

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique
Laboratoire de Physique Théorique

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT

Domaine : Sciences de la matière Filière : Physique
Spécialité : Physique Théorique

Présentée par
M. MOHAMMDI Sid-ali

Thème

Sur la métrologie quantique

Soutenue le 04/07/2024

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom

Grade

Mr AOUDIA Sofiane	MCA	Univ. de Bejaia	Président
Mr GHARBI Abdelhakim	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr PARIS Matteo	Professeur	Univ. de Milan	Co- Rapporteur
Mr HAOUAT Salah	Professeur	Univ. de Jijel	Examineur
Mr BELABBAS Abdelmoumene	MCA	Univ. de Bejaia	Examineur

Année Universitaire 2023-2024

Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers les professeurs Abdelhakim Gharbi et Matteo Paris pour leurs conseils inestimables et leur guidance tout au long de cette thèse, sans lesquels je n'aurais pu aller jusqu'au bout.

À mes parents, mes frères et ma sœur, je suis reconnaissant de leur soutien indéfectible dans ma carrière scientifique et dans tous les aspects de ma vie.

Je tiens également à remercier tous mes amis, où qu'ils se trouvent, pour leur soutien et leur amitié précieuse.

Table des matières

Introduction	6
1 Outils mathématiques de la mécanique quantique	11
1.1 Espaces de Hilbert	12
1.2 Etats quantiques	14
1.3 Observables en Mécanique Quantique	18
1.4 Dynamique quantique	20
2 Théorie de l'estimation classique	23
2.1 Information de Fisher et borne de Cramer-Rao	27
2.2 Estimateur de maximum de vraisemblance	31
2.3 Estimateurs Bayesiens	34
3 Théorie de l'estimation Quantique	37
3.1 Borne de Cramér-Rao Quantique	38
3.2 Expression additionnelles des SLD et QFI	40
3.3 Paramètres multiples et matrice information de Fisher quantique	42
3.4 Expressions supplémentaires de la QFIM	46
3.5 Approche géométrique à l'estimation quantique	48
3.6 Le paramètre de Quanticité (Incompatibilité Asymptotique) .	50
4 Théorie des Perturbations en Mécanique Quantique	52
4.1 Perturbation Indépendante du Temps	53
4.1.1 Les énergies propres et états propres	54
4.2 Perturbations Dépendantes du Temps	57

4.2.1	Image d'interaction	58
4.2.2	Séries de Dyson	60
4.2.3	Probabilités de transition et règle de Fermi	61
5	Métrieologie de faibles perturbations quantique	65
5.1	Estimation de faibles perturbations statiques	69
5.1.1	Résultats généraux pour un et deux paramètres	69
5.1.2	Modèles de qubit	73
5.1.3	Modèles de qutrit	74
5.1.4	Un modèle d'oscillateur anharmonique quantique	76
5.2	Estiamtion de perturbations dynamiques	77
5.2.1	Résultats généraux pour un et deux paramètres	77
5.2.2	Modèles de qubit	79
5.2.3	Modèles de qutrit	80
5.2.4	Oscillateur anharmonique	81
5.3	Expressions explicites des SLDs pour une perturbation à deux paramètres	82
5.3.1	K_1 et K_2 pour l'oscillateur anharmonique	83
	Conclusion et perspectives	86
	Références bibliographiques	95

Table des figures

2.1	Représentation graphique de variances possibles de plusieurs estimateurs non biaisés en terme des valeurs possibles de λ .	26
2.2	Graphique représentant la densité de probabilité $p(x_0 \lambda)$ comme fonction du paramètre unique à estimer λ .	33
4.1	Graphique de la fonction $\frac{\sin^2[\Delta E/2]}{\Delta E^2}$ pour un instant fixé $t = 1$.	63
5.1	La QFI dynamique (Qd) et statique (Qs) pour le cas d'un qubit unique. Plus d'information sur le paramètre λ est encodé dans le cas dynamique que dans le cas statique. L'optimisation sur le paramètre dynamique réduit la Borne de précision par un facteur de 4.	80
5.2	Graphe comparatif des bornes statique et dynamique d'un modèle de qutrit. La région en bleu solide représente le domaine où l'approche dynamique est plus informative. La borne dynamique atteint un minimum de $1/8$ à un instant optimal $t = \pi$, ce qui correspond à une amélioration de 400% par rapport à l'approche statique.	81
5.3	Borne B sur la variance totale pour l'estimation conjointe des paramètres d'anharmonicité en fonction du temps d'interaction. La ligne rouge continue représente la borne dynamique et la ligne pointillée noire représente la borne statique.	82

Introduction

La théorie quantique a émergé comme l'une des réalisations les plus remarquables de la physique moderne. Développée initialement pour expliquer le comportement des particules subatomiques, cette théorie a non seulement révolutionné notre compréhension du monde microscopique, mais elle a également jeté les bases à de nombreuses avancées technologiques et scientifiques. Cependant, alors que la théorie quantique a permis d'accomplir des progrès spectaculaires dans des domaines tels que la physique des particules, la physique de la matière condensée et la chimie quantique, elle a également ouvert la porte à des questions profondes et complexes. Les concepts fondamentaux de la théorie quantique, tels que le principe d'incertitude de Heisenberg et le concept de superposition quantique, et autre l'intrication quantique ont défiés les intuitions classiques et ont remis en question notre compréhension même de la réalité. Ces concepts purement quantiques vont être une ressource d'une extrême importance et permettre d'atteindre des niveaux de précision sans précédent (classique) quand-aux mesures quantiques quand exploités dans un contexte métrologique comme nous allons voir au cours de ce manuscrit.

Le mot métrologie désigne dans l'ensemble le fait d'effectuer des mesures. Bien entendu on sous-entend que la mesure est effectuée dans un contexte scientifique et la combinaison métrologie et quantique, représente la fusion entre les fondements de la physique quantique et les méthodes de mesure précise, constituant un domaine de recherche éminemment fascinant et prometteur dans le paysage de la physique contemporaine. Le processus de mesure consiste en trois étapes distinctes : la préparation de l'état sonde, l'évolution du système préparé et enfin l'acte de mesurer ainsi que la col-

lecte des résultats de mesures. Ce processus est souvent sujet à des erreurs de toute sorte, des erreurs dues à l'ignorance ou à un manque de contrôle sur le système, ou des erreurs d'origine fondamentale comme les limites physiques imposées par le principe d'incertitude. L'un des objectifs de la théorie métrologique est de minimiser ces erreurs et idéalement atteindre la limite minimale d'erreur imposée par les lois de la physique. Un résultat important découlant du théorème de limite centrale est que l'erreur associée à une procédure métrologique, quelle que soit son origine, peut toujours être réduite en moyennant un grand nombre de mesures indépendantes. Dans ce cas, la limite inférieure de l'erreur est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre de mesures, ce que l'on appelle la "limite quantique standard" de précision[1]. Cette limite purement statistique peut être améliorée en combinant les ressources quantiques à la théorie de la métrologie. En effet, en introduisant des états intriqués comme états sonde, ou encore prendre avantage des états comprimés il a été démontré que la limite quantique standard peut être dépassée, permettant d'atteindre des niveaux de précision sans précédent (classique)[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Cependant, il convient de noter que cette précision accrue est limitée par la limite d'Heisenberg, qui impose une borne fondamentale à la précision des mesures[14, 15]. L'objectif général de la métrologie quantique est de déterminer ces limites fondamentales de précision, puis de développer des stratégies de mesure permettant de les atteindre, si une telle saturation est possible.

On s'intéressera en particulier à des problèmes métrologiques liés à "l'estimation quantique" des paramètres. Les fondations de la théorie de l'estimation remontent aussi loin que les débuts de la théorie quantique elle-même, vers 1926, lorsque Schrödinger, Heisenberg et d'autres éminents scientifiques développaient les concepts fondamentaux de cette nouvelle discipline. Pendant ce temps, Ronald A. Fisher, qui deviendrait plus tard "Sir" Ronald A. Fisher, travaillait de manière indépendante sur sa théorie de la mesure, purement classique. Bien que ses travaux aient été couronnés de succès dans les domaines de la statistique et de la génétique, ils sont passés largement inaperçus au sein de la communauté physique, concentrée à l'époque sur la théorie quantique émergente. Parmi ces travaux pionniers, dont l'import-

tance n'a été pleinement réalisée que bien plus tard, se trouve le concept d'Information de Fisher (FI)[16, 17], une mesure de l'erreur associée à une procédure d'estimation. Les formules développées ultérieurement expriment le lien entre l'information de Fisher et l'erreur quadratique moyenne associée à toute procédure d'estimation[18, 19]. Ces travaux ont démontré que le concept de FI est une métrique de la qualité d'un schéma d'estimation, où une plus grande FI indique une meilleure qualité de l'estimation. Bien que les travaux de Fisher aient été inestimables en statistique, ils ont eu du mal à s'imposer dans le domaine quantique. L'exploit de généraliser le concept classique d'information de Fisher au monde quantique revient à C.W. Helstrom, qui a défini une optimisation de la fonction FI sur toutes les mesures possibles. Le résultat, sans surprise, a été baptisé Information de Fisher Quantique (QFI)[20, 21, 22]. La QFI est fondamentale à la théorie de l'estimation quantique et à la métrologie quantique. Helstrom a démontré qu'elle est la borne supérieure de la fonction d'information de Fisher (FI), de plus son introduction a également permis de dériver une formule quantique définissant la limite de précision atteignable par une procédure d'estimation. Cette formule, la borne de Cramér-Rao quantique, exprime le seuil au-delà duquel toute espérance d'optimisation est futile. Les travaux de Helstrom, renforcés par ceux d'Holevo[23, 24], ont rapidement élargi la portée de la théorie de l'estimation quantique à la fois sur le plan théorique et expérimental. Ils ont également inspiré de nombreuses avancées technologiques visant à dépasser les limites classiques de précision en exploitant les propriétés quantiques des systèmes[25, 26, 27].

Ce manuscrit est divisé en deux parties distinctes. La première partie traite des outils mathématiques et théoriques liés à l'estimation quantique des faibles perturbations. Nous commençons par introduire le formalisme mathématique permettant de décrire les états et mesures quantiques. Cet objectif est poursuivi dans le Chapitre 1, où nous définissons les espaces de Hilbert, exposons leurs propriétés, puis abordons les concepts de vecteurs d'états et d'opérateurs densité en tant qu'outils descriptifs des états quantiques. Nous clarifions les définitions de ces concepts, leurs différences, leurs importances respectives, ainsi que les cas où les deux descriptions se

rejoignent. Le Chapitre 2 est consacré à la théorie de l'estimation classique, une étape importante pour préparer le terrain à la théorie quantique de l'estimation. Nous examinons la version classique des grandeurs métrologiques d'intérêt, avec un accent particulier sur l'information de Fisher et la borne de Cramer-Rao, en raison de leur rôle central dans les procédures d'estimation. Nous présentons également les différents outils statistiques qui leur sont souvent associés. Après avoir établi les fondements classiques de la théorie de l'estimation, nous abordons sa version quantique, en nous concentrant spécifiquement sur l'information de Fisher quantique et la borne quantique de Cramer-Rao. Nous présentons plusieurs formules utiles de la QFI et leurs dérivations, ainsi que les formules des opérateurs SLD, largement utilisés pour obtenir la QFI. Nous généraliserons ensuite ces formules pour le cas de l'estimation de plusieurs paramètres au lieu d'un seul, en discutant brièvement des différences entre les deux approches et des difficultés techniques et physiques liées à l'incompatibilité des paramètres à estimer. Enfin, nous introduisons un quantificateur de compatibilité entre les paramètres, concept récemment développé (en 2019) et nommé "paramètre de quanticité".

Le dernier outil théorique nécessaire avant d'aborder notre objectif principal, qui est l'estimation quantique des faibles perturbations, est bien évidemment la théorie des perturbations, traitée dans le quatrième chapitre. Nous présentons le formalisme de la théorie des perturbations indépendantes du temps, en particulier celui de Rayleigh-Schrodinger, et montrons comment le spectre et l'état sont modifiés par la présence d'une faible perturbation. Ensuite, nous abordons la théorie des perturbations dépendantes du temps, en exposant les méthodes principalement développées par Dirac, consistant à séparer les contributions à l'énergie totale en une partie stationnaire et une partie interaction qui gouverne l'évolution dynamique du système étudié.

La deuxième partie est dédiée à l'ensemble des résultats obtenus dans le cadre de notre recherche, se focalisant exclusivement sur l'estimation quantique des perturbations de faibles amplitudes. Nous commençons par examiner le cas des perturbations statiques, en développant des formules générales pour les grandeurs métrologiques d'intérêt, tant pour l'estimation d'un seul paramètre que pour celle de deux paramètres. Ces résultats seront ensuite ap-

pliqués à l'étude de plusieurs exemples pratiques, tels qu'un modèle générique de qubit, un modèle de qutrit et un modèle spécifique de perturbation anharmonique. Nous passons ensuite à l'étude des perturbations dynamiques, où les perturbations dépendent du temps. De manière similaire au cas statique, nous commençons par formuler des expressions générales pour les grandeurs métrologiques d'intérêt dans ce contexte dynamique autant pour un et deux paramètres, puis les appliquerons aux mêmes modèles que dans le cas statique. Enfin, nous terminons par une étude comparative des deux cas pour déterminer l'approche la plus informative.

Chapitre 1

Outils mathématiques de la mécanique quantique

Les phénomènes quantiques ne se produisent pas dans un espace de Hilbert. Ils se produisent dans un laboratoire.

A. Peres

Dans cette section, nous passerons en revue les outils mathématiques de base utilisés en mécanique quantique. L'objectif est de présenter brièvement et de manière accessible les outils mathématiques qui seront couramment rencontrés tout au long de cette thèse. Bien entendu, l'objectif étant de rappeler, nous allons omettre beaucoup de détails mathématiques que nous jugeons non nécessaires pour cette thèse, bien-que nous orientons le lecteur vers l'excellente référence [28] pour plus de détails et de rigueur sur les mathématiques de la mécanique quantique. Dans ce qui suit, nous allons présenter les mathématiques relatives aux espaces de Hilbert, leurs définitions et quelques unes de leurs propriétés. Puis on on exploitera le matériel présenté pour discuter la description des états quantiques. Finalement on passera en revue la description des mesures quantiques et observables. La notation de Dirac sera adoptée pour tout le manuscrit.

1.1 Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont l'objet mathématique le plus omniprésent de la mécanique quantique. commençant par considérer un espace vectoriel \mathcal{H} défini sur le corps des complexes \mathbb{C} , et muni d'un produit scalaire souvent noté $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, ayant les propriétés d'être sesquelinéaire $\langle \alpha a | \beta b \rangle = \alpha^* \beta \langle a | b \rangle \forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, défini positif $\langle a | a \rangle \geq 0$ avec égalité uniquement pour $a = 0$, la norme d'un vecteur est donné par $\|a\| = \sqrt{\langle a | a \rangle}$, le conjugué du produit est donné par $\langle a | b \rangle^* = \langle b | a \rangle$. Une propriété élémentaire mais importante est l'inégalité de Schwarz $|\langle a | b \rangle|^2 \leq \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle$ avec égalité atteinte pour $|a\rangle$ et $|b\rangle$ linéairement dépendants. Si Pour tout entier positif d il existe un ensemble de d vecteurs orthogonaux alors \mathcal{H} est de dimension infinie autrement il est dit de dimension finie. Pour ces derniers la dimension de l'espace peut être définie alternativement comme étant le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants non nuls appartenant à l'espace. nous ne nous étalerons pas sur les détails ici mais nous allons énoncer quelque propriétés qui détermineront si un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert et si il est fini ou infini.

1. **Séparabilité** : On désigne par la condition de séparabilité d'un espace \mathcal{H} , l'existence d'une base dénombrable $\{|i\rangle, i \in \mathbb{N}\}$ de sorte à ce que tout vecteur $|a\rangle \in \mathcal{H}$ peut se décomposer comme $|a\rangle = \sum_i a_i |i\rangle$.
2. **Complétude** : Toute suite de Cauchy dans \mathcal{H} converge vers un élément de \mathcal{H} . En d'autre terme pour $\epsilon > 0$ il existe un entier positif N tel que $\| |a_i\rangle - |a_j\rangle \| < \epsilon$ quand $i, j > N$. Une manière alternative de caractériser la complétude est de dire qu'un espace normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente dans l'espace est convergente. (Une série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est dite absolument convergente si $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| < \infty$).

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et satisfaisant la propriété de complétude est appelé un espace de Hilbert. Cette condition est automatiquement satisfaite pour tout espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire de dimension finie. Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas pour les espaces de dimension infinie, d'où son imposition comme critère

définissant des espaces de Hilbert. Tout espace de Hilbert possède une base orthonormée, et toutes les bases orthonormées d'un espace de Hilbert ont la même cardinalité.

La séparabilité n'est pas un critère définissant les espaces de Hilbert. Ces derniers peuvent ne pas être séparables, bien que dans le contexte de la mécanique quantique, la séparabilité des espaces de Hilbert est exigée, ce qui revient à dire qu'il existe une base dénombrable $\{|i\rangle, i \in \mathbb{N}\}$, où tout vecteur $|\psi\rangle$ peut être décomposé comme $|\psi\rangle = \sum_i^\infty \psi_i |i\rangle$. Cette propriété est évidemment automatiquement respectée par tout espace de Hilbert de dimension finie, son imposition concernant les espaces de Hilbert de dimension infinie.

Nous survolerons également quelques propriétés des opérateurs linéaires, vu leur importance dans la description des états et des observables quantiques. Un opérateur $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est linéaire s'il préserve les combinaisons linéaires :

$$A(\alpha |a\rangle + |b\rangle) = \alpha A|a\rangle + A|b\rangle \quad \forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{C}$$

Tous les opérateurs avec lesquels nous travaillerons seront linéaires. Ainsi, lorsque nous mentionnerons un opérateur, il faut comprendre qu'il s'agit d'un opérateur linéaire. Des opérateurs d'une importance particulière en Mécanique Quantique sont les opérateurs bornés : $|\langle a|A|a\rangle| \leq \alpha |\langle a|a\rangle|$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Sur un espace de Hilbert de dimension finie, tout opérateur est continu et borné.

Pour tout opérateur borné A , on peut définir un adjoint A^\dagger tel que $\langle a|A^\dagger|b\rangle = \langle aA|b\rangle$. Cela suppose l'existence de A^\dagger , ce qui est bien le cas. Un opérateur est hermitien (auto-adjoint) si $A = A^\dagger$. Cette condition équivaut à $A_{ij} = A_{ji}^*$ pour des espaces de dimension finie. Autrement, en plus de la condition précédente, on requiert que A et son adjoint aient le même domaine. Cette condition peut sembler technique, mais elle est cruciale dans un espace de dimension infinie pour l'écriture d'une décomposition spectrale de l'opérateur A .

1.2 Etats quantiques

Les postulats d'état de la mécanique quantique stipulant qu'un système quantique est entièrement défini par la donnée de son vecteur d'état $|\psi\rangle$. Cela signifie que toute l'information physique concernant le système peut être dérivée à partir de ce vecteur d'état. Techniquement parlant, $|\psi\rangle$ est un vecteur appartenant à un espace de Hilbert \mathcal{H} . Pour un système composé de plusieurs sous-systèmes, son vecteur d'état est le produit tensoriel des états des sous-systèmes : $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots$ appartenant à un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots$. La règle de Born interprète la norme de $|\psi\rangle$ comme étant une densité de probabilité, requérant la normalisation des vecteurs d'états : $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Un principe important concernant les vecteurs d'états est le principe de superposition, stipulant que si un système admet plusieurs vecteurs comme états possibles, alors toute combinaison linéaire (normée) de ces états est un état possible. Un ensemble de vecteurs $\{|a_n\rangle\}$ est dit orthonormé si $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, et il est dit être complet si pour un vecteur arbitraire $|b\rangle \in \mathcal{H}$, il existe une décomposition $|b\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle$ où les coefficients complexes α_i sont donnés par $\langle a_i|b\rangle$ et représentent les composantes du vecteur $|b\rangle$ dans la base $\{|a_n\rangle\}$. Ce résultat nous permet d'écrire $|b\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|b\rangle$, ce qui implique $\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = \mathbb{I}$, c'est la fameuse relation de fermeture de la mécanique quantique ou encore la résolution de l'opérateur identité.

D'un point de vue pratique, afin de mesurer une observable, nous sommes amenés à effectuer plusieurs mesures répétées sur un ensemble de copies du système étudié. Il est souvent difficile de préparer des copies parfaitement identiques du même système ou de préparer le même système plusieurs fois dans le même état, donc il y aura une certaine "incertitude" sur l'état de notre préparation initiale. La description de ce cas de figure se fait en associant des "probabilités" p_i aux différentes préparations possibles du système $|\psi_i\rangle$. La description du système se fait donc à l'aide de l'ensemble statistique $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ où la somme des probabilités p_i est égale à 1 et les états possibles $|\psi_i\rangle$ ne sont pas forcément orthogonaux. La valeur moyenne d'un opérateur A est donnée par $\langle A \rangle = \sum_i \langle \psi_i| A |\psi_i\rangle = Tr[\rho A]$, où nous avons défini l'opérateur

densité $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Les moyennes des grandeurs mesurables sont donc entièrement déterminées par la donnée de ρ , qui lui-même est une somme des projecteurs sur les différents états $|\psi_i\rangle$, et il obéit à deux conditions : la positivité $\rho \geq 0$ et l'unitarité de trace $Tr[\rho] = 1$. Il est aisé de démontrer que la condition de positivité en ρ implique son hermiticité. Si un système peut être décrit par un vecteur d'état $|\psi\rangle$, cela correspond à un opérateur densité $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, et l'état du système est dit être un "état pur". Remarquez que dans ce cas $\rho^2 = \rho$, ce qui implique que ses valeurs propres sont soit zéro soit un. Mais vu que la trace de l'opérateur densité est égale à un, on conclut que l'opérateur densité pour un état pur possède une seule valeur propre non nulle, et elle est égale à 1. Un moyen de quantifier combien "proche" est un opérateur densité d'un projecteur (un état pur) est la notion de pureté μ donnée par $\mu(\rho) = Tr[\rho^2] = \sum_i p_i^2$, où $\mu = 1$ correspond à un état pur et $\mu < 1$ correspond à un état de mélange statistique.

Formellement parlant les états quantiques (opérateurs densités) forment un ensemble convexe $S(\mathcal{H})$ d'opérateurs positifs de trace unitaire :

$$S(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | \rho \geq 0, Tr[\rho] = 1\}$$

L'ensemble $S(\mathcal{H})$ obéit à une relation particulière de convexité stipulant que si une suite $\{\rho_j\}$ dans $S(\mathcal{H})$ et une suite $\{p_j\}$ de nombres positifs sommant à 1, alors la somme $\sum_j p_j \rho_j$ converge dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (par rapport à l'opération de trace-norme) et sa limite appartient à $S(\mathcal{H})$. D'un point de vue mathématique la dimension d'un espace de Hilbert est la seule propriété caractéristique permettant de distinguer entre deux espace vu que les espaces de Hilbert de même dimension sont isomorphe. En mécanique quantique la dimension d'un espace d'états quantiques correspond au nombre minimal d'états distinguables. La décomposition spectrale de l'opérateur densité $\rho \in S(\mathcal{H})$ est une décomposition convexe canonique de la forme $\rho = \sum_i p_i P_i$ ou l'ensemble $\{p_i\}$ de nombres positifs sommant à 1 peut être fini ou infini quoique les p_i ne sont pas nécessairement différents. L'ensemble $\{P_i\}$ représente des projecteurs unidimensionnels ($P_i P_j = \delta_{ij} P_i$) et la décomposition spectrale canonique d'un opérateur densité n'est unique que lorsque tous les p_i sont différents.

On appelle un élément $\rho \in S(\mathcal{H})$ "extrémal" s'il ne peut être écrit sous forme d'une combinaison convexe d'autres éléments. Formellement on dit qu'un élément est extrémal si : pour $\rho = p\rho_1 + (1-p)\rho_2$ cela implique que $\rho = \rho_1 = \rho_2$ pour $0 < p < 1$. Notre choix $\rho = p\rho_1 + (1-p)\rho_2$ est suffisant pour discuter l'extrémalité de ρ , en effet toute combinaison convexe à n termes $\rho = p_1\rho_1 + \dots + p_n\rho_n$ peut toujours être réduite à une combinaison (convexe) à deux éléments de la forme $\rho = p\rho_1 + (1-p)\rho_2$. Un élément extrémal de $S(\mathcal{H})$ correspond à un état pur en mécanique quantique (ensemble statistique de pureté égale à 1). Le reste des éléments en $S(\mathcal{H})$ sont des états mixtes (mélanges statistiques). Comme nous l'avons mentionné plus haut dans cette section ; la notion de pureté permet non seulement de distinguer les états purs des états mixtes mais également de quantifier le degré de pureté des états mixtes. La pureté $0 < \mu(\rho) = \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ est un nombre positif qu'on peut associer à tout opérateur densité. Une pureté $\mu(\rho) = 1$ correspond à un élément extrémal de $S(\mathcal{H})$. Le fait que la pureté pour des états mixtes n'est pas constante indique qu'elle peut être utilisée comme quantificateur du degré de "mixité" d'un état quantique. Ce qui suit est un état de quelques propriétés de la pureté $\mu(\rho)$:

1. La convexité :

$$\mu(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) \leq p\mu(\rho_1) + (1-p)\mu(\rho_2) \quad (1.1)$$

2. Invariance sous transformations unitaires :

$$\mu(U\rho U^\dagger) = \mu(\rho) \quad (1.2)$$

3. Une pureté $\mu(\rho)$ égale à 1 implique que ρ est un état pur.

La première propriété peut être démontrée en remarquant que la différence :

$D = p\mu(\rho_1) + (1-p)\mu(\rho_2) - \mu(p\rho_1 + (1-p)\rho_2)$ est positive, en effet on a :

$$\begin{aligned}
D &= p\mu(\rho_1) + (1-p)\mu(\rho_2) - \mu(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) \\
&= pTr[\rho_1^2] + (1-p)Tr[\rho_2^2] - Tr[(p\rho_1 + (1-p)\rho_2)^2] \\
&= (p-p^2)Tr[\rho_1^2] + ((1-p) - (1-p)^2)Tr[\rho_2^2] - 2p(1-p)Tr[\rho_1\rho_2] \\
&= p(1-p)Tr[\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1] \\
&= p(1-p)Tr[(\rho_1 - \rho_2)^2]
\end{aligned}$$

Les deux facteurs de la dernière égalité sont positifs. le premier facteur vu que $0 \leq p \leq 1$ et le second car $(\rho_1 - \rho_2)^2 \geq 0$. Cela implique que la différence D est positive et prouve la propriété (1.1). Cette propriété confirme l'idée intuitive qu'une mixture d'état ne peut être plus pure que la somme de ses constituants. Au meilleur des cas une mixture d'état est aussi pure que la somme des puretés des de ces constituants.

La deuxième propriété se justifie en remarquant que pour un opérateur unitaire U la pureté devient : $\mu(U\rho U^\dagger) = Tr[U\rho U^\dagger U\rho U^\dagger] = Tr[\rho^2] = \mu(\rho)$. Cette propriété stipule qu'un changement de base n'affecte pas la pureté d'un état quantique, ce qui peut se comprendre par le fait qu'il n'existe pas de base privilégiée pour un espace de Hilbert et donc un changement de base ne devrait pas affecter les propriétés caractéristiques du système.

Pour démontrer la troisième propriété on commencera par assumer que $\mu(\rho) = 1$, puis on exprime l'état comme une combinaison de deux éléments $\rho = p\rho_1 + (1-p)\rho_2$, puis on démontre que ρ est un élément extrémal (état pur) car $\rho_1 = \rho_2$.

$$\begin{aligned}
1 = Tr[\rho^2] &= p^2Tr[\rho_1^2] + (1-p)^2Tr[\rho_2^2] + 2p(1-p)Tr[\rho_1\rho_2] \\
&\leq p^2 + (1-p)^2 + 2p(1-p)|Tr[\rho_1\rho_2]| \leq 1
\end{aligned}$$

Où pour écrire la dernière inégalité, on fait usage de l'inégalité de Schwarz : $|Tr[\rho_1\rho_2]| \leq \sqrt{Tr[\rho_1^2]}\sqrt{Tr[\rho_2^2]}$. Remarquer qu'on a obtenu une inégalité de la forme $1 \leq \dots \leq 1$ ce qui implique que le terme au milieu est forcément égale à 1 et il est facile de démontrer que pour que cette égalité soit réalisée on doit avoir $|Tr[\rho_1\rho_2]| = 1$. Cela implique que l'inégalité de Schwarz est

saturé ce qui à son tour implique que $\rho_1 = \alpha\rho_2$ pour un nombre complexe α . Mais vu que $Tr[\rho_1] = Tr[\rho_2] = 1$ alors $\alpha = 1$ et $\rho_1 = \rho_2$ ce qui conclut notre démonstration. Cette propriété est très importante car elle permet de faire la distinction entre états pure et états mixte avec certitude. On a vu qu'il était trivial de démontrer que tout état pur a une pureté égale à 1, mais la réciproque n'est pas triviale et c'est ce que la troisième propriété affirme et que nous avons démontré. une pureté $\mu(\rho) = 1$ implique que ρ est un état pur, et un état est pur implique que sa pureté est égale à 1.

