

Mémoire de fin de cycle

En vue d'obtention du diplôme de Master en Génie Civil
Option : Structures

Thème

Etude du phénomène de flambement des barres en acier

Présenté par :

MEDDOUR Lina

KINZI Thiziri

Encadré par :

D^r BANOUNE Brahim

Membres de jury :

M^r KERNOU Nassim

M^{me} OUARI Nadia

Année universitaire : 2022/2023

Remerciement

Avant tout, nous tenons à remercier le dieu le plus puissant qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à **M^r Banoune Brahim** pour la qualité de son encadrement, sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de ce travail.

De plus, nous remercions nos chers parents ainsi nos familles qui nous ont toujours encouragés et soutenu durant toutes nos années d'étude.

Nous tenons à remercier les membres de jury pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions l'ensemble des enseignants du département de Génie Civil.

Enfin, nous tenons à remercier nos camarades avec lesquels on a eu le plaisir de travailler, ainsi que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

♥ mes chers parents pour leur soutien et sacrifices
tout au long de ma carrière d'études ♥

Ma chère sœur YASMINE.

Mon chère frère AMINE.

Ma binôme THIZIRI avec qui j'ai partagé de bons et
inoubliables moments durant la préparation de ce
projet ainsi que sa famille

Mon encadrant M^r BANOUN.

Mes chères tantes et cousines

Je tiens à remercier chaleureusement ma tante
SABRINA pour son temps et son soutien

Mes amies MERIEM, AMEL

♥ *Toute la promotion de master génie civil*
2022 /2023 ♥

LINA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mon cher père qui a tant sacrifié pour que j'arrive à ce niveau.

Ma chère mère.

Mes chères sœurs : « Samia, Samira, Medina, Wahiba, Thilleli, Maya » pour leurs soutien et encouragements.

Mes chers frères : « Nadir, Tarik, Gaya ».

Mes chers neveux : « Dylane, Brayane, Kouceila, Ilane, Mehdi, Dina, Kinda, Meriem ».

Mon encadrant *M^r* BANOUNE.

Ma chère binôme Lina et toute sa famille

A toute la promo de Master Génie Civil 2022/2023.

Thiziri

Résumé

L'instabilité est un risque de passage d'un état stable à un état instable des structures, en construction métallique on distingue trois phénomènes d'instabilité le voilement, le diversement et le flambement.

Dans ce projet de fin d'étude, on va étudier le phénomène du flambement des barres en acier sous différents aspects. Premièrement une étude théorique selon la théorie d'Euler qui sert à déterminer l'effort normal critique théorique que peut supporter une barre comprimée, quel que soit ses conditions d'appuis, afin de déterminer les paramètres qui influent sur le flambement (la longueur de la barre et les conditions d'appuis). Ensuite une étude expérimentale à l'aide de l'appareil WP120, qui nous a aidé à bien comprendre la différence entre l'étude théorique qui considère que la barre est parfaite sans aucun défaut et l'étude expérimentale plus proche du cas réel et qui prend en compte les différents défauts existants (défauts de rectitude, défauts de centrage ...etc.). La troisième étude est une étude règlementaire avec laquelle on a constaté que l'Eurocode3 fait entrer des coefficients de sécurité dans les calculs ce qui fait réduire l'effort normal critique. Finalement, une étude numérique en utilisant la méthode des éléments finis avec le logiciel ETABS et qui nous a permis de déterminer l'effort normal critique numérique et la flèche maximale qui lui correspond.

Abstract

Instability is a risk of passage from a stable state to an unstable state of the structures. In metal construction, there are three phenomena of instability: veiling, diversion and buckling.

In this project, we will study the phenomenon of buckling of steel bars in different aspects, first of all, a theoretical study according to Euler's theory which serves to determine the theoretical critical normal force that can support a compressed bar regardless of its enhancing conditions, in order to determine the parameters that include buckling (the length of the bar and enhancing conditions). Then, an experimental study using the WP120 device, which helped us to understand the difference between the theoretical study which considers that the bar is perfect with no defects and experimental study closer to the real case and which takes into account the various existing defects (straightness defects, centering defects, etc.). The third study, is a regulatory study with which it was found that Eurocode 3 includes safety coefficients in the calculations, which reduces the normal critical effort. Finally, a numerical study using the finite element method with ETABS software, which allowed us to determine the numerical critical normal force and the maximum displacement which corresponds to it.

Liste des figures

➤ Chapitre 01 : généralités

Figure I-1 : Diagramme contrainte-déformation pour l'essai de traction	5
Figure I-2 : Essai de résilience.	6
Figure I-3 : schématisation du flambage	9
Figure I-4 : L'effondrement du pont du Québec 1907	10
Figure I-5 : poutre bi- articulée	11

➤ Chapitre 2 : Aspect Théorique du Flambement

Figure II-1 : poutre bi-articulé	20
Figure II-2 : Evolution de la contrainte normale en fonction de l'élancement Contrainte critique d'Euler.....	22
Figure II-3 : poutre encastree-articulée	23
Figure II-4 : poutre encastree- libre	25
Figure II-5 : poutre bi-encastree	27
Figure II-6 : poutre sous charge concentrée Q	30
Figure II-7 : défaut de rectitude	34
Figure II-8 : défaut de centrage.....	37

➤ Chapitre 3 : Aspect expérimental du flambement

Figure III-1 : Appareil WP120.....	44
Figure III-2 : Dispositif de l'appareil WP120	45
Figure III-3 : Position de l'appareil	45
Figure III-4 : Les encoches en V	46
Figure III-5 : Placement de la barre	46
Figure III-6 : Réglage du comparateur	46
Figure III-7 : Mise en charge	46
Figure III-8 : Barre bi-articulée	48
Figure III-9 : Courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 700mm.....	49

Liste des figures

Figure III-10 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 650mm.....	50
Figure III-11 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 600mm.....	52
Figure III-12 : Barre encastrée-articulée	53
Figure III-13 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre encastrée-articulée de 650mm.....	55
Figure III-14 : Barre bi-encastrée	56
Figure III-15 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-encastrée de 650mm.....	58
Figure III-16 : Barre bi-articulée avec une charge transversale	59
Figure III-17 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 5N	60
Figure III-18 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 10N	61
Figure III-19 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 15N	62
Figure III-20 : Courbes de flambement flexion pour les différentes charges transversales ...	62
Figure III-21 : Courbe de flambement et facteur d'imperfection	64

➤ Chapitre 4 : simulation numérique

Figure IV.1 : Grid suivant l'axe z	68
Figure IV.2 : Grid suivant l'axe x et y	68
Figure IV.3 : Caractéristique du matériau	69
Figure IV.4 : Contrainte limite élastique du matériau.....	69
Figure IV.5 : Section de la barre.....	70
Figure IV.6 : Application de la charge	71
Figure IV.7 : Définition de la charge appliquée	71
Figure IV.8 : courbe de la charge critique numérique en fonction de coefficient de flambement pour les différentes longueurs.	73
Figure IV.9 : Courbe de la charge critique numérique en fonction du moment d'inertie pour les différentes conditions d'appuis	74

Liste des figures

Figure IV.10 : la courbe de la charge critique numérique en fonction de coefficient de flambement k pour les différents matériaux.....	76
---	-----------

Liste des tableaux

➤ Chapitre I : généralité

Tableau I-1 : Coefficient de la longueur de flambement	14
Tableau I-2 : Influence des liaisons aux appuis	14
Tableau I-3 : Elancement limite Euler	15

➤ Chapitre II : Aspect Théorique du Flambement

Tableau II-1 : la flèche maximale pour une charge transversal (ponctuel et repartie)	33
---	-----------

➤ Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

Tableau III-1 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 700mm	48
Tableau III-2 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 6500mm	50
Tableau III-3 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 600mm	51
Tableau III-4 : Tableau de mesure d'une barre encastree-articulée de 650mm	54
Tableau III-5 : Tableau de mesure d'une barre bi-encastree de 650mm	56
Tableau III-6 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 5N	59
Tableau III-7 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 10N	60
Tableau III-8 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 15N	61
Tableau III-9 : Charge critique réglementaire selon l'Eurocode 3	65

➤ Chapitre IV : simulation numérique

Tableau IV.1 : Charges critiques numériques selon les différentes conditions d'appuis et longueurs de barres	72
Tableau IV.2 : Charges critiques numériques en fonction du moment d'inertie pour différentes conditions d'appuis.	74
Tableau IV.3 : Charges critiques numériques selon les différentes conditions d'appuis pour trois matériaux différents.	75
Tableau IV.4 : Charges critiques selon la longueur et les conditions d'appuis	76

Symboles et notations

N_c : effort normale critique

N : effort normal de compression

C : carbone

Δl : allongement

f_y : la limite d'élasticité

f_u : la limite de rupture

ν : Coefficient de poisson

E : module de Young (module d'élasticité)

H : énergie potentiel

M : masse

g : gravité

ε_u : l'allongement relatif ultime

$M_z(x)$: moment de flexion

y : fléchissement latérale (la déformée de la poutre)

y' : la première dérivée de la déformée

y'' : la deuxième dérivée de la déformée

I_G : moment d'inertie de la poutre

L_0 : la longueur de la poutre

L_f : la longueur de flambement de la poutre

y_{max} : la flèche maximal de la poutre

A : la section de la poutre

σ_c : la contrainte critique

K_f : coefficient de longueur de flambement

Symboles et notations

λ : l'élancement de la poutre

$\bar{\lambda}$: Elancement réduit

$\lambda_{lim\ euler}$: l'élancement limite d'Euler

$\sigma_{crit\ Rankine}$: contrainte critique de Rankine

$N_{crit\ Rankine}$: effort critique de Rankine

S : coefficient de sécurité

F : charge axiale

σ_e : contrainte maximale caractérisant état de ruine

σ_t : contrainte proposer par Dutheil

σ : contrainte normale totale

R_{cf} : Résistance à la compression par flambement

i : rayon de giration

N_K :Effort critique théorique (Euler)

Q : charge transversale concentrée

P : réaction transversale

q : charge transversale répartie

e : excentricité

σ_e : contrainte maximale caractérisant état de ruine

V : effort tranchant

G : module d'élasticité transversale de l'acier

N_K' : charge critique réduite

α : Coefficient d'imperfection par rapport à la section étudiée

N_{cr} : effort critique déterminer par expérimentale

N_R :Effort critique réglementaire

N_{num} : effort critique numérique

Table des matières

➤ Introduction générale	1
➤ Chapitre I : Généralités	
I. Introduction.....	3
II. Le matériau constituant des barres	3
II.1. Le matériau acier	3
II.2. Fabrication de l'acier	3
II.3. Classification selon la teneur en carbone	3
II.4. Classification selon la teneur en éléments d'alliages	4
II.5. Caractéristiques des aciers de construction	4
II.5.1. Propriétés physiques	4
II.5.2. Propriétés chimiques	4
II.5.3. Propriétés mécaniques.....	5
II.5.3.1. L'essai de traction	5
II.5.3.2. L'essai de dureté	6
II.5.3.3. L'essai de résilience	6
II.5.3.4. L'essai de fatigue	7
II.6. Nuances normalisées d'aciers	7
II.7. Aspect réglementaire des calculs	7
II.8. Les classes de sections selon L'Eurocode3.....	8
III. Notion de stabilité et d'instabilité	8
IV. Le flambement	9
IV.1. Définition du flambement.....	9
IV.2. Les dangers du flambement.....	10
IV.3. Les lois de résistance au flambement	10
IV.3.1. Théorie d'Euler	10
IV.3.1.1. Principe de la théorie d'Euler	10
IV.3.1.2. Charge critique d'Euler	11
IV.3.1.3. La contrainte critique d'Euler	13
IV.3.1.4. Le coefficient de la longueur de flambement	13
IV.3.1.5. La longueur de flambement et les liaisons aux appuis	14

Table des matières

IV.3.1.6. Conditions d'utilisation de la formule d'Euler	14
IV.3.2. Méthode de Rankine	15
IV.3.3. Méthode de Dutheil	16
IV.3.3.1. Principe	16
IV.3.3.2. Calcul de la résistance	16
IV.3.4. Méthode de Tetmayer	17
➤ Chapitre II : Aspect théorique du flambement	
I. Introduction.....	19
II. Les éléments qui influent sur le flambement	19
II.1. Le moment d'inertie I	19
II.2. Le module de Young E	19
II.3. La longueur du flambement L_f	20
III. Flambement simple	20
III.1. Poutre bi-articulée	20
III.2. Poutre articulée en tête et encastrée en pied	23
III.3. Poutre encastrée en pied et libre en tête	25
III.4. Poutre bi-encastrée	27
IV. Flambement flexion	29
IV.1. Sous charge concentrée Q	30
IV.2. Sous charge uniformément répartie q	33
V. Prise en compte des défauts	34
V.1. Prise en compte de défauts de rectitude	34
V.2. Prise en compte des défauts de centrage	37
VI. Influence de l'effort tranchant sur le flambement des barres	39
➤ Chapitre III : Aspect expérimental du flambement	
I. Introduction	43
II. Etude expérimentale	43
II.1. Description de l'appareil	44
II.2. Mode opératoire	45
II.3. Choix du matériau	47

Table des matières

II.3.1. Dimensions des éprouvettes	47
III. Partie pratique	48
III.1. Flambement simple	48
III.1.1. Barre bi-articulée.....	48
III.1.2. Barre encastrée-articulée	53
III.1.3. Barre bi-encastrée	56
III.2. Flambement Flexion.....	59
III.3. Interprétation des résultats	63
IV. Aspect réglementaire du Flambement	63
V. Conclusion	66
➤ Chapitre IV : Simulation numérique	
I. Introduction	68
II. Les étapes de modélisation d'une barre	68
II.1. Initialisation du modèle	68
II.2. Définition des paramètres du modèle	69
II.3. Dessin du modèle	70
II.4. Assigner les conditions aux appuis	70
II.5. Application du chargement	70
II.6. Maillage de la section	71
II.7. Exécuter l'analyse	71
III. Les éléments qui influent sur la charge critique	72
III.1. Les conditions d'appuis et longueur de la barre	72
III.2. Le moment d'inertie de la barre	73
III.3. Le module de Young (matériau de la barre)	75
IV. Récapitulatif des résultats obtenue des barres étudier sous les différentes aspects théorique, expérimental, réglementaire et numérique.....	76
V. Conclusion	77
➤ Conclusion générale	79

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

La construction métallique est un domaine de construction du génie civil, qui s'intéresse à la réalisation d'ouvrages en métal plus précisément en acier, qui est un alliage métallique constitué essentiellement du fer et de carbone.

Connue par sa légèreté, facilité de conception et ductilité, une structure métallique est tout de même exposée à subir des risques d'instabilités. C'est pour cela qu'on doit assurer la stabilité au niveau de l'ensemble de la structure mais également au niveau de chacun des éléments qui la constituent.

Les composants longs et étroits tels que les barres, poutres, tubulures, sont souvent soumis à une contrainte de compression sous l'effet de forces s'exerçant parallèlement à leur axe longitudinal. Sous l'effet de forces de compression critiques, il est possible que de tels composants perdent en stabilité et soient déportés latéralement. Cette perte de stabilité brutale et continue est désignée par le terme technique de flambement. Dans ce cas, la défaillance ne concerne pas le matériau mais la forme du composant, cette instabilité se manifeste d'autant plus que l'élancement est important.

L'objectif de notre travail est d'étudier le phénomène de flambement des barres en acier.

Notre travail est composé de quatre chapitres : Le premier sera consacré aux généralités dans lequel on va définir le phénomène de flambement, ses dangers et les différentes lois de résistance liées à cette instabilité, suivi d'un deuxième chapitre qui va traiter l'aspect théorique du flambement simple et flambement flexion pour différentes conditions d'appuis et charges appliquées. Le troisième chapitre sera réservé à l'aspect expérimental du flambement simple et flambement flexion pour différentes conditions d'appuis, longueurs et charges appliquées (les essais seront réalisés au laboratoire de RDM de l'université de Bejaia « département génie civil »), et enfin un dernier chapitre qui va traiter l'aspect numérique du flambement avec le logiciel ETABS.

Enfin, on va terminer par une conclusion générale qui va synthétiser notre travail.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

I. Introduction

Les barres comprimées sont des éléments très répandus dans les structures de génie civil, bien que la barre constitue l'élément le plus simple, son étude permet d'obtenir des résultats d'une grande importance pratique qui peuvent servir de base pour le calcul des structures les plus complexes. [1]

Dans le problème du flambement, le système est stable si l'effort de compression externe N est assez petit et devient instable quand N est grand si l'élanement est suffisamment grand, l'instabilité survient sous l'effort critique N_c .

II. Le matériau constituant des barres

II.1. Le matériau acier

Dans notre étude, le matériau ciblé est l'acier qui est un alliage métallique ferreux, il est d'ailleurs principalement composé de fer, l'élément additionnel étant le carbone, qui n'est présent qu'à l'état de traces infimes. Selon les aciers, la teneur en carbone est comprise entre environ 0,005 % et 1,5 % en masse. Elle atteint très rarement 2 %. [2]

II.2. Fabrication de l'acier

L'acier est généralement obtenu par une opération en deux phases :

- **Première phase** : L'introduction et la combustion de minerai de fer, de coke et de castine dans un haut fourneau, permet d'obtenir de la fonte liquide (matériau à plus de 2 % de teneur en carbone)
- **Seconde phase** : Il est procédé à la conversion de cette fonte liquide en acier à une température de 1500°C environ par insufflation d'oxygène qui permet de capter Carbone en excès. L'acier obtenu possède une teneur en carbone ne dépassant pas 1%. Pour cela, il existe plusieurs procédés de conversion (THOMAS, MARTIN, etc.). [2]

II.3. Classification selon la teneur en carbone

Suivant leur teneur en carbone, les métaux ferreux se subdivisent en fonte et en acier :

- **La Fonte** : alliage fer + carbone dont la teneur en carbone C : $2\% \leq C \leq 4.3\%$.
- **L'acier** : $C \leq 2\%$.

Contrairement à la fonte qui est fragile et difficilement soudable, l'acier possède un comportement élasto-plastique avec un large palier plastique et se distingue par ses hautes

qualités technologiques (possibilités de soudage et d'usinage). Ainsi selon sa destination, on distingue :

1. **Les aciers de construction** : $0.02 \% \leq C \leq 0.85 \%$: cette catégorie possède une bonne plasticité (large palier plastique), une bonne soudabilité ainsi qu'une bonne ductilité (pas de ruptures brutales ou bien fragiles).
2. **Les aciers à outils** : $0.65 \% \leq C \leq 1.4 \%$ ces aciers possèdent une bonne dureté mais sont plus fragiles. [2]

II.4. Classification selon la teneur en éléments d'alliages

Selon les quantités additionnées d'éléments, on distingue :

- **Les aciers faiblement alliés** : contenant jusqu'à 2 % d'éléments d'alliage.
- **Les aciers moyennement alliés** : de 2 à 10 % d'éléments.
- **Les aciers fortement alliés** : contenant plus de 10 %. [2]

II.5. Caractéristiques des aciers de construction

II.5.1. Propriétés physiques

Les propriétés physiques sont caractérisées par la couleur, le poids spécifique, la température de fusion, le coefficient de dilatation thermique, la chaleur massique, la conductibilité thermique, électriques, acoustique, etc.

Le poids spécifique ou volumique de l'acier est $\rho_{acier} = 7850 \text{ kg} / \text{m}^3$.

Le coefficient de dilatation thermique de l'acier $\alpha = 11.10^{-6}$ (à 20°C).

La température de fusion comprise entre 1300 et 1550 °C La conductibilité thermique de l'acier $k = 40$ à $45 \text{ Kcal} / (\text{m h } ^\circ\text{C})$.

