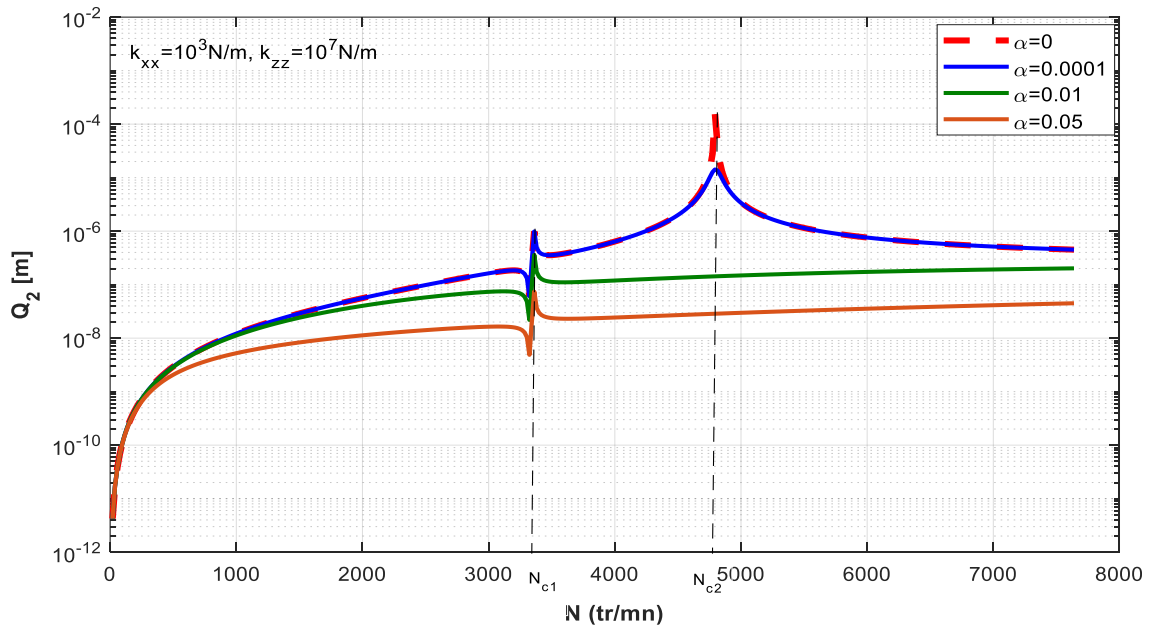


Figure III-15 : Amplitude de la réponse au balourd (Q_2) pour $k_{xx} = 10^3 \text{N/m}$, $k_{zz} = 10^7 \text{N/m}$ et différentes valeurs de α . $N_{c1} = 3361 \text{N/m}$, $N_{c2} = 4840 \text{N/m}$

Les figures (III-14) et (III-15) représentent l'amplitude de la réponse due au balourd en fonction de la vitesse de rotation N pour différentes valeurs de α . Sur ses figures on remarque que pour une valeur de $\alpha = 0$ deux pics correspondants aux vitesses critiques $N_{c1} = \dots$ et $N_{c2} = \dots$ et que ses vitesses sont les mêmes pour les amplitudes Q_1 et Q_2 , et pour chaque α plus important on remarque la diminution des amplitudes des pics correspondants aux vitesses critiques.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

En conclusion, après avoir analysé les équations du mouvement d'un rotor (amorti et non amorti) et leurs conséquences sur la stabilité de ces rotors, nous pouvons voir que l'amortissement du palier hydrodynamique ont un impact important sur la stabilité du système.

De plus, l'étude a également fourni des informations sur le comportement dynamique et les fréquences propres du rotor, ainsi que sur la vitesse critique et la réponse aux forces d'excitation due au balourd.

L'amortissement représente la capacité d'un système à limiter l'amplitude de réponse à des excitations proches des fréquences propres. L'obtention d'amortissements importants est l'une des principales difficultés de la dynamique des rotors.

Dans le travail présenté ici, nous avons abordé l'étude des rotors par leur modélisation analytique et numérique, et aussi les effets des conditions aux limites sur les fréquences naturelles et les réponses aux forces d'excitation.

Les problèmes vibratoires des machines tournantes représentent un enjeu majeur dans l'industrie d'aujourd'hui, d'où il est nécessaire de comprendre et prédire le comportement vibratoire pour optimiser le comportement dynamique, et éviter les réponses de fortes amplitudes qui mènent vers la destruction parfois.

On a développé les équations du mouvement dans ce travail, la modélisation a été effectuée à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. L'étude de la stabilité du rotor se fait avec l'étude de la réponse aux forces d'excitation qui nous permet de déterminer précisément les valeurs des vitesses critiques pour lesquelles l'instabilité apparaît.

Un rotor non amorti est toujours stable, tandis qu'il peut être instable si le rotor est amorti.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] G. Genta, ‘ Dynamic of rotating systems ’, Mechanical Engineering series, Edition Springer, 2005
- [2] Vance, J.M., ‘ Rotordynamics of Turbomachinery ’, John Wiley & Sons, New York, 1988
- [3] B. L. Newkirk, Shaft whipping, General Electric Review, Vol. 27, 169-178, 1924
- [4] A. L. Kimball, Internal friction theory of shaft whirling. Gen. Electric Rev., 27 (4), 244 – 251, 1924.
- [5] W. Campbell, ‘The Protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration’, Trans. ASME, Vol. 46, 31 – 160, 1924.
- [6] Palmgren Miner, ‘ Cumulatif damage in fatigue ’, journal of applied mechanics, Vol. 67, 159-164, 1945.
- [7] A. Tondl, ‘Some problems of rotor dynamics’, London, Champman and Hall p 433, 1965.
- [8] Lalanne, & Ferraris, ‘ Rotordynamics Prediction in Engineering ’, John Wiley & Sons Inc: Chichester, 1998.
- [9] Edward Routh, ‘ A treatise on the stability of a given state of motion ’, MacMillan, 1877.

Etude de l'effet de l'amortissement sur une réponse vibratoire des rotors

Résumé

Dans ce travail, on a exploré le comportement dynamique en flexion d'un rotor amorti et non amorti pour examiner l'impact de l'amortissement et de la rigidité du palier hydrodynamique sur la stabilité du mouvement de flexion du rotor. La méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange sont utilisées pour déterminer les caractéristiques des éléments du rotor, tandis que l'application numérique s'est faite via le programme MATLAB.

Les résultats sont présentés sous forme de diagramme de Campbell et réponse au balourd avec quoi on peut évaluer les effets de la rigidité et de l'amortissement sur la stabilité du rotor.

Mots clés : Comportement dynamique (1) _Diagramme de Campbell (2)_ Stabilité du rotor(3).

Abstract

In this work, the dynamic behavior in bending of a damped and undamped rotor was explored to examine the impact of damping and stiffness of the hydrodynamic bearing on the stability of the rotor's bending motion. The Rayleigh-Ritz method and Lagrange equations were used to determine the characteristics of the rotor elements, while numerical application was done through the MATLAB program.

The results are presented in the form of a diagram of Campbell and whirl response with which we can evaluate the effects of stiffness and damping on the stability of the rotor.

Keywords : Dynamic behavior (1) _ Diagram of Campbell (2) _ Stability of the rotor (3).