1.3 Observables en Mécanique Quantique

En mécanique quantique, les observables sont des grandeurs physiques mesurables, telles que la position, l'impulsion, l'énergie, le moment angulaire, etc. Ces grandeurs sont représentées par des opérateurs hermitiens $X^\dagger = X$ qui agissent sur l'espace des états des systèmes quantiques. Ceci est le postulat de la mécanique quantique stipulant l'existence d'opérateurs hermitiens décrivant toute observable physique. Un opérateur hermitien admet une décomposition spectrale de la forme $X = \sum_i x_i P_i$ où $P_i = |x_i\rangle\langle x_i|$ sont les projecteurs ($P_i^2 = P_i$) sur les états propres de X . Ce sont des opérateurs positifs $\langle\psi|P_i|\psi\rangle \geq 0$ et orthonormés $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, et ils forment une résolution de l'identité $\sum_i P_i = \mathbb{I}$. Les x_i sont les valeurs propres de X , correspondant aux résultats possibles de mesure. On peut démontrer que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont toujours réelles en remarquant $\langle x|X|x\rangle = \langle x|X^\dagger|x\rangle = x = x^*$, cette dernière égalité n'est vérifiée que pour un nombre réel x . Les opérateurs hermitiens permettent de déterminer les résultats de mesure possibles x_i avec des probabilités $p_i = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$. Remarquez que la positivité de p_i est garantie par la positivité de P_i , et la normalisation de la probabilité totale est garantie par le fait que la somme des projecteurs soit égale à l'identité.

La moyenne d'une observable est donnée par $\langle X \rangle = \langle\psi|X|\psi\rangle = Tr[X|\psi\rangle\langle\psi|]$. Un aspect de mesure quantique qui reste à préciser et qui n'a pas d'équivalent classique est le fait qu'un système quantique se trouve affecté par l'action de la mesure. L'état post-mesure est une projection de l'état pré-mesure sur l'es-

pace propre de la valeur propre observée $|\psi_i\rangle = \frac{1}{p_i} P_i |\psi\rangle$. La description des observables par le moyen d'opérateurs hermitiens permet donc de déterminer les résultats de mesure et d'associer une probabilité à leur détection. En d'autres termes, les résultats de mesure sont déterminés, mais il n'est pas possible de déterminer le résultat de mesure. Ce que le formalisme offre, c'est une détermination de la probabilité qu'un résultat de mesure soit observé, et ce indépendamment de la pureté du système (classiquement en physique statistique, l'état d'un système est donné par une distribution de probabilité qui se trouve modifiée suivant le théorème de Bayes après mesure, ce changement est uniquement dû à notre ignorance sur l'état initial du système. En mécanique quantique, cet aspect probabiliste des résultats de mesure reste présent même pour une préparation pure de l'état initial).

On peut généraliser les expressions des probabilités associées à un résultat de mesure x_i pour un opérateur densité ρ :

$$p_i = Tr[P_i \rho P_i] \quad (1.3)$$

$$= Tr[\rho P_i^2] \quad (1.4)$$

$$= Tr[\rho P_i] \quad (1.5)$$

Et l'état post-mesure par :

$$\rho_i = \frac{1}{p_i} P_i \rho P_i$$

La troisième égalité dans (1.3) est une expression familière et on la trouve dans la majorité des références de mécanique quantique. La deuxième égalité, bien qu'équivalente à la troisième, est moins utilisée, et en la scrutant de près, on remarque qu'elle précise que pour générer des probabilités positives, il suffit que P_i^2 soit positif et pour une distribution de probabilité normée, on a besoin de $\sum_i P_i^2 = \mathbb{I}$. On peut donc en principe générer les probabilités relatives à une mesure sans avoir besoin de faire appel à des projecteurs, on définit simplement un opérateur positif $\Pi_i \geq 0$ et $\sum_i \Pi_i = \mathbb{I}$, ces deux conditions suffisent pour écrire les probabilités :

$$p_i = Tr[\rho \Pi_i]$$

Remarquez que les Π_i ne sont pas nécessairement orthogonaux et donc ne représentent pas des projecteurs. On appelle la résolution de l'identité en termes d'opérateurs positifs $\sum_i \Pi_i = \mathbb{I}$ une POVM (probability operator-valued measure) et les opérateurs Π_i ses éléments. Cette description est plus générale vu qu'elle impose moins de contraintes mathématiques sur les opérateurs et on peut aller plus loin et définir une généralisation des projecteurs P_i en introduisant des opérateurs M_i :

$$p_i = \text{Tr}[\rho \Pi_i] = \text{Tr}[M_i \rho M_i^\dagger] \quad (1.6)$$

Les opérateurs M_i sont dits opérateurs de détection, et comme on l'a déjà mentionné, ils ne sont pas des projecteurs. L'expression précédente les définit par la relation $\Pi_i = M_i^\dagger M_i$, et ils sont donc positifs par construction. La forme la plus générale des opérateurs de détection est donnée par $M_i = U_i \sqrt{\Pi_i}$ où U_i est un opérateur unitaire quelconque. Les éléments de la POVM généralisent la notion de projecteurs P_i^2 . Cette formulation impose moins de contraintes (l'orthogonalité des projecteurs) sur les outils mathématiques et laisse une plus grande liberté dans le choix des opérateurs de détection. Le fait que les éléments de POVM ne sont pas requis d'être orthogonaux implique que leur nombre n'est pas limité et donc les résultats de mesures possibles non plus. Ce formalisme, également appelé mesure généralisée, présente bien plus d'avantages et moins de restrictions que celui des mesures projectives. Ce formalisme est bien entendu physiquement implémentable et il émerge comme une description naturelle de plusieurs phénomènes quantiques.

1.4 Dynamique quantique

L'évolution des états quantiques vers d'autres états quantique peut être modélisé par les "opérations quantiques complètement positives" (CPM) ou encore des canaux quantiques. Pour une transformation \mathcal{E} , soit les propriétés suivantes :

1. La linéarité : $\mathcal{E}[a\rho_1 + b\rho_2] = a\mathcal{E}(\rho_1) + b\mathcal{E}(\rho_2) \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall \rho_1, \rho_2 \in S(\mathcal{H})$
2. La complète positivité : $\mathcal{E} \otimes \mathbb{I}_{anc} (|\psi\rangle\langle\psi|) \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{anc}$

3. Préservation de trace : $Tr[\mathcal{E}(\rho)] = Tr[\rho] = 1$

Ici \mathbb{I}_{anc} représente l'opérateur identité pour un système secondaire et \mathcal{H}_{anc} son espace de Hilbert. le système secondaire est un système quantique couplé a notre système initial il permet d'introduire des degrés de liberté additionnels et sert entre autres a décrire des systèmes intriquées. Les propriétés 1 et 3 sont requises pour préserver l'interprétation statistique de l'opérateur densité et s'assurer qu'un opérateur densité est transformé en un autre opérateur densité valide. La condition de complète positivité, quant à elle, assure que pour un système quantique intriqué avec un système secondaire \mathcal{H} , l'application de la transformation \mathcal{E} sur le système étudié produira une évolution physique sur l'ensemble des deux systèmes ($\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{anc}$).

Les opérations satisfaisant aux conditions 1, 2 et 3 sont dites des canaux quantiques, tandis que celles satisfaisant uniquement aux conditions 1 et 2, mais dont la trace est comprise entre 0 et 1, sont dites des opérations quantiques. La raison derrière l'introduction des opérations quantiques où la somme des probabilités de mesure est inférieure à 1 est de prendre en considération les cas où l'opération de mesure détruit une partie du système initial, entraînant ainsi une probabilité d'avoir des mesures non concluantes sur le système. La dynamique décrite par les opérations quantiques est non-déterministe et est donnée par

$$\rho_f = \frac{1}{p} \mathcal{E}(\rho)$$

Où ρ_f représente l'état du système après évolution sous l'action \mathcal{E} et $p = Tr[\mathcal{E}(\rho)]$. Un résultat d'un intérêt particulier est la dite "décomposition de Kraus" c'est une conséquence de la condition de complète positivité et permet d'écrire :

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \mathcal{K}_i \rho \mathcal{K}_i^\dagger \quad (1.7)$$

Les opérateurs \mathcal{K}_i sont les opérateurs de Kraus et la décomposition précédente n'est pas unique. Dans le cas où la transformation \mathcal{E} est trace préservante alors on aura $\sum_i \mathcal{K}_i \mathcal{K}_i^\dagger = \mathbb{I}$. L'évolution unitaire dont nous somme familier est elle même un canal quantique (une transformation complètement positive

est préservant la trace) dont la décomposition de Kraus a un seul opérateur de Kraus.

Chapitre 2

Théorie de l'estimation classique

...L'acte d'observation perturbe aléatoirement le phénomène, et déclenche un processus physique qui peut être modélisé comme un jeu mathématique entre l'observateur et un "démon" caractérisant le phénomène. La monnaie du jeu est **l'information de Fisher.**

B.R.Frieden

Dans ce qui suit, Nous allons présenter quelques notions relatives à la théorie de l'estimation classique. L'idée générique étant qu'un paramètre d'intérêt doit être estimé pour certaines raisons, et que ça ne fera pas de mal si l'estimation du paramètre est optimale. Pour ce faire tout un arsenal de méthodes statistiques existe pour différents cas d'études pouvant dépendre de différentes contraintes imposées par l'environnement du système considéré. Dans notre cas, le formalisme qui sera présenté tournera autour de la détermination de la limite de précision qu'une procédure d'estimation pourra atteindre. Cela passera nécessairement par l'étude de la notion "d'es-

estimateurs", ces fonctions statistique qui joueront un rôle important dans l'estimation du paramètre (ou paramètres) d'intérêt. Et passera également par le processus d'évaluation de la performance de ces estimateurs. Le matériel que nous nous apprêtons à exposer pourrait être trouvé dans la majeure partie des manuels universitaires des statistiques, en particulier nous nous sommes inspirés de [29, 30, 31, 32].

Nous allons considérer le cas d'étude d'un certain paramètre qui ne peut être mesuré directement. Connaître sa valeur nécessitera donc une procédure d'estimation. La théorie de l'estimation classique suit généralement la même procédure : Un paramètre d'intérêt λ inaccessible via la mesure et dont l'objectif de la procédure est d'estimer sa valeur, le paramètre est représenté comme une variable et chaque valeur possible du paramètre correspond à un point dans l'espace du paramètre (l'ensemble des valeurs possibles du paramètre). On associe un ensemble de distributions de probabilité $p(x|\lambda)$ d'une certaine variable aléatoire x au paramètre λ cette loi de probabilité représente l'effet de la valeur de λ sur les résultats de mesures de l'observable X . L'objectif est de réaliser un certain nombre M de mesures indépendantes de la grandeur X liée à notre paramètre d'intérêt λ , puis, par le moyen d'analyse statistique, estimer la valeur du paramètre d'intérêt. Supposons que l'ensemble des M mesures donne un ensemble de valeurs empiriques $\Phi = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$. Alors on définit un estimateur $\hat{\lambda}(\phi) = f(x_1, x_2, \dots, x_M)$ qui est une fonction allant de l'espace des résultats empiriques Φ vers l'espace des valeurs possibles de λ . L'optimisation de la procédure d'estimation consiste donc à choisir une grandeur adéquate X à mesurer et un estimateur $\hat{\lambda}$ optimal. L'erreur relative à l'estimation peut être quantifiée par l'erreur quadratique moyenne $EQM(\hat{\lambda})$ donnée par :

$$\begin{aligned} EQM(\hat{\lambda}) &= \mathbb{E} \left[(\hat{\lambda} - \lambda_*)^2 \right] \\ &= \int (\hat{\lambda} - \lambda_*)^2 p(\Phi) d\Phi \end{aligned}$$

Étant λ_* la valeur réelle de λ , $\mathbb{E}(\cdot)$ la moyenne statistique et $p(\Phi)d\Phi = \prod_{i=1}^M p(x_i|\lambda_*)dx_i$. Se focaliser uniquement sur cette formule pour quantifier

l'efficacité d'une procédure d'estimation se heurte rapidement à un problème souvent insurmontable. En voulant minimiser l'EQM, on trouve que les estimateurs ne sont pas fonction des données collectées ϕ uniquement. Cela peut être observé si on réexprime la formule précédente comme suit :

$$\begin{aligned} EQM(\hat{\lambda}) &= \left\{ \left[(\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda})) + (\mathbb{E}(\hat{\lambda}) - \lambda) \right]^2 \right\} \\ &= V(\hat{\lambda}) + \left[\mathbb{E}(\hat{\lambda}) - \lambda \right]^2 \end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, on peut voir que l'EQM est composée de deux parties, la première partie $V(\hat{\lambda})$ étant la variance de l'estimateur et la seconde partie représentant le biais de notre estimateur. C'est cette partie qui mène souvent à des estimateurs non réalisables, car ces estimateurs minimisant l'EQM vont dépendre de la vraie valeur du paramètre inconnu λ en plus des résultats de mesure ϕ . Une approche alternative d'estimation est d'abandonner la quête des estimateurs minimisant l'EQM dans le cas générique et de se restreindre au cas où le biais est nul, puis de minimiser l'EQM par un choix optimal d'estimateur. Ces estimateurs sont appelés estimateurs non biaisés de variance minimale (Estimateurs NVM). Un estimateur est dit non biaisé si sa moyenne correspond à la valeur réelle du paramètre $\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \lambda_*$. Cela signifie que peu importe la valeur du paramètre λ , l'estimateur non biaisé finira par trouver sa vraie valeur en moyenne, car les instances où l'estimateur surestime la valeur du paramètre s'annuleront avec les instances où il sous-estimera sa valeur pour aboutir finalement à la valeur réelle du paramètre. Dans le cas d'estimateurs non biaisés, la variance $V(\hat{\lambda}) = \mathbb{E} \left[(\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda}))^2 \right]$ coïncide avec l'erreur quadratique moyenne EQM . Bien que la variance quantifie la dispersion autour de la moyenne plutôt que l'erreur relative à l'estimation, le fait que les deux quantités coïncident indique que de plus faibles dispersions autour de la moyenne mènent à de plus faibles erreurs d'estimation. Pour finir, les estimateurs non biaisés de variance minimale ne sont pas garantis d'exister. De plus, un estimateur non biaisé lui-même n'est pas garanti d'exister, et quand il existe, il n'existe pas de

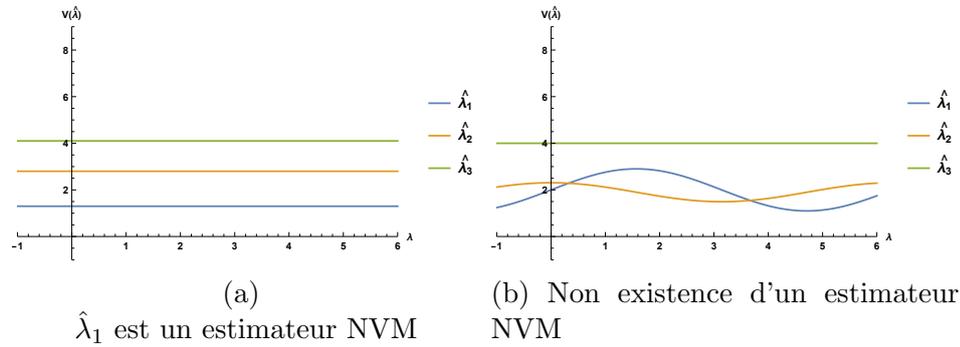


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de variances possibles de plusieurs estimateurs non biaisés en terme des valeurs possibles de λ .

procédure générique qui garantit de les obtenir. à titre d'exemple illustratif la figure (2.1) représente à gauche l'exemple d'un cas d'existence d'estimateur NVM donné par $\hat{\lambda}_1$ qui conserve une variance minimal pour n'importe quel valeur λ . à droite est une illustration du cas de non existence d'estimateur NVM, en effet la variance est minimale pour différents estimateurs (dans ce cas $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$) pour différentes valeurs de λ .

La quête des estimateurs NVM se fait au cas par cas, dépendant des données relatives au problème étudié et de ses contraintes. Une approche courante pour traquer les estimateurs NVM, que nous présenterons dans la section suivante, consiste à évaluer la borne de Cramér-Rao puis à chercher des estimateurs la saturant.

Une extension au cas de plusieurs paramètres λ_i à estimer, du formalisme présenté précédemment peut être obtenue en considérant un vecteur $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Un estimateur $\hat{\lambda}(\vec{\lambda}) = \{\hat{\lambda}(\lambda_1), \hat{\lambda}(\lambda_2), \dots, \hat{\lambda}(\lambda_n)\} = \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n\}$ est dit non biaisé si $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_i) = \lambda_i$, ce qui nous permet de définir $\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \{\mathbb{E}(\hat{\lambda}_1), \mathbb{E}(\hat{\lambda}_2), \dots, \mathbb{E}(\hat{\lambda}_n)\}$. Ainsi, un estimateur non biaisé dans le cas de paramètres multiples est défini comme obéissant à la condition :

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \vec{\lambda}$$

Un estimateur non biaisé de variance minimale doit, en plus de cette condition, avoir la variance $V(\hat{\lambda}_i)$ la plus petite parmi tous les estimateurs non biaisés.

2.1 Information de Fisher et borne de Cramer-Rao

La procédure d'optimisation de schéma d'estimation se heurte à la réalité que cette dernière n'est pas systématique. Il y a une limite inférieure à la variance pour tout estimateur non biaisé, en d'autres termes, l'erreur relative à l'estimation ne peut être réduite de façon arbitraire. L'existence d'une telle borne de précision est d'une extrême importance car elle permet de dire si un estimateur est MVN, si ce dernier sature la borne pour toutes les valeurs du paramètre à estimer. On dit dans ce cas que l'estimateur est efficace. Dans le cas où la borne n'est pas saturable elle représentera un point de repère qui permettra la comparaison des performances des estimateurs. et enfin cela nous évite la peine de chercher à optimiser au-delà de la limite physique exprimée par la borne de précision. Il existe un bon nombre de bornes inférieures à la variance d'un estimateur donné. On présentera ici l'une des bornes les plus utilisées vu sa simplicité de dérivation et de manipulation. La limite à la précision pour un nombre M de mesures sur des copies identiques d'un système est donnée par la borne célèbre dite la borne de Cramér-Rao :

$$V(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{M F(p(x|\lambda))} \quad (2.1)$$

Où $F(p(x|\lambda))$ est la fonction Information de Fisher à laquelle on référera dans ce qui suit par $F(\lambda)$ pour simplifier, et elle est donnée dans le cas continu par :

$$F(\lambda) = \int dx p(x|\lambda) \left(\frac{\partial \ln p(x|\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (2.2)$$

$$= \int dx \frac{1}{p(x|\lambda)} \left(\frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (2.3)$$

On remarque d'abord que la borne de Cramer-Rao est fonction de la densité de probabilité ce qui est intuitif vu que notre savoir sur le système est représenté par les résultats de mesure, il est donc tout à fait naturel de supposer qu'une densité de probabilité qui dépend fortement du paramètre

λ aboutira à une meilleure estimation qu'une probabilité qui en dépend faiblement. La variance est inversement proportionnelle au nombre de mesures et à l'information de Fisher, c'est-à-dire que l'erreur moyenne pour une estimation peut être réduite en effectuant de plus en plus de mesures, ce qui est souvent coûteux et pas optimal d'un point de vue pratique. La deuxième approche sera de maximiser l'information de Fisher, ce qui peut être fait en optimisant notre choix de grandeur à mesurer X . En effet, l'information de Fisher n'est fonction que de la probabilité $p(x|\lambda)$ qui est directement reliée au type de mesure effectuée. Une procédure d'estimation optimale est celle qui réalise l'égalité dans la borne de Cramér-Rao. L'estimateur dans ce cas est dit efficace, bien qu'un tel estimateur ne soit pas garanti d'exister. Pour le cas asymptotique ($M \rightarrow \infty$), il existe deux types d'estimateurs efficaces : l'estimateur de maximum de vraisemblance et l'estimateur bayésien.

On peut justifier l'expression (2.1) pour une valeur λ donnée du paramètre d'intérêt, et un ensemble de résultats de mesures ϕ , et une classe d'estimateurs non biaisés $\hat{\lambda}$ (on notera p la fonction de densité de probabilité $p(\phi|\lambda)$) :

$\mathbb{E}(\hat{\lambda} - \lambda) = \int d\phi [\hat{\lambda} - \lambda] p = 0$ après dérivation par rapport à λ on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int d\phi (\hat{\lambda} - \lambda) \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \int d\phi p \\ &\Rightarrow \int d\phi (\hat{\lambda} - \lambda) \frac{\partial \ln(p)}{\partial \lambda} p = 1 \end{aligned}$$

Le résultat précédent est obtenu en exploitant la normalisation de la densité de probabilité p et le fait que $\partial_\lambda p = p \partial_\lambda \ln(p)$. En exploitant l'inégalité de Schwarz on écrira :

$$\int d\phi \left(\frac{\partial \ln(p)}{\partial \lambda} \right)^2 p \int d\phi (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p \geq 1$$

Remarquer que le premier facteur de l'inégalité précédente représente l'information de Fisher $F(\lambda)$ tandis que le second représente EQM qui dans

notre cas d'estimateur non biaisé coïncide avec la variance. Il n'est donc que matière de réarrangement de terme afin de retrouver l'inégalité (2.1). Remarque que ce raisonnement justifie l'inverse proportionnalité entre la FI et la variance mais pas la présence de M (nombre de mesure) dans le dénominateur. Comme nous l'avons déjà exprimé au début de ce chapitre la densité de probabilité se factorise comme : $p(\phi|\lambda)d\phi = \prod_{j=1}^M p(x_j|\lambda)dx_j$ car les résultats de mesures x_i sont des variables indépendantes l'une de l'autre et qui suivent toutes la même distribution de probabilité et c'est de ce fait que suit le résultat stipulant que l'information de Fisher pour M mesures indépendantes et identiques est égale au nombre de mesure multiplié par la FI d'une mesure unique $MF(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\frac{\partial \ln(p(\phi|\lambda))}{\partial \lambda} \right)^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \left(\prod_{j=1}^M p(x_j|\lambda) \right) \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=1}^M \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(p(x_j|\lambda)) \right)^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^M \mathbb{E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(p(x_j|\lambda)) \right)^2 \right) \\ &\quad + \sum_{j \neq k} \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(p(x_j|\lambda)) \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(p(x_k|\lambda)) \right) \end{aligned}$$

Le second terme de la dernière égalité correspondant au cas $j \neq k$ est nul du au fait : $\mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(p(x_j|\lambda)) \right) = \frac{d}{d\lambda} \int p(x_j|\lambda) dx_j = \frac{d}{d\lambda} 1 = 0$ ce qui une conséquence de l'indépendance des observations x_j , en remplaçant ce résultat dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\frac{\partial \ln(p(\phi|\lambda))}{\partial \lambda} \right)^2 \right) &= \sum_{j=1}^M \mathbb{E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(p(x_j|\lambda)) \right)^2 \right) \\ &= M \mathbb{E} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(p(x|\lambda)) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en remplaçant $p(x_j|\lambda)$ par $p(x|\lambda)$ ce qui est

dû au fait que les observations x_j ont des distributions de probabilités identiques. Cela démontre la nature additive de la FI pour des variables aléatoires identiques et indépendantes. Ce fait combiné avec la positivité de la fonction sont les deux propriétés mathématiques qui font de l'information de Fisher une "information".

Ces résultats peuvent être étendus pour le cas d'une estimation à plusieurs paramètres. Pour un vecteur de N paramètres $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, On considère comme dans le cas d'un paramètre unique, un estimateur non biaisé $\hat{\lambda}$ du vecteur de paramètres. Dans ce cas de figure l'erreur quadratique moyenne coïncidera avec la matrice de covariance de l'estimateur, et la borne de Cramer-Rao exprimant la limite inférieure à la covariance devient dans ce cas :

$$Cov(\hat{\lambda}) \geq F(\vec{\lambda})^{-1}$$

Remarquez que dans ce cas-ci la borne de Cramer-Rao est une inégalité matricielle et non scalaire et qu'on a assumé l'existence de la matrice inverse à la FIM. La quantité $F(\vec{\lambda})$ est la matrice positive information de Fisher (FIM), elle représente la généralisation à plusieurs paramètres de la fonction information de Fisher. Les éléments de la FIM sont donnés par :

$$F_{ij}(\vec{\lambda}) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln(p(x|\vec{\lambda})) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln(p(x|\vec{\lambda})) \right)^T \right]$$

Les entrées dépendent de la distribution de probabilité $p(x, \vec{\lambda})$ pour un résultat de mesure x assumant les vraies valeurs $\vec{\lambda}$. Pour une distribution $p(x|\vec{\lambda})$ obéissant à la condition de régularité $\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln(p(x|\vec{\lambda})) \right] = 0 \forall \vec{\lambda}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour la saturation de la borne de Cramer-Rao par un estimateur local non-biaisé $\hat{\lambda}$ est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\lambda}} p(x|\vec{\lambda}) = F(\vec{\lambda}) (\hat{\lambda} - \vec{\lambda})$$

Ou nous avons défini la dérivée $\frac{\partial}{\partial \vec{\lambda}} p(x|\vec{\lambda}) = \left(\frac{\partial p(x|\vec{\lambda})}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial p(x|\vec{\lambda})}{\partial \lambda_2}, \dots, \frac{\partial p(x|\vec{\lambda})}{\partial \lambda_N} \right)$. Quand cette condition est respectée, l'estimateur $\hat{\lambda}$ N -dimensionnel, sature la borne

de Cramer-Rao dans le cas asymptotique de nombre de mesures et l'estimateur la saturant est garanti d'être non biaisé. Tout comme dans le cas d'un seul paramètre, la matrice d'information de Fisher pour un nombre M de mesures identiques est simplement le produit du nombre de mesures avec la matrice d'information de Fisher pour une seule mesure. La borne de Cramér-Rao pour plusieurs paramètres, tout comme dans le cas d'un seul paramètre, permet d'évaluer la performance d'un estimateur non biaisé, mais ne spécifie pas comment l'obtenir. Cependant, ce n'est pas un défaut spécifique de la borne de Cramér-Rao, comme nous l'avons mentionné précédemment, car il n'existe pas de méthode générique pour obtenir des estimateurs non biaisés à variance minimale. Tout espoir n'est pas perdu pour autant. Dans les cas où l'on peut trouver un estimateur non biaisé, même si sa performance est faible (c'est-à-dire si sa variance est élevée), il est possible d'améliorer sa performance grâce au théorème de Rao-Blackwell. Sans entrer dans les détails théoriques du théorème (pour plus de détails, voir [31]), on mentionnera simplement que ce théorème énonce que pour un estimateur $\hat{\lambda}_1$ qui n'est pas fonction d'une statistique suffisante il est toujours possible de construire un deuxième estimateur $\hat{\lambda}_2$ non biaisé dont la variance n'est jamais supérieure à celle du premier. Cela signifie que $\hat{\lambda}_2$ ne peut qu'améliorer la précision de la procédure d'estimation et que dans la quête au meilleur estimateur il suffit de restreindre les recherches aux statistiques suffisantes.

2.2 Estimateur de maximum de vraisemblance

La méthode de maximum de vraisemblance est de loin la méthode la plus populaire de détermination d'estimateurs. La raison derrière cette popularité réside dans le fait qu'elle soit particulièrement utile pour les cas où un estimateur non-biaisé de variance minimale n'existe pas, ou quand il existe mais ne peut pas être déterminé. Cette méthode basée sur le principe de maximum de vraisemblance dont on va parler dans un instant a l'avantage d'être assez flexible et implémentable même pour des cas d'estimation assez complexes. Une dernière propriété expliquant la popularité de ces estimateurs est expliquée par le fait qu'ils sont des MVU dans la limite d'une très large

collection de donnée. En effet l'estimateur de vraisemblance (MLE) retourne une valeur du paramètre qui maximise la fonction de vraisemblance, et il a la propriété d'être asymptotiquement non-biaisé et plus important encore de saturer la borne de Cramer-Rao (asymptotiquement) faisant de lui un estimateur optimal.