La conductibilité thermique des alliages légers $k = 175 \text{ Kcal} / (\text{m h } ^\circ\text{C})$. [2]

II.5.2. Propriétés chimiques

Les propriétés chimiques de l'acier sont déterminées par sa composition chimique et par sa technologie de fabrication. En vue de réduire le poids spécifique et d'améliorer la résistance à la corrosion, on utilise les alliages d'aluminium. L'introduction de certains éléments tels que le Manganèse, le Silicium, le cuivre, le Nickel, le Chrome et l'Aluminium peuvent augmenter la résistance mécanique sans trop diminuer de sa plasticité. Pour sa part, le carbone améliore la

résistance mécanique mais nuit à la plasticité et à la soudabilité. L'exemple de la fonte en est très significatif. Par ailleurs, les impuretés présentes dans l'acier exercent une influence négative sur ses qualités. En effet, le soufre provoque la fragilité à haute température. Par contre, le phosphore provoque la fragilité à basse température. Cela étant dit, la teneur en impuretés doit être strictement limitée. [2]

II.5.3. Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques de l'acier sont déterminées par les essais de résistance aux sollicitations extérieures, en particulier :

II.5.3.1. L'essai de traction

Il est pratiqué sur une éprouvette cylindrique, soumise à un effort de traction progressif, de 0 à la rupture

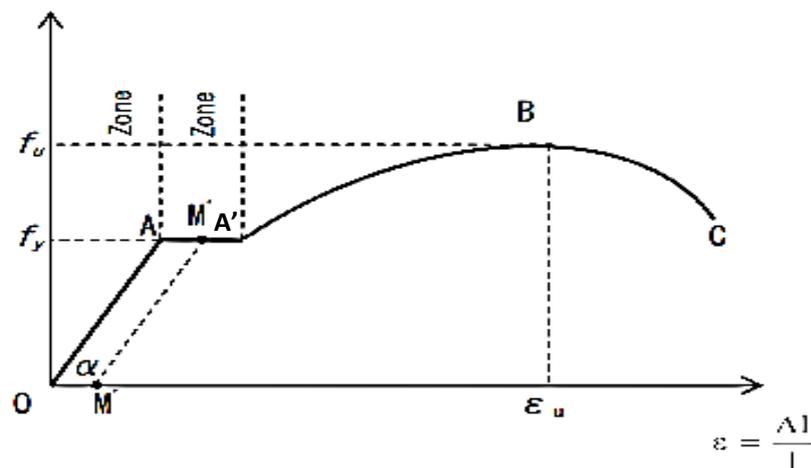


Figure I-1 : Diagramme contrainte-déformation pour l'essai de traction. [3]

Le diagramme se décompose en 04 phases

0A : Rectiligne : c'est la zone élastique qui est réversible, si on supprime l'effort de traction ($\frac{\Delta l}{l}=0$).

AA' : Palier horizontal, qui traduit un allongement sous charges constante (zone plastique).

A'B : La charge croît à nouveau avec un allongement jusqu'à B.

BC : L'allongement continu, bien que la charge soit croissante, jusqu'au point C qui correspond à la rupture.

Les propriétés mécaniques suivantes peuvent être déduites des résultats de l'essai de traction :

- Le module d'élasticité longitudinale (module de Young) E : pente de la droite dans la phase élastique.
- La limite d'élasticité f_y : contrainte obtenue au niveau de la rupture de pente à la fin de la phase élastique (palier plastique).
- La limite de rupture f_u (notée f_t pour l'acier de béton armé) : contrainte maximale obtenue lors de l'essai.
- L'allongement à la rupture A : déformation permanente obtenue à la suite de l'essai. [3]

II.5.3.2. L'essai de dureté

Donne la résistance à l'abrasion. Cet essai n'est nécessaire qu'en cas de présence de forces tangentielles de frottement de forte intensité (par exemple : cas de forces de freinages de forte intensité des galets sur rail des ponts roulants). [2]

II.5.3.3. L'essai de résilience

Qui est un essai qualitatif qui permet de donner la classe de qualité de l'acier utilisé (voir norme EN 10 025) et d'en fixer son prix. Par ailleurs, cet essai permet de donner une meilleure appréciation sur la ductilité du matériau utilisé selon trois situations :

1°) situation de chargement brusque et de forte intensité : choc ou séisme,

2°) situation de concentration de contraintes : cas de changement brusque de section ou au voisinage des trous de perçage,

3°) situation de hautes et basses températures : auxquelles certaines impuretés (soufre et phosphore) qui en cas de taux de présence élevé, influenceront considérablement sur la fragilité du matériau. [2]

H : énergie potentielle.

Donc: $E = mgH$

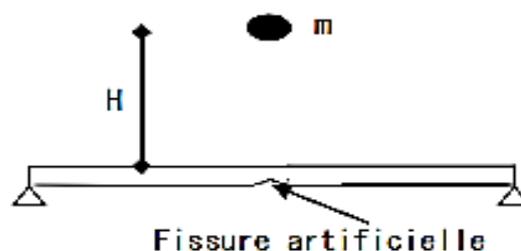


Figure I-2 : Essai de résilience. [3]

II.5.3.4. L'essai de fatigue

Lorsqu'on soumet un matériau à des efforts répétés, alternés et variables, il peut se fissurer et se rompre alors que le niveau de sollicitations est inférieur à la limite de rupture à la traction. Cette perte de résistance qui se produit au cours du temps est appelée « fatigue ». [2]

II.6. Nuances normalisées d'aciers

Au niveau européen, les divers aciers de construction sont réglementés par la norme européenne EN 10 025 qui concerne les aciers non alliés et laminés à chaud et destinés à la fabrication d'éléments de construction métallique. Cette norme définit les nuances d'acier qui correspondent à leurs caractéristiques mécaniques.

Elle définit également pour une nuance donnée les classes de qualité (JR, JO, J2, G3) qui se distinguent entre elles par leur ductilité et leur soudabilité

En construction, il existe trois nuances essentielles d'acier à savoir :

- l'acier de nuance S235 ($f_y = 235$ MPa) qui est de loin la plus utilisée en Charpente métallique.
- l'acier de nuance S275 ($f_y = 275$ MPa) qui est rarement utilisée.
- l'acier de nuance S355 ($f_y = 355$ MPa) très utilisé dans les ouvrages d'art.

Ces trois nuances d'acier satisfont aux exigences de calcul en plasticité à savoir :

- La contrainte ultime f_u doit dépasser d'au moins 20 % la limite élastique : $f_u \geq 1.2 * f_y$
- L'allongement relatif ultime doit être supérieur à 15 % : $\epsilon_u \geq 15 \%$
- L'allongement relatif ultime (à la rupture) doit être supérieur à 20 fois l'allongement relatif élastique $\epsilon_u \geq 20 * \epsilon_y$. [2]

II.7. Aspect réglementaire des calculs

En substitution aux anciennes règles CM66 et additif80, le CCM97 aujourd'hui en vigueur dans notre pays, constitue le premier règlement algérien de conception et de calcul de structures métalliques. La disposition des sections du CCM97 est fondée sur des critères de flambement etc., plutôt que sur les types d'éléments individuels, comme les poutres, les poteaux, etc. Par ailleurs, il est important de citer le DTR -BC 2-4.10 relatif aux structures mixtes acier-béton. Quant à l'Eurocode 03, celui-ci a été élaboré dans le but d'harmoniser la conception des constructions métalliques au sein de l'union européenne.

Il est à signaler qu'il existe neuf Eurocodes structuraux. Ceux en relation avec les structures en acier sont l'EC1, l'EC3 et l'EC4. L'Eurocode 1 (EC1) traite les actions. Il concerne

principalement les charges appliquées. L'Eurocode 3 (EC3) et l'Eurocode 4 (EC4) traitent les structures en acier et les structures mixtes acier-béton respectivement. [2]

II.8. Les classes de sections selon L'Eurocode3

L'EC3 définit quatre classes de sections transversales. La classe à laquelle appartient une section transversale particulière dépend de l'élançement de chaque paroi et de la distribution des contraintes de compression. [2]

- **Les sections transversales de Classe 1**

Sont celles qui peuvent former une rotule plastique, et possèdent une grande capacité de rotation laquelle est exigée pour l'analyse plastique et ce, en donnant lieu à des redistributions favorables de moments fléchissant dans la structure (phénomène d'adaptation plastique).

- **Les sections transversales de Classe 2**

Sont celles qui, bien qu'elles soient capables de former une rotule plastique, ont une capacité de rotation limitée et ne conviennent donc pas pour les structures calculées par analyse plastique. En effet, ces sections ne peuvent permettre des redistributions favorables à cause de l'apparition du voilement local « immédiatement » après la formation de cette rotule.

- **Les sections transversales de Classe 3**

Sont celles où la contrainte calculée dans la fibre comprimée extrême peut atteindre la limite d'élasticité mais où le voilement local empêche le développement du moment résistant plastique. En effet, le voilement local apparaît « immédiatement » après la plastification des fibres extrêmes.

- **Les sections transversales de Classe 4**

Sont celles où le voilement local limite le moment résistant (ou la résistance à la compression pour les éléments sous charges normales). Ce voilement apparaît bien avant la plastification des fibres extrêmes.

III. Notion de stabilité et d'instabilité

La stabilité est la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est légèrement perturbé. Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on place les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une

faible vitesse initiale, les déplacements des différents ponts du système restent, pendant le déplacement, contenus dans les limites imposées faibles. [4]

L'instabilité est un risque de passage d'un état stable à un état instable des structures de géométrie externe, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindrique. On distingue trois (03) phénomènes d'instabilité :

- Le voilement : désigne le phénomène d'instabilité des parois (âme, semelle) d'une section sous l'effet des contraintes normales de compression engendrées par un effort axial de compression et/ou un moment fléchissant.
- Le diversement : désigne le phénomène d'instabilité qui affecte une poutre subissant un moment de flexion.
- Le flambement, qui affecte les barres simplement comprimés (flambement simple) ou comprimées fléchies (flambement flexion) qui est très dangereux. [5]

IV. Le flambement

IV.1. Définition du flambement

Également appelé flambement, le flambage est un phénomène physique relevant des principes de la résistance des matériaux. Lorsqu'une structure est compressée dans le sens de la longueur, elle a tendance à fléchir perpendiculairement à l'axe de la force appliquée, en raison d'un phénomène d'instabilité élastique. Plus la structure (une poutre, par exemple) est longue et étroite, plus elle se plie facilement, mais d'autres facteurs interviennent comme le système d'attache de la structure au niveau des points de compression. [6]

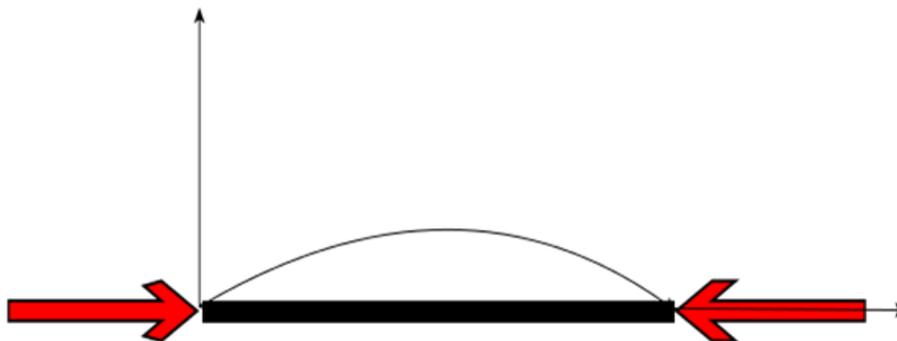


Figure I-3 : schématisation du flambage [7]

IV.2. Les dangers du flambement

Le flambement est l'une des premières causes de ruines des structures parce qu'il affecte essentiellement l'élément porteur principal du bâtiment (poteau). Ce phénomène est la cause principale d'énormes catastrophes comme l'effondrement du pont de Québec (1907, 74 morts)

On peut diminuer le phénomène du flambement en réduisant le rapport d'élanement par l'augmentation des dimensions ou 'en répartissant le matériau de manière différente le long de L'élément. [8]



Figure I-4 : L'effondrement du pont du Québec 1907. [8]

IV.3. Les lois de résistance au flambement

Il existe plusieurs lois du comportement, les plus utilisées sont celles d'Euler, de Rankine, de Tetmayer et la méthode du Dutheil. Certaines sont purement théorique (Euler), les autres tiennent plus au moins compte de l'expérience.

IV.3.1. Théorie d'Euler :

IV.3.1.1. Principe de la théorie d'Euler :

La méthode d'Euler a été la première à exprimer le phénomène du flambement en 1744, c'est une méthode théorique, lorsqu'une tige mince rectiligne soumise à la force verticale N inférieure à la force critique N_c il existe une seule position d'équilibre stable c'est où la tige reste rectiligne sinon si N est supérieur à la force critique N_c en déduit deux (02) positions d'équilibres

existantes , la première c'est la flèche de la tige et la 2^{ème} la tige reste rectiligne mais instable.[9]

IV.3.1.2. Charge critique d'Euler :

La tige bi- articulée est limité par deux point A et B, qui supporte des efforts N en A et B (représenté sur le schéma ci-contre). X et Y sont les coordonnées d'un point courant G de la fibre moyenne

La déformation a une influence sur l'équilibre statique de la tige en provoquant un moment de flexion qui égal :

$$M_Z(x) = -Ny \quad (\text{I.1})$$

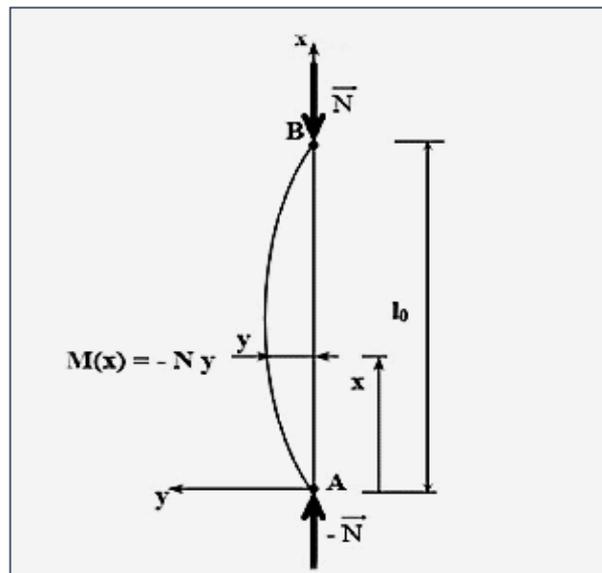


Figure I-5 : poutre bi- articulée. [5]

- On a deux forces exercée sur les extrémités de la poutre selon l'axe (O, X)
- L'axe (O, Y) normale a la poutre
- $y = f(x)$ La déformée de la poutre
- $M_Z(x)$ Le moment de flexion de la tige à l'abscisse x
- $y' = \frac{df(x)}{dx}$ La première dérivée de la déformée
- $y'' = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ La deuxième dérivée de la déformée

La relation entre le moment de flexion et y'' : (équation de la déformée)

$$M_Z(x) = EI_G y'' \quad \text{d'où} \quad EI_G y'' - M_Z(x) = 0$$

$$Ny + EI_G y'' = 0$$

$$y'' + \frac{N}{EI_G} y = 0 \quad (\text{I.2}) \quad \text{Équation différentielle de 2^{ème} ordre}$$

E :Module de plasticité de la tige

I_G :Moment d'inertie

La solution générale de cette équation est de cette forme :

$$f(x)=A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad (\text{I.3})$$

On a:

$$\frac{N}{EI} = \alpha^2 \Rightarrow f''(x) = -\alpha^2 \times f(x)$$

Les conditions aux limites : $f(0) = 0, f(L_0) = 0$

- Pour $f(0) = 0$

$$A=0 \text{ donc } f(x) = B \sin \alpha x$$

- Pour $f(L_0) = 0$

$$B \sin(\alpha L_0) = 0 \quad \text{Donc soit } B=0 \text{ ou } \sin(\alpha L_0) = 0$$

- Si $B=0$, donc la solution d'équation $f(x) = 0$ pour tout x vérifiant $0 < x < L_0$, la fonction f est nulle donc la déformée est $y = 0$ donc la tige rectiligne pas de flambement
- Si $\sin \alpha L_0 = 0$ ce n'est possible que pour $\alpha L_0 = k\pi$ ou k est un entier
- Le cas ou $k=0$ pas de flambage

- Pour $k=1$

$$\alpha L_0 = \pi$$

Avec :

$$\alpha = \frac{\pi}{L_0}$$

Equation de la déformée

$$y(x) = B \times \sin\left(\frac{\pi}{L_0} \times x\right)$$

$$\alpha^2 = \frac{\pi^2}{L_0^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{\pi^2}{L_0^2} = \frac{N}{EI}$$

$$N = \frac{\pi^2 EI_G}{L_0^2} \quad (\text{I.4})$$

Pour la tige bi articulée $L_f = 1 * L_0$ (ce n'est pas toujours le cas).

L_f : la longueur de flambage.

Les cas qui sont possible

- $N < N_C$ La tige est en équilibre stable.
- $N = N_C$ la tige peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche égale à B elle est dite en équilibre neutre. A noter que $B = y_{max}$ est en général petit.
- $N > N_C$ un équilibre instable avec une forte tendance au flambement. [5]

IV.3.1.3. La contrainte critique d'Euler

La force critique N_C correspond à une contrainte critique $\sigma_c = \frac{N_C}{A}$, A c'est la section droite de la tige.

La contrainte est définie par cette formule :

$$\sigma_c = \frac{N_C}{A} = \frac{\pi^2 EI_G}{L_f^2 \cdot A} \quad (\text{I.4})$$

IV.3.1.4. Le coefficient de la longueur de flambement

Coefficient de la longueur autrement dit coefficient de réduction de longueur k_f

Ce coefficient k_f montre par combien il faut multiplier la longueur d'une tige articulée pour que sa charge critique soit égale à celle de la tige de longueur dans de conditions de fixations envisagées. [9]

Donc la longueur de flambement donnée par :

$$L_f = K_f \cdot L_0 \quad (\text{I.5})$$

L_0 : longueur de la tige .

L_f : longueur de flambement.

Le tableau suivant d'écrit le coefficient de la longueur de flambement K_f pour différentes liaisons aux appuis :

Tableau I-1 : Coefficient de la longueur de flambement. [10]

Type d'appuis	Coefficient de la longueur de flambement K_f
Poutre bi-articulée	1
Poutre encastrée-articulée	0.7
Poutre bi-encastrée	0.5
Poutre encastrée-libre	2

IV.3.1.5. La longueur de flambement et les liaisons aux appuis

Les liaisons aux appuis influencent sur la longueur de flambement

Tableau I-2 : influence des liaisons aux appuis. [11]

Type de liaison	Schéma	Longueur de flambement (l_f)	Charge critique (N_c)
Appui Bi-Articulée		L	$N_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Libre-Encastrement		$2L$	$N_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$
Encastrement-Encastrement		$0,5L$	$N_c = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$
Appui simple-Encastrement		$0,7L$	$N_c = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}$

IV.3.1.6. Conditions d'utilisation de la formule d'Euler

- La formule d'Euler est applicable pour les élancements supérieurs à élancement limite

Tableau I-3 : Elancement limite d'Euler. [10]

Quelques valeurs de l'élancement limite d'Euler $\lambda_{lim Euler}$	
S235	93.91
S275	86.81
S355	76.41
S420	70.25
S460	67.12
Fonte	...80...
Bois	100...110

- Si l'élancement est inférieur à l'élancement limite, le problème de stabilité nécessite une étude particulière.

$$\lambda < \lambda_{lim Euler}$$

C'est pour cela qu'on utilise les formules empiriques dans le cas des pièces courtes, plus particulièrement la formule de Rankine qui s'énonce de manière suivante :

IV.3.2. Méthode de Rankine

- ❖ La charge critique selon Rankine est égale à :

$$N_{crit Rankine} = \frac{Re.A}{(1+\bar{\lambda}^2)} \quad (I.6) \quad [10]$$

Avec : $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{lim Euler}}$

$\bar{\lambda}$: élancement réduit

$$\lambda_{lim Euler} = \pi \sqrt{\frac{E}{Re}}$$

- ❖ Contrainte critique :

$$\sigma_{crit Rankine} = \frac{Re}{(1+\bar{\lambda}^2)} \quad (I.7)$$

Avec : $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{crit Rankine}}{S} \quad (I.8)$

S : coefficient de sécurité

Donc le calcul de vérification des pièces soumises au flambement nécessite de comparer la contrainte de compression avec la contrainte admissible au flambement.

$$\begin{aligned}\sigma_{adm} &\geq \sigma \\ \frac{\sigma_{crit Rankine}}{S} &\geq \frac{N}{A}\end{aligned}\quad (\text{I.9})$$

IV.3.3 Méthode de Dutheil

IV.3.3.1. Principe

La méthode de Dutheil tient compte de la flexion et de la compression. Elle est applicable quel que soit la valeur de l'élanement λ . [12]

$$|\sigma|_{max} = \left| \frac{N}{A} - \frac{Mfz}{Igz} \right| \quad (\text{I.8})$$

IV.3.3.2. Calcul de la résistance

La flèche maximale au milieu d'une poutre ayant une flèche initiale α est donnée par la relation :

$$f_c = \frac{\alpha}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad (\text{I.9})$$

Dans la section supportant le moment maximal de flexion :

$$|Mfz|_{max} = F \times \frac{\alpha}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad \text{avec} \quad F_c = \frac{\pi^2 E I g z}{L^2}$$

On écrit alors pour une charge axiale $|N|=F$:

$$|\sigma|_{Max} = \frac{F}{A} + \frac{\pi^2 E a v}{L^2} \times \frac{F}{F_c - F} \quad (\text{I.10})$$

Dans la suite des calculs, on va écrire $\sigma_c = \frac{F_c}{A}$: **contrainte critique d'Euler**.

Dans la relation (I.14) exprimant pour simplifier les écritures : $\sigma_0 = \frac{\pi^2 \times E a v}{L^2}$ (σ_0 est homogène à une contrainte).