On commence par définir la fonction de vraisemblance (ML) $L(\vec{\lambda}|\vec{x})$:

$$L(\vec{\lambda}|\vec{x}) = L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k | x_1, x_2, \dots, x_M) = \prod_{i=1}^M p(x_i|\vec{\lambda}) \quad (2.4)$$

Ou encore et pour des raisons pratiques on choisit de travailler avec le logarithme de la fonction ML :

$$l(\vec{\lambda}|\vec{x}) = \text{Log} \left(L(\vec{\lambda}|\vec{x}) \right) = \sum_{i=1}^M \text{Log} \left(p(x_i|\vec{\lambda}) \right) \quad (2.5)$$

La maximisation de la fonction ML dans ce cas se résumera a résoudre les équations :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} l(\vec{\lambda}|\vec{x}) = 0 \quad (2.6)$$

Bien entendu cette dernière condition est nécessaire mais pas suffisante pour déterminer un maximum, comme condition additionnelle on peut imposer que la deuxième dérivée soit négative pour garantir que les points obtenus soit en fait des maximums. Cela fonctionnera pour tous les point à l'intérieur du domaine de définition de la fonction mais pas aux limites du domaine. Le comportement de la fonction ML aux limites de sont domaine doit être inspecté séparément.

L'estimateur MLE est obtenu en considérant des valeurs fixes de \vec{x} pour lesquels $L(\vec{\lambda}|\vec{x})$ est maximale. L'objectif de la méthode est de trouver la valeur de $\vec{\lambda}$ maximisant la fonction de vraisemblance. Le raisonnement derrière cette approche repose sur l'idée que si on a trouvé cet ensemble de résultats de mesures (les valeurs fixes de \vec{x}) et non un autre c'est parce que la fonction de vraisemblance de cet ensemble est plus large que celle de n'importe quel autre, et la valeur du paramètre ayant conduit à cet ensemble de résultats de

mesure est donc plausiblement celle maximisant la fonction de vraisemblance (voir par exemple [29]).

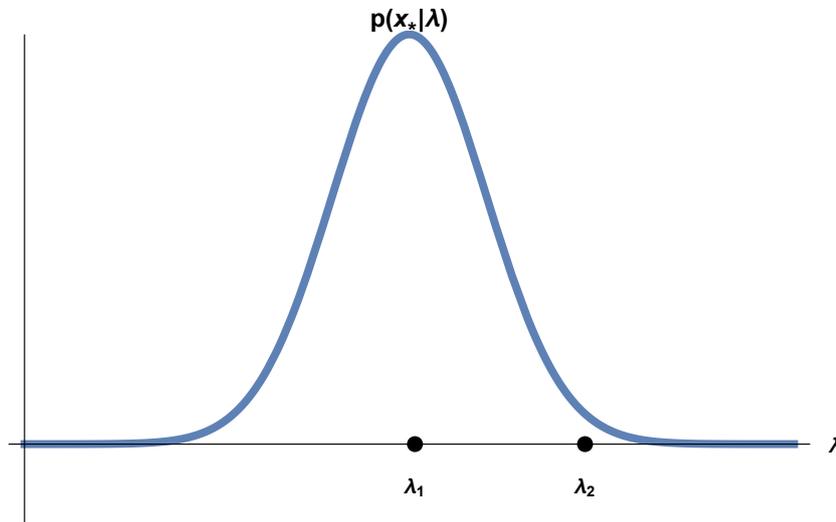


FIGURE 2.2 – Graphique représentant la densité de probabilité $p(x_0|\lambda)$ comme fonction du paramètre unique à estimer λ

Un exemple illustratif pour le cas d'une estimation d'un paramètre unique λ est donnée par la figure (2.2) où l'on peut voir le graphique d'une densité de probabilité $p(x_*|\lambda)$ en fonction des valeurs possibles du paramètre λ . Ici x_* représente l'ensemble des résultats de mesure collectés. La maximisation de la fonction ML revient à maximiser $p(x_*|\lambda)$ et il est clair à partir du graphe que par exemple la valeur $\lambda = \lambda_2$ correspond à une probabilité assez faible d'observer $x = x_*$. Par contre choisir $\lambda = \lambda_1$ correspond à une probabilité maximale d'observer $x = x_*$, du coup si les résultats de mesure constatés sont en effet x_* alors le "pari" le plus sûr sur la valeur réelle du paramètre λ sera λ_1 . Les estimateurs MLE ont été extensivement étudiés. Dans ce qui suit on énoncera quelques unes de leurs propriétés intéressantes. D'abord un estimateur MLE tend vers la valeur exacte du paramètre estimé avec une probabilité 1 dans le cas asymptotique de nombre de mesure $M \rightarrow \infty$ [29]. Les estimateurs MLE sont invariants sous une opération de reparamétrisation. Par "reparamétrisation" on entend le passage d'un paramètre λ vers une fonction du paramètre $f(\lambda)$. L'invariance dans ce cas ci explique que si $\hat{\lambda}$ est l'estima-

teur MLE de λ alors $f(\hat{\lambda})$ est l'estimateur MLE de $f(\lambda)$ [33]. Finalement, on mentionnera que la procédure de maximisation que suit la méthode de maximum de vraisemblance peut causer des problèmes d'évaluation numérique. Si on considère le cas réaliste où les résultats de mesure obtenus admettent une marge d'erreur ϵ alors l'estimateur MLE dans ce cas sera donné par la fonction $l(\lambda|x + \epsilon)$, et il n'est pas toujours vrai que cet estimateur est proche de l'estimateur MLE pour le cas idéal ou pas d'erreur de mesure est considérée. Cela reste vrai pour des valeurs faibles de ϵ [34].

2.3 Estimateurs Bayésiens

Dans l'approche classique, le paramètre λ est considéré comme une quantité inconnue mais fixe. En se basant sur les valeurs observées dans l'échantillon indexé par λ , une connaissance sur la valeur du paramètre est obtenue. Dans l'approche bayésienne, λ est considéré comme une quantité dont la variation peut être décrite par une distribution de probabilité (appelée distribution à priori). Il s'agit d'une distribution subjective, basée sur la croyance de l'expérimentateur, et formulée avant que les données (résultats de mesures) ne soient observées (d'où le nom de distribution à priori). Une fois les résultats de mesures constatés, la distribution à priori est mise à jour avec ces informations, et la distribution à priori mise à jour est appelée la distribution à posteriori. Cette mise à jour est effectuée à l'aide de la règle de Bayes, d'où le nom de statistiques bayésiennes et estimateurs bayésiens. La règle de Bayes permet de retrouver la densité de probabilité conditionnelle d'une certaine variable aléatoire x pour une certaine valeur (observations ou résultats de mesures) d'une autre variable y

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$$

Ceci est dû à la relation entre probabilité conjointe $p(x, y)$ et probabilité conditionnelle donné par $p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x)$. On applique à présent ces formules pour le cas d'estimation d'un paramètre λ . Comme auparavant on considère un nombre M de mesure répétées d'une observable

résultant en un ensemble de résultats empiriques $\Phi = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$. La probabilité que le paramètre inconnu ait la valeur (fixe) λ à la lumière des résultats Φ est donnée par :

$$p(\lambda|\Phi) = \frac{p(\Phi|\lambda)p(\lambda)}{p(\Phi)} \quad (2.7)$$

$p(\lambda)$ représente la densité de probabilité à priori que le paramètre ait une valeur λ , tandis que $p(\lambda|\Phi)$ représente la probabilité mise à jour par la donnée des résultats empirique Φ (densité de probabilité à posteriori) quand à $p(\Phi|\lambda)$ c'est la densité de probabilité conditionnelle d'obtenir les résultats de mesure Φ sachant que la valeur du paramètre est λ . La densité de probabilité d'obtenir les résultats Φ , $p(\Phi)$ est obtenu en moyennant la densité conditionnelle sur toutes les valeurs possible du paramètre λ cela permet de réécrire l'expression précédente :

$$p(\lambda|\Phi) = \frac{p(\Phi|\lambda)p(\lambda)}{\int p(\Phi|\lambda)p(\lambda)d\lambda} \quad (2.8)$$

A partir de cette expression plusieurs estimateurs peuvent être construits suivant diverses méthodes. On présentera dans ce qui suit l'estimateur bayésien minimisant l'erreur quadratique moyenne. L'erreur quadratique moyenne représente la moyenne de la différence (au carré) entre un estimateur et le paramètre qu'il estime ce qui est une mesure raisonnable de la performance d'un estimateur. On écrit l'erreur quadratique moyenne pour un estimateur $\hat{\lambda}$ par rapport à $p(\Phi, \lambda)$:

$$EQM(\hat{\lambda}) = \mathbb{E} [(\hat{\lambda} - \lambda)^2] \quad (2.9)$$

$$= \int \int (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p(\Phi, \lambda) d\Phi d\lambda \quad (2.10)$$

$$= \int \int (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p(\Phi|\lambda)p(\lambda) d\Phi d\lambda \quad (2.11)$$

A partir de là, l'objectif est de trouver un estimateur minimisant l'erreur quadratique moyenne, et un estimateur en particulier achevant cet objectif

est l'estimateur MMSE (Minimum Mean Squared Error) noté $\hat{\lambda}_b$:

$$\hat{\lambda}_b = \int \lambda p(\lambda|\Phi) d\lambda \quad (2.12)$$

L'estimateur $\hat{\lambda}_b$ est connu pour être asymptotiquement non-biaisé (dans la limite $M \rightarrow \infty$). Pour ce cas de figure, la variance devient équivalente à l'erreur quadratique moyenne, et sa précision est mesurée par la variance de sa distribution à posteriori (la distribution à priori n'est plus pertinente). Il est établi que l'estimateur Bayésien sature l'inégalité de Cramér-Rao.

Chapitre 3

Théorie de l'estimation Quantique

... Tous les efforts pour être exempts d'erreurs finiront cependant par atteindre une limite fixée par le chaos sous-jacent de la nature, qui infecte toutes les observations de phénomènes physiques avec une incertitude innée.

C.W. Helstrom

La théorie de l'estimation quantique[35, 36, 37] a vu le jour à travers les travaux pionniers d'Helstrom[21] et Holevo[23] et depuis a connu un succès accéléré par les vastes applications potentielles de la théorie[38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45]. La théorie de l'estimation quantique (QET) a pour objectif de déterminer la mesure (POVM) qui permettra d'estimer précisément la valeur réelle d'un paramètre d'intérêt λ . La QET peut être classifiée en deux catégories. La théorie de l'estimation quantique globale (GQET) qui a pour objectif de minimiser une certaine fonction du coût en moyennant sur toutes les valeurs possibles du paramètre. Le résultat sera donc une POVM indépendante de la valeur réelle du paramètre à estimer. La seconde catégorie

est la QET locale qui, elle, suppose une valeur fixe du paramètre λ et cherche à optimiser autour de cette valeur en maximisant l'information de Fisher classique par un choix optimal de POVM et par conséquent à réduire au minimum la variance sur l'estimateur choisi.

Considérons un ensemble statistique $\{\rho_\lambda\}$ d'opérateurs densité appartenant à un espace de Hilbert, et une mesure généralisée (POVM) $\{\Pi_x\}$. La règle de Born précise la probabilité conditionnelle d'obtenir un résultat de mesure x sachant la valeur du paramètre λ comme suit :

$$p(x|\lambda) = \text{Tr} [\Pi_x \rho_\lambda]$$

Où $\text{Tr}[\cdot]$ représente l'opération de trace. L'information de Fisher classique devient :

$$F(\lambda) = \int dx \frac{(\partial_\lambda \text{Tr} [\Pi_x \rho_\lambda])^2}{\text{Tr} [\Pi_x \rho_\lambda]} \quad (3.1)$$

On définit implicitement L_λ comme l'opérateur Dérivée Logarithmique Symétrique (SLD), qui est un opérateur hermitien, par l'équation :

$$\partial_\lambda \rho_\lambda = \frac{L_\lambda \rho_\lambda + \rho_\lambda L_\lambda}{2} \quad (3.2)$$

En exploitant le fait que $\partial_\lambda p(x|\lambda) = \text{Tr} [\Pi_x \partial_\lambda \rho_\lambda]$ et l'expression (3.2), ensemble avec la cyclicité de l'opération de trace, on aboutit à $\partial_\lambda p(x|\lambda) = \text{Re} (\text{Tr} [\rho_\lambda \Pi_x L_\lambda])$, et en utilisant cela avec l'expression (3.1), on écrit :

$$F(\lambda) = \int dx \frac{\text{Re} (\text{Tr} [\rho_\lambda \Pi_x L_\lambda])^2}{\text{Tr} [\rho_\lambda \Pi_x]} \quad (3.3)$$

Cette expression, ensemble avec (3.1), établit la borne classique de précision pour une mesure quantique (POVM).

3.1 Borne de Cramér-Rao Quantique

Pour obtenir la borne ultime de précision, l'expression précédente de l'information de Fisher doit être maximisée à travers toutes les mesures

quantiques (POVM) possibles. Cette procédure nous permettra d'écrire une borne quantique supérieure à l'information de Fisher. Exploitant l'expression précédente (3.3), on écrit :

$$F(\lambda) = \int dx \frac{\text{Re}(Tr[\rho_\lambda \Pi_x L_\lambda])^2}{Tr[\rho_\lambda \Pi_x]} \leq \int dx \frac{|Tr[\rho_\lambda \Pi_x L_\lambda]|^2}{Tr[\rho_\lambda \Pi_x]} \quad (3.4)$$

$$\leq \int \frac{dx}{Tr[\rho_\lambda \Pi_x]} \left| Tr \left[\left(\sqrt{\rho_\lambda} \sqrt{\Pi_x} \right) \left(\sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\rho_\lambda} \right) \right] \right|^2 \quad (3.5)$$

Exploitant l'inégalité de Schwartz $|Tr[A^\dagger B]|^2 \leq Tr[A^\dagger A] Tr[B^\dagger B]$ et prenant $A^\dagger = \sqrt{\rho_\lambda} \sqrt{\Pi_x} B = \sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\rho_\lambda}$, on écrit :

$$Tr|A^\dagger B|^2 \leq Tr[\rho_\lambda \Pi_x] Tr[L_\lambda \Pi_x L_\lambda \rho_\lambda]$$

On remplace dans (3.4) :

$$F(\lambda) \leq \int dx Tr(\Pi_x L_\lambda \rho_\lambda L_\lambda) = Tr(L_\lambda \rho_\lambda L_\lambda) \quad (3.6)$$

$$\leq Tr[\rho_\lambda L_\lambda^2] \quad (3.7)$$

Cette chaîne d'inégalités démontre que l'information de Fisher classique est bornée pour toutes les mesures quantiques par la quantité :

$$Q(\lambda) = Tr[\rho_\lambda L_\lambda^2] \quad (3.8)$$

Cette quantité, dite Information de Fisher Quantique (QFI), nous permet d'écrire l'inégalité la plus importante de toute la théorie de l'estimation quantique :

$$V(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{MQ(\lambda)} \quad (3.9)$$

C'est la borne de Cramer-Rao quantique (QCR) et elle représente la borne ultime à la précision d'une estimation. Remarquez que la QFI est indépendante de la mesure implémentée. Après tout, la QFI est une optimisation de la FI

pour toutes les mesures possibles. Par conséquent, une mesure optimale est celle réalisant l'égalité $F(\lambda) = Q(\lambda)$. Une expression alternative de la QFI peut être obtenue en exploitant la définition de l'opérateur SLD (3.2) :

$$(L_\lambda \rho_\lambda + \rho_\lambda L_\lambda) L_\lambda = (2\partial_\lambda \rho_\lambda) L_\lambda$$

En prenant la trace des deux côtés, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\text{Tr}[\rho_\lambda L_\lambda^2] &= 2\text{Tr}[(\partial_\lambda \rho_\lambda) L_\lambda] \\ Q(\lambda) &= \text{Tr}[(\partial_\lambda \rho_\lambda) L_\lambda] \end{aligned}$$

Afin de retrouver la POVM optimale pour l'estimation du paramètre λ , il faut étudier les conditions de saturation des deux inégalités (3.4) et (3.6). La première est simplement saturée lorsque $\text{Tr}[\rho_\lambda L_\lambda \Pi_x]$ est un nombre réel $\forall \lambda$. La saturation de la seconde inégalité peut être obtenue lorsque $B = \alpha A$ pour α une constante, dans l'inégalité de Schwartz sus-mentionnée. En effet, $|\alpha|^2 |\text{Tr}[A^\dagger A]|^2 = |\alpha|^2 \text{Tr}[A^\dagger A] \text{Tr}[A^\dagger A]$ Plus précisément, dans notre cas, la saturation se produit lorsque : $\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\lambda} = \alpha \sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\rho_\lambda} \forall \lambda$. Cette condition n'est satisfaite que lorsque $\{\Pi_x\}$ sont construites à partir des projecteurs sur les états propres de L_λ . C'est la mesure optimale pour estimer λ . Il est cependant important de noter que L_λ ne correspond pas nécessairement à l'observable optimale à mesurer.

3.2 Expression additionnelles des SLD et QFI

L'équation (3.2) est une équation matricielle dite de Lyapunov, sa solution générale pour L_λ est donnée par :

$$L_\lambda = 2 \int_0^\infty dt e^{-\rho_\lambda t} \partial_\lambda \rho_\lambda e^{-\rho_\lambda t}$$

Il est facile de vérifier que cette expression est bien solution de (3.2) en remplaçant ρ_λ par sa décomposition spectrale dans sa base propre $\rho_\lambda =$

$\sum_i c_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Par le même moyen, nous écrivons :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= 2 \sum_{i,j} \int_0^\infty dt e^{-(c_i+c_j)t} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \partial_\lambda \rho_\lambda |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \\ &= 2 \sum_{i,j} \frac{\langle \psi_i | \partial_\lambda \rho_\lambda | \psi_j \rangle}{c_i + c_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \end{aligned}$$

Avec cette expression, nous écrivons une nouvelle expression de la QFI :

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \text{Tr} \left[(\partial_\lambda \rho_\lambda) \left(2 \sum_{i,j} \frac{\langle \psi_i | \partial_\lambda \rho_\lambda | \psi_j \rangle}{c_i + c_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \right) \right] \\ &= 2 \sum_{i,j} \frac{\langle \psi_i | \partial_\lambda \rho_\lambda | \psi_j \rangle}{c_i + c_j} \langle \psi_j | \partial_\lambda \rho_\lambda | \psi_i \rangle \\ &= 2 \sum_{i,j} \frac{|\langle \psi_i | \partial_\lambda \rho_\lambda | \psi_j \rangle|^2}{c_i + c_j} \end{aligned}$$

Pour analyser les contributions à la QFI dans cette expression, nous évaluons explicitement $\partial_\lambda \rho_\lambda = \sum_i \partial_\lambda c_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| + c_i |\partial_\lambda \psi_i\rangle \langle \psi_i| + c_i |\psi_i\rangle \langle \partial_\lambda \psi_i|$. En utilisant $\partial_\lambda \langle \psi_i | \psi_j \rangle = 0$, nous obtenons $\langle \partial_\lambda \psi_i | \psi_j \rangle = -\langle \psi_i | \partial_\lambda \psi_j \rangle$ et l'équation précédente pour L_λ :

$$L_\lambda = \sum_{i,j,k} \frac{2}{c_i + c_j} \langle \psi_i | (\partial_\lambda c_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| + c_k |\partial_\lambda \psi_k\rangle \langle \psi_k| + c_k |\psi_k\rangle \langle \partial_\lambda \psi_k|) | \psi_j \rangle |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \quad (3.10)$$

$$= \sum_i \frac{\partial_\lambda c_i}{c_i} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| + 2 \sum_{i,j} \frac{c_j - c_i}{c_i + c_j} \langle \psi_i | \partial_\lambda \psi_j \rangle |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \quad (3.11)$$

Nous élevons cette expression au carré, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \sum_i c_i \langle \psi_i | L_\lambda^2 | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i \frac{(\partial_\lambda c_i)^2}{c_i} + 4 \sum_{i,j} c_i \left(\frac{c_j - c_i}{c_i + c_j} \right) \left(\frac{c_j - c_i}{c_i + c_j} \right) \langle \psi_i | \partial_\lambda \psi_j \rangle \langle \psi_j | \partial_\lambda \psi_i \rangle \end{aligned}$$

Remarquez que si l'on prend le terme $2c_i \left(\frac{c_j - c_i}{c_i + c_j} \right)^2$ dans l'expression précédente et qu'on lui additionne un terme générique antisymétrique $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ cela aboutit à une même fonction QFI. Posant $\sigma_{ij} = \Omega_{ij} + 2c_i \left(\frac{c_j - c_i}{c_i + c_j} \right)^2$, on réécrit la QFI comme suit :

$$Q(\lambda) = \sum_i \frac{(\partial_\lambda c_i)^2}{c_i} + 2 \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} |\langle \psi_i | \partial_\lambda \psi_j \rangle|^2 \quad (3.12)$$

Cette expression permet de séparer les contributions à la QFI. Le premier terme correspond à la FI d'une distribution c_i , tandis que le second terme correspond à la contribution quantique. Cette dernière est nulle lorsque les états propres de ρ_λ sont indépendants du paramètre. Une dernière expression qui mérite d'être mentionnée est celle de la QFI pour des états purs. Dans ce cas, plusieurs simplifications peuvent s'appliquer aux formules déjà énoncées de l'information de Fisher quantique. Pour un état pur $\rho_\lambda = |\psi_\lambda\rangle \langle \psi_\lambda|$, on a $\partial_\lambda \rho_\lambda = \partial_\lambda (\rho_\lambda^2) = (\partial_\lambda \rho_\lambda) \rho_\lambda + \rho_\lambda (\partial_\lambda \rho_\lambda)$. En comparant ce résultat avec (3.2), on obtient :

$$L_\lambda = 2\partial_\lambda \rho_\lambda = 2 [|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle \langle \psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle \langle \partial_\lambda \psi_\lambda|]$$

En injectant ceci dans l'expression de la QFI, on a :

$$Q(\lambda) = Tr[\partial_\lambda \rho_\lambda L_\lambda] = \frac{1}{2} Tr[L_\lambda^2] \quad (3.13)$$

$$= 4 [\langle \partial_\lambda \psi_\lambda | \partial_\lambda \psi_\lambda \rangle + \langle \partial_\lambda \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle^2] \quad (3.14)$$

C'est l'expression de la QFI pour une famille d'états purs.

3.3 Paramètres multiples et matrice information de Fisher quantique

Dans cette section, nous généralisons la procédure d'estimation quantique à un seul paramètre pour le cas où nous avons plusieurs paramètres à estimer, en introduisant la notion de la Matrice Information de Fisher Quantique (QFIM). Considérons un ensemble de paramètres représentés par le vecteur

$\vec{\lambda}$, où chaque composante λ_μ pour $\mu = 0, 1, \dots, N - 1$ représente un paramètre à estimer, et $\rho_{\{\lambda_\mu\}}$ est l'opérateur densité du système à paramètres multiples, noté désormais ρ_λ . La généralisation de la formule (3.8) de la QFI pour le cas à plusieurs paramètres est donnée par la Matrice Information de Fisher Quantique (QFIM), dont les éléments sont définis par :

$$Q(\lambda)_{\mu\nu} = \text{Tr} \left[\rho_\lambda \frac{L_\mu L_\nu + L_\nu L_\mu}{2} \right] = \text{Tr} [\partial_\nu \rho_\lambda L_\mu] \quad (3.15)$$

où ∂_ν représente $\frac{\partial}{\partial \lambda_\nu}$ et L_μ est l'opérateur SLD associé au paramètre λ_μ . Remarquez que les éléments diagonaux de la QFIM reproduisent exactement la formule (3.8), c'est-à-dire que les éléments $Q_{\mu\mu}$ dans la QFIM correspondent à la QFI du paramètre λ_μ .

Nous définissons également la Borne de Cramer-Rao Quantique pour plusieurs paramètres comme l'inverse de la QFIM, représentant une borne inférieure à la matrice de covariance de l'estimateur $\hat{\lambda}$ associé au vecteur $\vec{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$:

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{M} Q(\lambda)^{-1} \quad (3.16)$$

où les éléments de la matrice de covariance sont $\text{Cov}(\hat{\lambda})_{ij} = \mathbb{E}(\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j) - \mathbb{E}(\hat{\lambda}_i) \mathbb{E}(\hat{\lambda}_j)$. Remarquer que pour écrire cette inégalité nous avons assumé que la QFIM est inversible ce qui est une assumption raisonnable du fait que la singularité de la matrice QFI est signe de non indépendance des paramètres à estimer. Dans telle situation, il suffit de reexprimer les paramètres dépendants en termes des un et des autres puis recalculer la QFIM. Cette inégalité matricielle n'est pas toujours saturable ce qui peut se comprendre intuitivement si les SLD correspondants aux mesures optimales de différents paramètres ne commutes pas. Dans ce cas une estimation optimale d'un paramètre affectera négativement l'estimation de l'autre et l'optimisation du schéma d'estimation pour l'ensemble des paramètres ne peut pas exister. Le fait que l'expression précédente soit une inégalité matricielle représente un défi d'optimisation supplémentaire vu qu'il n'existe pas de méthodes générales d'optimisation pour des inégalités matricielles. C'est pour cette raison que la majeure partie des références dans le domaine choisissent de travailler avec des bornes

scalaires relatives à l'expression précédente plutôt qu'avec l'expression elle même. On introduit une borne scalaire particulièrement utile par la formule :

$$\text{Tr}(WCov(\hat{\lambda})) \geq \frac{1}{M}\text{Tr}(WQ^{-1}(\lambda)) = B(\lambda) \quad (3.17)$$

Où nous avons introduit W la matrice "poids", c'est une matrice réelle et positive dont l'objectif est d'associer différentes amplitudes (poids) aux différents paramètres λ_μ . Dans le cas où les paramètres ont tous le même poids on aura $W = \mathbb{I}$ et l'expression précédente devient :

$$\text{Tr}(Cov(\hat{\lambda})) \geq \frac{1}{M}\text{Tr}(Q^{-1}(\lambda)) = B(\lambda) \quad (3.18)$$

L'expression précédente représente un somme des variances individuels des paramètres (les élément de la diagonale de la matrice de covariance) bornées par la somme des informations quatiques de Fisher quantique associées aux paramètres à estimer (diagonale de la QFIM). Cette inégalité n'est elle même pas toujours saturable quoique qu'elle a l'avantage d'être plus facile à manipuler.

Dans le cas où il y a deux paramètres, une formule analytique de l'inverse de la QFIM est donnée par :

$$Q(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\det(Q(\lambda))} \begin{pmatrix} Q_{22} & -Q_{12} \\ -Q_{12} & Q_{11} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

La saturation de la borne de Cramer-Rao quantique est un problème plus compliqué dans le cas de plusieurs paramètres. Une condition nécessaire et suffisante pour la saturation de la borne de Cramer-Rao quantique pour plusieurs paramètres est donnée par la relation :

$$\text{Tr}(\rho[L_\mu, L_\nu]) = 0 \quad , \forall \mu, \nu \quad (3.20)$$

Si les SLD associés à deux paramètres commutent en moyenne, alors ils peuvent être estimés de manière optimale. Les systèmes quantiques obéissants à cette condition sont appelés des modèles asymptotiquement classiques, et la

borne quantique de Cramer-Rao est saturable asymptotiquement pour des mesures collectives sur un nombre large de copies du système étudié. La commutation des SLD L_μ et L_ν est une condition suffisante pour la compatibilité, bien qu'elle ne soit pas nécessaire. Les modèles satisfaisants cette propriété sont dit modèles quasi-classiques et dans ce cas la QCR est saturable l'égalité entre FI et QFI est atteignable.

Dans ce qui suit on énoncera quelques propriétés importantes de la QFIM pour le cas général à plusieurs paramètres :

- La QFIM est une matrice réelle et symétrique

$$Q_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu} \in \mathbb{R}.$$

- La QFIM est définie positive (certaines références appellent ce cas semi-positif au lieu de positif).

$$Q \geq 0$$

- La QFIM est invariante sous une transformation unitaire U indépendante de $\vec{\lambda}$:

$$Q(\rho) = Q(U\rho U^\dagger)$$

- La convexité de la QFIM : pour deux opérateurs densité ρ_1 et ρ_2 et une probabilité $p \in [0, 1]$, on a :

$$Q(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) \leq pQ(\rho_1) + (1-p)Q(\rho_2)$$

- La QFIM est monotone sous l'action d'une opération complètement positive et qui préserve la trace Φ :

$$Q(\Phi(\rho)) \leq Q(\rho)$$

- Pour $\vec{\alpha}$ une fonction de $\vec{\lambda}$, la QFIM respecte la propriété suivante :

$$Q(\rho(\vec{\lambda})) = J^T Q(\vec{\alpha}) J$$

Où J représente la matrice Jacobienne $J_{ij} = \partial\alpha_i/\partial\lambda_j$.

Jusqu'ici notre définition de la QFI a été exclusivement basée sur la définition des opérateurs SLD que ce soit dans le cas d'un seul ou de multiple paramètres. Ceci n'est pas l'unique version quantique de la FI, En effet il existe d'autres QFI basées sur d'autres classes d'opérateurs, en particulier une classe appelés opérateurs RLD (Right Logarithmic derivative) souvent notés R_λ et défini par $\partial_\lambda \rho = \rho R_\lambda$ et $\partial_\lambda \rho = R_\lambda^\dagger \rho$. Dans ce formalisme les entrées de la QFI sont données par $Q_{\mu\nu} = Tr(\rho R_\mu R_\nu^\dagger)$. La QFIM dans ce formalisme est complexe hermitienne, contrairement au cas SLD où elle est réelle et symétrique. Les différentes versions de la QFI donnent lieu à différentes bornes de Cramér-Rao quantique avec différentes conditions de saturation. En ce qui concerne notre étude dans ce manuscrit, toutes nos études métrologiques seront basées sur le formalisme SLD. Il doit être compris que lorsqu'on fait mention de la QFI, QFIM, CRB ou toute autre quantité métrologique, il s'agit bien de la version SLD.