Exprimons comme condition limite que $\sigma \leq \sigma_e$ pour une charge axiale $F = \sigma A$, ce qui revient à dire que la poutre sera calculée en compression mais en majorant la contrainte pour tenir compte du moment de flexion.

La relation (I.10) s'écrit alors après simplification par A :

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0) + \sigma_c \sigma_e \geq 0 \quad (\text{I.11})$$

σ_e : contrainte maximale caractérisant état de ruine

σ : contrainte normale totale

Notons qu'en écrivant $\sigma \leq \sigma_e$ aucun coefficient de sécurité n'intervient ; nous devons en tenir compte plus tard.

On sait résoudre cette inéquation du second degré en σ .

Pour simplifier les écritures Dutheil à proposer d'écrire :

$$\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0 = \sigma_t \quad (\text{I.12})$$

D'autre part, le terme σ_0 intervenant en terme correctif, Dutheil propose comme expression de σ_t :

$$\sigma_t \approx \sigma_c + 1.3 \sigma_e \quad (\text{I.13})$$

Ce qui évite le calcul de σ_0 . Notons que cette expression (I.13) repose sur une vérification expérimentale. La résolution de (I.11) donne alors :

$$\sigma \leq \frac{1}{2} \sigma_t - \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{4} - \sigma_e \sigma_c} \quad (\text{I.14})$$

Cependant que la relation (I.14) ne fait intervenir aucun coefficient de sécurité.

La contrainte σ ainsi calculée est appelée « Contrainte d'affaissement » ou « Contrainte de ruine ». [12]

IV.3.4 Méthode de Tetmayer :

Formule expérimentale :

$$N_T = \frac{AR_{cf}}{\alpha} \quad (\text{I.15})$$

R_{cf} : Résistance à la compression par flambement établit expérimentalement pour

Différents matériaux et en fonction de λ .

Elle est surtout utilisée dans le domaine des faibles élancements ou la formule

D'Euler donne des valeurs trop favorables, donc, présentant moins de sécurité. [13]

CHAPITRE II

ASPECT THÉORIQUE DU FLAMBEMENT

I. Introduction

Les premiers problèmes d'instabilité élastique, se rapportant au flambement latéral des pièces comprimées, ont été résolus par Euler (1744). Euler a utilisé la méthode classique pour déterminer la force critique de flambement, ou charge d'Euler, d'une poutre droite, de longueur L , soumise à une force de compression N , pour différentes conditions aux limites.

II. Les éléments qui influent sur le flambement

D'après la formule d'Euler on voit que chaque un des termes d'équation à une influence sur le flambement, donc d'après la relation suivante :

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} \quad (\text{II.1})$$

On a trois influences sur la charge maximal admissible :

- Le moment d'inertie (I)
- Le module de Young (E)
- La longueur du flambement (L_f)

II.1. Le moment d'inertie « I »

Si l'Inertie augmente, la charge maximale admissible augmente.

Le moment d'inertie joue un rôle très important dans le flambement car Il est un facteur multiplicateur dans la formule d'Euler. Le flambement apparaît quand, pour des raisons d'irrégularités de la matière et des forces appliquées, une colonne se met à fléchir sous une charge parallèle à son axe, alors qu'une poutre fléchira sous l'action de charges perpendiculaire à son axe.

Le flambement est finalement un problème de flexion, et il est logique que l'inertie joue un rôle important dans le phénomène. [14]

II.2. Le module de Young « E »

Si le module de Young augmente, la charge maximale admissible augmente.

Le module de Young (module d'élasticité) c'est l'un des caractéristiques mécaniques d'un matériau et un facteur multiplicateur dans la relation d'Euler, donc plus le module d'élasticité augmente plus la poutre supporte une charge plus grande. Le module du Young varie selon le matériau utilisé. [14]

Exemple :

A section égale, si on remplace une colonne en bois par une colonne en acier (de même géométrie), la charge qu'elle pourra reprendre sera beaucoup plus grande, ce qui est logique.

II.3. La longueur du flambement L_f

Si L_f augmente, la charge maximale admissible diminue.

La longueur de flambement L_f c'est le produit entre la longueur initiale de la barre L_0 et le coefficient de longueur k_f qui est le coefficient de réduction $L_f = L_0 * k_f$. La longueur de flambement diffère d'une barre a une autre à cause des liaisons appliquées à l'extrémité de cette dernière (articulée, encastrée), d'où les liaisons ont une influence sur la longueur de flambement et comme cette longueur c'est un facteur de division dans la formule d'Euler donc elle est inversement proportionnelle à la charge critique (le flambement augmente, la charge diminue) [14]

III. Flambement simple

III.1 Poutre bi-articulée

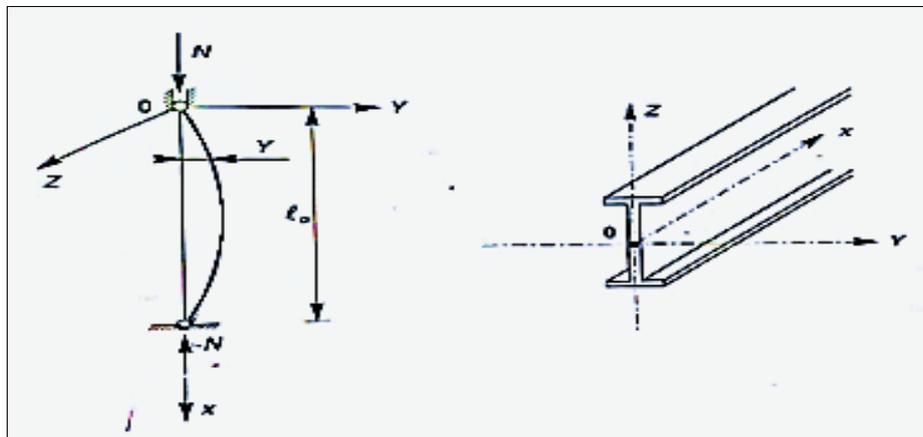


Figure II-1 : poutre bi-articulée [5]

On a : $M = N y$ (II.2)

La relation entre le moment de flexion et y'' est :

$$y'' = \frac{-M}{EI_z} \Rightarrow -\frac{d^2 y}{dx^2} EI_z \quad (II.3)$$

Donc :

$$-\frac{d^2y}{dx^2} EI_z = N y$$

On a :

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}} \Rightarrow -\frac{d^2y}{dx^2} EI_z + a^2 y = 0 \quad (\text{II.4})$$

(3) est une équation différentielle du second ordre, dont la solution générale est de forme :

$$Y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \quad (\text{II.5})$$

La résolution de cette équation aux conditions limites :

- Pour $x=0$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow B \cos x = 0 \text{ donc } B=0$$

- Pour $x=l_0$

$$Y(l_0) = 0 \Rightarrow A \sin \alpha l_0 = 0$$

- Si $\sin \alpha l_0 \neq 0$ donc $A=0$
- Si $\sin \alpha l_0 = 0$ donc $\alpha l_0 = K\pi$

Soit :

$$\alpha = \frac{K\pi}{l_0} = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

D'où :

$$N = \frac{K^2 \pi^2 EI}{l_0^2}$$

- Pour $K=0$ $N=0$ donc la tige est rectiligne.
- Pour que la tige reste fléchie, il faut que K égale au moins 1, ce qui engendre une valeur qui correspond à un équilibre fléchi de la poutre qui vaut :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (\text{II.6})$$

N_k : force critique d'Euler

L'équation de la déflexion qui correspond à cette force est :

$$Y=A \sin \alpha x$$

La Courbe est sinusoïdale donc l'obtention de l'amplitude de flambement « A » n'est pas possible.

La force critique N_k correspond à une contrainte critique $\sigma_k = \frac{N_k}{A}$ avec A la section droite de la tige, qui s'écrit encore :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E I}{L_0^2 A} = \frac{\pi^2 E}{L_0^2} i^2 \quad (\text{II.7})$$

Avec $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$, i : rayon de giration

I : inertie minimale

Le rayon de giration correspond à l'élanement maximal $\lambda = \frac{L_0}{i}$

D'où :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{II.8}) \quad [5]$$

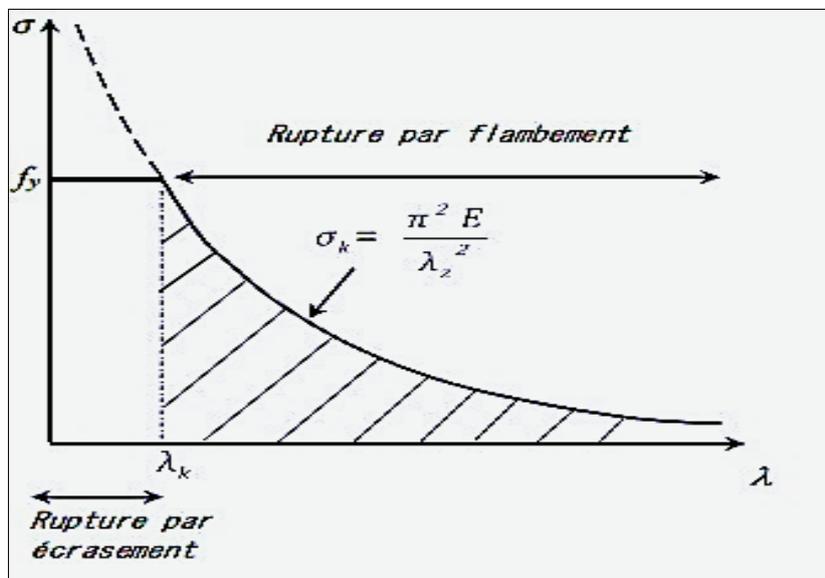


Figure II-2 : Evolution de la contrainte normale en fonction de l'élanement Contrainte critique d'Euler. [3]

- A la limite $\sigma_K = \sigma_e = f_y$ correspond un élancement critique λ_K . Pour $\lambda < \lambda_K$, aucun risque de flambement n'est à craindre, la ruine survient par compression simple (écrasement) pour $\sigma_K = \sigma_e$. Pour $\lambda > \lambda_K$, il y a ruine lorsque $\sigma = \sigma_K$. [3]

III.2. Poutre articulée en tête et encastree en pied

On a :

$$M = Ny - Px \quad (\text{II.9})$$

$$M = -EI \frac{d^2x}{dy^2} = Ny - Px$$

On a :

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

D'où :

$$Y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{P}{N} x \quad (\text{II.10})$$

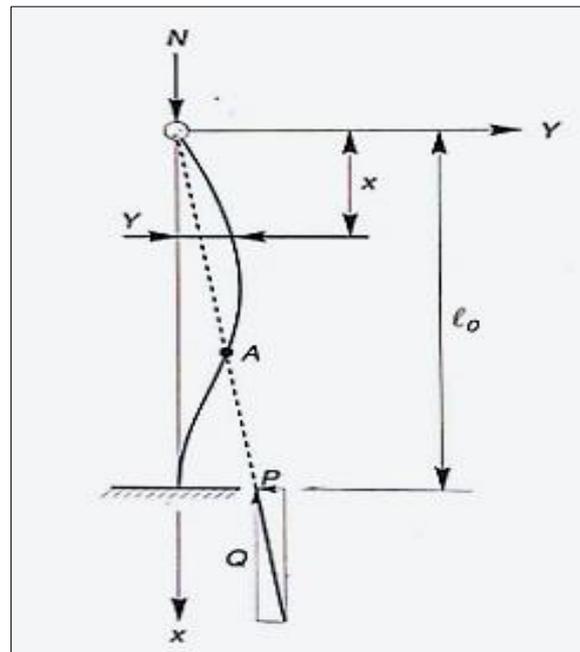


Figure II-3 : poutre encastree-articulée [5]

La résolution aux conditions aux limites

- Pour $y(0)=0$, soit $B \cos \alpha (0) = 0$ donc : **B=0**

- Pour $y(L_0)=0$, soit $A \sin \alpha (L_0) + \frac{P}{N} L = 0$

D'où :

$$\sin \alpha (L_0) = -\frac{P}{N A} L_0 \quad (\text{II.11})$$

- Pour $y'(L_0)=0$, soit $A \alpha \cos \alpha L_0 + \frac{P}{N} = 0$

D'où :

$$\cos \alpha (L_0) = -\frac{P}{N A \alpha} \quad (\text{II.12})$$

De (II.11) et (II.12) on a :

$$\tan \alpha L_0 = \frac{\sin \alpha L}{\cos \alpha L_0} = -\frac{P}{N A} L_0 \times \frac{N A \alpha}{-P}$$

D'où l'on tire l'équation transcendante $\tan \alpha l_0 = \alpha l_0$, qui a pour plus petite racine $\alpha l_0 = 4.5$

Soit :

$$\alpha = \frac{4.5}{l_0} = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

D'où :

$$N_k = \frac{4.5^2 EI}{L_0^2} , 4.5^2 = K \pi^2 \quad \text{soit : } K = \frac{4.5^2}{\pi^2}$$

Donc :

$$N_k = \frac{2\pi^2 EI}{L_0^2} \quad (\text{II.13})$$

D'après la formule d'Euler on a :

$$\frac{2}{L_0^2} = \frac{1}{L_k^2} \Rightarrow L_k = \sqrt{\frac{L_0^2}{2}}$$

$$L_k = \frac{L_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0 \quad \text{D'où : } L_k = 0.7 L_0 \quad (\text{II.14}) \quad [2]$$

III.3. Poutre encastrée en pied et libre en tête

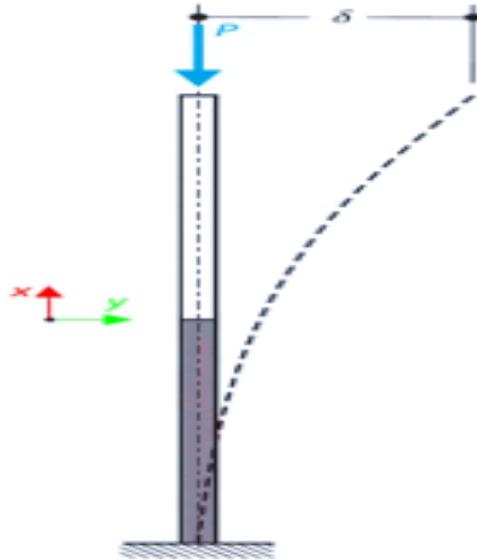


Figure II-4 : poutre encastrée- libre. [15]

$$M_z + Ny = 0$$

On a :

$$M_z = EIy'' = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

D'où :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Ny = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI} \quad (\text{II.16})$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

On remplace (II.15) dans (II.16) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0 \quad (\text{II.17})$$

La solution de cette équation :

$$y = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$$

Détermination des constante A et B :

Les conditions aux limites :

$$y(0) = 0 = y(2L)$$

$$y'(0) = 0 = y'(2L)$$

Pour $y(0) = 0$ d'où $A=0$

Pour $y(2L) = 0$ donc $B\sin(\alpha 2L) = 0$

$\alpha 2L = n\pi$ Avec n : nombre entier

Pour $n=1$ (premier mode de flambement) on a :

$$\alpha = \frac{\pi}{2l} \quad (\text{II.18})$$

L'équation de la déformée :

$$y(x) = B\sin\left(\frac{2\pi}{2L}\right) \quad (\text{II.19})$$

De l'équation (II.18) et (II.16) :

$$\alpha^2 = \frac{\pi^2}{4L^2} = \frac{N}{EI}$$

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{4L_0^2} \quad (\text{II.19})$$

On se référant à la formule d'Euler $\Rightarrow \frac{1}{4L_0^2} = \frac{1}{L_f^2}$

$$L_f^2 = 4L_0^2$$

$$L_f = 2L_0$$

La contrainte est définie par la relation suivante :

$$\sigma_K = \frac{N_K}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L_f \cdot A} \quad (\text{II.20})$$

Le rayon de giration $i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ et l'élancement $\lambda = \frac{L_f}{i}$

On a :

$$L_f = 2L_0 \Rightarrow \lambda = \frac{2L_0}{i}$$

D'où :

$$L_f^2 = \frac{I \cdot \lambda^2}{A} \quad (\text{II.21})$$

On remplace (II.21) dans (II.20):

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 EI}{\frac{l\lambda^2}{A} \cdot A} \Rightarrow \sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{II.22}) \quad [5]$$

III.4. Poutre bi-encastée

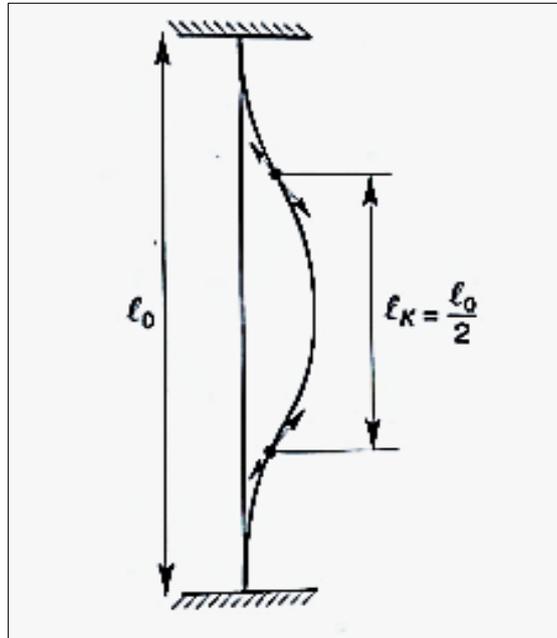


Figure II-5 : poutre bi-encastée. [5]

L'équation différentielle est :

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

Expression du moment est de la forme :

$$M = -Ny + Cx + D \quad (\text{II.23})$$

Par conséquent :

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = Cx + D$$

Par intégration on a :

$$y = A \cos ax + B \sin ax + Cx + D \quad (\text{II.24})$$

Les conditions aux limites sont :

$$y(0) = y(L_0) = 0$$

$$y'(0) = y'(L_0) = 0$$

D'où :

$$y(0) = A + D = 0 \quad (\text{II.25})$$

$$y'(0) = B\alpha \cos \alpha x + C = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$y(L_0) = A \cos \alpha L_0 + B \sin \alpha L_0 + CL_0 + D \quad (\text{II.27})$$

$$y'(L_0) = -A \alpha \sin \alpha L_0 + B \alpha \cos \alpha L_0 + C \quad (\text{II.28})$$

On a de l'équation (II.25) :

$$A = -D \quad (*)$$

De (II.26) on a :

$$C = B\alpha \quad (**)$$

On remplace (*) et (**) dans (II.27) et (II.28) d'où :

$$\begin{cases} A \cos \alpha L_0 + B \sin \alpha L_0 - B \alpha L_0 - A = 0 & (1 *) \\ -A \alpha \sin \alpha L_0 + B \alpha \cos \alpha L_0 - B \alpha = 0 & (2 *) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 *) * (-1) \\ (2 *) * (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1 - \cos \alpha L_0) + B(\alpha L_0 - \sin \alpha L_0) = 0 & (1 **) \\ A \alpha \sin \alpha L_0 + B \alpha (1 - \cos \alpha L_0) = 0 & (2 **) \end{cases}$$

De (1**) on a :

$$B = \frac{-A(1 - \cos \alpha L_0)}{(\alpha L_0 - \sin \alpha L_0)} \quad (***)$$

On remplace (***) dans (4**) d'où :

$$A \alpha \sin \alpha L_0 - \frac{A \alpha (1 - \cos \alpha L_0)}{(\alpha L_0 - \sin \alpha L_0)} * (1 - \cos \alpha L_0) = 0$$

$$\frac{A \alpha (\alpha L_0 - \sin \alpha L_0) \sin \alpha L_0 - [A \alpha (1 - \cos \alpha L_0)^2]}{(\alpha L_0 - \sin \alpha L_0)} = 0 \quad (\text{II.29})$$

D'où :

$$A\alpha^2 L_0 \sin \alpha L_0 - A\alpha \sin^2 \alpha L_0 - A\alpha - A\alpha \cos^2 \alpha L_0 - 2A\alpha \cos \alpha L_0 = 0 \quad (3^*)$$

Où :

$$\alpha L_0 \sin \alpha L_0 = 2(1 - \cos \alpha L_0) \quad (\text{II.30})$$

La plus petite racine de cette équation est :

$$\alpha L_0 = 2\pi$$

La force critique d'Euler donc est égale à :

$$N_K = 4\pi^2 \frac{EI}{L_0^2}$$

D'une manière générale, selon les conditions aux appuis, la force critique d'Euler vaut :

$$N_K = m \frac{\pi^2 EI}{L_0^2}$$

En introduisant la longueur de flambement L_f d'où :

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} \quad \text{avec} \quad L_f = \frac{L_0}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}} L_0 \quad (\text{II.31})$$

On peut déduire alors que :

$$k_f = \frac{1}{\sqrt{m}} \quad [5]$$

IV. Le flambement flexion

Il s'agit dans ce cas d'une poutre bi articulée idéal rectiligne, soumise simultanément à un effort normal N et à un moment fléchissant M_0

Dans le flambement flexion, on a une amplification de la déformée et donc la contrainte de flexion et de compression contrairement au flambement simple c'est seulement la contrainte de compression. [5]

Le moment fléchissant total (comprimé et fléchi), vaut :

$$M(x) = M_0 + Ny \quad (\text{II.32})$$

D'où :

$$M(x) = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow -M_0 = EI \frac{d^2y}{dx^2} + Ny$$

Les deux cas les plus courants du moment sont :

- Moment sous charge concentrée transversale.
- Moment sous charge uniformément répartie transversale.