3.4 Expressions supplémentaires de la QFIM

Le cas d'un opérateur densité ayant la décomposition spectrale dans sa base propre $\rho = \sum_{i=0}^{d-1} \rho_i |\rho_i\rangle \langle \rho_i|$, où ρ_i , $|\rho_i\rangle$ sont respectivement les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur densité ρ et d sa dimension. Si les valeurs propres de ρ sont strictement positives $\rho_i > 0$, $\forall 0 \leq i \leq d-1$ alors les entrées $Q_{\mu\nu}$ de la QFIM peuvent s'exprimer comme :

$$Q_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{2Re(\langle \rho_i | \partial_\mu \rho | \rho_j \rangle \langle \rho_j | \partial_\nu \rho | \rho_i \rangle)}{\rho_i + \rho_j}$$

Remarquer que si l'opérateur densité n'est pas défini positif l'expression précédente peut diverger. L'extension de cette formule pour le cas d'opérateur densité non positif (mais toujours $\rho_i \neq 0$) peut se faire en retirant manuellement les termes $\rho_i + \rho_j = 0$. Un résultat important concernant les QFIM de dimension finie stipule que cette dernière peut être entièrement définie sur le support de l'opérateur densité ρ . Le support $S := \{\rho_i \in \{\rho_i\} | \rho_i \neq 0\}$ représente l'ensemble des valeurs propres non nulles de ρ . Dans ce cas de figure la décomposition spectrale s'écrit $\rho = \sum_{\rho_i \in S} \rho_i |\rho_i\rangle \langle \rho_i|$, et les entrées

de la QFIM sont données par le théorème suivant :

$$Q_{\mu\nu} = \sum_{\rho_i \in S} \frac{(\partial_\mu \rho_i)(\partial_\nu \rho_i)}{\rho_i} + \sum_{\rho_i \in S} 4\rho_i \operatorname{Re}(\langle \partial_\mu \rho_i | \partial_\nu \rho_i \rangle) - \sum_{\rho_i, \rho_j \in S} \frac{8\rho_i \rho_j}{\rho_i + \rho_j} \operatorname{Re}(\langle \partial_\mu \rho_i | \rho_j \rangle \langle \rho_j | \partial_\nu \rho_i \rangle)$$

Les détails de la dérivation de cette formule peuvent être retrouvé dans le papier original [46]. Cette formule se simplifie davantage pour la diagonale de la QFIM (les entrées diagonales $Q_{\mu\mu}$ correspondent a la QFI du paramètre individuel λ_μ) et est donnée par :

$$Q_{\mu\mu} = \sum_{\rho_i \in S} \frac{(\partial_\mu \rho_i)^2}{\rho_i} + \sum_{\rho_i \in S} 4\rho_i \langle \partial_\mu \rho_i | \partial_\mu \rho_i \rangle - \sum_{\rho_i, \rho_j \in S} \frac{8\rho_i \rho_j}{\rho_i + \rho_j} |\langle \partial_\mu \rho_i | \rho_j \rangle|^2 \quad (3.21)$$

Les deux expressions précédentes permettent la séparation et la visualisation des différentes contributions à la QFI. Le premier terme est équivalent à l'information de Fisher classique puisqu'il ne contient que les dérivées des valeurs propres de l'opérateur densité, qui peuvent être vues comme l'équivalent des distributions de probabilités. Ce premier terme représente donc la contribution classique à la matrice d'information de Fisher quantique. Les deux termes restants contiennent les dérivées des vecteurs propres et représentent donc la contribution purement quantique à la QFIM. Une expression pour les opérateurs SLD peut être obtenus en termes des états propres de ρ et elle est donnée par :

$$\langle \rho_i | L_\mu | \rho_j \rangle = \frac{\partial_\mu \rho_i}{\rho_i} \delta_{ij} + \frac{2(\rho_j - \rho_i)}{\rho_i + \rho_j} \langle \rho_i | \partial_\mu \rho_j \rangle \quad (3.22)$$

La formule précédente est obtenus en exploitant la définition des opérateurs SLD (3.2) et en se rappelant que la décomposition spectrale de ρ sur son support S est $\rho = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i |\rho_i\rangle \langle \rho_i|$, étant N la dimension du support S et non de ρ . Si la matrice densité est de rang complet alors on aura $N = d$ autrement $N < d$ et $\sum_{i=0}^{N-1} |\rho_i\rangle \langle \rho_i| \neq \mathbb{I}$ avec toutes ces notions établies on

écrit :

$$\begin{aligned}\partial_\mu \rho &= \frac{1}{2}(\rho L_\mu + L_\mu \rho) \\ \langle \rho_i | \partial_\mu \rho | \rho_j \rangle &= \frac{1}{2} \langle \rho_i | L_\mu | \rho_j \rangle (\rho_i + \rho_j)\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\langle \rho_i | \partial_\mu \rho | \rho_j \rangle = \partial_\mu \rho_i \delta_{ij} + \rho_j \langle \rho_j | \partial_\mu \rho_i \rangle + \rho_i \langle \partial_\mu \rho_j | \rho_i \rangle$$

On combinant les deux expressions précédente ensemble on obtient :

$$\langle \rho_i | L_\mu | \rho_j \rangle = \delta_{ij} \frac{\partial_\mu \rho_i}{\rho_i} + \frac{2(\rho_j - \rho_i)}{\rho_i + \rho_j} \langle \rho_i | \partial_\mu \rho_j \rangle \quad (3.23)$$

Cette expression a deux issues possibles le premier étant : $\rho_i \in S$ et $\rho_j \notin S$, dans ce cas de figure l'expression précédente se réduit à $\langle \rho_i | L_\mu | \rho_j \rangle = -2 \langle \rho_i | \partial_\mu \rho_j \rangle$. Le second cas de figure possible est $\rho_i, \rho_j \notin S$ et dans ce cas $\langle \rho_i | L_\mu | \rho_j \rangle$ prendra des valeurs arbitraires. Une dernière expression que nous allons présenter ici est celle de la QFIM pour des états purs. L'expression (3.15) se réduit pour le cas d'un état pur fonction du vecteur de paramètres $\vec{\lambda}$. Rappelons que pour un état pur $\rho^2 = \rho$ et $Tr(\rho^2) = 1$, l'opérateur densité n'a qu'une seule valeur propre non nulle et elle est égale à 1. L'opérateur SLD pour un paramètre λ_μ est donné par $L_\mu = \partial_\mu \rho$ et les entrées de la QFIM :

$$Q_{\mu\nu} = 4Re [\langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle - \langle \partial_\mu \psi | \psi \rangle \langle \psi | \partial_\nu \psi \rangle]$$

Bien entendu, l'expression précédente se réduit à (3.13) si on se limite aux éléments diagonaux de la QFIM.

3.5 Approche géométrique à l'estimation quantique

L'estimabilité des paramètres liés à un modèle statistique $\{\rho\}$ dépend étroitement de la discernabilité des états du modèle, c'est-à-dire de la dis-

tance entre ces états. Cependant, plusieurs mesures de distance peuvent être définies, et il est crucial de déterminer laquelle de ces mesures capture l'essentiel pour une procédure d'estimation quantique.

On commence par considérer le cas simple d'un état pur normé $|\psi\rangle \neq 0$, puis on définit la métrique dites de Fubini-Study qui exprime le carré d'une distance infinitésimale entre deux états (voir [47] pour les détails de dérivation) par :

$$ds^2 = \langle d\psi|d\psi\rangle - \langle d\psi|\psi\rangle \langle \psi|d\psi\rangle \quad (3.24)$$

En exploitant l'expression de la QFIM pour des états purs et le fait que $|d\psi\rangle = \sum_i |\partial_i\psi\rangle d\lambda_i$ on réécrit la métrique de Fubini-Study comme suit :

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sum_{ij} Q_{ij} d\lambda_i d\lambda_j \quad (3.25)$$

La métrique de Fubini-Study représente un facteur d'un quart de l'information de Fisher quantique pour un état pur. Une information quantique plus large correspond à une distance plus larges entre les états et donc une plus grande discernabilité. Ce cas de figure par contre est limité aux états purs quoiqu'une généralisation vers les états mixtes existe et elle est donnée par la métrique de Bures. On introduit d'abord la notion de fidélité comme étant un quantificateur de similarité entre deux états donnée par $f(\rho_1, \rho_2) := \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}})$. La fidélité est une fonction bornée $f \in [0, 1]$ avec égalité $f = 1$ atteinte uniquement lorsque $\rho_1 = \rho_2$. La fidélité elle-même n'est pas une distance mais elle va nous permettre de définir la distance de Bures D_B par la relation :

$$D_B(\rho_1, \rho_2) := 2 - 2f(\rho_1, \rho_2) \quad (3.26)$$

Pour une variation infinitésimale $\rho(\vec{\lambda}) \rightarrow \rho(\vec{\lambda} + d\vec{\lambda})$ l'expression précédente devient (voir [48]) :

$$D_B(\rho(\vec{\lambda}), \rho(\vec{\lambda} + d\vec{\lambda})) = \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} Q_{\mu\nu} d\lambda_\mu d\lambda_\nu \quad (3.27)$$

Une large QFI pour un certain paramètre λ implique une large discernabilité entre $\rho(\lambda)$ et $\rho(\lambda + d\lambda)$. Cela signifie qu'une bonne procédure d'estimation (large QFI) correspond à des états quantiques éloignés pour des variations infinitésimales du paramètre considéré.

3.6 Le paramètre de Quanticité (Incompatibilité Asymptotique)

Dans cette section, nous examinons la possibilité de quantifier la précision prédite par la QCR et son atteignabilité, en tenant compte de l'incompatibilité quantique inhérente entre les paramètres. Nous avons constaté dans la section précédente que la QCR n'est pas toujours atteignable dans le cas de plusieurs paramètres, même asymptotiquement. Cela signifie que, outre la borne imposée à la précision, l'incompatibilité quantique des paramètres affectera davantage la précision du schéma d'estimation considéré. On peut se demander s'il est possible de quantifier cette influence sur la précision prédite par la QCR.

Dans le cas à deux paramètres, une condition nécessaire et suffisante pour la saturation de la borne CRQ (3.20) est équivalente à une courbure moyenne d'Uhlenmann (MUC) nulle : $U_{\mu\nu} = 0$, où la MUC est définie comme :

$$U_{\mu\nu} = \frac{-i}{2} \text{Tr}(\rho[L_\mu, L_\nu]) \quad (3.28)$$

On peut voir à partir de cette équation que $U_{\mu\nu}$ est un marqueur d'incompatibilité entre λ_μ et λ_ν , et donc il peut servir à définir un quantificateur d'incompatibilité entre les paramètres à estimer. Un tel quantificateur, appelé paramètre de quanticité (également appelé paramètre d'incompatibilité asymptotique) R , est donné par :

$$R = \|iQ^{-1}U\|_\infty \quad (3.29)$$

où $\|A\|_\infty$ désigne la plus grande valeur propre de A .

La première propriété importante de R est qu'il est borné :

$$0 \leq R \leq 1$$

La condition $R = 0$ est satisfaite uniquement lorsque $U = 0$, ce qui correspond à des paramètres compatibles, tandis que $R = 1$ correspond à une incompatibilité maximale des paramètres.

Une autre propriété intéressante de R est la simplification de la formule (3.29) dans le cas de deux paramètres à estimer ($N = 2$) :

$$R = \sqrt{\frac{\text{Det}[U]}{\text{Det}[Q]}} \quad (3.30)$$

Enfin, une dernière propriété de R est son invariance sous une reparamétrisation du modèle statistique, c'est-à-dire que pour un modèle statistique $\rho_{\bar{\lambda}}$ où l'ensemble $\bar{\lambda} = f(\lambda)$, nous avons :

$$R(\bar{\lambda}) = R(\lambda)$$

Cette propriété peut être démontrée en définissant les entrées de la matrice jacobienne $B_{\mu\nu} = \partial\lambda_\nu/\partial\bar{\lambda}_\mu$ et $Q(\bar{\lambda}) = BQ(\lambda)B^T$, $U(\bar{\lambda}) = BU(\lambda)B^T$. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} R(\bar{\lambda}) &= \|i(B^T)^{-1}Q^{-1}(\lambda) B^{-1}B U(\lambda)B^T\|_\infty \\ &= \|i(B^T)^{-1}Q^{-1}(\lambda)U(\lambda)B^T\|_\infty \\ &= \|iQ^{-1}(\lambda)U(\lambda)\|_\infty \\ &= R(\lambda) \end{aligned}$$

Cette invariance découle du fait que les matrices similaires ont le même spectre.

Chapitre 4

Théorie des Perturbations en Mécanique Quantique

...Ainsi, d'une certaine manière,
nous utilisons des solutions
exactes à un problème
approximatif afin obtenir des
solutions approximatives à un
problème exact.

Giuseppe Gaeta

La théorie des perturbations est l'une des méthodes d'approximation les plus utilisées en physique, en particulier en mécanique quantique. La raison en est la difficulté de résoudre l'équation de Schrödinger de manière exacte. Pour résoudre des problèmes génériques en mécanique quantique, on est souvent amené à employer diverses méthodes d'approximation. La première méthode d'approximation en mécanique quantique remonte aussi loin dans le temps que la théorie de la mécanique quantique elle-même. En effet, elle a été proposée en 1926 par Schrödinger[49], la même année de la publication de sa fameuse équation d'évolution des systèmes quantiques portant son nom. Cette méthode est en fait une adaptation à la mécanique quantique d'une méthode proposée par Lord Rayleigh en 1877 dans le cadre de ses études sur la théorie

du son[50]. Lord Rayleigh a développé cette méthode dans le but d'étudier les modifications subies par les modes vibratoires d'une corde quand on passe d'une densité $\rho = 1$ à une densité perturbée $\rho + \lambda\rho'$. Schrödinger a utilisé le formalisme développé par Rayleigh pour l'étude des systèmes quantiques et a réussi à écrire les formules relatives à la correction des niveaux d'énergie et des fonctions d'onde pour les cas dégénérés et non dégénérés. Il a ensuite appliqué ses formules pour étudier l'exemple pratique d'un atome d'hydrogène plongé dans un champs électrique constant. C'est pour ces raisons que la théorie a été baptisée la théorie des perturbations de Rayleigh-Schrödinger. Elle concerne des systèmes stationnaires qui correspondent à des Hamiltoniens indépendants du temps. Dans ce cas d'étude, on considère souvent que le système étudié diffère légèrement d'un système solvable de manière exacte, et l'objectif est d'étudier l'effet de cette différence sur les états et les énergies propres du système étudié en termes de celles du système solvable. Quant aux systèmes non stationnaires, Dirac a été le pionnier dans le développement de la théorie des perturbations dépendantes du temps à travers ses études sur l'interaction des atomes avec des champs électromagnétiques[51]. Ses travaux ont été étendus par Dyson[52], Feynman et d'autres, aboutissant au développement de techniques puissantes pour l'étude des interactions et de l'évolution des systèmes quantiques.

4.1 Perturbation Indépendante du Temps

Dans cette section, nous nous proposons de présenter le formalisme de la théorie des perturbations indépendantes du temps et non dégénérées, dont l'Hamiltonien est de la forme $H = H_0 + \lambda H_1$, où H_0 est l'Hamiltonien non perturbé dont le spectre et les états propres sont connus ($|\psi_{n,0}\rangle, E_{n,0}$), c'est-à-dire $H_0 |\psi_{n,0}\rangle = E_{n,0} |\psi_{n,0}\rangle$ alors que H_1 est la perturbation introduite dans le système[53, 54]. L'objectif de la théorie des perturbations est d'exprimer les quantités relatives à H , telles que les énergies propres et les états propres (E_i et $|\psi_i\rangle$), en termes de celles déjà connues de H_0 . λ est un paramètre réel et continu utilisé pour ajuster l'amplitude de la perturbation. Le cas $\lambda = 0$ correspond au système quantique non perturbé $H = H_0$. L'introduction du

paramètre λ sous-entends que l'on peut contrôler l'amplitude de la perturbation, et elle est souvent considérée comme très faible ($\lambda \ll 1$) pour permettre une approximation au premier ou au second ordre en λ .

4.1.1 Les énergies propres et états propres

Pour un Hamiltonien $H = H_0 + \lambda H_1$ on cherche à écrire les corrections aux états et au spectre $\{|\psi_{n,0}\rangle, E_{n,0}\}$ de H_0 induites par la présence du terme perturbatif λH_1 . Assumant l'existence d'une expansion en terme des puissance de λ on écrit les états et énergies n-ième de H :

$$E_n = E_{n,0} + \lambda E_{n,1} + \lambda^2 E_{n,2} + \dots + E_{n,k} + \dots \quad (4.1)$$

$$|\psi_n\rangle = |\psi_{n,0}\rangle + \lambda |\psi_{n,1}\rangle + \lambda^2 |\psi_{n,2}\rangle + \dots + |\psi_{n,k}\rangle + \dots \quad (4.2)$$

Afin de déterminer les $E_{n,k}$ et $|\psi_{n,k}\rangle$ on commence par écrire l'équation de Schrodinger $H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$:

$$\begin{aligned} (H_0 + \lambda H_1) (|\psi_{n,0}\rangle + \lambda |\psi_{n,1}\rangle + \lambda^2 |\psi_{n,2}\rangle + \dots) \\ = (E_{n,0} + \lambda E_{n,1} + \lambda^2 E_{n,2} + \dots) (|\psi_{n,0}\rangle + \lambda |\psi_{n,1}\rangle + \lambda^2 |\psi_{n,2}\rangle + \dots) \end{aligned}$$

On identifie ensemble les coefficient de λ de même puissance en retrouve :

A l'ordre zéro en λ nous avons :

$$H_0 |\psi_{n,0}\rangle = E_{n,0} |\psi_{n,0}\rangle$$

c'est juste l'équation de Schrodinger pour le système non perturbé décrit par H_0

A l'ordre un en λ on retrouve :

$$H_0 |\psi_{n,1}\rangle + H_1 |\psi_{n,0}\rangle = E_{n,0} |\psi_{n,1}\rangle + E_{n,1} |\psi_{n,0}\rangle \quad (4.3)$$

A l'ordre deux :

$$H_0 |\psi_{n,2}\rangle + H_1 |\psi_{n,1}\rangle = E_{n,0} |\psi_{n,2}\rangle + E_{n,1} |\psi_{n,1}\rangle + E_{n,2} |\psi_{n,0}\rangle \quad (4.4)$$

De façon générale les termes a un ordre k de perturbation est : $(H_0 - E_{n,0}) |\psi_{n,k}\rangle + (H_1 + E_{n,1}) |\psi_{n,k-1}\rangle - E_{n,2} |\psi_{n,k-2}\rangle - \dots - E_{n,k} |\psi_{n,0}\rangle$

Pour des perturbations faibles il n'est souvent pas nécessaire d'aller au delà du second ordre de perturbation, on se limitera donc a chercher les expressions explicites des énergies et états propres a l'ordre 2 en λ . En multipliant par la gauche l'équation (4.3) par $\langle \psi_{n,0} |$ on obtient la première correction au spectre $E_{n,1}$:

$$E_{n,1} = \langle \psi_{n,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle \quad (4.5)$$

Et l'énergie totale de H au premier ordre en λ :

$$E_n = E_0 + \lambda E_{n,1} + O(\lambda^2)$$

Pour déterminer la première correction à l'état induite par la perturbation on rappelle que les états propres de H_0 forment une base complète et on exprime la correction à l'état dans cette base $|\psi_{n,1}\rangle = \sum_m \alpha_{n,m} |\psi_{m,0}\rangle$ puis on multiplie (4.3) par $\langle \psi_{m,0} |$ pour $m \neq n$:

$$\begin{aligned} E_{n,0} \langle \psi_{m,0} | \psi_{n,1} \rangle &= E_{m,0} \langle \psi_{m,0} | \psi_{n,1} \rangle + \langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle \\ \langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle &= \alpha_{n,m} (E_{n,0} - E_{m,0}) \\ \alpha_{n,m} &= \frac{\langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle}{E_{n,0} - E_{m,0}} \end{aligned}$$

$$|\psi_{n,1}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle}{E_{n,0} - E_{m,0}} |\psi_{m,0}\rangle \quad (4.6)$$

L'approximation au premier ordre en λ n'est valide que pour de très faibles perturbations. Dans le cas particulier où la première correction $E_{n,1}$ est nulle où dans le cas d'une perturbation pas suffisamment faible, on est amené à considérer une correction au second ordre de perturbation. Multipliant (4.4) par $\langle \psi_{n,0} |$ et suivant un raisonnement similaire au précédent on obtient :

$$E_{n,2} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle|^2}{E_{n,0} - E_{m,0}} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
|\psi_{n,2}\rangle &= \sum_{m \neq n} \sum_{k \neq n} \frac{\langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{k,0} \rangle \langle \psi_{k,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle}{(E_{n,0} - E_{m,0})(E_{n,0} - E_{k,0})} |\psi_{m,0}\rangle \\
&\quad - \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle \langle \psi_{n,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle}{(E_{n,0} - E_{m,0})^2} |\psi_{m,0}\rangle
\end{aligned}$$

Il faut noter que les $|\psi_{n,k}\rangle$ ne sont pas normés et donc $|\psi_n\rangle$ non plus quoique on peut le faire après avoir obtenu l'expression des corrections $|\psi_{n,k}\rangle$. On peut également remarquer et c'est effectivement le cas qu'en calculant des corrections d'ordres supérieurs en λ , on multiplie par des entrées $H_{m,n}$ de H_1 et on divise par la différence $E_{n,0} - E_{m,0}$ des énergies propres de H_0 afin d'éviter la divergence de (4.1). Le rapport $\frac{\langle \psi_{m,0} | H_1 | \psi_{n,0} \rangle}{E_{n,0} - E_{m,0}} \ll 1$ et cela suggère que les niveaux d'énergie propres non perturbés $E_{n,0}$ doivent être suffisamment espacés. Dans ce qui suit de ce manuscrit en s'en tiendra au formalisme présenté c-a-d qu'on considérera des cas où le développement en séries (4.1) existe et mène à une bonne approximation des états et énergies propres du système quantique étudié. On doit tout de même mentionner que ce formalisme assume l'existence d'un développement en série de puissance croissante en λ de la forme (4.1) ce qui n'est pas toujours vrai. En effet même quand la perturbation est faible les E_n et $|\psi_n\rangle$ ne sont pas forcément analytiques en λ dans ce cas de figure d'autre méthode d'approximation doivent être adoptées. De plus, l'existence du développement (4.1) pour $|\lambda| \leq 1$ ne garantit en rien sa convergence. Ce n'est que pour des cas particuliers que la convergence de la série de puissance peut être démontrée. Pour le reste le développement en série est divergent et quand il converge il ne converge pas forcément vers les vraies valeurs des états et énergies propres du système. On n'entrera pas dans le détail mathématique des conditions d'existence et de convergence des séries de puissance, Une large littérature en la matière existe. On se contentera de mentionner le cas intéressant des perturbations dites régulières où le développement en série existe et converge vers les bonnes valeurs des états et énergies propres. Plus précisément, pour une valeur propre $E_{n,0}$ non dégénérés de H_0 au voisinage de $\lambda = 0$, un hamiltonien $H = H_0 + \lambda H_1$ possède une valeur propre E_n non dégénérée analytique en λ et égale à $E_{n,0}$ quand $\lambda = 0$, la même chose est valable pour les états propres de H .

Une condition suffisante pour qu'une perturbation soit régulière est exprimée par le théorème de Kato-Rellich qui explique que pour des constantes a et b si une perturbation H_1 est H_0 -bornée[55] :

$$\|H_1\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\| \quad (4.8)$$

pour chaque fonction ψ dans le domaine de H_1 : $\psi \in D(H_1)$ (ce domaine doit inclure celui de H_0 : $D(H_0) \subset D(H_1)$) alors la perturbation est régulière. Dans ce cas de figure on peut trouver une expression du rayon de convergence r de la série de puissance des valeurs propres $E_{n,0}$ en lambda en terme des constantes a , b et de la distance δ entre une valeur propre $E_{i,0}$ et le reste du spectre de H_0 [55] :

$$r = \left[a + \frac{2}{\delta} \left(b + a \left(|E_{i,0}| + \frac{\delta}{2} \right) \right) \right]^{-1} \quad (4.9)$$

Les séries (4.1) converge vers E_n et $|\psi_n\rangle$ pour $|\lambda| < r$, et dans le cas particulier où H_1 est borné ($a = 0, b = \|H_1\|$) l'équation précédente se simplifie d'avantage et on retrouve $r = \delta/(2\|H_1\|)$, ce qui implique que la série perturbative de H quand H_1 est borné, converge pour $\|\lambda H_1\| < \delta/2$. La séparation des énergies propres de H_0 joue un rôle crucial dans la convergence de la série de puissance, la non-dégénérescence du spectre de l'hamiltonien non perturbé n'est pas suffisante pour garantir la convergence des séries perturbatives (4.1), une séparation minimale du spectre de H_0 doit être respectée sans quoi la série diverge.

4.2 Perturbations Dépendantes du Temps

La théorie des perturbations dépendante du temps étudie les systèmes dont l'hamiltonien varie dans le temps et dont la partie variable est relativement faible en amplitude[56, 57]. Cette technique s'avère particulièrement judicieuse pour l'étude des processus d'émission et d'absorption de radiation par des molécules ou des atomes, ainsi que pour la transition des systèmes quantiques d'un niveau d'énergie à un autre. La théorie des perturbations

dépendante du temps cherche principalement à déterminer l'effet de la perturbation (dépendante du temps) sur l'évolution dynamique du système. Pour un état initial $|\psi(0)\rangle$ à un instant initial qu'on peut choisir comme instant zéro $t_0 = 0$, on cherche à déterminer un état à un instant ultérieur $|\psi(t)\rangle$ après une durée d'évolution t .

4.2.1 Image d'interaction

Avant d'aborder le formalisme de la théorie des perturbations dépendante du temps, on doit d'abord préparer le terrain en discutant brièvement des différentes images de la mécanique quantique, et en particulier de l'image d'interaction. Jusqu'ici nous avons travaillé dans l'image de Schrodinger. Dans cette image, l'évolution temporelle du système est entièrement encodée dans le vecteur d'état $|\psi\rangle_s$ qui lui doit satisfaire à l'équation de Schrodinger $i\frac{d}{dt}|\psi\rangle_s = H|\psi\rangle_s$. Les opérateurs eux ne dépendent pas explicitement du temps dans cette image et les transformations unitaires U des états et opérateurs $|\psi\rangle_s \rightarrow U|\psi\rangle_s$ et $A \rightarrow UAU^\dagger$ laissent invariantes les observables du système. L'application d'un opérateur U dépendant du temps correspond à un changement d'image de mécanique quantique allant de l'image de Schrodinger vers l'image d'Heisenberg ou l'image d'interaction (également dite de Dirac). L'image d'Heisenberg est obtenue en transférant complètement la dépendance temporelle des états vers les opérateurs. L'évolution dynamique des opérateurs dans cette image est gouvernée par l'équation d'Heisenberg $\frac{dA_H}{dt} = -i[A_H, H]$, étant H l'Hamiltonien du système étudié. L'image d'Heisenberg est particulièrement utile dans l'étude dynamique des moments cinétiques, des spins et du couplage spin-orbite. Elle est également utilisée en théorie quantique des champs. L'image d'interaction, est une image de la mécanique quantique où à la fois les états et les opérateurs évoluent dans le temps. Ainsi, nous avons besoin d'écrire une équation qui régit l'évolution des états et une autre pour les opérateurs.

Si l'on considère un Hamiltonien $H = H_0 + V(t)$, où H_0 est la partie indépendante (explicitement) du temps et V la partie qui peut en dépendre.

Un état dans l'image d'interaction $|\psi\rangle_I$ est exprimé par la relation

$$|\psi\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi\rangle$$

où $|\psi\rangle$ est l'état du système exprimé dans l'image de Schrödinger. En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi\rangle_I &= -H_0 e^{iH_0 t} |\psi\rangle + e^{iH_0 t} \left(i \frac{d}{dt} |\psi\rangle \right) \\ &= -H_0 |\psi\rangle_I + e^{iH_0 t} (H_0 + V) |\psi\rangle \end{aligned}$$

En remarquant que $e^{iH_0 t} V = (e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}) e^{iH_0 t} = V_I e^{iH_0 t}$, où V_I est identifié comme le terme entre parenthèses, on écrit :

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle_I = V_I |\psi\rangle_I \quad (4.10)$$

C'est l'équation de Schrödinger exprimée dans l'image d'interaction. L'évolution des états est entièrement déterminée par l'interaction V_I .

De manière similaire, nous écrivons une équation régissant l'évolution des opérateurs dans l'image d'interaction. Un opérateur A_I dans cette image est donné par $A_I = e^{iH_0 t} A_s e^{-iH_0 t}$, où A_s représente la représentation dans l'image de Schrödinger de l'opérateur A . En dérivant par rapport au temps et en exploitant le fait que $\frac{\partial}{\partial t} A_s = 0$, on obtient :

$$\frac{dA_I}{dt} = -i [A_I, H_0] \quad (4.11)$$

Cette équation rappelle l'équation de mouvement dans l'image d'Heisenberg, mais avec H_0 à la place de H . L'évolution temporelle des opérateurs est donnée par la partie stationnaire de l'hamiltonien, contrairement aux états dont l'évolution est entièrement dictée par la partie interaction de l'hamiltonien.

4.2.2 Séries de Dyson

Similairement au cas stationnaire, l'idée est d'écrire les valeurs et vecteurs propres d'un Hamiltonien $H = H_0 + V(t)$ en termes de ceux déjà connus de H_0 . Nous écrivons : $|\psi\rangle_I = e^{iH_0t} |\psi\rangle_s = e^{iH_0t} U_s |\psi(0)\rangle_s$, où U_s représente l'opérateur d'évolution dans l'image de Schrödinger.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_I &= e^{iH_0t} U_s |\psi(0)\rangle_s \\ &= e^{iH_0t} U_s e^{-iH_0t} e^{iH_0t} |\psi(0)\rangle_s \\ &= U_I |\psi(0)\rangle_I \end{aligned}$$

Ici $|\psi(0)\rangle$ représente l'état à l'instant initial $t = 0$ tandis que $|\psi\rangle$ représente l'état à un instant t ultérieur (nous avons omis d'écrire explicitement la dépendance en t pour alléger la notation) et enfin les indices s, I indique qu'on es dans l'image de Schrödinger ou d'interaction respectivement. Nous pouvons écrire l'opérateur d'évolution U_I comme une série de puissances croissantes en exploitant l'équation (4.10) et la condition initiale $U_I(0) = \mathbb{I}$:

$$i \frac{dU_I(t)}{dt} = V_I(t) U_I(t)$$

V_I est la représentation de V dans l'image d'interaction. L'équation différentielle précédente est équivalente à :

$$U_I(t) = \mathbb{I} - i \int_0^t V_I(t_1) U_I(t_1) dt_1$$

Le résultat précédent est obtenu en prenant en compte la condition initiale $U_I(0) = \mathbb{I}$, Et par itération, on obtient l'expansion en série de Dyson de l'opérateur d'évolution :

$$\begin{aligned} U_I &= \mathbb{I} - i \int_0^t V_I dt_1 + (-i)^2 \int_0^t V_I dt_1 \int_0^{t_1} V_I dt_2 \\ &+ \dots + (-i)^n \int_0^t V_I dt_1 \int_0^{t_1} V_I dt_2 \int_0^{t_{n-1}} V_I dt_n + \dots \end{aligned}$$

On peut introduire explicitement un paramètre λ pour quantifier l'amplitude

de $V(t)$. L'expression précédente devient alors :

$$U_I = \mathbb{I} - i\lambda \int_0^t V_I dt_1 + (-i\lambda)^2 \int_0^t V_I dt_1 \int_0^{t_1} V_I dt_2 \quad (4.12)$$

$$+ \dots + (-i\lambda)^n \int_0^t V_I dt_1 \int_0^{t_1} V_I dt_2 \int_0^{t_2} V_I dt_3 + \dots \quad (4.13)$$

Enfin l'expression précédente peut être simplifiée davantage comme suit :

$$U_I(t) = T \left[\exp \left(-i\lambda \int_0^t d\tau V_I(\tau) \right) \right] \quad (4.14)$$

$$U_I^\dagger(t) = T \left[\exp \left(i\lambda \int_0^t d\tau V_I(\tau) \right) \right] \quad (4.15)$$

Où $T[.]$ représente l'opérateur ordre chronologique exprimant que le développement en série de l'exponentielle doit se faire en ordonnant les opérateurs dans le temps. Dans le cas d'une faible amplitude, nous pouvons nous arrêter au premier ou au deuxième ordre de puissance en λ . C'est le cas, par exemple, de la règle d'or de Fermi où l'on suppose une expansion au premier ordre de U_I pour obtenir les probabilités de transitions entre des états propres de H_0 .

4.2.3 Probabilités de transition et règle de Fermi

Un exemple d'application de la théorie des perturbations dépendantes du temps est celui des probabilités de transition d'un état initial $|i\rangle$ qui est état propre de H_0 avec une valeur propre associée E_i , vers un état final $|f\rangle$. On exprime dans la base propre $\{|k\rangle\}$ de H_0 l'état initial dans l'image d'interaction :

$$|i\rangle_I = U_I(t) |i\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k| U_I(t) |i\rangle = \sum_k c_k(t) |k\rangle$$

En exploitant l'expression (4.12) et en remarquant que $\langle k| V_I |i\rangle = \langle k| U_0^\dagger V(t) U_0 |i\rangle = e^{it(E_k - E_i)} \langle k| V(t) |i\rangle = V_{k,i} e^{it(E_k - E_i)}$ On peut écrire une approximation des

composantes $c_k^{(n)}(t)$ à un ordre n souhaité en λ :

$$\begin{aligned} c_k^{(0)}(t) &= \langle k | \mathbb{I} | i \rangle = \delta_{k,i} \\ c_k^{(1)}(t) &= -i \int_0^t dt_1 V_{k,i}(t_1) e^{it_1(E_k - E_i)} \\ c_k^{(2)}(t) &= -i \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V_{k,h}(t_1) V_{h,i}(t_2) e^{it_1(E_k - E_h)} e^{it_2(E_h - E_i)} \end{aligned}$$

A partir de ces expressions on peut évaluer les probabilités de transition $P_{i \rightarrow f} = |c_k(t)|^2$ à l'ordre de perturbation souhaité, et au premier ordre on obtient pour $f \neq i$:

$$P_{i \rightarrow f} = \left| -i \int_0^t V_{f,i}(t_1) e^{it_1(E_f - E_i)} dt_1 \right|^2 \quad (4.16)$$

Dans le cas particulier d'une perturbation V stationnaire l'expression précédente se simplifie davantage comme suit :

$$\begin{aligned} P_{i \rightarrow f} &= |V_{f,i}|^2 \left| \frac{e^{it(E_f - E_i)} - 1}{E_f - E_i} \right|^2 \\ &= \frac{4 |V_{f,i}|^2}{(E_f - E_i)^2} \sin^2 \left[\frac{(E_f - E_i)t}{2} \right] \end{aligned}$$

On peut voir sur la figure (4.1) que la probabilité de transition est uniquement appréciable au voisinage de $\Delta E \approx E_f - E_i = 0$ et est de plus en plus faible pour de grandes valeurs de ΔE . Cela exprime sans surprise le fait qu'une transition entre deux états est plus probable lorsque l'énergie les séparant est faible et réciproquement dès que la séparation des niveaux d'énergie devient conséquente, la probabilité de transition devient négligeablement faible. Remarque que la longueur du pique central autour de $\Delta E = 0$ est proportionnelle à t^2 et sa largeur est proportionnelle à $1/t$ ce qui fait que la surface du pique est proportionnelle à t et donc la probabilité de transition est une fonction linéaire du temps. Cela suggère que pour des valeurs croissantes en t le pique deviendra plus long mais aussi plus étroit. Cela rappelle les propriétés de la "fonction" delta de Dirac $\delta(x)$. Faisant usage de la relation

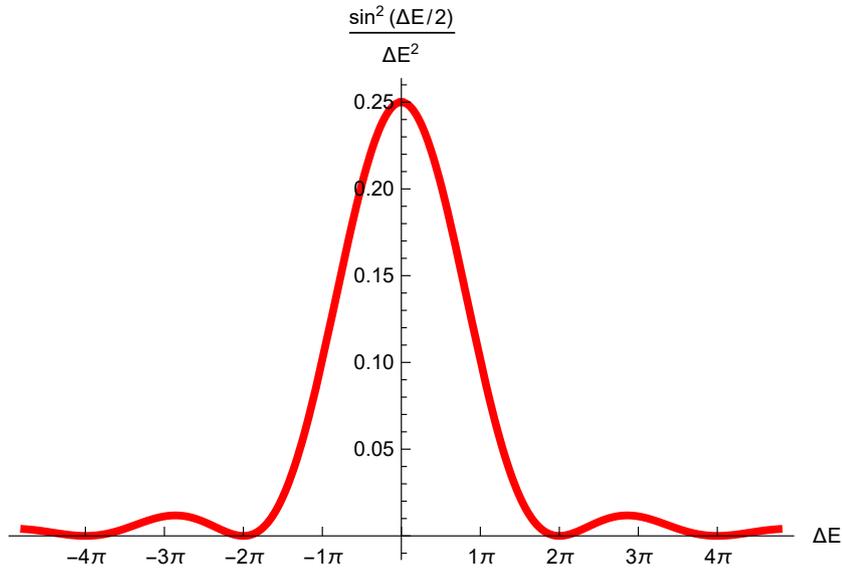


FIGURE 4.1 – Graphique de la fonction $\frac{\sin^2[\Delta E/2]}{\Delta E^2}$ pour un instant fixé $t = 1$.

$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(x\epsilon)}{\pi\epsilon x^2} = \delta(x)$ on démontre qu'en effet dans la limite de très larges durées ($t \rightarrow \infty$) la probabilité de transition prend la forme d'une fonction delta.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\Delta E t/2)}{t\pi(\Delta E^2/4)} = \delta(\Delta E/2) &\Rightarrow \frac{\sin^2(\Delta E t/2)}{(\Delta E/2)^2} = t\pi\delta(\Delta E/2) \\ &\Rightarrow \frac{\sin^2(\Delta E t/2)}{(\Delta E/2)^2} = 2t\pi\delta(\Delta E) \end{aligned}$$

On remplace ce dernier résultat dans celle de la probabilité de transition $P_{i \rightarrow f}$ pour aboutir a

$$P_{i \rightarrow f} = 2\pi t |V_{f,i}|^2 \delta(\Delta E) \quad (4.17)$$

Cette expression explique que la transition n'est possible qu'entre états d'énergie égaux. En d'autres termes l'énergie est conservée dans la limite de très longues durées pour des perturbations stationnaires. Seules des transitions conservant l'énergie se produisent. On peut évaluer le "taux" de transition allant d'un état initial $|i\rangle$ vers un continuum d'état final $|f\rangle$ de densité $\rho(E_f)$. Le nombre d'états finals dans un intervalle d'énergie $[E_f, E_f + dE_f]$ est donné par

$\rho(E_f)dE_f$ et le taux de transition $W_{i,f}$ pour des énergies finales $E_i \approx E_f$ est obtenu à partir de (4.17)

$$W_{i,f} = \int \frac{P_{i,f}}{t} \rho(E_f) dE_f = 2\pi |V_{i,f}|^2 \int \delta(E_f - E_i) \rho(E_f) dE_f \quad (4.18)$$

$$= 2\pi |V_{i,f}|^2 \rho(E_i) \quad (4.19)$$

La dernière expression exprime le fait que pour des durées large, le taux de transition pour des perturbations stationnaires est constant dans le temps. C'est la fameuse règle d'or de Fermi, Ou pour être plus précis c'est la règle d'or n°2 de fermi. Dans ses conférences emblématiques sur la physique nucléaire à l'Université de Chicago en 1949, Fermi a baptisé de "Règle d'or n°2" l'expression (4.19) décrivant le taux de transition au premier ordre de perturbation. Il a réservé l'honneur d'appeler "Règle d'or n°1" pour souligner son importance dans la description des réactions nucléaires, a l'expression au second ordre décrivant comment des transitions à travers des états virtuels intermédiaires génèrent des transitions d'un état initiale vers un état final même quand celle-ci est interdite par une règle de sélection.

Chapitre 5

Métronologie de faibles perturbations quantique

We do what we do

M.G.A.Paris

Il est souvent le cas que les phénomènes physiques pertinents correspondent à des perturbations faibles d'une situation stable non perturbée. Cela se produit dans un large éventail de disciplines, allant des mathématiques appliquées [58], de la biologie [59] à la chimie [60] et à la physique [61], où la perturbation peut représenter un champ électrique faible interagissant avec un atome d'hydrogène provoquant un décalage de ses niveaux d'énergie (effet Stark) [62], ou de manière similaire un champ magnétique faible (effet Zeeman) [62], la probabilité de transition d'un état quantique à un autre induite par la présence d'une modification d'énergie faible au Hamiltonien (règle d'or de Fermi) [63], une faible force gravitationnelle agissant sur deux autres corps physiques (forces de marée) [64]... Dans ces situations, la nature des perturbations est généralement connue, tandis que les amplitudes des perturbations sont les quantités d'intérêt. L'hamiltonien de ces systèmes peut généralement être écrit comme

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \cdot \tilde{\mathbf{H}}, \quad (5.1)$$

où \mathbf{H}_0 et $\tilde{\mathbf{H}} = \{H_1, H_2, \dots\}$ sont des opérateurs hamiltoniens connus et $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ avec $|\boldsymbol{\lambda}| \ll 1$ est un vecteur de paramètres de couplage inconnus de faibles amplitudes, dont les valeurs sont inconnues et doivent être déterminées en effectuant des mesures sur le système. Pour atteindre cet objectif, il existe deux approches paradigmatiques, qui seront désignées par les termes *schémas d'estimation statiques* et *dynamiques* tout au long du document. Dans le premier cas, le système est préparé dans un état stationnaire donné, généralement l'état fondamental ou un des états excités, qui est mesuré pour obtenir des informations sur la valeur des paramètres. Dans un scénario dynamique, le système est plutôt préparé dans un certain état initial, laissé évoluer pendant un certain temps d'interaction et finalement mesuré. Dans un schéma d'estimation dynamique, l'état initial, ainsi que le temps d'interaction, peuvent être optimisés et donc la précision globale peut être améliorée par rapport à un schéma statique, bien que la mise en œuvre pratique puisse être plus difficile. Outre le cas de petites perturbations à un hamiltonien donné \mathbf{H}_0 , l'hamiltonien dans l'Éq. (5.1) peut également décrire des systèmes où les couplages ont certaines valeurs cibles $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_0$ et l'objectif de la mesure est de sonder le système [65, 66, 67], c'est-à-dire d'estimer les écarts possibles $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 - \bar{\boldsymbol{\lambda}}_0$ par rapport à ces valeurs.

Un cadre pratique pour étudier la précision réalisable par des schémas d'estimation statiques et dynamiques est celui de la théorie de l'estimation quantique [68, 69, 70, 71, 72, 73] présenté dans la section (3), qui fournit l'ensemble des outils nécessaires à la détermination de la mesure qui doit être effectuée sur le système, c'est-à-dire pour trouver l'observable qui est la plus sensible aux variations infimes des paramètres, et pour optimiser la préparation initiale de la l'état sonde.

En particulier, si la valeur d'un seul paramètre est codée dans la famille d'états quantiques $\{|\psi_\lambda\rangle\}$ (généralement appelée le *modèle statistique quantique*), on peut prouver que la précision ultime réalisable dans l'estimation de λ est obtenue en mesurant l'observable L_λ , donnée par la dérivée logarithmique symétrique (SLD) (3.1),(3.2), qui est l'opérateur auto-adjoint donné

pour des états purs par

$$L_\lambda = 2[|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle \langle \psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle \langle \partial_\lambda \psi_\lambda|]. \quad (5.2)$$

En collectant le résultat de M mesures répétées sur des préparations identiques du système et en traitant les données de manière appropriée (par exemple, par maximum de vraisemblance ou une analyse bayésienne), l'incertitude dans la détermination de la valeur de λ , c'est-à-dire la précision du schéma d'estimation, est donnée par

$$\text{Var}(\lambda) \simeq \frac{1}{M Q(\lambda)} \quad (5.3)$$

où $Q(\lambda)$ est l'information de Fisher quantique du modèle statistique $\{|\psi_\lambda\rangle\}$, qui pour un état pur est égale à

$$Q_\lambda = 4 [\langle \partial_\lambda \psi_\lambda | \partial_\lambda \psi_\lambda \rangle - |\langle \partial_\lambda \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle|^2], \quad (5.4)$$

et sa généralisation pour le cas de N paramètres est donnée par la matrice $n \times n$ réelle et symétrique donnée par

$$Q_{\mu\nu} = 4 [\text{Re} \langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle + \langle \partial_\mu \psi | \psi \rangle \langle \partial_\nu \psi | \psi \rangle]$$

Rappelons (3.3) que pour le cas à deux paramètres on va s'intéresser à la somme des variances individuels des paramètres

$$\sum_i V(\lambda_i) \geq B/M, \quad B = \text{Tr}[Q^{-1}]$$

Et nous userons du paramètre de quantité R (3.6) pour quantifier la compatibilité entre les paramètres à estimer. Comme nous avons vu R est borné $0 \leq R \leq 1$. En plus de la borne QRB basée sur les opérateurs SLD on peut introduire une borne encore plus serrée appelée borne de Holevo $C_H \geq B$. Nous ne nous étalerons pas sur la borne de Holevo ici on notera juste qu'elle

est définie comme étant la procédure de minimisation suivante :

$$C_H = \min_{X \in \mathbb{X}_\lambda} \left[\text{Tr}[W \text{Re}[Z(X)] + \|\sqrt{W} \text{Im}[Z(X)]\sqrt{W}\|_1] \right]$$

Où l'on définit l'opération de trace norme $\|A\|_1 = \text{Tr}[\sqrt{A^\dagger A}]$, W représente une matrice poids quelconque, la matrice hermitienne et réelle $d \times d$ $Z(X)$ est donnée par $Z_{\mu\nu}(X) = \text{Tr}[\rho X_\mu X_\nu]$ et enfin \mathbb{X}_λ est l'ensemble de d opérateurs hermitiens X_μ sur \mathcal{H} non biaisés i.e satisfaisant à la condition $\text{Tr}[\rho X_\mu] = 0 \quad \forall \mu$, et à la condition $\text{Tr}[(\partial_\mu \rho) X_\nu] = \delta_{\mu\nu} \quad \forall \mu, \nu$. Pour cela, nous introduirons une borne dite renormalisée (ΔC) combinant la borne SLD (B) et la borne d'Holevo C_H

$$\Delta C = \frac{C_H - B}{B}$$

Et il a été démontré pour une quelconque matrice poids W le paramètre quantitatif R est une borne supérieure à la borne normalisée $\Delta C \leq R$. L'évaluation de ΔC implique donc l'évaluation de B et C_H . La borne B généralement ne pose pas de difficulté, la borne de Holevo bien que plus informative que B elle est particulièrement difficile à évaluer due à la procédure de minimisation qu'elle implique. Il existe néanmoins des cas particuliers où la borne C_H se simplifie davantage permettant une évaluation plus aisée, on cite à titre d'exemples non exhaustifs : les modèles quasi-classique ($[L_\mu, L_\nu] = 0$) et les modèles asymptotiquement classiques ($\text{Tr}[\rho [L_\mu, L_\nu]] = 0$) dont les conditions respectives impliquent une courbure d'Uhlenmann $U = 0$ et pour ces deux modèles on aura $B = C_H$ ce qui conduit à une borne renormalisée nulle. On mentionnera également des modèles dits D-invariant (voir par exemple [74, 75]), car il a été démontré [76] que tout modèle de qubit pur est D-invariant. la Borne de Holevo peut être exprimée en terme de la borne SLD comme suit : $C_H = B + \|\sqrt{W} Q^{-1} D Q^{-1} \sqrt{W}\|_1$.

5.1 Estimation de faibles perturbations statiques

Dans cette section, nous abordons l'estimation des faibles perturbations dans des systèmes décrits par des Hamiltoniens à un et deux paramètres (indépendants du temps) de la forme $H = H_0 + \lambda H_1$ et $H = H_0 + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$. En particulier, nous supposons que le système peut être préparé dans un état donné (par exemple, l'état fondamental) et que des mesures répétées peuvent être effectuées sur le système. Nous dérivons des expressions générales pour la QFI Q et du paramètre de quanticité R et discutons l'exemple de plusieurs modèles quantiques impliquant des systèmes génériques de qubits, qutrits et d'oscillateurs.

5.1.1 Résultats généraux pour un et deux paramètres

Considérons un système avec un hamiltonien $H = H_0 + \lambda H_1$ où $\lambda \ll 1$. Le n -ème état propre $|\psi_n\rangle$ de H peut être obtenu perturbativement au premier ordre en λ comme suit :

$$|\psi_n\rangle = |\psi_n^0\rangle + \lambda |\psi_n^1\rangle + O(\lambda^2), \quad (5.5)$$

où $|\psi_n^0\rangle$ sont les états propres de H_0 et

$$|\psi_n^1\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H_1 | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\psi_m^0\rangle$$

est la correction du premier ordre à l'état propre $|\psi_n\rangle$. En général, $\langle \psi^1 | \psi^1 \rangle = N \neq 1$, et il est plus commode d'exprimer l'état du système dans une base orthonormée, et à cette fin on introduira donc l'état $|\psi^1\rangle = \sqrt{N} |\phi^1\rangle$ ce qui nous permettra d'exprimer $|\psi\rangle$ comme une combinaison de deux états orthonormés $|\psi^0\rangle$ et $|\phi^1\rangle$. L'indice n est omis pour simplifier la notation. L'état

perturbé et sa dérivée sont ainsi donnés par

$$|\psi\rangle = |\psi^0\rangle + \lambda\sqrt{N} |\phi^1\rangle \quad (5.6a)$$

$$|\partial_\lambda\psi\rangle = \sqrt{N} |\phi^1\rangle . \quad (5.6b)$$

Selon l'Eq. (5.2), le SLD de ce modèle générique peut être écrit, au premier ordre en λ comme

$$L_\lambda = 2\sqrt{N} [|\psi^0\rangle \langle\phi^1| + |\phi^1\rangle \langle\psi^0| + 2\lambda\sqrt{N} |\phi^1\rangle \langle\phi^1|] , \quad (5.7)$$

et le QFI correspondant comme

$$Q(\lambda) = 4N + O(\lambda^2) . \quad (5.8)$$

La QFI est indépendante de la perturbation (au premier ordre de perturbation) et est proportionnelle à la norme de la correction au premier ordre $|\psi^1\rangle$. C'est un résultat remarquablement intuitif, liant l'estimabilité d'une perturbation à son effet physique sur le système c-à-d le gain d'information est indépendant de l'amplitude de la perturbation elle-même ce qui importe c'est la manière dont la perturbation affecte le système (le changement à l'état non perturbé apporté par la perturbation). Le même résultat peut également être obtenu en exprimant la QFI en termes de la fidélité [46]. Remarquez également que le SLD dépend de λ mais vu le fait que l'information quantique elle n'en dépend pas cela signifie qu'une mesure quantique au premier ordre sera aussi informative qu'une mesure à l'ordre zéro en λ cela nous conduit à écrire La mesure optimale

$$L = 2\sqrt{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.9)$$

Cette expression montre clairement que l'ensemble de mesures optimal coïncide avec la matrice de Pauli σ_x sur la base $\{|\psi^0\rangle, |\phi^1\rangle\}$.

Abordons maintenant le cas des systèmes avec un hamiltonien de la forme $H = H_0 + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$ où H_1 et H_2 sont en général des opérateurs non com-

mutatifs, $[H_1, H_2] \neq 0$. Dans ce cas, les perturbations dépendent de manière non triviale de deux paramètres différents λ_1 et λ_2 , qui doivent être estimés conjointement. Pour de faibles perturbations, le n -ème état propre $|\psi_n\rangle$ de H , peut être écrit dans de la base propre de H_0 , comme suit

$$\begin{aligned} |\psi_n\rangle &= |\psi_n^0\rangle + \lambda_1 \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H_1 | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\psi_m^0\rangle \\ &+ \lambda_2 \sum_{l \neq n} \frac{\langle \psi_l^0 | H_2 | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_l^0} |\psi_l^0\rangle \\ &= |\psi_n^0\rangle + \lambda_1 \sqrt{N_1} |\phi_{n,1}^1\rangle + \lambda_2 \sqrt{N_2} |\phi_{n,2}^1\rangle \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $|\phi_{n,\mu}^1\rangle$ sont la version normée des corrections du premier ordre $|\psi_{n,\mu}^1\rangle = \sqrt{N_\mu} |\phi_{n,\mu}^1\rangle$ ayant des normes au carré N_μ (avec $\mu = 1, 2$ l'indice du paramètre λ_μ). Comme nous l'avons fait précédemment, nous laissons tomber l'indice n afin de simplifier la notation. Ces états ne sont pas orthogonaux les uns aux autres mais sont tous deux orthogonaux à l'espace propre non perturbé de H_0 , donc, nous pouvons exprimer l'état perturbé $|\psi\rangle$ dans une base orthonormale engendrée par le triplet $\{|\psi^0\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}$, avec $\langle j|k\rangle = \delta_{jk}$. En écrivant les états $|\phi^l\rangle$ comme

$$\begin{aligned} |\phi^1\rangle &= \cos \frac{\theta_1}{2} |j\rangle + \sin \frac{\theta_1}{2} |k\rangle \\ |\phi^2\rangle &= e^{i\gamma} \cos \frac{\theta_2}{2} |j\rangle + e^{i(\gamma+\varphi)} \sin \frac{\theta_2}{2} |k\rangle, \end{aligned}$$

l'état perturbé et ses dérivées $|\partial_{\lambda_\mu} \psi\rangle = |\psi_\mu^1\rangle$ peuvent être écrits comme suit

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi^0\rangle + \left(\lambda_1 \sqrt{N_1} \cos \frac{\theta_1}{2} + \lambda_2 \sqrt{N_2} e^{i\gamma} \cos \frac{\theta_2}{2} \right) |j\rangle \\ &+ \left(\lambda_1 \sqrt{N_1} \sin \frac{\theta_1}{2} + \lambda_2 \sqrt{N_2} e^{i(\gamma+\varphi)} \sin \frac{\theta_2}{2} \right) |k\rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$|\partial_{\lambda_1}\psi\rangle = \sqrt{N_1} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} |j\rangle + \sin \frac{\theta_1}{2} |k\rangle \right), \quad (5.12)$$

$$|\partial_{\lambda_2}\psi\rangle = \sqrt{N_2} e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta_2}{2} |j\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta_2}{2} |k\rangle \right). \quad (5.13)$$

Pour quantifier l'orthogonalité entre les deux perturbations, nous considérons le produit $\omega = \langle \phi_1^1 | \phi_2^1 \rangle$ entre les deux corrections du premier ordre, c'est-à-dire,

$$\omega = \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i\gamma} + \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\gamma+\varphi)} \quad (5.14)$$

Les opérateurs SLD L_1 et L_2 pour les deux paramètres λ_1 et λ_2 peuvent être calculés selon l'Eq. (5.2). Les expressions explicites sont reportées dans la sous-section (5.3). Les QFIM \mathbf{Q} et la courbure d'Uhlmann \mathbf{D} correspondants sont donnés par

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 4N_1 & 4\sqrt{N_1N_2} \operatorname{Re} \omega \\ 4\sqrt{N_1N_2} \operatorname{Re} \omega & 4N_2 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{N_1N_2} \operatorname{Im} \omega \\ -4\sqrt{N_1N_2} \operatorname{Im} \omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

La borne ultime B et la quantité R sont donc comme suit :

$$B = \frac{N_1 + N_2}{4N_1N_2 [1 - \operatorname{Re}^2 \omega]}, \quad (5.17)$$

$$R = \sqrt{\frac{\operatorname{Im}^2 \omega}{1 - \operatorname{Re}^2 \omega}}. \quad (5.18)$$

Comme prévu, le produit scalaire entre les perturbations ω , est présent dans tous les quantités d'intérêt. En particulier, un produit réel ($\operatorname{Im} \omega = 0$) fournit toujours une compatibilité maximale ($R = 0$) entre les paramètres à estimer. De plus, si le produit est nul (à la fois $\operatorname{Re} \omega = 0$ et $\operatorname{Im} \omega = 0$), c'est-à-dire si les perturbations sont orthogonales, la matrice QFI est diagonale, ce qui signifie que les paramètres sont non corrélés. D'autre part, si le produit ω n'est qu'un

facteur de phase, nous avons $\text{Re}^2 \omega + \text{Im}^2 \omega = 1$, et donc $R = 1$, c'est-à-dire une incompatibilité maximale entre les paramètres. Cela peut également se produire lorsque la dimension est insuffisante pour estimer un certain nombre de paramètres, comme il sera illustré dans la prochaine section au moyen d'un modèle statistique de qubit.