IV.1. Sous charge concentrée Q

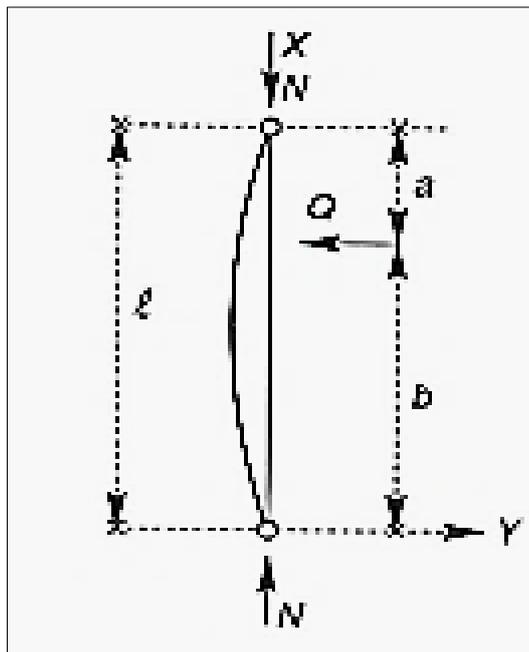


Figure II-6 : Sous charge concentrée. [5]

Selon RDM nous avons deux tronçons :

- Premier tronçon a : $0 \leq x \leq a$
- Deuxième tronçon a : $a \leq x \leq L$

$$\sum F = R_A + R_B = Q$$

$$\sum M/A = R_B L - Qa = 0 \Rightarrow R_B = \frac{Qa}{L}$$

D'où :

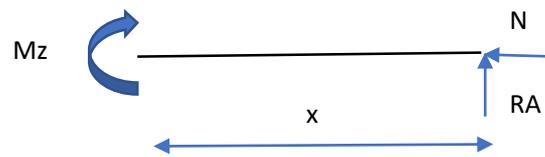
$$R_A = \frac{+Q(L - a)}{L}$$

On a pour $0 \leq x \leq a$:

$$M_Z + R_A x = 0$$

$$M_Z = R_A x$$

$$M_Z = Qx \frac{(L-a)}{L} \quad (\text{II.33})$$

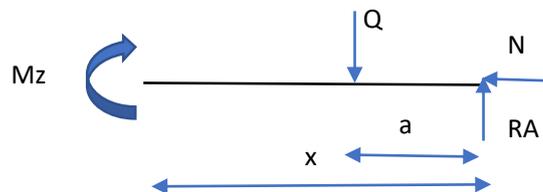


Pour $a \leq x \leq L$:

$$\sum M = M_Z - R_A x + Q(x - a) = 0$$

$$M_Z = R_A x - Q(x - a)$$

$$M_Z = \frac{Qa(L-x)}{L} \quad (\text{II.34})$$



L'intégrale générale a pour expression :

Pour $0 \leq x \leq a$:

$$y(x) = A \cos ax + B \sin ax + \frac{Q}{N} x \frac{L-a}{L} \quad (\text{II.35})$$

Pour $a \leq x \leq L$:

$$y(x) = C \cos ax + D \sin ax + \frac{Q}{N} a \frac{L-x}{L} \quad (\text{II.36})$$

Les coefficients A, B, C, D sont des déterminés en écrivant que :

On a de (II.35) :

$$y(0) = 0 \quad \text{d'où} \quad A \cos \alpha(0) = 0 \Rightarrow A=0$$

De (II.35) on a :

$$y'(0) = 0 \quad \text{d'où} \quad y'(0) = B \alpha \cos \alpha(0) + \frac{Q}{N} \frac{L-a}{L} = 0 \Rightarrow B = \frac{-Q}{N \alpha} \frac{L-a}{L}$$

On écrit :

$$B = \frac{-Q}{N \alpha} \frac{\sin \alpha(L-a)}{\sin \alpha L}$$

On a de (II.36) :

$$y(L) = 0 \quad \text{d'où} \quad y(L) = C \cos \alpha L + D \sin \alpha L + \frac{Q}{N} a \frac{L-L}{L} = 0$$

$$\Rightarrow C = -D \tan \alpha L$$

D'où :

$$D = \frac{Q \sin \alpha a}{\alpha N \tan \alpha L} \Rightarrow C = \frac{-Q}{\alpha N} \sin \alpha a$$

On remplace les coefficients A, B, C et D dans (II.35) et (II.36) on trouve :

$$y(x) = \frac{-Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha(L-a)}{\sin \alpha L} \sin \alpha x + \frac{Q}{N} x \frac{L-a}{L} \quad (\text{II.37})$$

$$y(x) = \frac{-Q \sin \alpha a}{\alpha N \sin \alpha L} \sin \alpha(L-x) + \frac{Q}{N} a \frac{L-x}{L} \quad (\text{II.38})$$

Pour $x = \frac{L}{2}$ et $a = \frac{L}{2}$ on a :

$$u = \frac{aL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI_z}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_K}}$$

$$y_{\max} = \frac{-QL^3}{48EI_z} \frac{3(tgu - u)}{u^3}$$

$$y_{\max} = \frac{QL}{4} \frac{tgu}{u} \quad (\text{II.39}) \quad [5]$$

IV.2. Sous charge uniformément répartie q

$$u(x) = \frac{qx}{2}(L - x) \quad , \text{ en posant : } u = \frac{al}{2} \text{ il vient :}$$

$$y(x) = \frac{QL^4}{16EI_z u^4} \left[1 - \frac{\cos \left[u \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \right]}{\cos u} \right] + \frac{qL^2 u}{8EI_z u^2} (L - u)$$

La flèche maximale pour $x = \frac{l}{2}$ s'écrit :

$$y_{max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_z} \frac{24(1 - \cos u) - 12u^2 \cos u}{5u^2 \cos u}$$

$$y_{max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(\cos u - 1)}{u^2 \cos u} \quad \text{(II.40)}$$

- Les résultats, pour les cas usuels, sont rassemblés dans le tableau ci-après, dans lequel

$$t = \frac{al}{2}$$

Tableau II-1 : Sous charge répartie de Jean Morel. [5]

Conditions aux appuis	Cas de charges	M_{0max} Pour $z = \frac{l}{2}$	M_{max} Pour $z = \frac{l}{2}$	Coefficient d'amplification des moments $r = \frac{M_{max}}{M_{0max}}$
Bi-articulée	Sous charge répartie q	$q \frac{l^2}{8}$	$q \frac{l^2}{8} r$	$\frac{2}{t^2} \left(\frac{1}{\cos t} - 1 \right)$
	Sous charge concentrée Q	$Q \frac{l}{4}$	$Q \frac{l}{4} r$	$\frac{1}{t} \operatorname{tg} t$
Bi-encastée	Sous charge répartie q	$q \frac{l^2}{24}$	$q \frac{l^2}{24} r$	$\frac{3}{t \sin 2t} - \frac{3}{2t^2}$
	Sous charge concentrée Q	$Q \frac{l}{8}$	$Q \frac{l}{8} r$	$\frac{1}{t} \operatorname{tg} t$

V. Prise en compte des défauts

Il existe plusieurs défauts qui contribuent à affaiblir les éléments en acier, parmi ces défauts, on distingue :

1. Les pièces après leur traitement en laminoir et leurs diverses manutentions et transports ne sont pas rectilignes (défauts de rectitude).
2. Leurs inerties ne sont pas constantes (tolérances de laminage).
3. Les efforts normaux de compression et les appuis ne sont jamais rigoureusement centrés (défauts de centrage).
4. Les poteaux sur chantier ne sont jamais parfaitement verticaux (tolérances de montage).
5. Le module d'élasticité E de l'acier n'est pas vraiment constant, du fait des contraintes résiduelles de laminage (défauts d'homogénéité).

Les défauts de rectitude (1 et 2) et les défauts de centrage (3,4 et 5) réduisent la force portante de la barre, et justifient des calculs spécifiques.

V.1 Prise en compte de défauts de rectitude

Considérons une poutre bi-articulée dotée d'une courbure initiale $y_0 = f(x)$ et chargée centriquement.

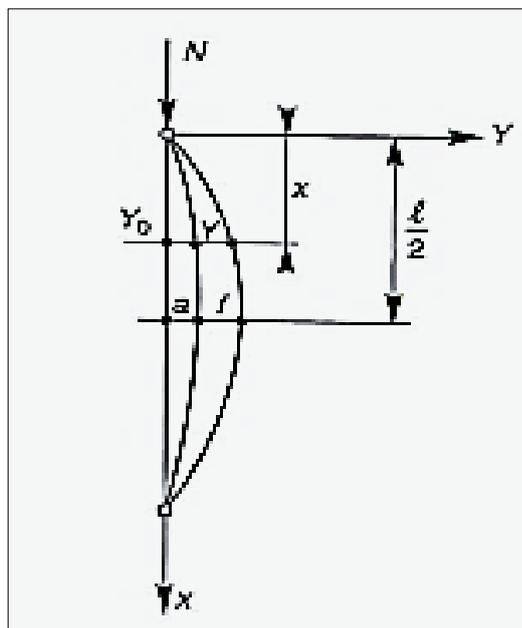


Figure II-7 : défaut de rectitude [5]

Le moment fléchissant vaut :

$$M(x) = N(y + y_0) \quad (\text{II.41})$$

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -N(y + y_0)$$

D'où :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 (y + y_0)$$

La déformée de la poutre, à vide, s'exprime par le développement en série de sinus suivante :

$$y_0 = \alpha_1 \frac{\sin \pi x}{L} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

Qui, en première approximation (les autres termes étant négligeables) se résume à :

$$y_0 = \alpha \sin \frac{\pi x}{L}$$

Soit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 (y + \alpha \sin \frac{\pi x}{L}) = 0 \quad (\text{II.42})$$

La solution générale de cette équation est de forme :

$$y = D \sin \frac{\pi x}{L}$$

Les dérivées sont :

$$\frac{dy}{dx} = D \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -D \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

L'équation (1) devient alors :

$$\sin \frac{\pi x}{L} (\alpha^2 + D \alpha^2 - D \frac{\pi^2}{L^2}) = 0$$

D'où l'on tire :

$$D = \frac{\alpha}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 L^2} - 1}$$

La flèche additionnelle y prise par la poutre vaut donc :

$$Y = \frac{a \sin \frac{\pi x}{L}}{\alpha^2 L^2 - 1}$$

Elle est maximale à l'abscisse $x = \frac{L}{2}$, soit :

$$y_{max} = f = \frac{a}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 L^2} - 1} \quad (\text{II.43})$$

Compte tenu que $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$ et $N_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, (2) s'écrit encore :

$$F = \frac{a}{\frac{N_k}{N} - 1}$$

Les déformations croissent hyperboliquement avec N.

La flèche totale f_t (flèche initiale + flèche additionnelle) vaut donc :

$$f_t = a + f = \frac{a}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (\text{II.44})$$

- Lorsque $N=0$ $f_t = a$ (état initial)
- Lorsque $N \rightarrow N_k$ $f_t \rightarrow \infty$ (état de ruine)

La contrainte maximale, caractérisant l'état de ruine est obtenue pour :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} + \frac{Nfv}{I}$$

Compte tenu que $c = \frac{I}{vA} = \frac{i^2}{v}$, i étant le rayon de giration et c la distance du centre de gravité de la section à la frontière du noyau central, on a :

$$\sigma_e = \sigma \left[1 + \frac{a}{c} \frac{\sigma}{\sigma_k} \right] \quad (\text{II.45})$$

$\frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma}$ = coefficient d'amplification de la flèche initiale.

$\left[1 + \frac{a}{c} \frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma} \right]$ = coefficient d'amplification de la contrainte.

La charge de ruine N est obtenue par la relation (II.45), en portant $\sigma = \frac{N}{A}$ et $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$.

On obtient l'équation suivante du second degré, qui donne N.

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2 EA} N^2 - \left(\frac{\lambda^2 \sigma_e}{\pi^2 E} + \frac{a}{c} + 1 \right) N + A \sigma_e = 0 \quad (\text{II.46}) \quad [5]$$

V.2. Prise en compte des défauts de centrage

Considérons cette fois-ci une poutre rectiligne, chargée d'une force N, parallèle à son axe moyen, mais excentrée de e.

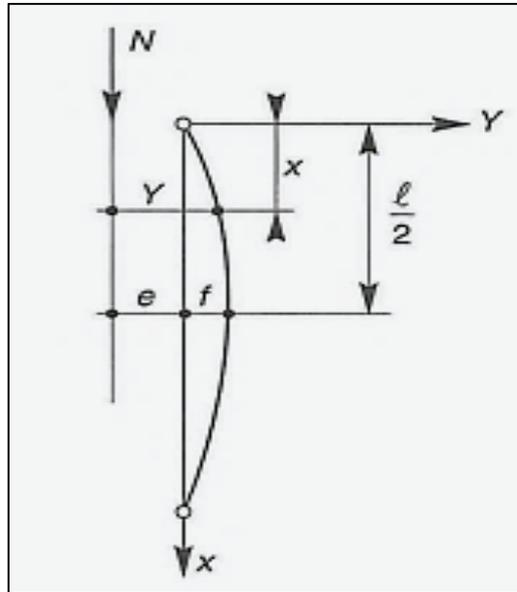


Figure II-8 : défaut de centrage. [5]

Equation de la déformée :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0 \quad (\text{II.47})$$

Solution générale :

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

Conditions aux limites :

$$y(0) = e, \text{ soit } B = 0$$

$$y(L) = e, \text{ soit } A = e \frac{1 - \cos \alpha L}{\sin \alpha L}$$

D'où

$$y = e \left(\cos \alpha x + \sin \alpha x \frac{1 - \cos \alpha L}{\sin \alpha L} \right) \quad (\text{II.48})$$

Flèche totale maximale pour $x = \frac{L}{2}$:

$$e + f = e \left[\cos \alpha \frac{L}{2} + \sin \alpha \frac{L}{2} \frac{1 - \cos \alpha L}{\sin \alpha L} \right]$$

Or:

$$\cos \alpha L = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha L}{2}$$

$$\sin \alpha L = 2 \sin \frac{\alpha L}{2} \cos \frac{\alpha L}{2}$$

D'où :

$$\frac{1 - \cos \alpha L}{\sin \alpha L} = \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2}$$

La flèche totale vaut donc :

$$e + f = e \left(\cos \frac{\alpha L}{2} + \sin \frac{\alpha L}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \right) = \frac{e}{\cos \frac{\alpha L}{2}}$$

Soit :

$$f = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha L}{2}} - 1 \right) \quad (\text{II.49})$$

- Lorsque $N = 0$ $f = 0$ (état initial)
- Lorsque $N \rightarrow N_k$ $f \rightarrow \infty$ (état de ruine).

f varie hyperboliquement en fonction de N et asymptote horizontale N_k

Le moment fléchissant maximal vaut :

$$M_f = N(e + f) = \frac{Ne}{\cos \frac{\alpha L}{2}}$$

La contrainte maximale, caractérisant l'état de ruine, est obtenue pour :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} + \frac{N(e+f)v}{I}$$

Qui s'écrit encore, en portant $c = \frac{i^2}{v}$ et f tirée de la relation (II.49).

$$\sigma_e = \frac{N}{A} \left[1 + \frac{e}{c \cdot \cos \frac{\alpha L}{2}} \right]$$

Or:

$$\cos \frac{\alpha L}{2} = \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \frac{L}{2} = \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{N}{EA}}$$

Soit enfin :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{c} \frac{1}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{N}{EA}}} \right) \quad (\text{II.50})$$

La charge de ruine N peut être obtenue par résolution de l'équation (6) cependant, plus simplement, tant que N reste faible vis-à-vis de N_k (petites déformations), on peut admettre avec une précision suffisante, αl étant faible, que :

$$\cos \frac{\alpha L}{2} = 1 - \frac{\alpha^2 L^2}{8}$$

L'équation (II.49) s'écrit alors :

$$f = e \left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2 L^2}{8}} - 1 \right)$$

En portant $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$, on obtient finalement :

$$N = \frac{8EI f}{L^2(e+f)} \quad \text{(II.51) [5]}$$

VI. Influence de l'effort tranchant sur le flambement des barres

Effort tranchant est toujours présent dans les barres fléchies ce qui provoque des déformations dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent. En fait, la présence d'un effort tranchant ne modifie d'une manière sensible la charge critique N_k .

On va continuer avec le cas simple de la poutre d'Euler (bi-articulée) sollicitée en compression simple.

Nous avons :

$$M = Ny \quad , \quad V = \frac{dM}{dx} = N \frac{dy}{dx} \quad \text{(II.52)}$$

L'équation de la déformée s'écrit, en prenant en compte les déformations engendrées par l'effort tranchant :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_1} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Ny}{EI} + \frac{N}{GA_1} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Soit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left(1 - \frac{N}{GA_1} \right) + \frac{N}{EI} y = 0$$

Posons :

$$\beta^2 = \frac{N}{EI(1 - \frac{N}{GA_1})}$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \beta^2 y = 0 \quad (\text{II.53})$$

Elle est similaire à l'équation différentielle du Précédent (équation de la poutre bi-articulé), et se résout de la même façon.

La force critique de flambement, qui valait $N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$, est réduite en raison de l'influence de l'effort tranchant et devient :

$$N'_k = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} \frac{1}{GA_1}}$$

D'où :

$$N'_K = \frac{N_k}{1 - \frac{N_k}{GA_1}}$$

$A_1 C'$ est la section réduite à l'effort tranchant

- Si A_1 est très grande :

On a :

$$\beta^2 = \frac{N}{EI(1 - \frac{N}{GA_1})}$$

D'ou :

$$\frac{N}{GA_1} \approx 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{N}{EI}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 = \frac{N}{EI} \text{ et } N'_k = N_k = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2}$$

- Si I est très grand :

On a :

$$\frac{dy^2}{dx} \left(1 - \frac{N}{GA_1}\right) + \frac{N}{EI}y = 0$$

I très grand d'où :

$$\frac{N}{EI}y \approx 0$$

Donc :

$$\frac{dy^2}{dx} \left(1 - \frac{N}{GA_1}\right) = 0 \quad (\text{II. 54})$$

Pour que (II.54) égale à 0 on a :

$$\begin{cases} \frac{dy^2}{dx} = 0 & (\text{II. 55}) \\ 1 - \frac{N}{GA_1} = 0 & (\text{II. 56}) \end{cases} \text{ ou}$$

De (II.56) on a :

$$N''_k = GA_1$$

En général, on a :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} \left(1 - \frac{N_k}{GA_1}\right)$$

C'est-à-dire :

$$N_k = N'_k \left(1 - \frac{N_k}{N''_k}\right)$$

Ou encore :

$$\frac{1}{N_k} = \frac{1}{N'_k} + \frac{1}{N''_k} \quad (\text{II. 57}) \quad [5]$$

Si la diminution est faible pour les poutres à âme pleine, et négligeable, elle est, au

Contraire, sensible pour les poutres triangulées. [5]

CHAPITRE III

ASPECT EXPÉRIMENTAL DU FLAMBEMENT

I. Introduction

Dans la théorie de la stabilité, les quatre cas de flambement d'Euler représentent le flambement élastique par flexion des barres droites soumises à une contrainte de compression. A partir d'une charge donnée (charge de flambement), la barre perd en stabilité ce qui engendre une déformation croissante de la barre. L'axe de la barre se déporte latéralement. Euler décrit quatre cas de flambement de la barre élastique avec une force de compression axiale pour différentes conditions d'appuis.

II. Etude expérimentale

➤ But

L'expérimentation en laboratoire, effectuée sur des poutres élancées soumises à des efforts de compression progressivement croissants. Cette manipulation vise à déterminer les charges critiques d'Euler pour différentes conditions et les comparer à l'effort critique déterminé par la théorie d'Euler.

➤ Hypothèses

On a une poutre :

- Parfaitement rectiligne.
- Longue par rapport aux dimensions transversales.
- Comprimée par deux forces axiales opposées.

Ce qui engendre une compression pure et en tenant compte du fait que dans les cas réels les charges ne sont pas concentriques, ce chargement va entraîner son fléchissement.

La poutre peut passer d'une sollicitation de compression simple (stable) à une sollicitation composée (flexion et compression simple) à partir d'un effort de compression qui s'appelle effort normal critique N_c .

Ce passage peut être considéré comme une instabilité du comportement de la poutre car sa résistance en compression pure est très affaiblie par l'apparition de la flexion. Cependant on ne peut pas faire varier beaucoup N au-delà de N_c car les déformations augmentent très vite et les conditions de ruine sont donc rapidement atteintes.

On dit alors que la poutre flambe et le phénomène est le « flambement d'une poutre comprimée ».

II.1. Description de l'appareil



Figure III-1 : Appareil WP120. [16]

- Étude de tous les problèmes de flambement importants.
- Vérification de la théorie d'Euler sur le flambement.
- Essais avec application de forces excentriques et charge transversale.

Le WP 120 examine le comportement au flambement de barres soumises à diverses influences. Tous les problèmes de flambement importants sont illustrés ici dans les essais. Pour cela, une barre est encastree ou rotulée aux deux extrémités de l'appareil d'essai selon le cas de flambement. Une force de compression est appliquée sur la barre via une traverse de charge réglable en hauteur et une broche à commande manuelle. Un palier axial situé entre la broche et l'appui de la barre empêche toute sollicitation en torsion de la barre d'essai. La force appliquée est mesurée hydrauliquement et s'affiche sur un dynamomètre à cadran. Un comparateur à cadran affiche la déviation latérale de la barre.

Les essais permettent d'illustrer l'influence de différents facteurs comme les longueurs des barres, les matériaux et les types d'appui, sur le comportement de flambement. Un dispositif de charge transversale permet de générer des efforts tranchants supplémentaires sur la barre

d'essai. Les essais peuvent être réalisés en position verticale ou horizontale, le dynamomètre à cadran étant orientable à 90° .

Un jeu complémentaire de barres d'essai permet d'étendre les possibilités d'essai du WP120.

Les pièces de l'essai sont disposées de manière claire, et bien protégées dans un système de rangement. [16]

II.2. Mode opératoire

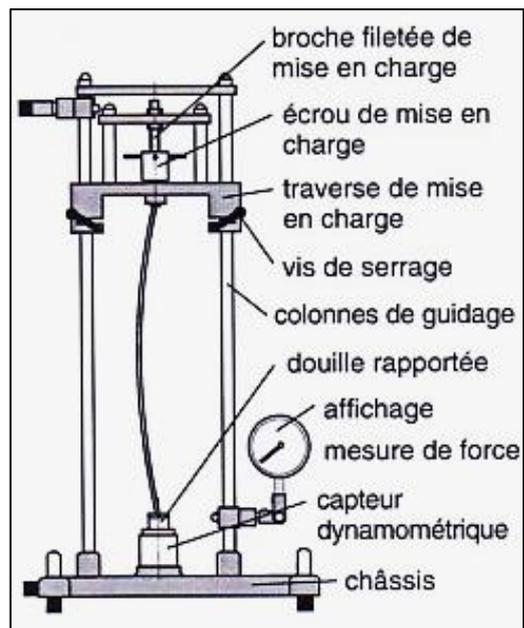


Figure III-2 : Dispositif de l'appareil WP120. [17]

- Installer l'appareil d'essai en position verticale ou horizontale. L'affichage de la force peut être tourné de 90° à cet effet.

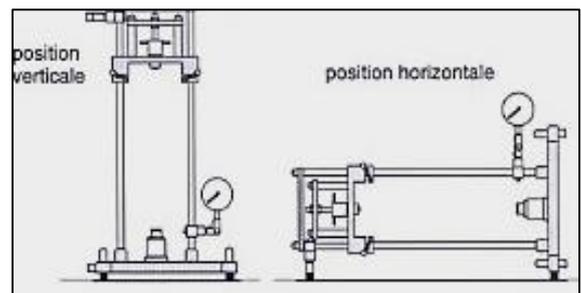


Figure III-3 : Position de l'appareil. [17]

- Placer l'élément de pression avec l'encoche en V dans le réceptacle inférieur pour éprouvette et serrer avec la vis de serrage.
- Placer l'élément de pression long avec encoche en V dans la douille de guidage de la traverse de mise en charge et le maintenir.

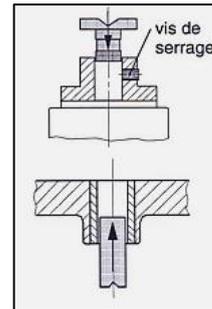


Figure III-4 : Les encoches en V. [17]

- Placer l'éprouvette dans les encoches en V.

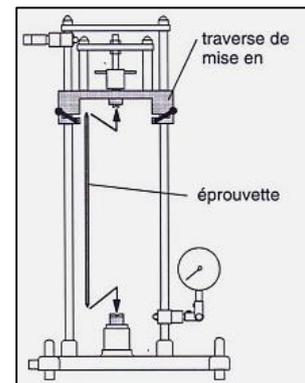


Figure III-5 : Placement de la barre. [17]

- Aligner le comparateur à cadran avec les pinces de statif sur le milieu de l'éprouvette (le comparateur à cadran doit être réglé à angle droit dans la direction du flambage).
- A l'aide du support réglable, régler le comparateur à cadran sur une déviation de 10mm.

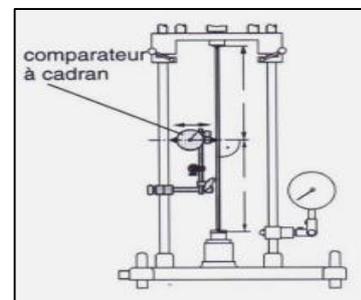


Figure III-6 : Réglage du comparateur. [17]

- Mettre lentement l'éprouvette en charge à l'aide de l'écrou de mise en charge.

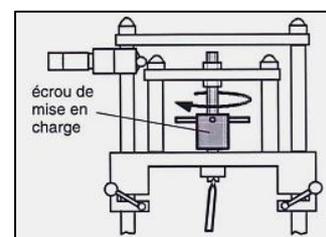


Figure III-7 : Mise en charge. [17]

- Lire et noter le déplacement de la barre, jusqu'à ce que la charge appliquée n'augmente plus ce qui nous donne la flèche maximale et l'effort critique expérimental.

II.3. Choix du matériau

On adopte les éprouvettes en acier de l'appareil WP120. (Voir Annexe A).

II.3.1. Dimensions des éprouvettes

Les dimensions des éprouvettes sont :

- $L = 600\text{mm}, 650\text{mm}, 700\text{mm}$
- $b = 20\text{mm}$
- $h = 4\text{mm}$

➤ Moment d'inertie de l'éprouvette

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 4^3}{12} = 106.66 \text{ mm}^4$$

➤ Rayon de giration i

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{106.66}{20 \cdot 4}} = 1.1546 \text{ mm}$$

➤ Elancement

1. Barre bi-articulée

$$\lambda = \frac{L_k}{i} \text{ avec } l_k = l_0$$

- Pour $L_0 = 600\text{mm}$

$$\lambda = \frac{L_0}{i} = \frac{600}{1.1546} = 519.66$$

- Pour $L_0 = 650\text{mm}$

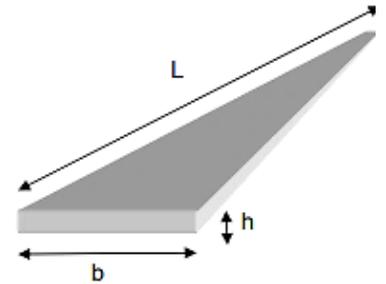
$$\lambda = \frac{L_0}{i} = \frac{650}{1.1546} = 562.965$$

- Pour $L_0 = 700\text{mm}$

$$\lambda = \frac{L_0}{i} = \frac{700}{1.1546} = 606.27$$

2. Barre encastree-articulée

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{0.7 \times 650}{1.1546} = 394.078$$



3. Barre bi-encastée

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{0.5 \times 650}{1.1546} = 281.482$$

III. Partie pratique

III.1. Flambement simple

III.1.1. Barre bi-articulée



Figure III-8 : Barre bi-articulée.

On place l'éprouvette entre deux extrémités articulées, et on met l'éprouvette lentement en charge à l'aide de l'écrou de mise en charge jusqu'à obtenir la valeur de la flèche maximale en fonction de la charge N et déduire la charge N_{cr} .

Cette expérience sera effectuée sur trois éprouvettes de différentes longueurs L_0 .

On obtient les résultats suivants :

- Pour $L_0=700\text{mm}$

Tableau III-1 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 700mm.

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	0
150	0
200	0
250	0.02
300	0.09

350	0.3
400	0.535
450	1.075
480	5.265

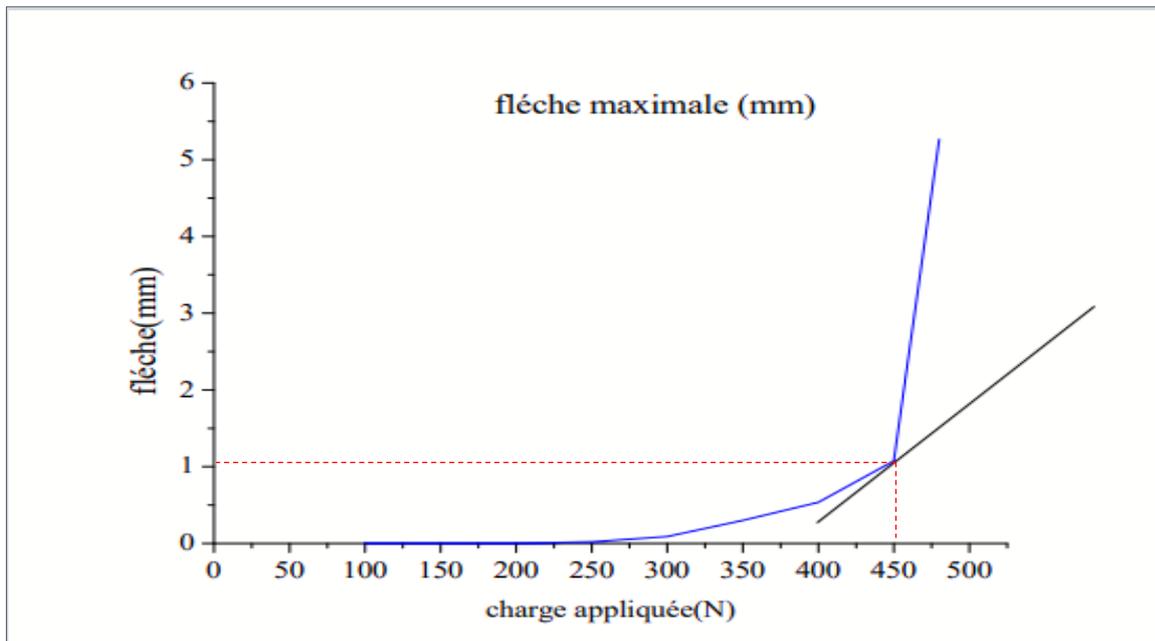


Figure III-9 : Courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 700 mm.

➤ **Détermination de la charge critique expérimentale**

On remarque que la courbe augmente jusqu'à subir un changement brusque à $N = 450 \text{ N}$ cela veut dire que la barre est flambée.

On déduit que l'effort critique expérimental $N_{cr} = 450 \text{ N}$ avec un déplacement approximatif $y = 1.075 \text{ mm}$

➤ **Détermination de la charge critique théorique**

D'après les équations démontrées par la théorie d'Euler en chapitre deux (II), on a l'effort normal critique théorique vaut :

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (\text{III.1})$$

On a : $I = 106.66 \text{ mm}^4$

$E = 210000 \text{ Mpa}$

$l_0 = 700 \text{ mm}$

A.N :

$$N_K = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 106.66}{(700)^2} = 451.2N$$

- Pour $L_0 = 650$ mm

Tableau III-2 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 650mm.

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	0
150	0.02
200	0.02
250	0.115
300	0.21
350	0.345
400	0.535
450	0.86
500	1.41
550	3.67
575	7.575

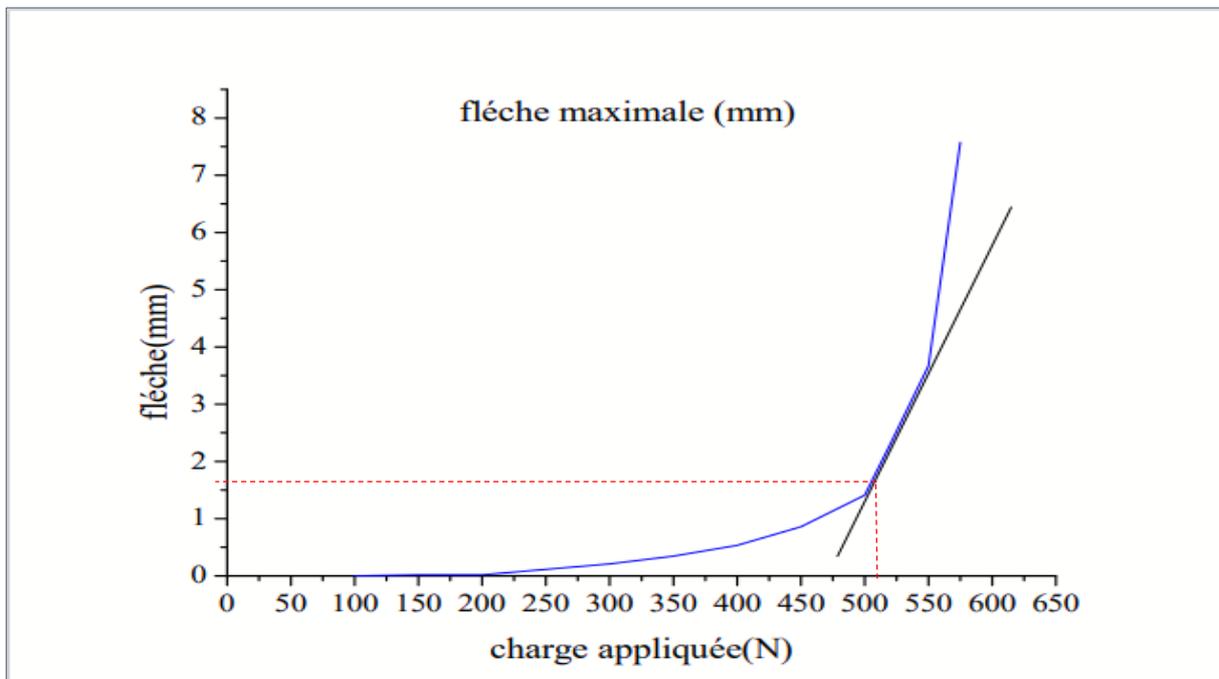


Figure III-10 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 650mm.

➤ **Détermination de la charge critique expérimentale**

On remarque que la courbe augmente jusqu'à subir un changement brusque à N entre **500** et **550** qui est égale à **520 N**, cela veut dire que la barre est flambée.

Par interpolation :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (\text{III.2})$$

A.N

$$f(520) = f(500) + \frac{f(550) - f(500)}{550 - 500} (520 - 500) = 2.3 \text{ mm}$$

On déduit que l'effort critique expérimental $N_{cr} = 520 \text{ N}$ avec un déplacement approximatif $y = 2.3 \text{ mm}$.

➤ **Détermination de la charge critique théorique**

D'après les équations démontrées par la théorie d'Euler en chapitre deux (2) on a :

L'effort normal critique théorique vaut :

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

On a : $I = 106.66 \text{ mm}^4$

$E = 210000 \text{ Mpa}$

$l_0 = 650 \text{ mm}$

A.N :

$$N_K = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 106.66}{(650)^2} = 523.231 \text{ N}$$

- Pour $L_0 = 600 \text{ mm}$

Tableau III-3 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 600mm.

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	0
150	0.05
200	0.13
250	0.22
300	0.38

350	0.54
400	0.64
450	0.89
500	1.24
550	1.82
600	2.95
650	6.75
675	8
700	9

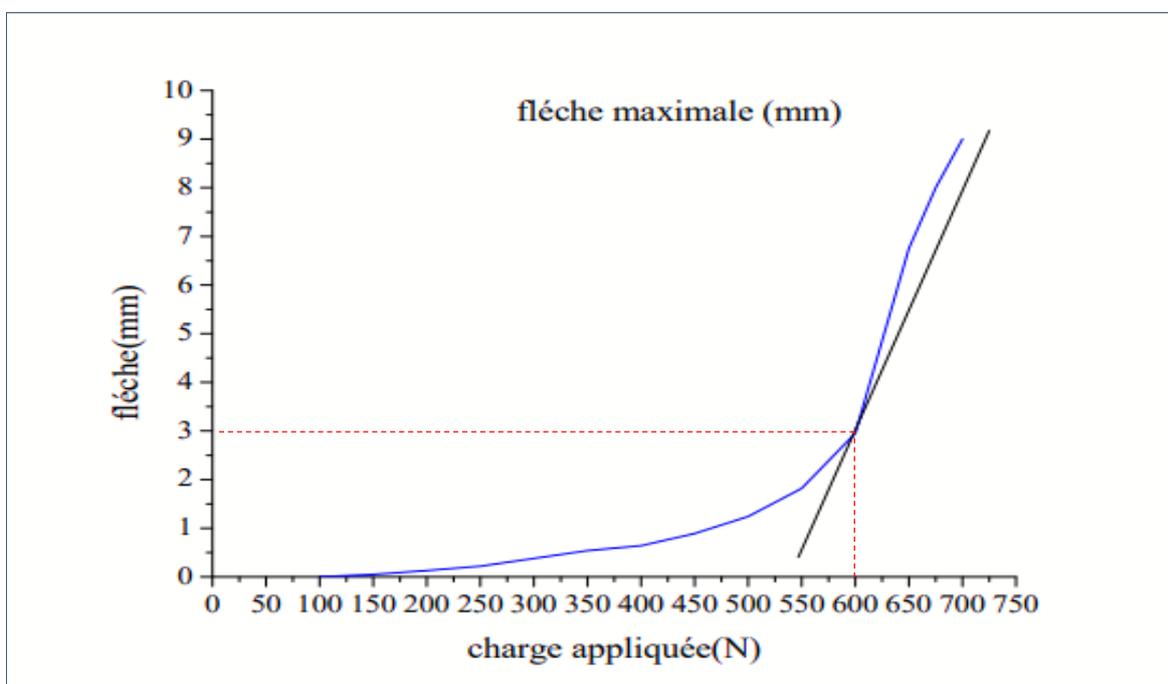


Figure III-11 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 600mm.

➤ **Détermination de la charge critique expérimentale**

On remarque que la courbe augmente jusqu'à subir un changement brusque à $N = 600$ N cela veut dire que la barre est flambée.

On déduit que l'effort critique expérimental $N_{cr} = 600$ N avec un déplacement approximatif $y = 2.95$ mm

➤ **Détermination de la charge critique théorique**

D'après les équations démontrées par la théorie d'Euler en chapitre deux (II), on a :

L'effort normal critique théorique vaut :

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

On a : $I=106.66\text{mm}^4$

$E=210000\text{Mpa}$

$l_0 = 600\text{mm}$

A.N :

$$N_K = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 106.66}{(600)^2} = 614.0703\text{N}$$

III.1.2. Barre encastrée-articulée



Figure III-12 : Barre encastrée-articulée.

On place l'éprouvette entre deux extrémités une est encastrée et l'autre est articulée, et on met l'éprouvette lentement en charge à l'aide de l'écrou de mise en charge jusqu'à obtenir la valeur de la flèche maximale en fonction de la charge N et déduire la charge N_{cr} .

Cette expérience sera effectuée sur une seule éprouvette de longueur $L_0 = 650\text{mm}$

On obtient les résultats suivants :

Tableau III-4 : Tableau de mesure d'une barre encastrée-articulée de 650 mm.