5.1.2 Modèles de qubit

Considérons un système de qubit décrit par les états de base orthonormés $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ de l'Hamiltonien non perturbé $H_0 = \sigma_z$ avec les énergies propres $E_0 = 1$ et $E_1 = -1$. L'Hamiltonien perturbé est donné par $H = \sigma_z + \lambda \sigma_x$, où σ_z et σ_x sont les matrices de Pauli standard, et λ est le faible paramètre de perturbation que nous voulons estimer. L'état fondamental perturbé au premier ordre est donné par

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \frac{\lambda}{2} |1\rangle, \quad (5.19)$$

et l'état corrigé du premier ordre est $|\psi^1\rangle = \frac{1}{2} |1\rangle$ avec une norme (au carré) $N = 1/4$. Le SLD correspondant est $L_\lambda = \sigma_x$ et la QFI est donnée par

$$Q = 1 + O(\lambda^2) \quad (5.20)$$

confirmant les résultats généraux dans les équations (5.8) et (5.2).

Considérons maintenant le cas plus intéressant d'une perturbation à deux paramètres, qui met en évidence les problèmes découlant de l'utilisation d'un système sous-dimensionné (par rapport au nombre de paramètres). L'Hamiltonien perturbé est donné par

$$H = \sigma_z + \lambda_1 \sigma_x + \lambda_2 (\cos \alpha \sigma_x + \sin \alpha \sigma_y),$$

où λ_i (avec $i = 1, 2$) sont les paramètres de perturbation et α désigne un angle de mélange qui régit l'orthogonalité des deux perturbations. L'état

fondamental perturbé du système est donné par

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2 e^{i\alpha}) |1\rangle . \quad (5.21)$$

En regardant l'équation ci-dessus, il est clair que les deux perturbations ne peuvent pas, en général, générer deux états orthogonaux où l'information sur les deux paramètres est encodée [77]. En fait, les états corrigés du premier ordre correspondant à λ_1 et λ_2 sont le même état à une facteur de phase près. En d'autres termes, les deux perturbations conduisent à deux états dégénérés proportionnels à $|1\rangle$. En se référant à la représentation de la sphère de Bloch introduite ci-dessus, nous avons $\theta_1 = \theta_2 = 0$ et $\gamma = \alpha$. Le produit ω dans (5.14) est donné par $\omega = e^{i\alpha}$ et la matrice information quantique de Fisher (QFIM) présente des éléments non-diagonaux non nuls. Pour lever l'incompatibilité des deux paramètres, il est nécessaire d'utiliser un système sonde de dimension plus large (voir la section suivante).

5.1.3 Modèles de qutrit

Considérons un système de spin-1 tridimensionnel avec un Hamiltonien perturbé donné par $H = S_z + \lambda_1 S_x + \lambda_2 (\cos \alpha S_x + \sin \alpha S_y)$, où $\{S_z, S_x, S_y\}$ désignent la représentation irréductible des opérateurs de spin-1 dans la base z :

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

$$S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

avec $|m_s\rangle$, $m_1 = \{1, 0, -1\}$ étant les vecteurs propres et les valeurs propres standards de S_z . Cet Hamiltonien est la généralisation directe de celui considéré dans la section précédente, et une comparaison révélera le rôle de la dimension du système.

Pour l'état propre $|\psi^0\rangle = |1, 0\rangle$, les corrections au premier ordre sont données par

$$|\psi_1^1\rangle = \frac{|1, -1\rangle - |1, 1\rangle}{\sqrt{2}} = |\phi_1^1\rangle \quad (5.23a)$$

$$|\psi_2^1\rangle = \frac{e^{i\alpha}|1, -1\rangle - e^{-i\alpha}|1, 1\rangle}{\sqrt{2}} = |\phi_2^1\rangle, \quad (5.23b)$$

avec des normes (au carré) données par $N_1 = N_2 = 1$. Il est facile de voir que ces états de perturbation vivent dans un sous-système à deux niveaux engendré par $|j\rangle = |1, 1\rangle$ et $|k\rangle = |1, -1\rangle$, et qu'ils peuvent être exprimés comme dans l'équation (5.11) en fixant $\theta_1 = \theta_2 = 3\pi/2$, $\gamma = -\alpha$ et $\varphi = 2\alpha$. Le produit ω résultant est réel et donné par $\omega = \cos \alpha$. Dans ce cas, la matrice QFI résultante \mathbf{Q} et la borne ultime B sont

$$\mathbf{Q} = 4 \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{\csc^2 \alpha}{2}, \quad (5.24a)$$

alors que la courbure moyenne d'Uhlmann est nulle et la quantité est nulle $R = 0$. De plus, les deux états perturbés deviennent orthogonaux pour $\alpha = \pi/2$, ce qui correspond à l'application de perturbations non superposées. La matrice QFI devient diagonale, ce qui signifie que les deux paramètres à estimer sont non corrélés, et la borne ultime $B = 1/2$ est minimale et coïncide avec la borne de Holevo C_H . Remarquez que si l'on perturbe un vecteur propre différent, disons $|1, 1\rangle$, la situation est radicalement différente, car les deux perturbations S_x et S_y génèrent le même état perturbé du premier ordre $|1, 0\rangle$ et le produit scalaire résultant est $\omega = e^{i\alpha}$.

En résumé, une perturbation à deux paramètres ne peut pas être caractérisée de manière optimale (avec une précision et une compatibilité maximales) en utilisant un système de qubit, tandis que l'utilisation d'un système de qutrit permet d'atteindre les limites ultimes de précision, via un choix approprié des termes de l'Hamiltonien et de l'état initial non perturbé .

5.1.4 Un modèle d'oscillateur anharmonique quantique

Un exemple intéressant de modèles qui peuvent être traités dans notre formalisme est celui d'un oscillateur quantique faiblement perturbé par des termes anharmoniques, dont les amplitudes doivent être déterminées, par exemple, car cela peut représenter une ressource [78]. L'espace de Hilbert du système est de dimension infinie et peut offrir un terrain de jeu idéal pour encoder autant d'informations que nécessaire.

Pour simplifier, nous choisissons des unités naturelles ($\hbar = 1$) et fixons la fréquence et la masse de l'oscillateur à un $m = \omega = 1$. Nous considérons des perturbations anharmoniques du potentiel harmonique telles que le Hamiltonien perturbé s'écrit

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + x^2) + \epsilon_1 x^3 + \epsilon_2 x^4, \quad (5.25)$$

où nous avons introduit les deux paramètres d'anharmonicité ϵ_1 et ϵ_2 comme les paramètres inconnus à estimer. En rappelant que les états numériques $|n\rangle$ sont des états propres de l'opérateur de nombre $N : N |n\rangle = a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ avec l'état fondamental de l'oscillateur harmonique $|0\rangle$ étant $a |0\rangle = 0$ et $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ L'état fondamental perturbé du système peut être obtenu comme dans l'équation (5.10), où les deux premières corrections d'ordre un, sont données par :

$$|\psi_1^1\rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |3\rangle \right), \quad |\psi_2^1\rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} |2\rangle + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} |4\rangle \right) \quad (5.26a)$$

avec des normes au carré $N_1 = \frac{29}{24}$ et $N_2 = \frac{39}{32}$. Les deux états perturbés (5.26) sont orthogonaux et il en va de même pour tout état propre du Hamiltonien perturbé. La matrice QFI (5.15) s'écrit

$$\mathbf{Q} = 4 \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

ce qui donne $B = 466/1131 \simeq 0.41$. La courbure de Uhlmann (5.16) s'annule,

ce qui correspond à une quantité nulle (5.18). En conclusion, préparer un oscillateur quantique dans son état de vide est une stratégie efficace pour estimer avec précision l'amplitude des perturbations anharmoniques.

5.2 Estimation de perturbations dynamiques

Dans cette section, nous allons estimer des perturbations en performant des mesures sur un état qui évolue dynamiquement $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$ ou $|\psi(0)\rangle$ est un état non stationnaire et H l'Hamiltonien du système qui encode la perturbation que l'on cherche à estimer.

5.2.1 Résultats généraux pour un et deux paramètres

Commençons par une perturbation décrite par un Hamiltonien à un seul paramètre. Pour obtenir la QFI, il est pratique de passer à l'image d'interaction (par rapport à l'Hamiltonien non perturbé H_0), où le vecteur d'état est donné par la transformation unitaire $|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t) |\psi(t)\rangle$, avec $U_0(t) = e^{-iH_0 t}$. L'évolution temporelle complète est exprimée par

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t) |\psi^0\rangle, \quad (5.28a)$$

$$U_I(t) = \mathcal{T} \left[\exp\{-i\lambda K(t)\} \right], \quad (5.28b)$$

$$K(t) = \int_0^t ds U_0^\dagger(s) H_1 U_0(s), \quad (5.28c)$$

où $\mathcal{T}[\dots]$ désigne l'opérateur ordre chronologique et l'opérateur $K(t) = K^\dagger(t)$ est hermitien. À l'ordre λ , nous avons

$$U_I(t) \simeq \mathbb{I} - i\lambda K(t). \quad (5.29)$$

Revenant à l'image de Schrödinger, l'état évolué et sa dérivée par rapport au paramètre inconnu peuvent être écrits comme

$$|\psi_\lambda(t)\rangle = U_0(t) [\mathbb{I} - i\lambda K(t)] |\psi^0\rangle \quad (5.30a)$$

$$|\partial_\lambda \psi_\lambda(t)\rangle = -iU_0(t)K(t) |\psi^0\rangle . \quad (5.30b)$$

Le comportement à l'ordre un correspond à une expression indépendante de λ (d'ordre zéro) du QFI :

$$Q(t) = 4 \left[\langle \psi^0 | K^2(t) | \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | K(t) | \psi^0 \rangle^2 \right] . \quad (5.31)$$

Bien qu'il puisse sembler être une approximation grossière, cette expression de la QFI nous permet de saisir les principales caractéristiques du cas dynamique et d'effectuer une comparaison avec le cas statique. La QFI dans l'équation (5.31) dépend du temps et est indépendante de λ . En d'autres termes, l'évolution introduit une dépendance temporelle, tandis qu'elle n'affecte pas la nature covariante du problème d'estimation.

De manière analogue, dans le cas d'un Hamiltonien à deux paramètres $H = H_0 + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$, l'opérateur d'évolution temporelle dans l'image d'interaction peut être approximé au premier ordre comme $U_I(t) \simeq \mathbb{I} - i \int_0^t ds U_0^\dagger(s) (\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2) U_0$. En introduisant les opérateurs

$$K_1(t) = \int_0^t ds U_0^\dagger(s) H_1 U_0(s) , \quad (5.32a)$$

$$K_2(t) = \int_0^t ds U_0^\dagger(s) H_2 U_0(s) , \quad (5.32b)$$

Les éléments de la matrice QFI peuvent être évalués comme suit

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 4 \left[\langle \psi^0 | K_1^2 | \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | K_1 | \psi^0 \rangle^2 \right] \\ Q_{12} &= 4 \left[\text{Re} \left(\langle \psi^0 | K_1 K_2 | \psi^0 \rangle \right) - \langle \psi^0 | K_1 | \psi^0 \rangle \langle \psi^0 | K_2 | \psi^0 \rangle \right] \\ Q_{21} &= 4 \left[\text{Re} \left(\langle \psi^0 | K_2 K_1 | \psi^0 \rangle \right) - \langle \psi^0 | K_2 | \psi^0 \rangle \langle \psi^0 | K_1 | \psi^0 \rangle \right] \\ Q_{22} &= 4 \left[\langle \psi^0 | K_2^2 | \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | K_2 | \psi^0 \rangle^2 \right] , \end{aligned} \quad (5.33)$$

où nous avons omis la dépendance temporelle. Les éléments de la matrice de courbure de Uhlmann sont donnés par

$$D_{12} = 4 \operatorname{Im} (\langle \psi^0 | K_1 K_2 | \psi^0 \rangle) = -D_{21} \quad (5.34)$$

et le paramètre de quanticité R s'écrit comme suit

$$R = \frac{4 |\operatorname{Im} \langle \psi^0 | K_1 K_2 | \psi^0 \rangle|}{\sqrt{\det \mathbf{Q}}} . \quad (5.35)$$

Maintenant que le cadre général a été établi, dans ce qui suit nous réexaminons certains exemples de la section précédente puis comparer la performances des cas statique et dynamique.

5.2.2 Modèles de qubit

Considérons d'abord un qubit unique, initialement préparé dans l'état générique $|\psi^0\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$. Nous considérons d'abord une perturbation à un seul paramètre. Le système évolue selon l'unitaire $U = \exp(-itH)$ où t est le paramètre temporel et $H = \sigma_z + \lambda\sigma_x$ est l'Hamiltonien perturbé avec λ de faible amplitude. En utilisant les équations (5.28c) et (5.31), nous avons

$$K(t) = e^{it} \sin t |0\rangle\langle 1| + e^{-it} \sin t |1\rangle\langle 0| \quad (5.36a)$$

$$Q(t) = 4 \sin^2 t [1 - \cos^2(t + \phi) \sin^2(\theta)] . \quad (5.36b)$$

Pour comparer ce résultat avec la QFI obtenue dans le cas statique, nous fixons $|0\rangle$ comme l'état initial (non perturbé) à $t = 0$, c'est-à-dire $\theta = 0$. La QFI dynamique est donnée par $Q(t) = 4 \sin^2 t$, et atteint un maximum à $t = \pi/2$, où elle est quatre fois plus grande que la QFI statique correspondante (5.2.2).

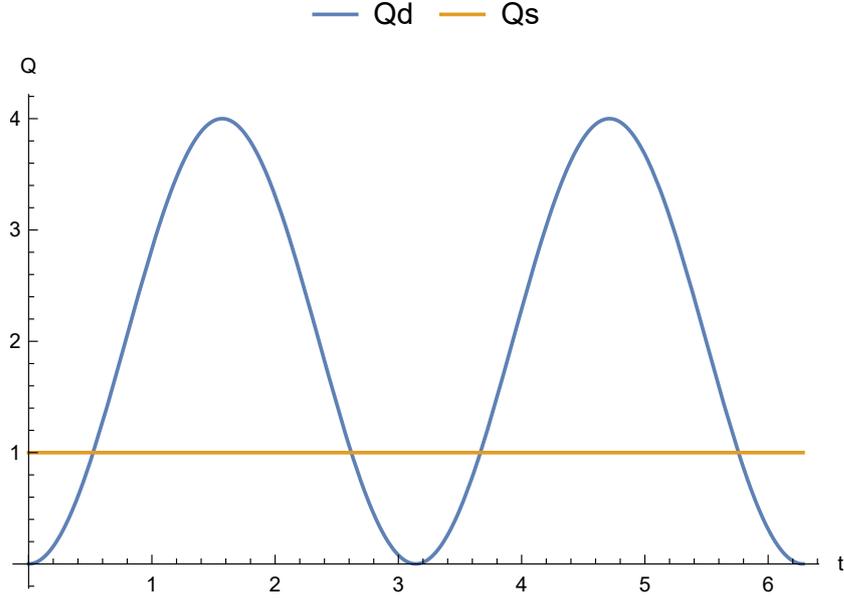


FIGURE 5.1 – La QFI dynamique (Qd) et statique (Qs) pour le cas d’un qubit unique . Plus d’information sur le paramètre λ est encodé dans le cas dynamique que dans le cas statique. L’optimisation sur le paramètre dynamique réduit la Borne de précision par un facteur de 4 .

5.2.3 Modèles de qutrit

Nous considérons le même système spin-1 que dans la Section (5.1.3) et le même Hamiltonien. Pour comparer les résultats avec le scénario statique, nous fixons l’état initial à $|\psi^0\rangle = |1, 0\rangle$, la QFI et la borne seront :

$$\mathbf{Q} = 16 \sin^2 \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{B} = (8 \sin^2 t / 2 \sin^2 \alpha)^{-1} \quad \mathbf{R} = 0. \quad (5.38)$$

La matrice D et le paramètre R s’annulent, c’est-à-dire que nous avons une compatibilité entre les deux paramètres. La QFI est maximale (B est minimale) pour des perturbations orthogonales $\alpha = \pi/2$ et pour $t = \pi$ la QFI est diagonale et maximale. Comme c’est le cas avec les qubits, dans le scénario dynamique, la borne est améliorée d’un facteur quatre (5.2.3).

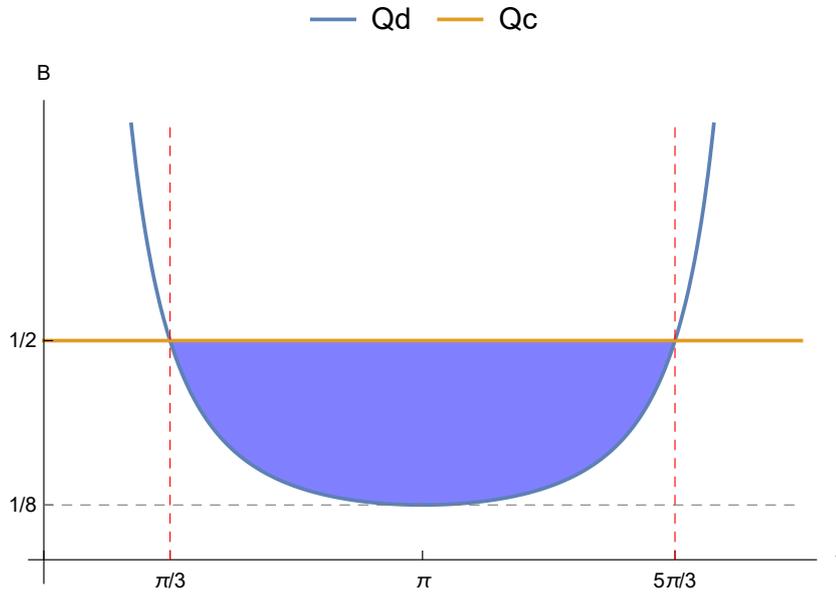


FIGURE 5.2 – Graphe comparatif des bornes statique et dynamique d’un modèle de putrit. La région en bleu solide représente le domaine où l’approche dynamique est plus informative. La borne dynamique atteint un minimum de $1/8$ à un instant optimal $t = \pi$, ce qui correspond à une amélioration de 400% par rapport à l’approche statique.

5.2.4 Oscillateur anharmonique

Nous considérons le même système que dans la Section (5.1.4). Préparons l’oscillateur dans l’état fondamental non perturbé et le laissons évoluer selon l’Hamiltonien perturbé. En utilisant les équations (5.32a) et (5.32b), nous évaluons la QFIM, qui est une matrice diagonale avec des entrées (voir la sous-section (5.3.1) pour les détails)

$$Q_{11} = \frac{29}{3} - 9 \cos t - \frac{2}{3} \cos 3t \quad (5.39)$$

$$Q_{22} = 3(7 + \cos 2t) \sin^2 t \quad (5.40)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0, \quad (5.41)$$

alors que le paramètre de quanticité R s’annule.

Dans la Fig. (5.3), nous montrons la borne B en fonction du temps (B est

une fonction périodique) comparée à la borne statique. Comme il est évident à partir du graphique, le schéma dynamique bat le schéma statique dans la région $t \in (0.721, 2.79)$. Le minimum absolu est obtenu pour $t \simeq 2.0$, où nous avons $B \simeq 0.14$, clairement inférieur à la valeur statique correspondante. Nous concluons que la préparation de l'oscillateur dans l'état fondamental

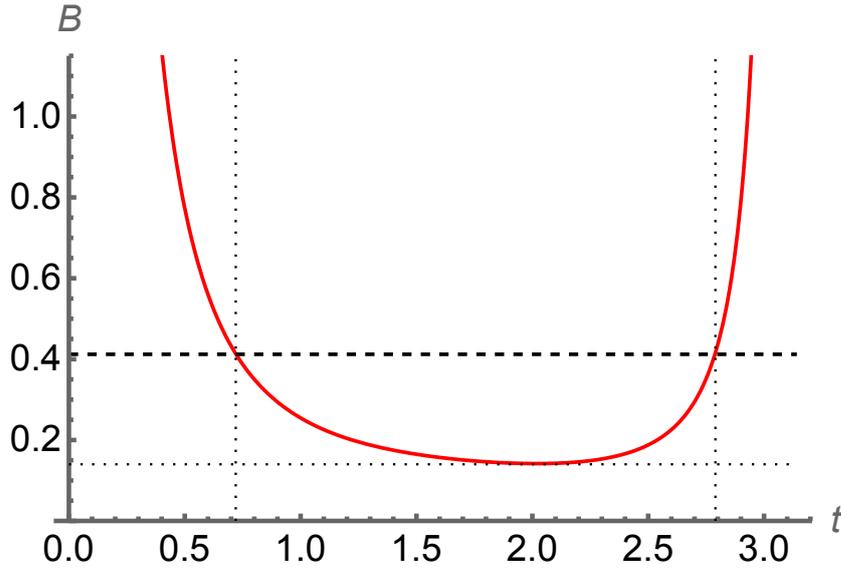


FIGURE 5.3 – Borne B sur la variance totale pour l'estimation conjointe des paramètres d'anharmonicité en fonction du temps d'interaction. La ligne rouge continue représente la borne dynamique et la ligne pointillée noire représente la borne statique.

non perturbé et la réalisation de mesures après une évolution temporelle modérée est un moyen efficace de révéler la présence de perturbations anharmoniques et d'estimer leurs amplitudes.

5.3 Expressions explicites des SLDs pour une perturbation à deux paramètres

Commençons par l'état perturbé dans Eq. (5.11) et ses dérivées dans Eqs. (5.12-5.13), les éléments de matrices $\alpha_{jk} = [L_1]_{jk}$ et les opérateurs SLD

relatifs au paramètres λ_1 sont :

$$\alpha_{11} = 0 \quad (5.42)$$

$$\alpha_{22} = 4 \left(\lambda_1 N_1 c_1^2 + \lambda_2 \sqrt{N_1 N_2} c_1 c_2 \cos \gamma \right) \quad (5.43)$$

$$\alpha_{33} = 4 \left(\lambda_1 N_1 s_1^2 + \lambda_2 \sqrt{N_1 N_2} s_1 s_2 \cos(\gamma + \varphi) \right) \quad (5.44)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 2\sqrt{N_1} c_1 \quad (5.45)$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 2\sqrt{N_1} s_1 \quad (5.46)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32}^* = 4\lambda_1 N_1 c_1 s_1 + 2\lambda_2 \sqrt{N_1 N_2} (c_1 s_2 e^{-i(\gamma+\varphi)} + c_2 s_1 e^{i\gamma}) , \quad (5.47)$$

tandis que $\beta_{jk} = [L_2]_{jk}$, i.e. ceux du SLD relatifs au paramètre λ_2 sont donnés par

$$\beta_{11} = 0 \quad (5.48)$$

$$\beta_{22} = 4 \left(\lambda_2 N_2 c_2^2 + \lambda_1 \sqrt{N_1 N_2} c_1 c_2 \cos \gamma \right) \quad (5.49)$$

$$\beta_{33} = 4 \left(\lambda_2 N_2 s_2^2 + \lambda_1 \sqrt{N_1 N_2} s_1 s_2 \cos(\gamma + \varphi) \right) \quad (5.50)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = 2\sqrt{N_2} c_2 e^{-i\gamma} \quad (5.51)$$

$$\beta_{13} = \beta_{31}^* = 2\sqrt{N_2} s_2 e^{-i(\gamma+\varphi)} \quad (5.52)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32}^* = 4\lambda_2 N_2 c_2 s_2 e^{-i\varphi} + 2\lambda_1 \sqrt{N_1 N_2} (c_1 s_2 e^{-i(\gamma+\varphi)} + c_2 s_1 e^{i\gamma}) \quad (5.53)$$

Où N_j est la norme au carré du vecteur perturbé $|\psi_{n,j}^1\rangle$, $c_j = \cos \frac{\theta_j}{2}$, et $s_j = \sin \frac{\theta_j}{2}$, avec $j = 1, 2$.

5.3.1 K_1 et K_2 pour l'oscillateur anharmonique

Dans cette section, nous présentons les expressions explicites de K_1 et K_2 dans les équations (5.32a) et (5.32b) et leur utilisation pour évaluer les éléments du FIMQ. Les calculs sont fastidieux mais simples, en écrivant les

Hamiltoniens non linéaires en ordre normal comme suit [79, 80, 81]

$$\begin{aligned} x^n &= \frac{1}{2^{n/2}} (a + a^\dagger)^n \\ &= \frac{n!}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{l=0}^{n-2k} \frac{a^{\dagger l} a^{n-2k-l}}{2^k k! l! (n-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

où $[n]$ désigne la partie entière de n . Nous utilisons également le fait que pour une fonction générique $f(a, a^\dagger)$ des opérateurs bosoniques, on a

$$e^{i y a^\dagger} f(a, a^\dagger) e^{-i y a^\dagger} = f(a e^{-i y}, a^\dagger e^{i y}) \quad (5.55)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^{3-2k} \int_0^t dy e^{-i y (3-2k-2l)} \\ &\quad \times \frac{3!}{2^{3/2}} \frac{a^{\dagger l} a^{3-2k-l}}{2^k k! l! (3-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^{3-2k} e^{-i \frac{t}{2} (2k+2l-3)} \frac{\sin[\frac{t}{2} (2k+2l-3)]}{\frac{1}{2} (2k+2l-3)} \\ &\quad \times \frac{3!}{2^{3/2}} \frac{a^{\dagger l} a^{3-2k-l}}{2^k k! l! (3-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

et

$$\begin{aligned} K_2 &= \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^{4-2k} \int_0^t dy e^{-i y (4-2k-2l)} \\ &\quad \times \frac{4!}{2^2} \frac{a^{\dagger l} a^{4-2k-l}}{2^k k! l! (4-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^{4-2k} e^{-i \frac{t}{2} (2k+2l-4)} \frac{\sin[\frac{t}{2} (2k+2l-4)]}{\frac{1}{2} (2k+2l-4)} \\ &\quad \times \frac{4!}{2^2} \frac{a^{\dagger l} a^{4-2k-l}}{2^k k! l! (4-2k-l)!}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Si nous prenons les états fondamentaux non perturbés (l'état du vide de

l'oscillateur harmonique), nous avons $\langle 0|K_1|0\rangle = 0$ et $\langle 0|K_2|0\rangle = \frac{3}{4}t$.

Pour calculer les valeurs d'attente $\langle 0|K_1^2|0\rangle$, $\langle 0|K_2^2|0\rangle$ et $\langle 0|K_1K_2|0\rangle$ et évaluer le FIMQ en utilisant les équations (5.33), nous devons calculer les valeurs d'attente de la forme $\langle 0|a^{\dagger l'} a^{n'-2k'-l'} a^{\dagger l} a^{n-2k-l}|0\rangle$. En particulier, pour calculer $\langle 0|K_1K_2|0\rangle$, nous avons besoin de

$$\begin{aligned}
 & \langle 0|a^{\dagger l'} a^{n'-2k'-l'} a^{\dagger l} a^{n-2k-l}|0\rangle \\
 &= \delta_{l',0} \delta_{l,n-2k} \langle 0|a^{n'-2k'} a^{\dagger n-2k}|0\rangle \\
 &= \delta_{l',0} \delta_{l,n-2k} \delta_{k',k+\frac{n'-n}{2}} \sqrt{(n'-2k')!(n-2k)!} \\
 &= 0 \quad \text{si } n' = n \pm 1.
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Nous concluons que $\langle 0|K_1K_2|0\rangle = 0$

et il en va de même pour la quantité quantique R . Pour calculer les éléments diagonaux du FIMQ nous utilisons

$$\langle 0|a^{\dagger l'} a^{n-2k'-l'} a^{\dagger l} a^{n-2k-l}|0\rangle = (n-2k)! \delta_{l',0} \delta_{l,n-2k} \delta_{k,k'},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= 4 \langle 0|K_1^2|0\rangle \\
 &= 4 \left(\frac{3!}{2^{3/2-1}} \right)^2 \sum_{k=0}^1 \frac{\sin^2[\frac{t}{2}(3-2k)]}{(3-2k)^2 2^{2k} (k!)^2 (3-2k)!} \\
 &= \frac{29}{3} - 9 \cos t - \frac{2}{3} \cos 3t
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

et

$$\begin{aligned}
 Q_{22} &= 4 (\langle 0|K_2^2|0\rangle - \langle 0|K_2|0\rangle^2) \\
 &= 4 \left\{ \left(\frac{4!}{2^{4/2-1}} \right)^2 \left[\sum_{k=0}^1 \frac{\sin^2[\frac{t}{2}(4-2k)]}{(4-2k)^2 2^{2k} (k!)^2 (4-2k)!} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lim_{k \rightarrow 2} \frac{\sin^2[\frac{t}{2}(4-2k)]}{(4-2k)^2 2^{2k} (k!)^2 (4-2k)!} \right] - \left(\frac{3}{4}t \right)^2 \right\} \\
 &= 3(7 + \cos 2t) \sin^2 t
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Conclusion et perspectives

En guise de résumé , nous avons abordé l'estimation de perturbations quantiques de faibles amplitudes, en analysant deux scénarios d'estimation : un statique, où les paramètres sont déduits en effectuant des mesures sur un état stationnaire, et un dynamique, où le système est préparé dans un état initial de manière optimisée puis des mesures sont effectuées après un temps d'interaction donné, qui peut lui-même être optimisé pour améliorer la précision du schéma d'estimation.