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	0
150	0.06
200	0.105
250	0.135
300	0.2
350	0.255
400	0.34
450	0.395
500	0.5
550	0.63
600	0.82
650	0.975
700	1.205
750	1.555
800	2.5
850	3.295
900	4.65
950	6.415
1000	8

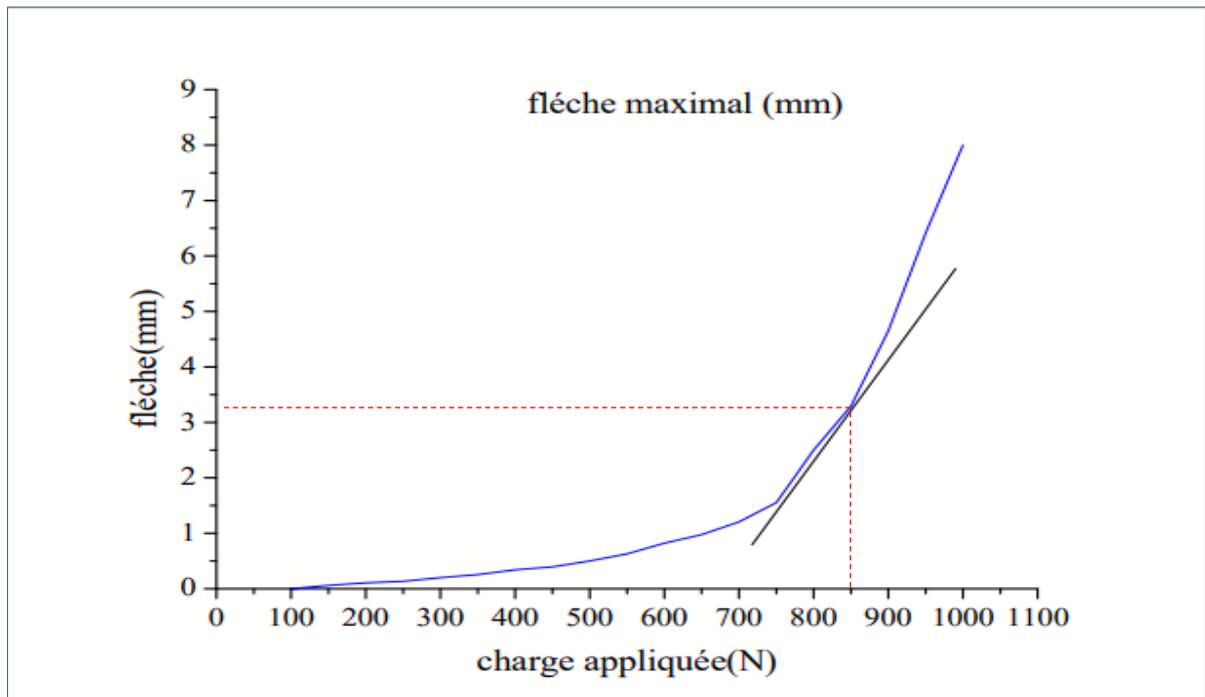


Figure III-13 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre encastree-articulée de 650mm.

➤ **Détermination de la charge critique expérimentale**

On remarque que la courbe augmente jusqu'à subir un changement brusque à $N = 850$ N, cela veut dire que la barre est flambée.

On déduit que l'effort critique expérimental $N_{cr} = 850$ N avec un déplacement approximatif $y = 3.295$ mm.

➤ **Détermination de la charge critique théorique**

D'après les équations démontrées par la théorie d'Euler en chapitre deux (II), On a :

$$N_K = \frac{2\pi^2 EI}{L_0^2} \quad (\text{III.3})$$

On a: $I = 106.66 \text{ mm}^4$

$E = 210000 \text{ MPa}$

$L_0 = 650 \text{ mm}$

A.N

$$N_K = \frac{2\pi^2 \cdot 210000 \cdot 106.66}{650^2} = 1046.463 \text{ N}$$

III.1.3. Barre bi-encastée



Figure III-14 : Barre bi-encastée

On place l'éprouvette entre deux extrémités encastées, et on met l'éprouvette lentement en charge à l'aide de l'écrou de mise en charge jusqu'à obtenir la valeur de la flèche maximale en fonction de la charge N et déduire la charge N_{cr} .

Cette expérience sera effectuée sur une seule éprouvette de longueur $L_0 = 650 \text{ mm}$

On obtient les résultats suivants :

Tableau III-4 : Tableau de mesure d'une barre bi-encastée de 650mm

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	0
150	0.1
200	0.13
250	0.15
300	0.16
350	0.19
400	0.22
450	0.24

500	0.27
550	0.31
600	0.33
650	0.37
700	0.41
750	0.46
800	0.53
850	0.59
900	0.64
950	0.68
1000	0.76
1050	0.82
1100	0.91
1150	0.99
1200	1.1
1250	1.25
1300	1.46
1350	1.65
1400	1.81
1450	2.04
1500	2.21
1550	2.42
1600	2.78
1650	3.08
1700	3.63

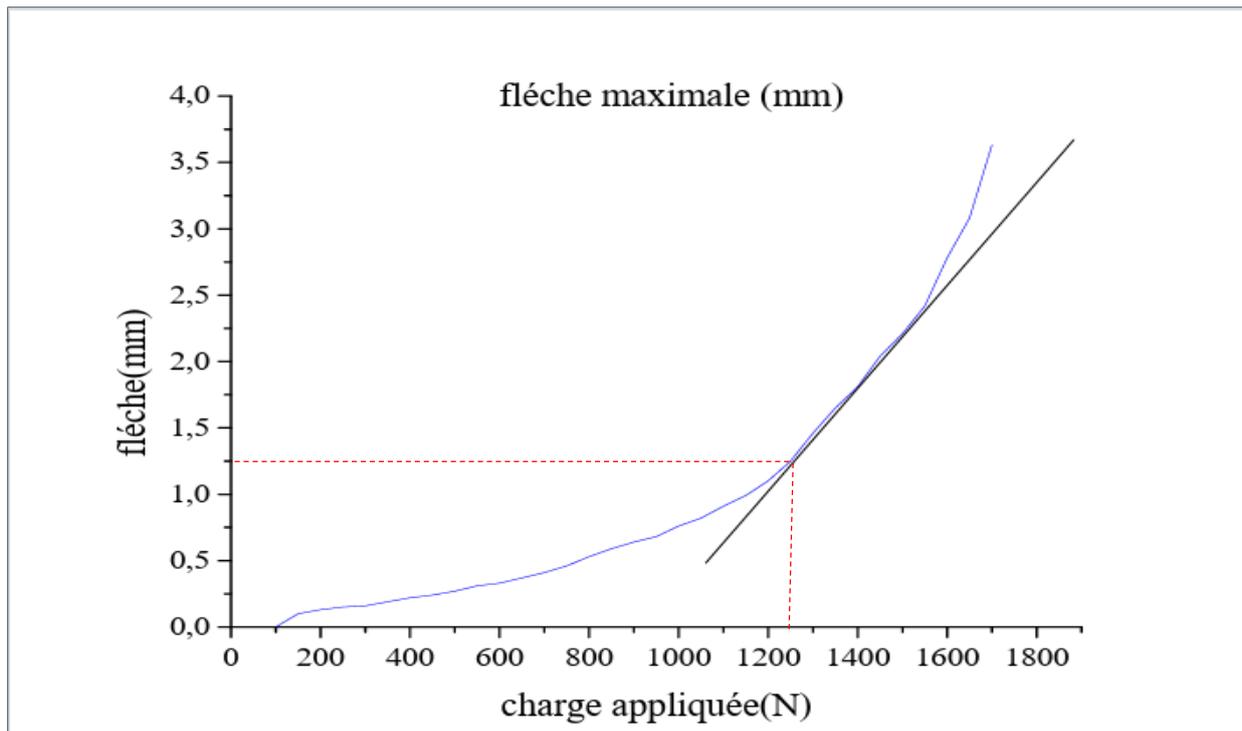


Figure III-15 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-encastrée de 650mm.

➤ **Détermination de la charge critique expérimentale**

On remarque que la courbe augmente jusqu'à subir un changement brusque à $N = 1250$ N, cela veut dire que la barre est flambée.

On déduit que l'effort critique expérimental $N_{cr} = 1250$ N avec un déplacement approximatif $y = 1.25$ mm.

➤ **Détermination de la charge critique théorique**

D'après les équations démontrées par la théorie d'Euler en chapitre deux (02), On a :

$$N_K = \frac{4\pi^2 EI}{l_0^2} \quad \text{(III.4)}$$

On a : $I = 106.66 \text{ mm}^4$

$E = 210000$ MPa

$L_0 = 650$ mm

A.N

$$N_K = \frac{4\pi^2 \cdot 210000 \cdot 106.66}{650^2} = 2092.926 \text{ N}$$

III.2. Flambement Flexion



Figure III-16 : Barre bi-articulée avec une charge transversale.

Cette expérience sera effectuée sur une seule éprouvette bi-articulée de longueur $L_0=650\text{mm}$ sous différentes charges transversales :

- Pour $Q = 5\text{N}$

On obtient les résultats suivants :

Tableau III-6 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale.

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	0.94
150	1.525
200	1.98
250	2.49
300	3.345
350	4.44
400	8.32

450	13.95
475	21

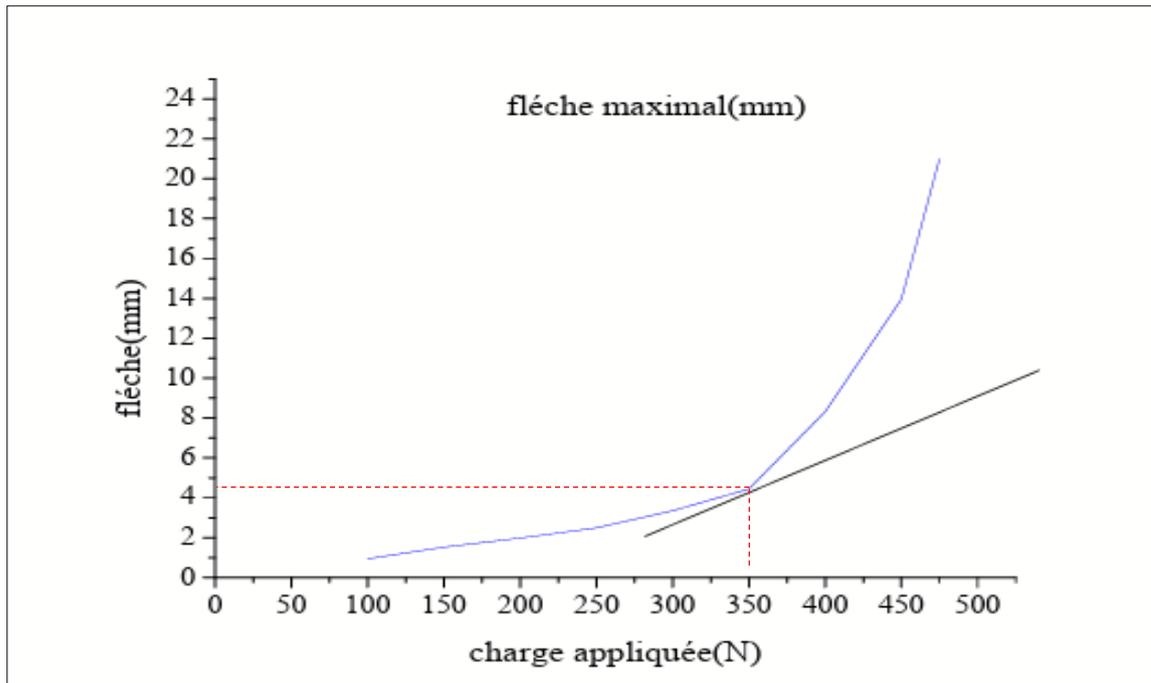


Figure III-17 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d’une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 5N.

- Pour $Q = 10\text{ N}$

On obtient les résultats suivants :

Tableau III-7 : Tableau de mesure d’une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 10N.

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	2.73
150	3.685
200	4.505
250	5.62
300	7.64
350	10.76
400	14.3
425	19.49

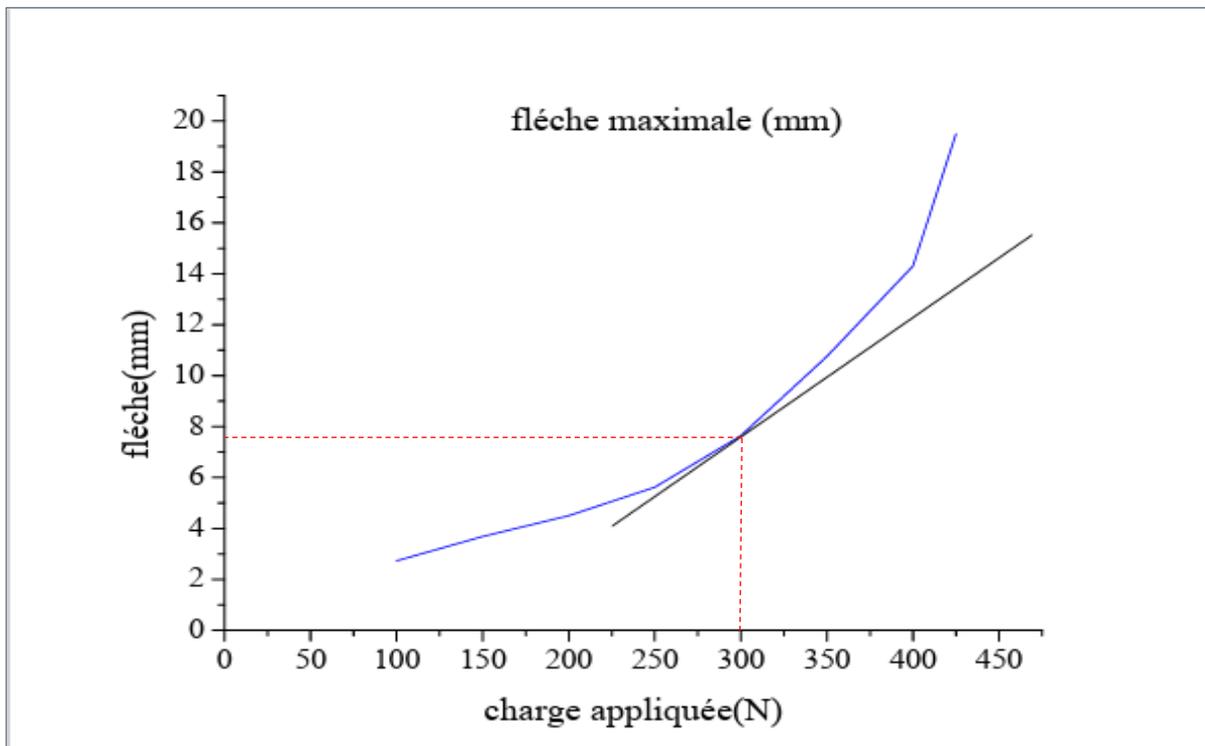


Figure III-18 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 10N.

- Pour $Q = 15 \text{ N}$

On obtient les résultats suivants :

Tableau III-8 : Tableau de mesure d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 15N.

Charge appliquée [N]	Flèche [mm]
100	4.235
150	5.235
200	6.54
250	8.54
300	10.465
350	14.92
400	21.25

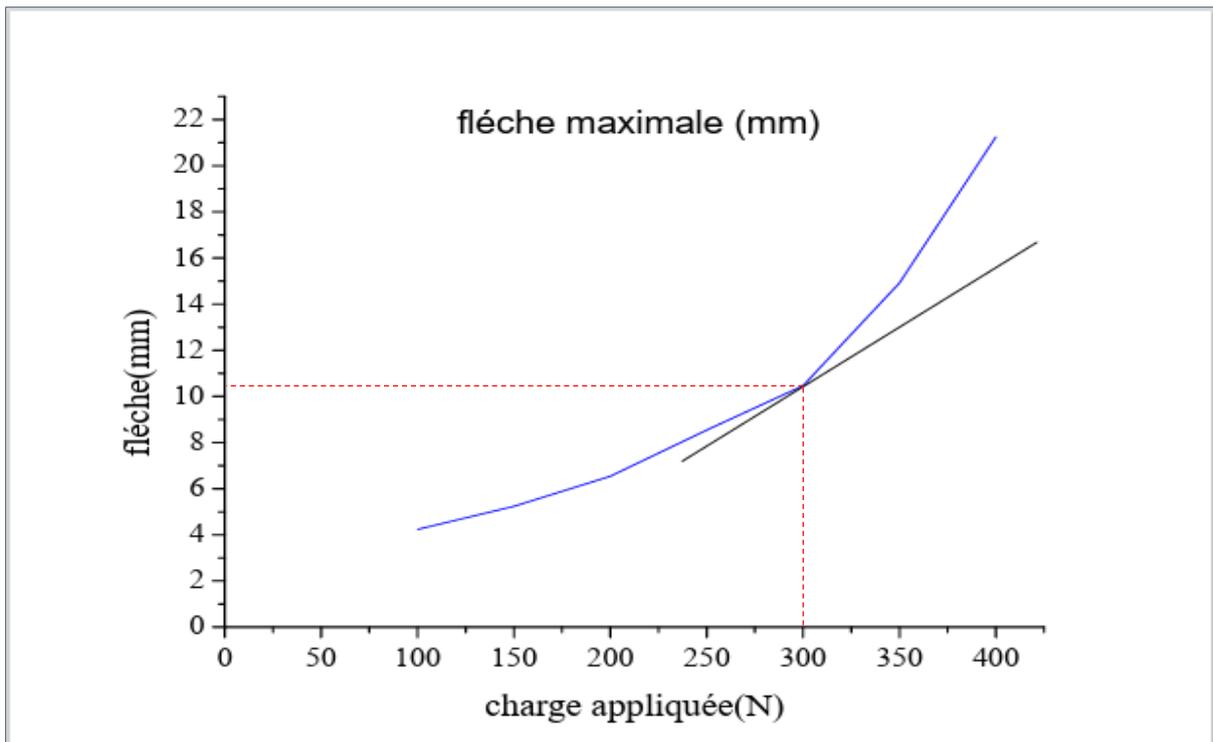


Figure III-19 : courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N d'une barre bi-articulée de 650mm avec une charge transversale de 15N.

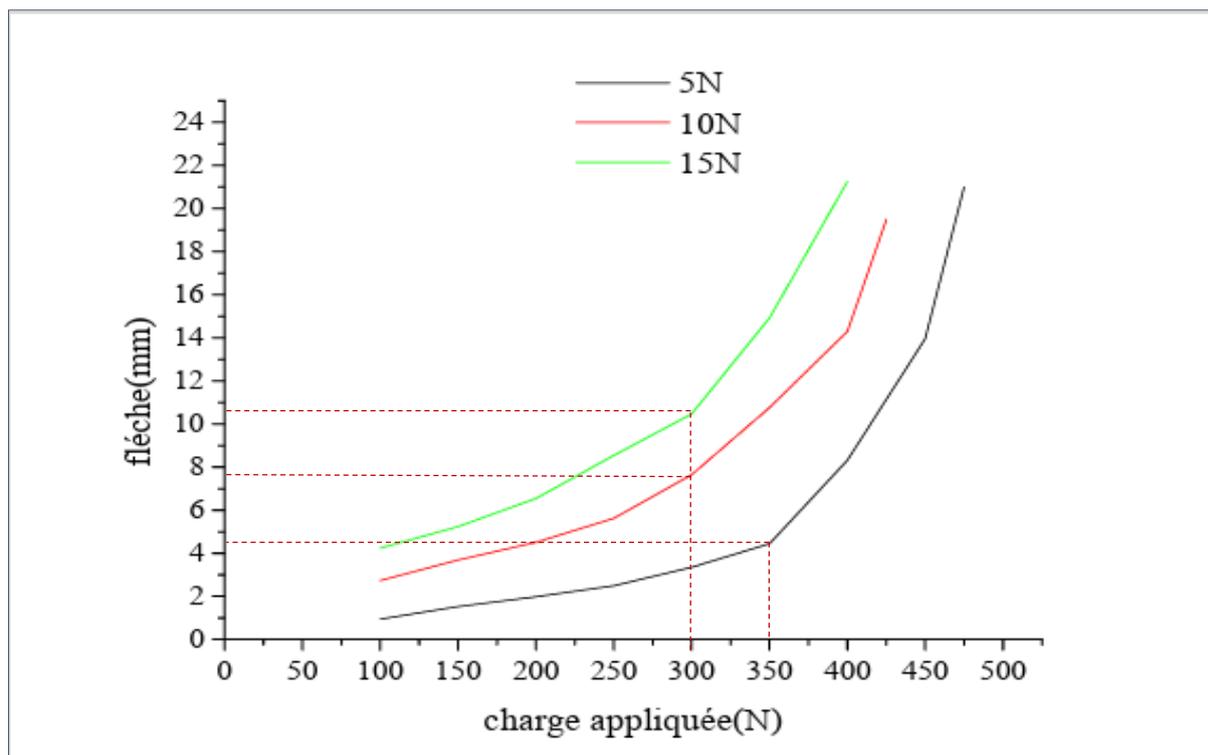


Figure III-20 : Courbes de flambement flexion pour les différentes charges transversales.

III.3. Interprétation des résultats

On remarque que :

1. Plus la longueur de la poutre L_0 diminue, la charge de compression supportée par celle-ci N_{cr} augmente.
2. Les conditions d'appuis influent sur le chargement supporté par la poutre :
 - Les poutres bi-articulées utilisées supportent une charge qui ne dépasse pas 600 N.
 - La poutre encastree-articulée peut supporter une charge de 1000 N.
 - La poutre bi-encastree peut supporter jusqu'à 1700 N.
3. Pour les trois poutres bi-articulées de différentes longueurs la charge critique théorique N_K est supérieure à celle de l'expérimental N_{cr} .
4. Pour les différentes conditions d'appuis la charge critique théorique N_K est supérieure à celle de l'expérimental N_{cr} . Ce qui est attendu du fait que le calcul théorique considère que la barre est parfaite.
5. Plus la charge transversale Q augmente, la charge critique N_{cr} supportée par la poutre diminue.
6. Pour une poutre de même longueur et de même conditions d'appuis, la flèche maximale atteinte par une barre en flambement flexion est plus importante que celle atteinte en flambement simple, ceci est prévisible du fait que la charge transversale et le moment qu'elle engendre accentue la flèche de la poutre.

IV. Aspect réglementaire du flambement

Selon l'eurocode, en compression simple, le risque de flambement n'est à considérer que :

Si $\bar{\lambda} > 0.2$.

Donc :

- Si $\bar{\lambda} \leq 0.2$: $N \leq N_R$
- Si $\bar{\lambda} > 0.2$: $N \leq \chi \beta_A A \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$

Avec :

- $\gamma_{M1} = 1.1$
- $\beta_A = 1$ Pour les sections de classe 1, 2 et 3
- $\beta_A = \frac{A_{ff}}{A}$ Pour les sections de classe 4
- A : Aire de la section

- f_y : Limite élastique
- χ : coefficient de réduction du au flambement.

Le coefficient χ prend en compte les imperfections de toutes sortes. Pour le déterminer on passe par les 4 courbes de flambement correspondant à une graduation des imperfections présentées par les barres réelles ; les courbes de flambement dépendent du type de section, Des caractéristiques géométriques ainsi que de l'axe de flambement :

- Calculer ε $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ (III.5)

- Calculer l'élancement critique d'Euler λ_{cr} $\lambda_{cr} = 93.9 \varepsilon$ (III.6)

- Calculer l'élancement λ $\lambda = \frac{L_0}{i}$ (III.7)

- Calculer l'élancement réduit $\bar{\lambda}$ $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{cr}} \sqrt{\beta_A}$ (III.8)

• Déterminer la courbe du flambement Tab 5.5.3

- Calculer ϕ $\phi = 0.5 [1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$ (III.9)

- Calculer χ $\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}$ mais $\chi \leq 1$ (III.10)

α : Facteur d'imperfection

Courbe de flambement	a	b	c	d
α	0.21	0.34	0.49	0.76

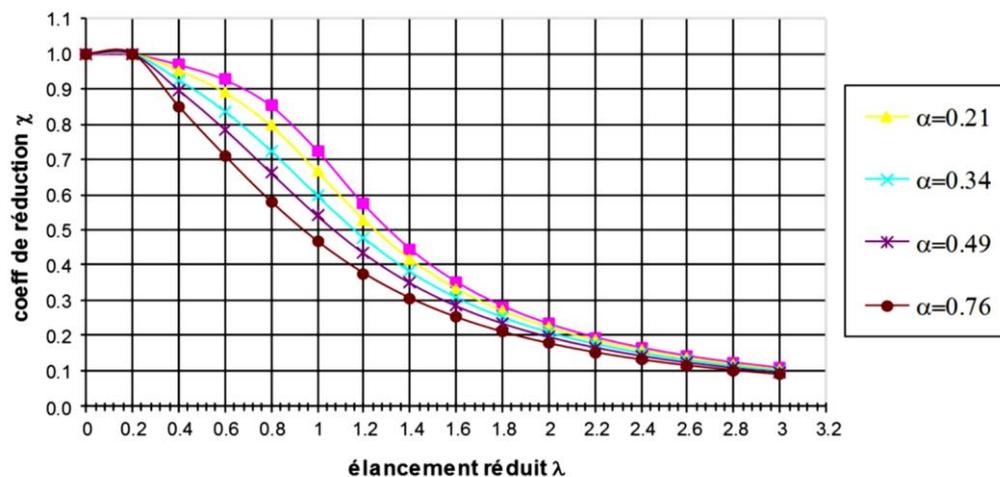


Figure III-21 : Courbe de flambement et facteur d'imperfection. [3]

Pour notre étude on a cinq cas de flambement simple selon les différentes longueurs L_0 et conditions d'appuis.

- Pour une poutre bi-articulée de longueur $L_0=700$ mm

On a une section de classe 1 donc $\beta_A = 1$, avec :

$$L_0=700\text{mm}$$

$$i = 1.1546\text{mm}$$

$$A=80\text{mm}^2$$

$$\lambda=606.27$$

$$f_y = 300\text{Mpa}$$

$$\gamma_{M1}=1.1$$

A.N:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{300}} = 0.885$$

$$\lambda_{cr}=93.9 \varepsilon=93.9*0.885=83.1$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{cr}} \sqrt{\beta_A} = \frac{606.27}{83.1} * \sqrt{1} = 7.295$$

$\bar{\lambda} > 0.2$ Donc il y'a risque de flambement

On a une section pleine donc la courbe du flambement est la courbe « c » (Voir Annexe B),

d'où $\alpha = 0.49$

Donc :

$$\phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] = 0.5[1 + 0.49(7.295 - 0.2) + 7.295^2] = 28.846$$

D'où :

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{28.846 + \sqrt{28.846^2 - 7.295^2}} = 0.017$$

$$N_R \leq \chi \beta_A A \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.017 \times 1 \times 80 \times \frac{300}{1.1}$$

$$N_R \leq 370.9\text{N}$$

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau III-9 : Charge critique réglementaire selon l'Eurocode3.

Longueur L_0	K	ε	λ_{cr}	λ	$\bar{\lambda}$	α	ϕ	χ	N_R
600	1	0.885	83.1	519.66	6.25	0.49	21.513	0.023	501.81
650	1	0.885	83.1	562.965	6.77	0.49	25.026	0.02	436.36

700	1	0.885	83.1	606.27	7.295	0.49	28.846	0.017	370.9
650	0.5	0.885	83.1	281.482	3.38	0.49	6.991	0.076	1664.43
650	0.7	0.885	83.1	394.078	4.74	0.49	12.84	0.04	872.727

D'après le tableau suivant on remarque que :

- Plus la longueur de la barre augmente, l'effort normal critique déterminé par l'eurocode N_R diminue.
- Plus le coefficient de flambement K diminue, l'effort normal critique N_R augmente.
- Aussi que les résultats obtenus avec l'aspect règlementaire prennent plus de sécurité et sont donc même plus petit que ceux de l'aspect expérimental.

V. Conclusion

On conclut que la longueur de la barre et les conditions d'appuis sont parmi les principaux facteurs qui influent sur le phénomène du flambement, et qu'en flambement flexion le moment fléchissant appliqué sur la barre amplifie des contraintes au niveau des sections transversales, ce qui engendre la réduction de la capacité portante par rapport au flambement simple.

La charge critique théorique d'Euler ne pourrait être atteinte que dans le cas idéal d'une barre parfaitement rectiligne et homogène, sans aucune imperfection géométrique et chargée sans aucune excentricité. Dans la réalité, ces imperfections ont pour conséquence de mener à un flambage précoce de la barre, sous-estimé par la formule d'Euler.

Enfin, l'effort normal critique réglementaire est moins important par rapport à la charge critique théorique d'Euler et la charge expérimentale et ceci revient aux coefficients de sécurité prisent par l'Eurocode 3.

CHAPITRE IV

SIMULATION NUMÉRIQUE

I. Introduction

Pour analyser un phénomène naturel en général ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à effectuer une analyse numérique, la méthode des éléments finis (MEF, ou FEM pour finite element method en anglais) est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, etc.).

Cette méthode permet par exemple de calculer numériquement le comportement d'objets même très complexes, à condition qu'ils soient continus et décrits par une équation aux dérivées partielles linéaire, exemple : déformation d'une structure métallique.

Pour notre étude on va utiliser le logiciel ETABS comme un outil de simulation numérique.

II. Les étapes de modélisation d'une barre

On prend un exemple d'une barre en acier bi-articulée de longueur $L_0=0.7$ m. Nous avons par la suite fait de même pour toutes les longueurs étudiées expérimentalement et théoriquement.

II.1. Initialisation du modèle

- Démarrer le programme.
- Choisir les unités par défauts avant de commencer, on adopte le [KN.m] dans la liste à droite de la barre d'état.
- Commencer un nouveau modèle : **File** → **New model** → **Blank**.
- Définir la grille verticale et horizontale : **Edit** → **Edit stories and grid systems**.

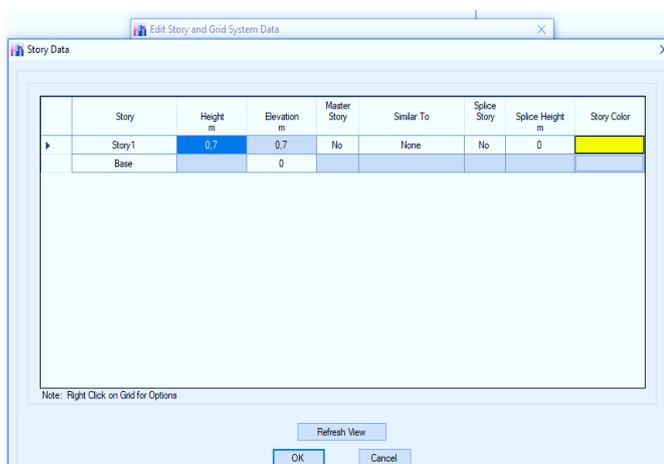


Figure IV.1 : Grid suivant l'axe z.

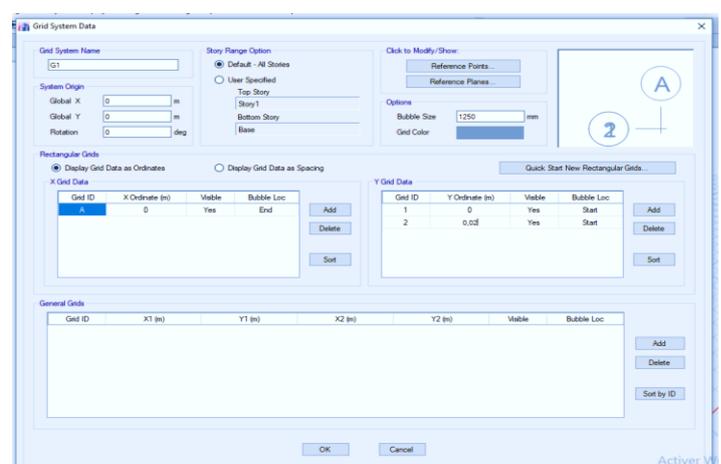


Figure IV.2 : Grid suivant l'axe x et y.

II.2. Définition des paramètres du modèle :

- Définir le matériau : **Define**→**Material properties**→ **Add new material** .
- Ajouter un nouveau matériau « **Steel** ($E=210000$ MPa , $\nu = 0.3$, $\rho= 7850$ Kg/m³) ».

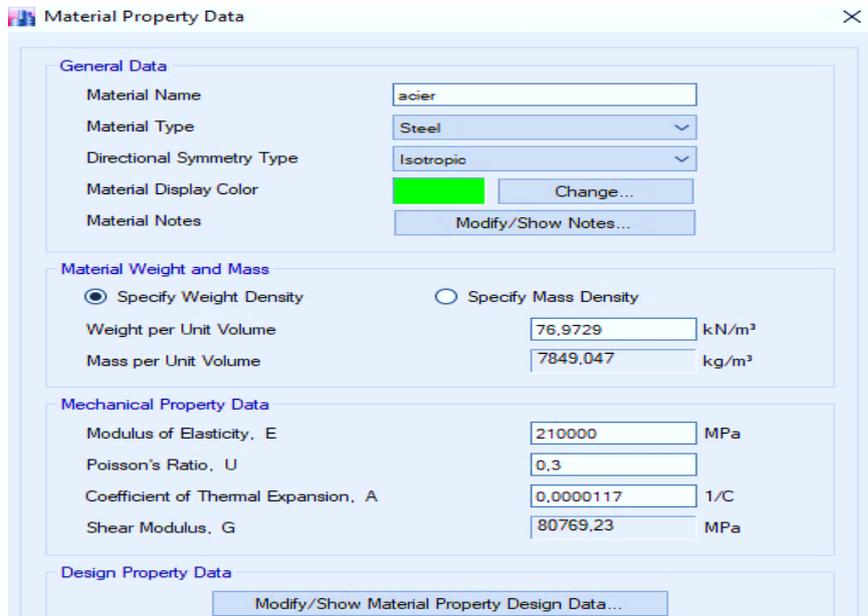


Figure IV.3 : Caractéristique du matériau.

- Modifier le matériau: **Modify/Show material property design data** → $f_y=300$ MPa

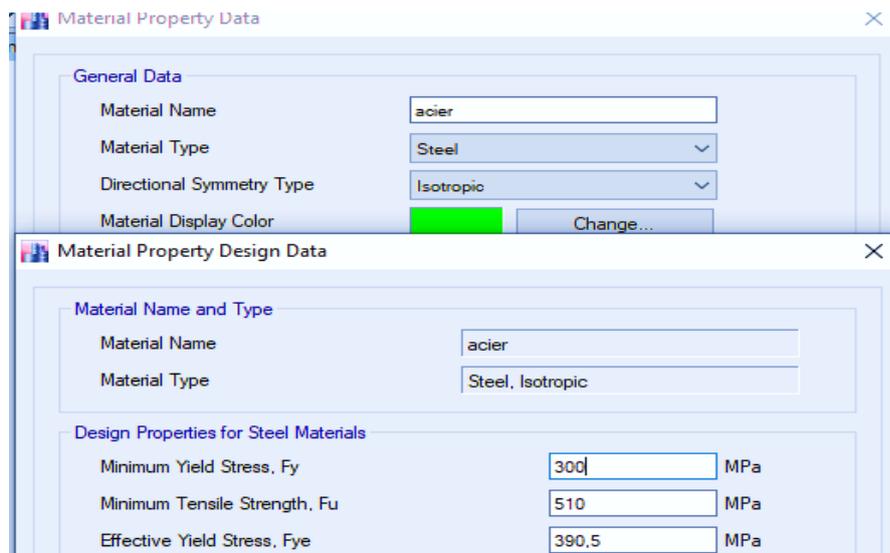


Figure IV.4 : Contrainte limite élastique du matériau.

- Définir la section de la barre : **Define**→**Section properties**→**Frame section**→**Add new property**→choisir « **Steel plate** ».
- Section de la barre $(4 \times 20) \text{mm}^2$, matériau : acier.

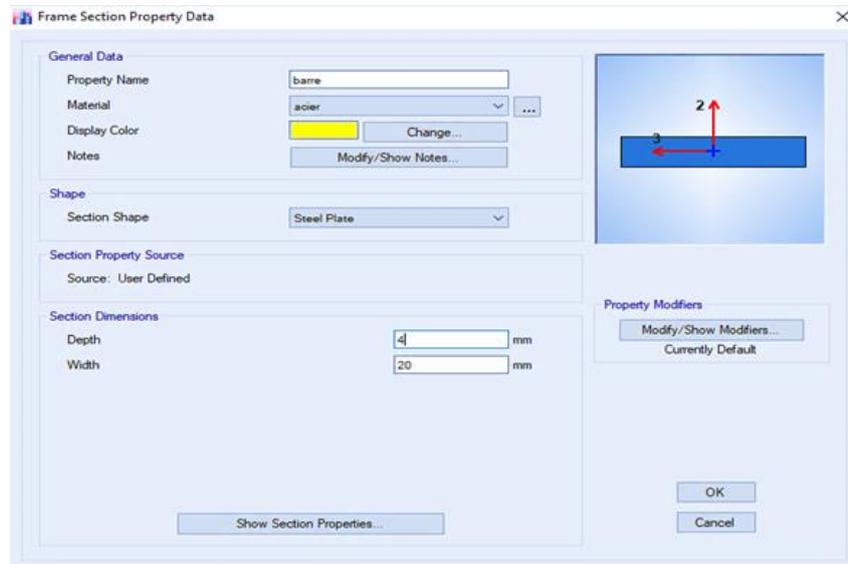


Figure IV.5: Section de la barre.

II.3. Dessin du modèle

On dessine en utilisant les icônes de l'interface du logiciel à la base flottante située à droite.

II.4. Assigner les conditions aux appuis

- Sélectionner la base de la barre : **Assign** →**Joints** →**Restraints**.
(On fait la même chose pour le haut de la barre)

II.5. Application du chargement

- Sélectionner le point d'application de la charge (le haut de la barre) : **Assign**→**Joint loads** →**Force**.

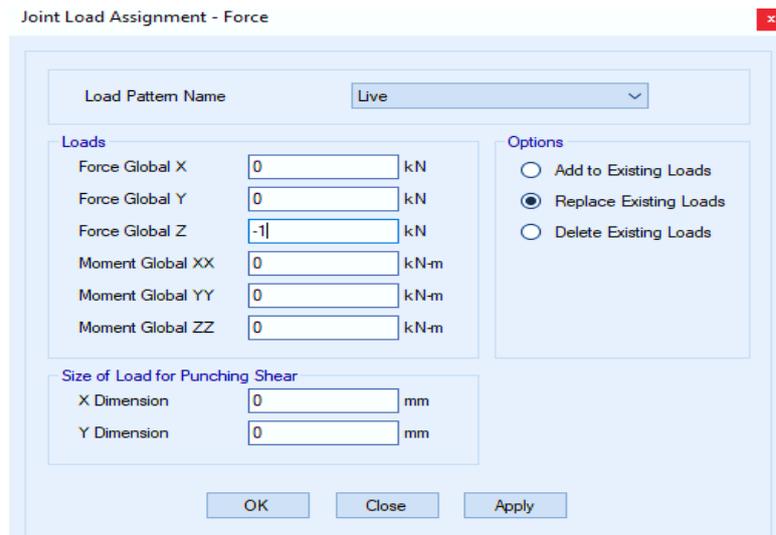


Figure IV.6 : Application de la charge.

- Pour que la barre soit flambée on doit introduire une force dans **Load cases** :
Define→**Load cases** →**Live**→**Modify**→**Buckling**.

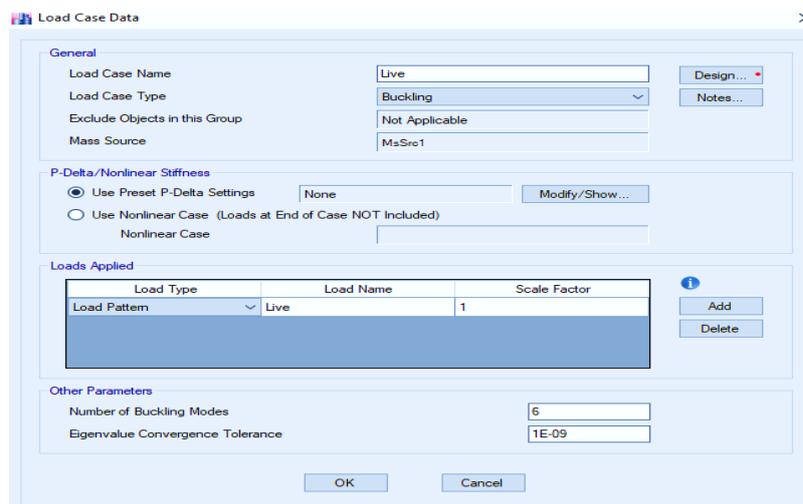


Figure IV.7 : Définition de la charge appliquée.

II.6. Maillage de la section

- **Edit**→**Edit frames**→**Divide frames**→**Ok**.

II.7. Exécuter l'analyse

L'exécution du problème peut être démarré en sélectionnant **Analyse** et **Run analysis**, ou bien en appuyant sur **F5** ou l'icône .

III. Les éléments qui influent sur la charge critique numérique

Parmi les éléments qui influent sur la charge critique du flambement on cite : la longueur de flambement L_K (Conditions d'appuis et la longueur initiale) , le moment d'inertie I et le module de Young E selon le matériau utilisé.