Nous avons trouvé des formules générales pour les quantités pertinentes permettant d'évaluer la précision (c'est-à-dire les SLD, la QFIM, la borne scalaire B sur la variance totale et le paramètre quantité R) au premier ordre des paramètres de perturbation, et analysé en détail quelques modèles statistiques quantiques impliquant des systèmes de qubit, qutrit et des systèmes oscillatoires.

Nos résultats indiquent que les schémas d'estimation dynamiques améliorent généralement la précision, bien que cela ne soit vrai que pour des préparations spécifiques du système et des valeurs du temps d'interaction. En fin de compte, le choix entre l'un ou l'autre schéma dépend des caractéristiques spécifiques du système impliqué et des difficultés expérimentales liées à la préparation de l'état initial et à la modulation du temps d'interaction. Nos résultats fournissent des outils solides pour comparer les deux approches dans des situations génériques.

L'estimation des perturbations quantiques de faible amplitude est un domaine encore largement inexploré. Il reste beaucoup à faire dans cette direction de recherche, notamment la dérivation de formules au second ordre pour des perturbations qui ne sont pas suffisamment faibles. Un autre as-

pect intéressant à étudier serait de rechercher des formulations similaires à celles développées ici, mais pour le cas plus réaliste d'états mixtes plutôt que d'états purs. Il serait également pertinent de se demander comment la dégénérescence du système étudié affecterait le processus d'estimation (en tant que potentielle ressource métrologique dans l'étude des perturbations). Enfin, le chemin tracé dans ce travail pourrait être étendu pour examiner d'autres méthodes perturbatives que celles abordées ici.

Bibliographie

- [1] Masahito Hayashi. Quantum estimation and the quantum central limit theorem. *American Mathematical Society Translations Series*, 2(277) :95, 2009.
- [2] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum-enhanced measurements : beating the standard quantum limit. *Science*, 306(5700) :1330–1336, 2004.
- [3] Jonathan P Dowling. Quantum optical metrology—the lowdown on high-n00n states. *Contemporary physics*, 49(2) :125–143, 2008.
- [4] ZY Ou. Fundamental quantum limit in precision phase measurement. *Physical Review A*, 55(4) :2598, 1997.
- [5] Carlton M Caves and Anil Shaji. Quantum-circuit guide to optical and atomic interferometry. *Optics Communications*, 283(5) :695–712, 2010.
- [6] Junaid Aasi, Joan Abadie, BP Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addesso, RX Adhikari, et al. Enhanced sensitivity of the ligo gravitational wave detector by using squeezed states of light. *Nature Photonics*, 7(8) :613–619, 2013.
- [7] Michael A Taylor, Jiri Janousek, Vincent Daria, Joachim Knittel, Boris Hage, Hans-A Bachor, and Warwick P Bowen. Biological measurement beyond the quantum limit. *Nature Photonics*, 7(3) :229–233, 2013.
- [8] Michael A Taylor and Warwick P Bowen. Quantum metrology and its application in biology. *Physics Reports*, 615 :1–59, 2016.
- [9] Carlton M Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, 23(8) :1693, 1981.

-
- [10] Hwang Lee, Pieter Kok, and Jonathan P Dowling. A quantum rosetta stone for interferometry. *Journal of Modern Optics*, 49(14-15) :2325–2338, 2002.
- [11] Carlton M Caves. Quantum limits on noise in linear amplifiers. *Physical Review D*, 26(8) :1817, 1982.
- [12] Christian Gross. Spin squeezing, entanglement and quantum metrology with bose–einstein condensates. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45(10) :103001, 2012.
- [13] Howard M Wiseman and Gerard J Milburn. *Quantum measurement and control*. Cambridge university press, 2009.
- [14] Marcin Zwierz, Carlos A Pérez-Delgado, and Pieter Kok. General optimality of the heisenberg limit for quantum metrology. *Physical review letters*, 105(18) :180402, 2010.
- [15] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum metrology. *Physical review letters*, 96(1) :010401, 2006.
- [16] Ronald Aylmer Fisher. Theory of statistical estimation. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 22, pages 700–725. Cambridge University Press, 1925.
- [17] B Roy Frieden. *Physics from Fisher information : a unification*. Cambridge University Press, 1998.
- [18] Harald Cramér. A contribution to the theory of statistical estimation. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1946(1) :85–94, 1946.
- [19] C Radhakrishna Rao. Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. In *Breakthroughs in statistics*, pages 235–247. Springer, 1992.
- [20] Carl W Helstrom. Minimum mean-squared error of estimates in quantum statistics. *Physics letters A*, 25(2) :101–102, 1967.
- [21] Carl W Helstrom. Quantum detection and estimation theory. *Journal of Statistical Physics*, 1(2) :231–252, 1969.

-
- [22] C Helstrom and R Kennedy. Noncommuting observables in quantum detection and estimation theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(1) :16–24, 1974.
- [23] Alexander S Holevo. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2011.
- [24] Alexander S Holevo. Statistical decision theory for quantum systems. *Journal of multivariate analysis*, 3(4) :337–394, 1973.
- [25] Mankei Tsang, Howard M Wiseman, and Carlton M Caves. Fundamental quantum limit to waveform estimation. *Physical review letters*, 106(9) :090401, 2011.
- [26] Shan Zheng Ang, Glen I Harris, Warwick P Bowen, and Mankei Tsang. Optomechanical parameter estimation. *New Journal of Physics*, 15(10) :103028, 2013.
- [27] Emanuele Roccia, Ilaria Gianani, Luca Mancino, Marco Sbroscia, Fabrizia Somma, Marco G Genoni, and Marco Barbieri. Entangling measurements for multiparameter estimation with two qubits. *Quantum Science and Technology*, 3(1) :01LT01, 2017.
- [28] Teiko Heinosaari and Mário Ziman. *The mathematical language of quantum theory : from uncertainty to entanglement*. Cambridge University Press, 2011.
- [29] Erich L Lehmann and George Casella. *Theory of point estimation*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [30] Harry L Van Trees. *Detection, estimation, and modulation theory, part I : detection, estimation, and linear modulation theory*. John Wiley & Sons, 2004.
- [31] George Casella and Roger Berger. *Statistical inference*. CRC Press, 2024.
- [32] Steven M Kay. *Fundamentals of statistical signal processing : estimation theory*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [33] Peter W Zehna et al. Invariance of maximum likelihood estimators. *Annals of Mathematical Statistics*, 37(3) :744, 1966.

-
- [34] Ingram Olkin, A John Petkau, and James V Zidek. A comparison of n estimators for the binomial distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 76(375) :637–642, 1981.
- [35] Matteo G A Paris. Quantum estimation for quantum technology. *International Journal of Quantum Information*, 7 :125–137, 2009.
- [36] Daoyi Dong and Ian R Petersen. Quantum estimation, control and learning : Opportunities and challenges. *Annual Reviews in Control*, 54 :243–251, 2022.
- [37] Matteo Paris and Jaroslav Rehacek. *Quantum state estimation*, volume 649. Springer Science & Business Media, 2004.
- [38] Christian L Degen, Friedemann Reinhard, and Paola Cappellaro. Quantum sensing. *Reviews of modern physics*, 89(3) :035002, 2017.
- [39] Kun Zhang, Shuang Cong, Kezhi Li, and Tao Wang. An online optimization algorithm for the real-time quantum state tomography. *Quantum Information Processing*, 19 :1–17, 2020.
- [40] Giacomo M D’Ariano and Matteo GA Paris. Arbitrary precision in multipath interferometry. *Physical Review A*, 55(3) :2267, 1997.
- [41] Cyril Vaneph, Tommaso Tufarelli, and Marco G Genoni. Quantum estimation of a two-phase spin rotation. *Quantum Measurements and Quantum Metrology*, 1(1) :12–20, 2013.
- [42] Manuel Gessner, Luca Pezzè, and Augusto Smerzi. Sensitivity bounds for multiparameter quantum metrology. *Physical review letters*, 121(13) :130503, 2018.
- [43] Marco G Genoni, Matteo GA Paris, Gerardo Adesso, Hyunchul Nha, Peter L Knight, and MS Kim. Optimal estimation of joint parameters in phase space. *Physical Review A*, 87(1) :012107, 2013.
- [44] Dominic W Berry, Mankei Tsang, Michael JW Hall, and Howard M Wiseman. Quantum bell-ziv-zakai bounds and heisenberg limits for waveform estimation. *Physical Review X*, 5(3) :031018, 2015.

-
- [45] Shengshi Pang and Andrew N Jordan. Optimal adaptive control for quantum metrology with time-dependent hamiltonians. *Nature communications*, 8(1) :14695, 2017.
- [46] Jing Liu, Heng-Na Xiong, Fei Song, and Xiaoguang Wang. Fidelity susceptibility and quantum fisher information for density operators with arbitrary ranks. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 410 :167–173, 2014.
- [47] Paolo Facchi, Ravi Kulkarni, VI Man’Ko, Giuseppe Marmo, ECG Sudarshan, and Franco Ventriglia. Classical and quantum fisher information in the geometrical formulation of quantum mechanics. *Physics Letters A*, 374(48) :4801–4803, 2010.
- [48] Hans-Jürgen Sommers and Karol Zyczkowski. Bures volume of the set of mixed quantum states. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(39) :10083, 2003.
- [49] Erwin Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. *Annalen der physik*, 385(13) :437–490, 1926.
- [50] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*, volume 2. Macmillan, 1896.
- [51] Paul Adrien Maurice Dirac. On the theory of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 112(762) :661–677, 1926.
- [52] Freeman J Dyson. The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman. *Physical Review*, 75(3) :486, 1949.
- [53] David J Griffiths and Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge university press, 2018.
- [54] JJ Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2020.
- [55] Tosio Kato. On the convergence of the perturbation method. i. *Progress of Theoretical Physics*, 4(4) :514–523, 1949.
- [56] Nouredine Zettili. *Quantum mechanics : concepts and applications*. 2009.

- [57] Rainer Dick et al. *Advanced quantum mechanics*. Springer, 2012.
- [58] Barry Simon. Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory : A mathematical overview. *International Journal of Quantum Chemistry*, 21(1) :3–25, 1982.
- [59] Geertje Hek. Geometric singular perturbation theory in biological practice. *Journal of Mathematical Biology*, 60(3) :347–386, Mar 2010.
- [60] R. McWeeny. Self-consistent perturbation theory. *Chemical Physics Letters*, 1(12) :567–568, 1968.
- [61] K. Them, E.Y. Vedmedenko, K. Fredenhagen, and R. Wiesendanger. Bounds on expectation values of quantum subsystems and perturbation theory. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 48(7), 2015.
- [62] JJ Sakurai and Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*.
- [63] Enrico Fermi. *Nuclear physics : a course given by Enrico Fermi at the University of Chicago*. University of Chicago Press, 1950.
- [64] Bradley W Carroll and Dale A Ostlie. *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press, 2017.
- [65] Luis Pedro García-Pintos and Adolfo del Campo. Limits to perception by quantum monitoring with finite efficiency. *Entropy*, 23(11), 2021.
- [66] Miguel Ángel Lozada Aguilar, Andrei Khrennikov, Klaudia Oleschko, and María de Jesus Correa. Quantum bayesian perspective for intelligence reservoir characterization, monitoring and management. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2106) :20160398, 2017.
- [67] Jeongrak Son, Peter Talkner, and Juzar Thingna. Monitoring quantum otto engines. *PRX Quantum*, 2 :040328, Nov 2021.
- [68] Dorje C. Brody and Lane P. Hughston. Statistical geometry in quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1977) :2445–2475, September 1998.

-
- [69] Akio Fujiwara. One-parameter pure state estimation based on the symmetric logarithmic derivative. *Mathematical Engineering Technical Reports*, pages 94–08, 1994.
- [70] Carl W. Helstrom. *Quantum detection and estimation theory*. Academic Press, New York, 1976.
- [71] Matteo G. A. Paris. Quantum estimation for quantum technology. *Int. J. Quantum Inf.*, 7 :125–137, January 2009.
- [72] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Advances in quantum metrology. *Nature Phot.*, 5(4) :222–229, March 2011.
- [73] S. Alipour and A. T. Rezakhani. Extended convexity of quantum fisher information in quantum metrology. *Phys. Rev. A*, 91 :042104, 2015.
- [74] Jun Suzuki. Information geometrical characterization of quantum statistical models in quantum estimation theory. *Entropy*, 21(7) :703, 2019.
- [75] Francesco Albarelli, Marco Barbieri, Marco G Genoni, and Ilaria Gianani. A perspective on multiparameter quantum metrology : From theoretical tools to applications in quantum imaging. *Physics Letters A*, 384(12) :126311, 2020.
- [76] Jun Suzuki. Explicit formula for the holevo bound for two-parameter qubit-state estimation problem. *Journal of Mathematical Physics*, 57(4), 2016.
- [77] Sholeh Razavian, Matteo G. A. Paris, and Marco G. Genoni. On the quantumness of multiparameter estimation problems for qubit systems. *Entropy*, 22(11), 2020.
- [78] Francesco Albarelli, Alessandro Ferraro, Mauro Paternostro, and Matteo G. A. Paris. Nonlinearity as a resource for nonclassicality in anharmonic systems. *Phys. Rev. A*, 93 :032112, Mar 2016.
- [79] R. M. Wilcox. Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics. *Journal of Mathematical Physics*, 8(4) :962–982, 12 1967.

-
- [80] Ralph Wilcox. Closed-form solution of the differential equation $(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + ax \frac{\partial}{\partial x} + by \frac{\partial}{\partial y} + cxy + \frac{\partial}{\partial t}) \psi = 0$ by normal-ordering exponential operators. *Journal of Mathematical Physics*, 11(4) :1235–1237, 1970.
- [81] Alessandro Candeloro, Sholeh Razavian, Matteo Piccolini, Berihu Teklu, Stefano Olivares, and Matteo G. A. Paris. Quantum probes for the characterization of nonlinear media. *Entropy*, 23(10) :1353, October 2021.

Metrology of weak quantum perturbations

Sidali Mohammadi 

Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria

Matteo Bina 

MIM-USR Lombardia, LSS Albert Einstein, I-20137 Milano, Italy

Abdelhakim Gharbi 

Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria

Matteo G. A. Paris 

*Quantum Technology Lab, Dipartimento di Fisica Aldo Pontremoli, Università degli Studi di Milano, I-20133 Milano, Italy
and INFN, Sezione di Milano, I-20133 Milano, Italy*



(Received 13 October 2023; accepted 11 March 2024; published 25 March 2024)

We consider quantum systems with a Hamiltonian containing a weak perturbation, i.e., $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \cdot \tilde{\mathbf{H}}$, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \{H_1, H_2, \dots\}$, $|\lambda| \ll 1$, and address situations where $\tilde{\mathbf{H}}$ is known but the values of the couplings λ are unknown and should be determined by performing measurements on the system. We consider two scenarios: in the first one we assume that measurements are performed on a given stationary state of the system, e.g., the ground state, whereas in the second one an initial state is prepared and then measured after evolution. In both cases, we look for the optimal measurements to estimate the couplings and evaluate the ultimate limits to precision. In particular, we derive general results for one and two couplings and analyze in detail some specific qubit models. Our results indicate that dynamical estimation schemes may provide enhanced precision upon a suitable choice of the initial preparation and the interaction time.

DOI: [10.1103/PhysRevA.109.032427](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.109.032427)

I. INTRODUCTION

It is often the case that relevant physical phenomena correspond to weak perturbations to a stable unperturbed situation. This happens in a wide range of disciplines, ranging from applied mathematics [1] to biology [2] to chemistry [3] and physics [4], where the perturbation can represent a weak electric field interacting with an atom, causing a shift in its energy levels (Stark effect), or similarly a weak magnetic field (Zeeman effect). The same occurs in the presence of a weak energy modification to the Hamiltonian (Fermi's golden rule), or a weak gravitational force acting on two other physical bodies (tidal forces). In these situations, the nature of the perturbations is usually known, whereas the strengths of the perturbations are the quantities of interest. The Hamiltonian of those systems may be generally written as

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \cdot \tilde{\mathbf{H}}, \quad (1)$$

where \mathbf{H}_0 and $\tilde{\mathbf{H}} = \{H_1, H_2, \dots\}$ are known Hamiltonian operators and $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ with $|\lambda| \ll 1$ is a vector of small unknown coupling parameters whose values are unknown and should be determined by performing measurements on the system. To achieve this goal, there are two paradigmatic approaches, which will be referred to as static and dynamical estimation schemes throughout the paper. In the first one, the system may be prepared in a given stationary state, usually the ground state, which is measured to gain information about the value of the parameters. In a dynamical

scenario, the system is instead prepared in a certain state, left to evolve for a given interaction time, and finally measured. In a dynamical estimation scheme, the initial state, as well as interaction time, may be optimized and thus the overall precision may be enhanced compared to a static scheme, though the practical implementation may be more challenging. In addition, the case of small perturbations to a given Hamiltonian \mathbf{H}_0 , the Hamiltonian in Eq. (1) may also describe systems where the couplings have some target values $\bar{\lambda}_0$ and the scope of the measurement is to monitor the system [5–7], i.e., to estimate possible deviations $\lambda = \lambda_0 - \bar{\lambda}_0$ from those values.

A convenient framework to investigate the precision achievable by static and dynamical estimation schemes is that of quantum estimation theory [8–13], which provides a set of tools to determine the measurement that has to be performed on the system, i.e., to find the observable that is most sensitive to tiny variations of the parameters [14–25], and to optimize the initial preparation of the probe [26–35].

In particular, if the value of a single parameter is encoded in the family of quantum states $\{|\psi_\lambda\rangle\}$ (usually referred to as the quantum statistical model), one may prove that the ultimate precision achievable in estimating λ is obtained by measuring the observable L_λ , known as symmetric logarithmic derivative (SLD), which is the self-adjoint operator given by

$$L_\lambda = 2[|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|]. \quad (2)$$

Upon collecting the result of M repeated measurements on identical preparations of the system and suitably processing data (e.g., by MAXLIK [36–39] or Bayesian analysis [40,41]) the uncertainty in the determination of λ , i.e., the precision of the estimation scheme, is given by

$$\text{Var}\lambda \simeq \frac{1}{M Q(\lambda)}, \quad (3)$$

where $Q(\lambda)$ is the so-called quantum Fisher information of the quantum statistical model $\{|\psi_\lambda\rangle\}$, i.e.,

$$Q_\lambda = 4[\langle \partial_\lambda \psi_\lambda | \partial_\lambda \psi_\lambda \rangle - |\langle \partial_\lambda \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle|^2] \quad (4)$$

(notice that $\langle \psi_\lambda | \partial_\lambda \psi_\lambda \rangle$ is a purely imaginary c-number, i.e., $\langle \psi_\lambda | \partial_\lambda \psi_\lambda \rangle^* = \langle \partial_\lambda \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle = -\langle \psi_\lambda | \partial_\lambda \psi_\lambda \rangle$).

The generalization to the estimation of more than one parameter can be obtained by introducing the so-called quantum Fisher information matrix (QFIM) \mathbf{Q} , which is a real symmetric $n \times n$ matrix with entries

$$Q_{\mu\nu} = 4[\text{Re}\langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle + \langle \partial_\mu \psi | \psi \rangle \langle \partial_\nu \psi | \psi \rangle]. \quad (5)$$

The QFIM provides a bound on the covariance matrix (CM) of the estimates

$$\text{Cov}(\lambda) \geq \frac{1}{M} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (6)$$

This is a matrix inequality, and in general, it cannot be saturated. Physically, this corresponds to the unavoidable quantum noise that originate when the SLDs corresponding to different parameters do not commute [42]. In those cases, the total variance $\sum_\mu V(\lambda_\mu)$ (or a weighted combination of the CM elements) is a more interesting quantity to study, and since the μ th diagonal entry of the covariance matrix is just the variance of the parameter λ_μ , the bound on the total variance is given as

$$\sum_\mu V(\lambda_\mu) \geq \frac{B}{M}, \quad B = \text{Tr}[\mathbf{Q}^{-1}]. \quad (7)$$

The incompatibility between the parameters can be quantified by the so-called asymptotic incompatibility [43–46], also referred to as the quantumness of the quantum statistical model. This is defined as

$$R := \|i\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}\|_\infty, \quad (8)$$

where $\|A\|_\infty$ is the largest eigenvalue of the matrix A and

$$D_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \langle \psi_\lambda | [L_\mu, L_\nu] | \psi_\lambda \rangle = 4\text{Im}\langle \partial_\mu \psi | \partial_\nu \psi \rangle \quad (9)$$

is the Uhlmann curvature of the statistical model. The quantity R is a real number in the range $0 \leq R \leq 1$ with the equality $R = 0$ satisfied for compatible parameters, i.e., when $\langle \psi_\lambda | [L_\mu, L_\nu] | \psi_\lambda \rangle = 0$. For just two parameters, one may write

$$R = \sqrt{\frac{\det \mathbf{D}}{\det \mathbf{Q}}}. \quad (10)$$

A tighter scalar bound, known as the Holevo-Cramer-Rao bound $\sum_\mu V(\lambda_\mu) \geq C_H/M$, with $C_H \geq B$, may also be derived (see [47] for details), and the quantumness R provides a bound to the normalized difference between C_H and

B as follows:

$$\frac{C_H - B}{B} \leq R. \quad (11)$$

In the following sections, we aim at finding general formulas of Q for estimation problems involving the parameters of weakly perturbed systems in both the static and the dynamical estimation scenarios. In the case of two parameters both B and R will be investigated, and then we will analyze some specific models involving qubits, qutrits and harmonic oscillators, and where the Holevo-Cramer-Rao bound is known analytically, we check whether the inequality in Eq. (11) is tight. More precisely, Sec. II is devoted to static estimation schemes, with Sec. II A reporting general results and Secs. II B, II C, and II D devoted to specific models involving qubit, qutrit, and oscillatory systems, respectively. Section III is devoted to dynamical estimation schemes, with Sec. III A reporting general results and Secs. III B, III C, and III D discussing specific results for qubit, qutrit, and oscillatory systems, also comparing the performance of dynamical schemes to that of the corresponding static ones. Section IV closes the paper with some concluding remarks.

II. STATIC ESTIMATION OF WEAK PERTURBATIONS

In this section, we address estimation of weak perturbations in systems described by one- and two-parameter (time-independent) Hamiltonians of the form $H = H_0 + \lambda H_1$ and $H = H_0 + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$. In particular, we assume that the system may be prepared in a given state (e.g., the ground state) and that repeated measurements may be performed on the system. We derive general expressions for the QFI Q and the quantumness R and discuss specific models involving qubit, qutrit, and oscillator systems.

A. General results for one and two parameters

Let us consider a system with Hamiltonian $H = H_0 + \lambda H_1$ where $\lambda \ll 1$. The n th eigenstate $|\psi_n\rangle$ of H may be obtained perturbatively to first-order in λ as follows:

$$|\psi_n\rangle = |\psi_n^0\rangle + \lambda |\psi_n^1\rangle + O(\lambda^2), \quad (12)$$

where $|\psi_n^0\rangle$ are eigenstates of H_0 and

$$|\psi_n^1\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H_1 | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\psi_m^0\rangle$$

is the first-order correction to the n th eigenstate. In general, $\langle \psi^1 | \psi^1 \rangle = N \neq 1$, and it is thus convenient to introduce the state $|\psi^1\rangle = \sqrt{N} |\phi^1\rangle$ and write the first-order corrected eigenstate $|\psi\rangle$ as a combination of two orthonormal states $|\psi^0\rangle$ and $|\phi^1\rangle$. The subscript n is omitted to simplify notation. The perturbed state and its derivative are thus given by

$$|\psi\rangle = |\psi^0\rangle + \lambda \sqrt{N} |\phi^1\rangle, \quad (13a)$$

$$|\partial_\lambda \psi\rangle = \sqrt{N} |\phi^1\rangle. \quad (13b)$$

According to Eq. (2), the SLD of this general model may be written, up to first order in λ as

$$L_\lambda = 2\sqrt{N} [|\psi^0\rangle \langle \phi^1| + |\phi^1\rangle \langle \psi^0| + 2\lambda \sqrt{N} |\phi^1\rangle \langle \phi^1|], \quad (14)$$

and the corresponding QFI as

$$Q(\lambda) = 4N + O(\lambda^2). \quad (15)$$

The QFI is independent on the perturbation (up to second order) and proportional to the norm of the first-order correction $|\psi^1\rangle$. This is a remarkably intuitive results, linking the estimability of a perturbation to its physical effect on the system. The same result may be also obtained expressing the QFI in terms of fidelity [48,49]. Notice also that the λ -dependent term in the SLD leads to negligible (second-order) contributions to the QFI and may be dropped. The optimal measurement is thus given by

$$L = 2\sqrt{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

This expression makes it clear that the optimal measurements set coincides with the Pauli matrix σ_x over the basis $\{|\psi^0\rangle, |\phi^1\rangle\}$, i.e., a detection scheme that senses the coherence of the perturbed state in that basis.

Let us now address the case of systems with Hamiltonian of the form $H = H_0 + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$ where H_1 and H_2 are in general noncommuting operators, $[H_1, H_2] \neq 0$. In this case the perturbations depend in a nontrivial way on two different parameters λ_1 and λ_2 , which should be jointly estimated. For weak perturbations, the the n th eigenstate of H $|\psi_n\rangle$ may be written, in terms of the eigenbasis of H_0 , as follows:

$$\begin{aligned} |\psi_n\rangle &= |\psi_n^0\rangle + \lambda_1 \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H_1 | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\psi_m^0\rangle \\ &\quad + \lambda_2 \sum_{l \neq n} \frac{\langle \psi_l^0 | H_2 | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_l^0} |\psi_l^0\rangle \\ &= |\psi_n^0\rangle + \lambda_1 \sqrt{N_1} |\phi_{n,1}^1\rangle + \lambda_2 \sqrt{N_2} |\phi_{n,2}^1\rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

where $|\phi_{n,\mu}^1\rangle$ are states, i.e., the normalized version of the first-order corrections $|\psi_{n,\mu}^1\rangle = \sqrt{N_\mu} |\phi_{n,\mu}^1\rangle$ having squared norms N_j (with $\mu = 1, 2$ the index of the parameter λ_μ). As we have done before, we drop the index n to simplify the notation. These states are not orthogonal one to each other but both are orthogonal to the unperturbed eigenspace of H_0 , hence, we can express the perturbed state $|\psi\rangle$ in an orthonormal basis spanned by the triplet $\{|\psi^0\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}$, with $\langle j|k\rangle = \delta_{jk}$. Upon writing the states $|\phi^1\rangle$ as

$$\begin{aligned} |\phi^1\rangle &= \cos \frac{\theta_1}{2} |j\rangle + \sin \frac{\theta_1}{2} |k\rangle, \\ |\phi^2\rangle &= e^{i\gamma} \cos \frac{\theta_2}{2} |j\rangle + e^{i(\gamma+\varphi)} \sin \frac{\theta_2}{2} |k\rangle, \end{aligned}$$

the perturbed state and its derivatives $|\partial_{\lambda_\mu} \psi\rangle = |\psi_\mu^1\rangle$ may be written as

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi^0\rangle + \left(\lambda_1 \sqrt{N_1} \cos \frac{\theta_1}{2} + \lambda_2 \sqrt{N_2} e^{i\gamma} \cos \frac{\theta_2}{2} \right) |j\rangle \\ &\quad + \left(\lambda_1 \sqrt{N_1} \sin \frac{\theta_1}{2} + \lambda_2 \sqrt{N_2} e^{i(\gamma+\varphi)} \sin \frac{\theta_2}{2} \right) |k\rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

$$|\partial_{\lambda_1} \psi\rangle = \sqrt{N_1} \left(\cos \frac{\theta_1}{2} |j\rangle + \sin \frac{\theta_1}{2} |k\rangle \right), \quad (19)$$

$$|\partial_{\lambda_2} \psi\rangle = \sqrt{N_2} e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta_2}{2} |j\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta_2}{2} |k\rangle \right). \quad (20)$$

To quantify the orthogonality between the two perturbations, we consider the overlap $\omega = \langle \phi_1^1 | \phi_2^1 \rangle$ between the two first-order corrections, i.e.,

$$\omega = \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i\gamma} + \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\gamma+\varphi)}. \quad (21)$$

The SLD operators L_1 and L_2 for the two parameters λ_1 and λ_2 may be calculated according to Eq. (2). The explicit expressions are reported in Appendix A. The corresponding QFIM \mathcal{Q} and Uhlmann curvature \mathcal{D} are given by

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 4N_1 & 4\sqrt{N_1 N_2} \text{Re}\omega \\ 4\sqrt{N_1 N_2} \text{Re}\omega & 4N_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{N_1 N_2} \text{Im}\omega \\ -4\sqrt{N_1 N_2} \text{Im}\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

The ultimate bound B and the quantumness R thus read as follows:

$$B = \frac{N_1 + N_2}{4N_1 N_2 [1 - \text{Re}^2 \omega]}, \quad (24)$$

$$R = \sqrt{\frac{\text{Im}^2 \omega}{1 - \text{Re}^2 \omega}}. \quad (25)$$

As expected, the overlap between the perturbations is involved in all the quantities of interest. In particular, a real overlap ($\text{Im}\omega = 0$) always provides maximum compatibility ($R = 0$) between the parameters to estimate. Moreover, if the overlap is zero (both $\text{Re}\omega = 0$ and $\text{Im}\omega = 0$), i.e., perturbations are orthogonal, the QFI matrix is diagonal, meaning that parameters are uncorrelated. On the other hand, if the overlap is a just a phase factor, we have $\text{Re}^2 \omega + \text{Im}^2 \omega = 1$, and thus $R = 1$, i.e., maximal incompatibility between the parameters. This may happen also when the dimension of the probing system is insufficient to estimate a certain number of parameters, as it will be illustrated in the next section by means of a qubit statistical model.