III.1. Les conditions d'appuis et longueur de la barre

Pour voir l'influence des conditions d'appuis et la longueur de flambement de la barre, on modélise une barre d'acier d'une section de $(4 \times 20) \text{ mm}^2$ et d'un module de Young $E=210000 \text{ Mpa}$, avec changement de conditions d'appuis (bi-encasté, bi-articulé, articulé-encasté) et variation de longueur de la barre $L_0 = (500, 550, 600, 650, 700 \text{ mm})$.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau IV.1 : Charges critiques numériques selon les différentes conditions d'appuis et longueurs de barres

Longueur de la barre(mm)	Coefficient de flambement K	Charge critique numérique (N)
500	1	884.18
	0.7	1808.5
	0.5	3535.77
550	1	730.7
	0.7	1494.7
	0.5	2922.24
600	1	614.04
	0.7	1256.03
	0.5	2455.6
650	1	523.22
	0.7	1070.33
	0.5	2092.97
700	1	451.15
	0.7	923.12

	0.5	1806.1
--	-----	--------

Les résultats de ce tableau sont représentés sur la courbe suivante :

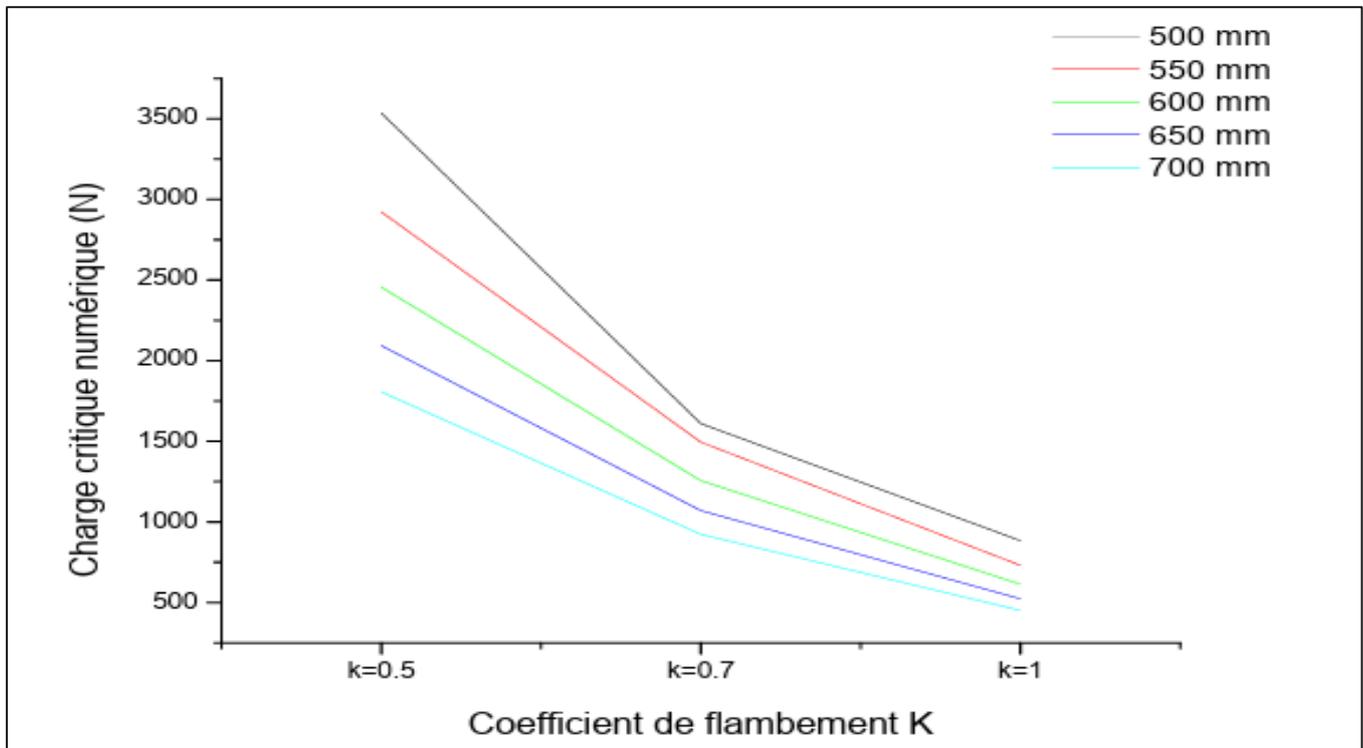


Figure IV.8 : courbe de la charge critique numérique en fonction de coefficient de flambement pour les différentes longueurs.

➤ D'après cette courbe on remarque que :

- Quel que soit les conditions d'appuis de la barre, plus la longueur de la barre augmente plus la charge critique numérique diminue.
- Quel que soit la longueur de la barre, plus cette dernière est rigide plus la charge critique numérique augmente.

III.2. Le moment d'inertie de la barre

On modélise une barre d'acier $E=210000$ Mpa et d'une longueur $L_0 = 650mm$ avec une variation d'épaisseurs (4,8,12,16mm), ce qui engendre une variation de moment d'inertie (I) pour différentes conditions aux appuis $k=1$, $k=0.7$, $k=0.5$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau IV.2 : Charges critiques numériques en fonction du moment d'inertie pour différentes conditions d'appuis.

Epaisseur (mm)	Moment d'inertie (mm^4)	Coefficient de flambement K	Charge critique numérique (N)
4	106.66	1	523.22
		0.7	1070.33
		0.5	2092.97
8	853.33	1	4184
		0.7	8557
		0.5	1672
12	2880	1	14115
		0.7	28849
		0.5	56340
16	6826.666	1	33437
		0.7	68280
		0.5	133198

Les résultats du tableau sont représentés sur la courbe suivante :

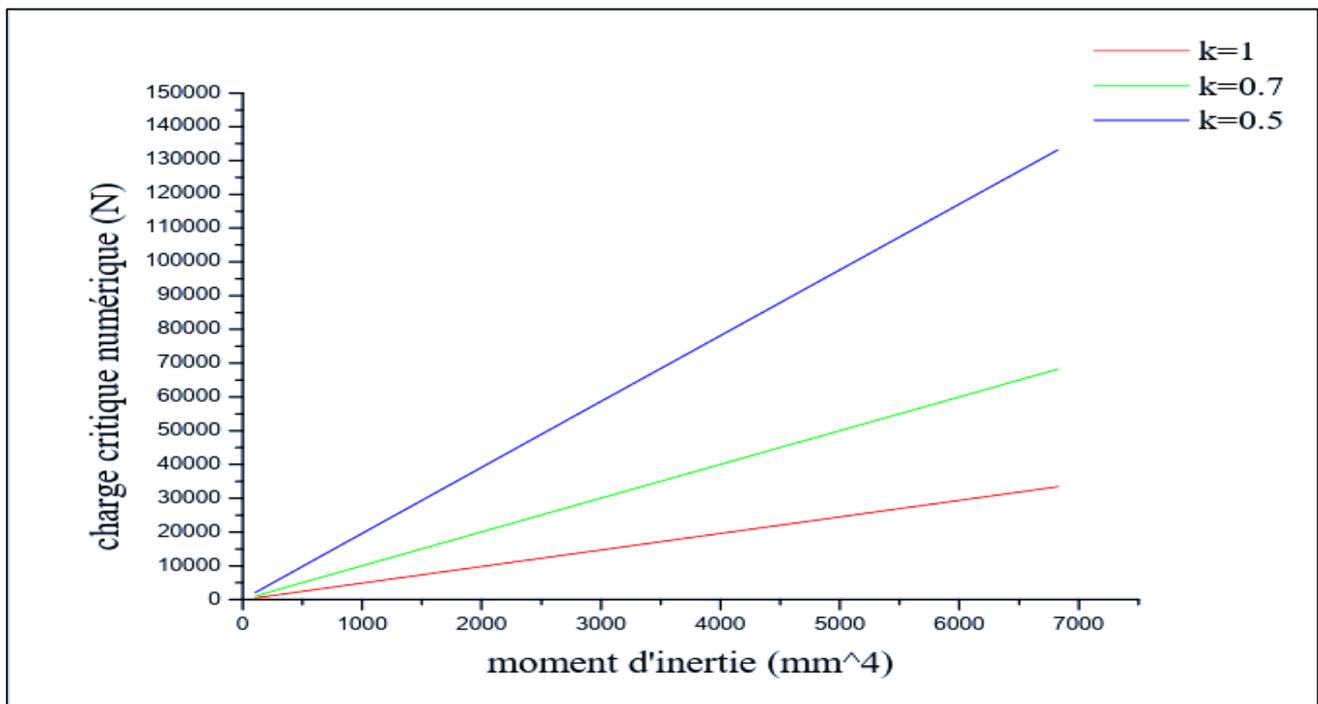


Figure IV.9 : Courbe de la charge critique numérique en fonction du moment d'inertie pour les différentes conditions d'appuis

- D'après cette courbe on remarque que : quel que soit les conditions d'appuis de la barre, plus le moment d'inertie augmente, la charge critique numérique supportée par la barre augmente, ce qui est logique parce que le moment d'inertie est un facteur multiplicateur dans l'équation de la charge critique théorique.

III.3 Le module de Young (matériau de la barre)

On modélise une barre d'une longueur $L_0 = 650\text{mm}$ et d'une section $(4*20)\text{mm}^2$ avec une variation du matériaux (acier, béton, aluminium) pour différentes conditions aux limites $k=1$, $k=0.7$, $k=0.5$.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau IV.3 : Charges critiques numériques selon les différentes conditions d'appuis pour trois matériaux différents.

Coefficient de flambement K	Matériau	Charge critique numérique (N)
0.5	Béton (E=31000Mpa)	308.97
	Aluminium (E=69637.05MPa)	694.03
	Acier (E=210000Mpa)	2092.97
0.7	Béton (E=31000Mpa)	158
	Aluminium (E=69637.05MPa)	354.92
	Acier (E=210000Mpa)	1070.33
1	Béton (E=31000Mpa)	77.24
	Aluminium (E=69637.05MPa)	173.5
	Acier (E=210000Mpa)	523.22

Les résultats du tableau sont représentés sur la courbe suivante :

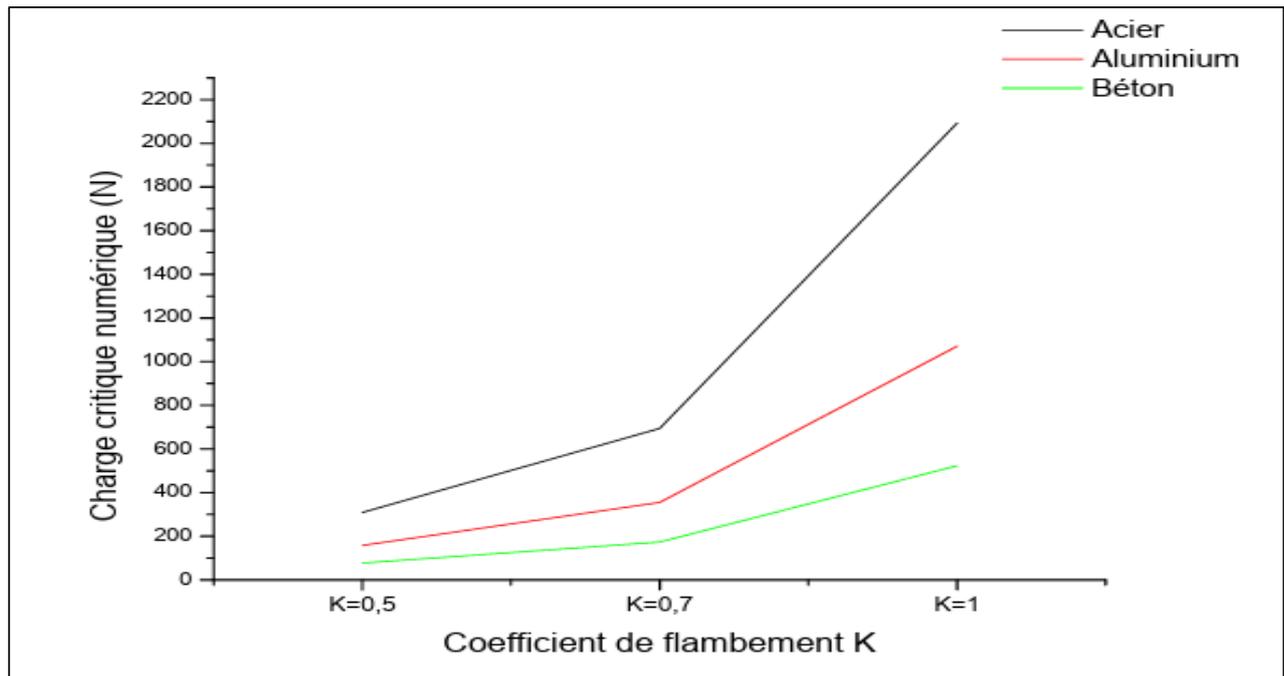


Figure IV.10 : la courbe de la charge critique numérique en fonction de coefficient de flambement k pour les différents matériaux

- D’après cette courbe on remarque que : quel que soit les conditions d’appuis de la barre, plus le module de Young E augmente, la charge critique numérique supportée par la barre augmente, ce qui est logique parce que le module du Young est un facteur multiplicateur dans l’équation de la charge critique théorique.

IV. Récapitulatif des résultats obtenus des barres étudiées sous les différents aspects théorique, expérimental, réglementaire et numérique

Tableau IV.4 : Charges critiques selon la longueur et les conditions d’appuis

Longueur de la barre L_0 [mm]	K	N_k [N] Théorique	N_{cr} [N] Expérimental	N_R [N] Réglementaire	N_{num} [N] Numérique
700	1	451.2	450	370.9	451.15
650	0.5	2092.93	1250	1664.43	2092.97
650	0.7	1046.46	850	872.727	1070.33
650	1	523.23	520	436.36	523.22
600	1	614.07	600	501.81	614.04

- D’après ce tableau on remarque que l’effort normal critique déterminé par ETABS correspond à celui déterminé par la théorie.

V. Conclusion

Après l'étude qu'on a effectuée, on conclut que

- L'Augmentation de la longueur de la barre L_0 engendre une augmentation de la charge critique numérique.
- Les encastremets au niveau des appuis engendrent une augmentation d'effort normal critique numérique.
- Le moment d'inertie est proportionnel à la charge critique numérique.
- Le matériau de la barre influe sur la charge critique numérique, plus le module de Young augmente, la charge critique augmente.
- L'effort normal critique déterminé par l'ETABS correspond à celui déterminé par la théorie d'Euler et supérieur à ceux déterminés par l'Eurocode et l'expérimental parce que ETABS considère aussi que la barre est parfaite et que la charge est appliquée au centre de gravité de la section transversale d'extrémité.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

Le projet de fin d'étude est une occasion à l'étudiant d'appliquer les connaissances acquises durant sa formation. Dans le cas notre projet de fin de cycle nous avons étudié le phénomène d'instabilité des barres élancées au flambement, une expérience qui nous a permis d'approfondir nos connaissances sur le phénomène sous différents aspects : théorique, expérimental, règlementaire et numérique.

Par ailleurs, cette étude nous a conduit à dégager un certain nombre de conclusions dont les plus importantes sont :

- Les poutres élancées sont très sensibles aux efforts de compression et de flexion, qui causent le flambement, et par conséquent la connaissance des charges critiques est nécessaire pour la conception des structures.
- Les conditions d'appuis et la longueur de la poutre jouent un rôle très important sur la valeur de la charge critique N_{cr} .
- Les résultats théoriques obtenus sont supérieurs aux résultats expérimentaux, cela veut dire que la poutre n'est pas vraiment parfaite et ne reflète pas les hypothèses théoriques.
- L'Eurocode3 prend en considération des coefficients de sécurité qui englobent les différentes imperfections qui existent dans la poutre, ce qui engendre la diminution de l'effort critique.
- La vérification des résultats avec l'Eurocode3 est indispensable pour une meilleure résistance au flambement.

D'après l'étude qu'on a faite on a constaté que le moyen le plus économique d'améliorer la résistance au flambement d'une barre comprimée est de diminuer sa longueur de flambement, pour cela on peut : disposer des appuis intermédiaires ou modifier ses conditions d'appuis, comme on peut aussi augmenter les dimensions de la section droite.

ANNEXES

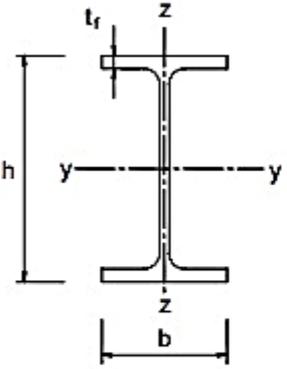
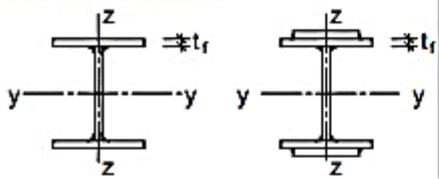
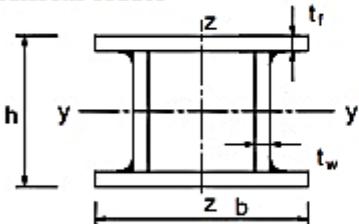
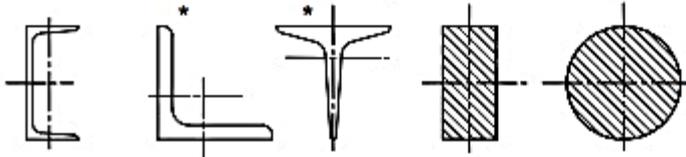
Annexes

Annexe A

Jeu standard WP 120				
N°:	Matériau	Section transversale en mm ²	Longueur mm	Appui
S1	Acier à outils 1.2842	20 x 4	350	couteau/couteau
S2	Acier à outils 1.2842	20 x 4	500	couteau/couteau
S3	Acier à outils 1.2842	20 x 4	600	couteau/couteau
S4	Acier à outils 1.2842	20 x 4	650	couteau/couteau
S5	Acier à outils 1.2842	20 x 4	700	couteau/couteau
S6	Acier à outils 1.2842	20 x 4	650	encastrement/couteau
S7	Acier à outils 1.2842	20 x 4	650	encastrement/encastrement
S8	Alu. AlMgSi0.5 F22	25 x 6	600	couteau/couteau
S9	Laiton CuZn40Pb2	25 x 6	600	couteau/couteau
S10	Cuivre E-Cu	25 x 6	600	couteau/couteau
S11	Cuivre E-Cu	25 x 6	600	couteau/couteau
Jeu d'accessoires WP 120.01				
N°:	Matériau	Section transversale mm ²	Longueur mm	Appui
SZ1	Alu. AlMgSi0.5 F22	25 x 6	500	couteau/couteau e=0mm
SZ2	Alu. AlMgSi0.5 F22	25 x 6	500	couteau/couteau e=1mm
SZ3	Alu. AlMgSi0.5 F22	25 x 6	500	couteau/couteau e=3mm
SZ4	Alu. AlMgSi0.5 F22	40 x 6	500	couteau/couteau
SZ5	Fiberline	25 x 10	700	couteau/couteau
SZ6	PVC	Ø16 x 2	400	couteau/couteau
SZ7	PVC	Ø20 x 1,5	400	couteau/couteau
SZ8	Alu. AlMgSi0.5 F22	20 x 10 x 2	700	couteau/couteau
SZ9	Alu. AlMgSi0.5 F22	Ø15 x 2	700	couteau/couteau
SZ10	Alu. AlMgSi0.5 F22	Ø14	700	couteau/couteau

Annexes

Annexe B

Section transversale	Limites	Flambement selon l'axe	Courbe de flambement	
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Profils laminés 	$h/b > 1,2$ $t_f \leq 40\text{mm}$	y - y z - z	a b	a_0 a_0
	$40\text{mm} < t_f \leq 100\text{mm}$	y - y z - z	b c	a a
	$h/b \leq 1,2$ $t_f \leq 100\text{mm}$ $t_f > 100\text{mm}$	y - y z - z y - y z - z	b c d d	a a c c
Profils en I soudés 	$t_f \leq 40\text{mm}$ $t_f > 40\text{mm}$	y - y z - z y - y z - z	b c c d	b c c d
Profils creux 	Laminés à chaud	quelconque	a	a
	Formés à froid	quelconque	b	b
Caissons soudés 	En général (sauf comme ci-dessus)	quelconque	b	b
	Soudures épaisses et $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	y - y z - z	c c	c c
Profils en U, en L, en T et profils pleins 		quelconque	c	c

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] AUGUST. G., BARATTA A. : ‘Théorie probabiliste de la résistance des barres Comprimées’. Construction métallique N°2 1971
- [2] Cour, BECHEUR.A, structures métalliques, université de Bejaïa
- [3] Cour, BANOUNE.B, construction métallique, université de Bejaïa
- [4] BAPTISTA A.M. MUZEAU J.P. (2002) ‘Elastic design of tapered beams-columns subjected to concentrated axial and transversal loads’ Proceedings of the 3rd European Conference on Steel Structures, Euro steel, Coimbra
- [5] JEAN MOREL. Calcul des structures métalliques selon l’Eurocode 3. Edition Eyrolles paris,1994, p331
- [6] Site internet, <https://www.futura-sciences.com/maison/definitions/maison-flambage-10695/>
- [7] Site internet, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Flambage>
- [8] Mr BENKABA Abdelhak, Etude de problème du flambement des profilés à inertie Variable. Mémoire de master. Université de Tlemcen ; 2013.p112
- [9] LI QS, (2000) ‘Buckling of elastically restrained non-uniform columns’ Journal of Engineering Structures 22, p 1231–1243.
- [10] ITTERBEEK R. flambement. Résistance des matériaux, p.8.2-8.28
- [11] cour de RDM II, université Hassiba Benbouali de Chlef
- [12] Dunod, Paris 1999 pour la 1ère édition ISBN 978-2-10-051634-6
- [13] Mémoire de Magister, étudié par Monsieur Mohamed DJELIL.
- [14] Site internet,<https://www.notionsstructures.be/les-notions/flambement/comprendre>
- [15] site internet, <https://www.dlupal.com/fr/telechargements-et-informations/exemples/exemples-de-verification/000093>
- [16] Site internet, www.gunt.de
- [17] Manuel flambement des barres, appareil WP120(instruction pour expérience)