B. Qubit models

Let us consider a qubit system described by the orthonormal basis states $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ of the unperturbed Hamiltonian $H_0 = \sigma_z$ with eigenenergies $E_0 = 1$ and $E_1 = -1$. The perturbed Hamiltonian is given by $H = \sigma_z + \lambda \sigma_x$, where σ_z and σ_x are standard Pauli matrices and λ is the small perturbation parameter that we want to estimate. The first-order perturbed ground state is given by

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \frac{\lambda}{2} |1\rangle, \quad (26)$$

and the first-order corrected state is $|\psi^1\rangle = \frac{1}{2} |1\rangle$ with (squared) norm $N = 1/4$. The corresponding SLD is $L_\lambda = \sigma_x$ and the QFI is given by

$$Q = 1 + O(\lambda^2), \quad (27)$$

confirming the general results in Eqs. (15) and (2).

Let us now consider the more interesting case of a two-parameter perturbation, which highlights the issues arising from using an under-dimensioned (compared to the number of parameters) probe system. The perturbed Hamiltonian is

$$H = \sigma_z + \lambda_1 \sigma_x + \lambda_2 (\cos \alpha \sigma_x + \sin \alpha \sigma_y),$$

where λ_i (with $i = 1, 2$) are the perturbation parameters and α denotes a mixing angle which governs the orthogonality of the two perturbations. The first-order perturbed ground state of the system is given by

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 e^{i\alpha})|1\rangle. \quad (28)$$

Looking at the above equation, it is clear that the two perturbations cannot, in general, generate two orthogonal states where information about the two parameters is encoded [44]. In fact, the first-order corrected states corresponding to λ_1 and λ_2 are the same state except for a phase factor. In other words, the two perturbations leads to two degenerate states proportional to $|1\rangle$. Referring to the Bloch sphere representation introduced above, we have $\theta_1 = \theta_2 = 0$ and $\gamma = \alpha$. The overlap in Eq. (21) is given by $\omega = e^{i\alpha}$ and the QFIM displays off-diagonal elements. To make the two parameter compatible, a probe system with larger dimension should be necessarily employed (see also the next section).

C. Qutrit models

Let us consider a three-dimensional spin-1 system with a perturbed Hamiltonian given by $H = S_z + \lambda_1 S_x + \lambda_2 (\cos \alpha S_x + \sin \alpha S_y)$, where $\{S_z, S_x, S_y\}$ denotes the irreducible representation of spin-1 operators in the z basis

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

with $|m_s\rangle$, $m_s = \{1, 0, -1\}$ being the standard eigenvectors and eigenvalues of S_z . This Hamiltonian is the direct generalization of that considered in the previous section, and a comparison will reveal the role of system dimension.

For the eigenstate $|\psi^0\rangle = |1, 0\rangle$, the first-order corrections are given by

$$|\psi_1^1\rangle = \frac{|1, -1\rangle - |1, 1\rangle}{\sqrt{2}} = |\phi_1^1\rangle, \quad (30a)$$

$$|\psi_2^1\rangle = \frac{e^{i\alpha}|1, -1\rangle - e^{-i\alpha}|1, 1\rangle}{\sqrt{2}} = |\phi_2^1\rangle, \quad (30b)$$

with squared norms given by $N_1 = N_2 = 1$. It is easy to see that these perturbation states live in two-level subsystem spanned by $|j\rangle = |1, 1\rangle$ and $|k\rangle = |1, -1\rangle$, and that they may be expressed as in Eq. (18) by setting $\theta_1 = \theta_2 = 3\pi/2$, $\gamma = -\alpha$, and $\varphi = 2\alpha$. The resulting overlap is real and given by $\omega = \cos \alpha$. In this case, the resulting QFIM \mathcal{Q} and the ultimate bound B are

$$\mathcal{Q} = 4 \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\csc^2 \alpha}{2}, \quad (31a)$$

whereas the mean Uhlmann curvature is vanishing and the quantumness is zero $R = 0$. Moreover, the two perturbed states become orthogonal for $\alpha = \pi/2$, which corresponds to apply nonoverlapping perturbations. The QFIM becomes diagonal, meaning that the two parameters to be estimated are uncorrelated and the ultimate bound $B = 1/2$ is minimal and coincides with the Holevo bound C_H . Notice that perturbing a different eigenvector, say $|1, 1\rangle$, the situation is dramatically different since the two perturbations S_x and S_y generate the same first-order perturbed state $|1, 0\rangle$ and the resulting overlap is $\omega = e^{i\alpha}$.

Summarizing, a two-parameter perturbation cannot be suitably characterized (with maximum precision and compatibility) using a qubit system, whereas the use of a qutrit system allows one to achieve the ultimate limits to precision via a proper choice of the encoding Hamiltonian terms and of the initial unperturbed state.

D. Quantum anharmonic oscillator model

An interesting example of models which may be treated in our formalism that of a quantum oscillator weakly perturbed by anharmonic terms whose amplitudes are to be determined, e.g., because it may represent a resource [50]. The Hilbert space of the system is infinite dimensional and may offer an ideal playground to encode as much information as needed.

For the sake of simplicity we choose natural units ($\hbar = 1$) and set the frequency and the mass of the oscillator to one $m = \omega = 1$. We consider anharmonic perturbations to the harmonic potential such that the perturbed Hamiltonian reads

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \epsilon_1 x^3 + \epsilon_2 x^4, \quad (32)$$

where we introduce the two anharmonicity parameters ϵ_1 and ϵ_2 as the unknown parameters to be estimated. Recalling that the number states $|n\rangle$ are eigenstates of the number operator N , i.e., $N|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, with the ground state of the harmonic oscillator $|0\rangle$, satisfying $a|0\rangle = 0$, and the generic number state satisfying $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$. The perturbed ground state of the system may be obtained as in Eq. (17), where the two first-order corrections are given by

$$|\psi_1^1\rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|3\rangle \right), \quad (33a)$$

$$|\psi_2^1\rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}|4\rangle \right), \quad (33b)$$

with squared norms $N_1 = \frac{29}{24}$ and $N_2 = \frac{39}{32}$. The two perturbed states (33) are orthogonal and the same happens for any eigenstate $|n\rangle$ of the perturbed Hamiltonian. The QFIM (22) reads

$$\mathcal{Q} = 4 \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

leading to $B = 466/1131 \simeq 0.41$. The Uhlmann curvature (23) vanishes, corresponding to a zero quantumness (25). By using a higher-order perturbation term in the Hamiltonian, say $H_2 = x^5$, perturbed states are no longer orthogonal, resulting in a real nonzero overlap ω (21). This leads to a QFIM with nonzero off-diagonal terms, meaning that the two parameters are no longer independent, but still compatible since the \mathbf{D} matrix is null and the quantumness parameter

$R = 0$. In conclusion, preparing a quantum oscillator in its vacuum state is an efficient strategy to precisely sense the amplitude of anharmonic perturbations.

III. SENSING PERTURBATIONS BY DYNAMICAL PROBES

In this section, we address detection of weak perturbations by performing measurements on an evolved state $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi^0\rangle$ where $|\psi^0\rangle$ is a (nonstationary) given initial state and H is the perturbed Hamiltonian under investigation.

A. General results for one and two parameters

Let us start with a perturbation described by a single-parameter Hamiltonian. To obtain the QFI it is convenient to move into the interaction picture (with respect to the unperturbed Hamiltonian H_0), where the state vector is given by the unitary transformation $|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t)|\psi(t)\rangle$, being $U_0(t) = e^{-iH_0 t}$. The whole time evolution is expressed by

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t)|\psi^0\rangle, \quad (35a)$$

$$U_I(t) = \mathcal{T}[\exp -i\lambda K(t)], \quad (35b)$$

$$K(t) = \int_0^t ds U_0^\dagger(s) H_1 U_0(s), \quad (35c)$$

where $\mathcal{T}[\dots]$ denotes time-ordering and the operator $K(t) = K^\dagger(t)$ is hermitian. Up to first order in λ we have

$$U_I(t) \simeq \mathbb{1} - i\lambda K(t), \quad (36)$$

Going back to the Schrödinger picture the evolved state and its derivative with respect to the unknown parameter may be written as

$$|\psi_\lambda(t)\rangle = U_0(t)[\mathbb{1} - i\lambda K(t)]|\psi^0\rangle, \quad (37a)$$

$$|\partial_\lambda \psi_\lambda(t)\rangle = -iU_0(t)K(t)|\psi^0\rangle. \quad (37b)$$

The leading-order behavior corresponds to a λ -independent (zeroth-order) expression of the QFI

$$Q(t) = 4[\langle \psi^0 | K^2(t) | \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | K(t) | \psi^0 \rangle^2]. \quad (38)$$

Despite the fact that it may appear as a rough approximation, this expression of the QFI allows us to grab the main features of the dynamical case and to compare results with those obtained in the static one. The QFI in Eq. (38) depends on time and is independent of λ . In other words, the evolution introduces a time dependence, whereas it does not affect the covariant nature of the estimation problem.

Analogously, in the case of a two-parameter Hamiltonian $H = H_0 + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$, the time evolution operator in the interaction picture can be approximated at first order as $U_I(t) \simeq \mathbb{1} - i \int_0^t ds U_0^\dagger(s) (\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2) U_0$. Upon introducing the operators

$$K_1(t) = \int_0^t ds U_0^\dagger(s) H_1 U_0(s), \quad (39a)$$

$$K_2(t) = \int_0^t ds U_0^\dagger(s) H_2 U_0(s), \quad (39b)$$

the leading order of the elements of the QFI matrix may be evaluated as follows:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 4[\langle \psi^0 | K_1^2 | \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | K_1 | \psi^0 \rangle^2], \\ Q_{12} &= 4[\text{Re}(\langle \psi^0 | K_1 K_2 | \psi^0 \rangle) - \langle \psi^0 | K_1 | \psi^0 \rangle \langle \psi^0 | K_2 | \psi^0 \rangle], \\ Q_{21} &= 4[\text{Re}(\langle \psi^0 | K_2 K_1 | \psi^0 \rangle) - \langle \psi^0 | K_2 | \psi^0 \rangle \langle \psi^0 | K_1 | \psi^0 \rangle], \\ Q_{22} &= 4[\langle \psi^0 | K_2^2 | \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | K_2 | \psi^0 \rangle^2], \end{aligned} \quad (40)$$

where we omit the time dependence. The matrix elements of the Uhlmann curvature are given by

$$D_{12} = 4\text{Im}(\langle \psi^0 | K_1 K_2 | \psi^0 \rangle) = -D_{21}, \quad (41)$$

and the quantumness parameter R reads as follows:

$$R = \frac{4|\text{Im}(\langle \psi^0 | K_1 K_2 | \psi^0 \rangle)|}{\sqrt{\det \mathbf{Q}}}. \quad (42)$$

Now that the general framework has been set, in the following we reexamine some of the examples of the previous sections to compare the performance of static and dynamical estimation schemes.

B. Qubit models

Let us consider a single qubit, initially prepared in the generic state $|\psi^0\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$. We first consider a single-parameter perturbation. The system evolves according to the unitary $U = \exp(-itH)$ where t is the time parameter and $H = \sigma_z + \lambda\sigma_x$ is the perturbed Hamiltonian with λ small. Using Eqs. (35c) and (38) we have

$$K(t) = e^{it} \sin t |0\rangle\langle 1| + e^{-it} \sin t |1\rangle\langle 0|, \quad (43a)$$

$$Q(t) = 4 \sin^2 t [1 - \cos^2(t + \phi) \sin^2(\theta)]. \quad (43b)$$

To compare this result with the QFI obtained in the static case, we set $|0\rangle$ as the initial (unperturbed) state at $t = 0$, i.e., $\theta = 0$. The dynamical QFI is given by $Q(t) = 4 \sin^2 t$ and achieves a maximum at $t = \pi/2$, where it four times greater than the corresponding static QFI.

C. Qutrit models

We consider the same spin-1 system as in Sec. II C and the same Hamiltonian. To compare results with the static scenario, we set the initial state to $|\psi^0\rangle = |1, 0\rangle$, the QFIM and bound will read

$$\mathbf{Q} = 16 \sin^2 \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad (44)$$

$$\mathbf{B} = (8 \sin^2 t / 2 \sin^2 \alpha)^{-1}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (45)$$

The D matrix and the R parameter vanish, i.e., we have compatibility between the two parameters. The QFI is maximal (B is minimal) for orthogonal perturbations $\alpha = \pi/2$ and for $t = \pi$ the QFIM is diagonal and maximal. As it happens with qubits, in the dynamical scenario the bound is improved by a factor of 4.

D. Anharmonic oscillator

We consider the same system of Sec. II D, prepare the oscillator in the unperturbed ground state and let it evolve

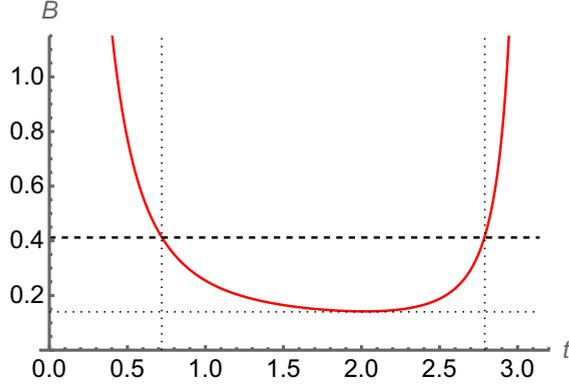


FIG. 1. B bound on the total variance for the joint estimation of the anharmonicity parameters as a function of the interaction time. The red solid line is the dynamical bound and the dashed black line denotes the static one.

according to the perturbed Hamiltonian. Using Eqs. (39a) and (39b) we evaluate the QFIM, which is a diagonal matrix with entries (see Appendix B for details)

$$Q_{11} = \frac{29}{3} - 9 \cos t - \frac{2}{3} \cos 3t, \quad (46)$$

$$Q_{22} = 3(7 + \cos 2t) \sin^2 t, \quad (47)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0, \quad (48)$$

whereas the quantumness R vanishes.

In Fig. 1 we show the bound B as a function of time (B is a periodic function) compared to the static bound. As is apparent from the plot, the dynamical scheme beats the static one in the range $t \in (0.721, 2.79)$. The absolute minimum is obtained for $t \simeq 2.0$, where we have $B \simeq 0.14$, clearly lower than the corresponding static value. We conclude that preparing the oscillator in the unperturbed ground state and performing measurements after a moderate time evolution is an effective way to reveal the presence of anharmonic perturbations and to estimate their amplitudes.

IV. CONCLUSION

In this paper, we addressed the estimation of weak quantum perturbations analyzing two estimation scenarios: a static one, where the parameters are inferred by performing measurements on a stationary state, and a dynamical one, where the system is prepared in a suitably optimized initial state and measurements are performed after a given interaction time, which itself may be optimized to enhance precision.

We found general formulas for the relevant quantities to assess precision (i.e., the SLD, the QFIM, the scalar bound B on the total variance, and the quantumness R) up to the leading order in the perturbation parameters, and analyzed in some details few quantum statistical models involving qubit, qutrit, and oscillatory systems.

Our results indicate that dynamical estimation schemes generally improve precision, although only for specific preparations of the system and values of the interaction time. Ultimately, the choice between one scheme and the other does depend on the specific features of the involved system, on

the experimental difficulties related to the preparation of the initial state, and on the modulation of the interaction time. Our results provide solid tools to compare the two approaches in a generic situations.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank A. Caprotti for discussions in the early stage of this project. This work was partially supported by MUR through Project No. PRIN22-RISQUE-2022T25TR3.

APPENDIX A: EXPLICIT EXPRESSIONS OF THE SLDs FOR A TWO-PARAMETER PERTURBATIONS

Starting from the perturbed state in Eq. (18) and its derivatives in Eqs. (19) and (20), the matrix elements $\alpha_{jk} = [L_1]_{jk}$ of the SLD operator relative to the parameter λ_1 read

$$\alpha_{11} = 0, \quad (A1)$$

$$\alpha_{22} = 4(\lambda_1 N_1 c_1^2 + \lambda_2 \sqrt{N_1 N_2} c_1 c_2 \cos \gamma), \quad (A2)$$

$$\alpha_{33} = 4(\lambda_1 N_1 s_1^2 + \lambda_2 \sqrt{N_1 N_2} s_1 s_2 \cos(\gamma + \varphi)), \quad (A3)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 2\sqrt{N_1} c_1, \quad (A4)$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 2\sqrt{N_1} s_1, \quad (A5)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32}^* = 4\lambda_1 N_1 c_1 s_1 + 2\lambda_2 \sqrt{N_1 N_2} (c_1 s_2 e^{-i(\gamma+\varphi)} + c_2 s_1 e^{i\gamma}), \quad (A6)$$

whereas $\beta_{jk} = [L_2]_{jk}$, i.e., those of the SLD operator relative to the parameter λ_2 are given by

$$\beta_{11} = 0, \quad (A7)$$

$$\beta_{22} = 4(\lambda_2 N_2 c_2^2 + \lambda_1 \sqrt{N_1 N_2} c_1 c_2 \cos \gamma), \quad (A8)$$

$$\beta_{33} = 4(\lambda_2 N_2 s_2^2 + \lambda_1 \sqrt{N_1 N_2} s_1 s_2 \cos(\gamma + \varphi)), \quad (A9)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = 2\sqrt{N_2} c_2 e^{-i\gamma}, \quad (A10)$$

$$\beta_{13} = \beta_{31}^* = 2\sqrt{N_2} s_2 e^{-i(\gamma+\varphi)}, \quad (A11)$$

$$\beta_{23} = \beta_{32}^* = 4\lambda_2 N_2 c_2 s_2 e^{-i\varphi} + 2\lambda_1 \sqrt{N_1 N_2} (c_1 s_2 e^{-i(\gamma+\varphi)} + c_2 s_1 e^{i\gamma}), \quad (A12)$$

where N_j is the squared norm of the perturbation vector $|\psi_{n,j}^1\rangle$, $c_j = \cos \frac{\theta_j}{2}$, and $s_j = \sin \frac{\theta_j}{2}$, with $j = 1, 2$.

APPENDIX B: K_1 AND K_2 FOR THE ANHARMONIC OSCILLATOR

In this Appendix, we present the explicit expressions of K_1 and K_2 in Eqs. (39a) and (39b) and their use in evaluating the elements of the QFIM. The calculations are tedious but straightforward, upon writing the nonlinear Hamiltonians in

normal order as follows [51–53]:

$$\begin{aligned} x^n &= \frac{1}{2^{n/2}} (a + a^\dagger)^n \\ &= \frac{n!}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{l=0}^{n-2k} \frac{a^{\dagger l} a^{n-2k-l}}{2^k k! l! (n-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

where $[n]$ denotes the integer part of n . We also use the fact that for a generic function $f(a, a^\dagger)$ of the bosonic operators one has

$$e^{iy a^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{-iy a^\dagger a} = f(ae^{-iy}, a^\dagger e^{iy}). \quad (\text{B2})$$

We thus have

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^{3-2k} \int_0^t dy e^{-iy(3-2k-2l)} \\ &\times \frac{3!}{2^{3/2}} \frac{a^{\dagger l} a^{3-2k-l}}{2^k k! l! (3-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^{3-2k} e^{-i\frac{t}{2}(2k+2l-3)} \frac{\sin\left[\frac{t}{2}(2k+2l-3)\right]}{\frac{1}{2}(2k+2l-3)} \\ &\times \frac{3!}{2^{3/2}} \frac{a^{\dagger l} a^{3-2k-l}}{2^k k! l! (3-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

and

$$\begin{aligned} K_2 &= \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^{4-2k} \int_0^t dy e^{-iy(4-2k-2l)} \\ &\times \frac{4!}{2^2} \frac{a^{\dagger l} a^{4-2k-l}}{2^k k! l! (4-2k-l)!}, \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^{4-2k} e^{-i\frac{t}{2}(2k+2l-4)} \frac{\sin\left[\frac{t}{2}(2k+2l-4)\right]}{\frac{1}{2}(2k+2l-4)} \\ &\times \frac{4!}{2^2} \frac{a^{\dagger l} a^{4-2k-l}}{2^k k! l! (4-2k-l)!}. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

If we take the unperturbed ground states (the vacuum state of the harmonic oscillator) we have $\langle 0|K_1|0\rangle = 0$ and $\langle 0|K_2|0\rangle = \frac{3}{4}t$.

To calculate the expectation values $\langle 0|K_1^2|0\rangle$, $\langle 0|K_2^2|0\rangle$, and $\langle 0|K_1K_2|0\rangle$ and evaluate the QFIM using Eq. (40) we need to calculate expectations values of the form $\langle 0|a^{\dagger l'} a^{n'-2k'-l'} a^{\dagger l} a^{n-2k-l}|0\rangle$. In particular, to calculate $\langle 0|K_1K_2|0\rangle$, we need

$$\begin{aligned} &\langle 0|a^{\dagger l'} a^{n'-2k'-l'} a^{\dagger l} a^{n-2k-l}|0\rangle \\ &= \delta_{l',0} \delta_{l,n-2k} \langle 0|a^{n'-2k'} a^{\dagger n-2k}|0\rangle \\ &= \delta_{l',0} \delta_{l,n-2k} \delta_{k',k+\frac{n'-n}{2}} \sqrt{(n'-2k')!(n-2k)!} \\ &= 0 \quad \text{if } n' = n \pm 1. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

We conclude that $\langle 0|K_1K_2|0\rangle = 0$ and the same happens for the quantumness R . To calculate the diagonal elements of the QFIM we use

$\langle 0|a^{\dagger l'} a^{n-2k'-l'} a^{\dagger l} a^{n-2k-l}|0\rangle = (n-2k)! \delta_{l',0} \delta_{l,n-2k} \delta_{k,k'}$, such that

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 4 \langle 0|K_1^2|0\rangle \\ &= 4 \left(\frac{3!}{2^{3/2-1}} \right)^2 \sum_{k=0}^1 \frac{\sin^2\left[\frac{t}{2}(3-2k)\right]}{(3-2k)^2 2^{2k} (k!)^2 (3-2k)!} \\ &= \frac{29}{3} - 9 \cos t - \frac{2}{3} \cos 3t, \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

and

$$\begin{aligned} Q_{22} &= 4 (\langle 0|K_2^2|0\rangle - \langle 0|K_2|0\rangle^2) \\ &= 4 \left\{ \left(\frac{4!}{2^{4/2-1}} \right)^2 \left[\sum_{k=0}^1 \frac{\sin^2\left[\frac{t}{2}(4-2k)\right]}{(4-2k)^2 2^{2k} (k!)^2 (4-2k)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lim_{k \rightarrow 2} \frac{\sin^2\left[\frac{t}{2}(4-2k)\right]}{(4-2k)^2 2^{2k} (k!)^2 (4-2k)!} \right] - \left(\frac{3}{4}t \right)^2 \right\} \\ &= 3(7 + \cos 2t) \sin^2 t. \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

-
- [1] B. Simon, *Int. J. Quantum Chem.* **21**, 3 (1982).
 [2] G. Hek, *J. Math. Biol.* **60**, 347 (2010).
 [3] R. McWeeny, *Chem. Phys. Lett.* **1**, 567 (1968).
 [4] K. Them, E. Vedmedenko, K. Fredenhagen, and R. Wiesendanger, *J. Phys. A: Math. Theor.* **48**, 075301 (2015).
 [5] L. P. García-Pintos and A. del Campo, *Entropy* **23**, 1527 (2021).
 [6] M. A. Lozada Aguilar, A. Khrennikov, K. Oleschko, and M. de Jesus Correa, *Philos. Trans. R. Soc. A* **375**, 20160398 (2017).
 [7] J. Son, P. Talkner, and J. Thingna, *PRX Quantum* **2**, 040328 (2021).
 [8] D. C. Brody and L. P. Hughston, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **454**, 2445 (1998).
 [9] A. Fujiwara, *Mathematical Engineering Technical Reports* 94 (1994).
 [10] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic, New York, 1976).
 [11] M. G. A. Paris, *Int. J. Quantum Inf.* **07125** (2009).
 [12] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, *Nat. Photon.* **5**, 222 (2011).
 [13] S. Alipour and A. T. Rezakhani, *Phys. Rev. A* **91**, 042104 (2015).
 [14] A. Monras and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 160401 (2007).
 [15] M. Aspachs, G. Adesso, and I. Fuentes, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 151301 (2010).
 [16] M. G. Genoni, P. Giorda, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **78**, 032303 (2008).
 [17] G. Adesso, F. Dell'Anno, S. De Siena, F. Illuminati, and L. A. M. Souza, *Phys. Rev. A* **79**, 040305(R) (2009).
 [18] G. Brida, I. P. Degiovanni, A. Florio, M. Genovese, P. Giorda, A. Meda, M. G. A. Paris, and A. Shurupov, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 100501 (2010).

- [19] J. Ma, Y.-X. Huang, X. Wang, and C. P. Sun, *Phys. Rev. A* **84**, 022302 (2011).
- [20] C. Sparaciari, S. Olivares, and M. G. A. Paris, *J. Opt. Soc. Am. B* **32**, 1354 (2015).
- [21] J. P. Torres and L. J. Salazar-Serrano, *Sci. Rep.* **6**, 19702 (2016).
- [22] H. Adnane, F. Albarelli, A. Gharbi, and M. G. A. Paris, *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 495302 (2019).
- [23] C. Sánchez Muñoz, G. Frascella, and F. Schlawin, *Phys. Rev. Res.* **3**, 033250 (2021).
- [24] A. Pedram, O. E. Müstecaplıoğlu, and I. K. Kominiis, *Phys. Rev. Res.* **4**, 033060 (2022).
- [25] V. Montenegro, M. G. Genoni, A. Bayat, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. Res.* **4**, 033036 (2022).
- [26] C. Benedetti and M. G. A. Paris, *Phys. Lett. A* **378**, 2495 (2014).
- [27] L. A. Correa, M. Mehboudi, G. Adesso, and A. Sanpera, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 220405 (2015).
- [28] A. Zwick, G. A. Álvarez, and G. Kurizki, *Phys. Rev. A* **94**, 042122 (2016).
- [29] M. A. C. Rossi and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **92**, 010302(R) (2015).
- [30] A. Sone and P. Cappellaro, *Phys. Rev. A* **96**, 062334 (2017).
- [31] M. Bina, F. Grasselli, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **97**, 012125 (2018).
- [32] F. Cosco, M. Borrelli, F. Plastina, and S. Maniscalco, *Phys. Rev. A* **95**, 053620 (2017).
- [33] S. Razavian, C. Benedetti, M. Bina, Y. Akbari-Kourbolagh, and M. G. A. Paris, *Eur. Phys. J. Plus* **134**, 284 (2019).
- [34] A. Roura, *Science* **375**, 142 (2022).
- [35] M. Abbas and P. Kurian, *Nat. Rev. Cancer* **22**, 378 (2022).
- [36] B. Slocumb and D. Snyder, *Proc. SPIE* **1304**, 165 (1990).
- [37] S. L. Braunstein, A. S. Lane, and C. M. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2153 (1992).
- [38] Z. Hradil, *Phys. Rev. A* **55**, R1561(R) (1997).
- [39] K. Banaszek, *Acta Phys. Slovaca* **49**, 633 (1999).
- [40] B. Teklu, S. Olivares, and M. G. A. Paris, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 035502 (2009).
- [41] S. Olivares and M. G. A. Paris, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 055506 (2009).
- [42] Notice that we assumed the parameters to be independent, otherwise the QFIM is singular and the maximum number of parameters that can be jointly estimated is equal to the rank of Q .
- [43] A. Carollo, B. Spagnolo, A. A. Dubkov, and D. Valenti, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* (2019) 094010.
- [44] S. Razavian, M. G. A. Paris, and M. G. Genoni, *Entropy* **22**, 1197 (2020).
- [45] F. Belliard and V. Giovannetti, *New J. Phys.* **23**, 063055 (2021).
- [46] A. Candeloro, M. G. A. Paris, and M. G. Genoni, *J. Phys. A: Math. Theor.* **54**, 485301 (2021).
- [47] F. Albarelli, M. Barbieri, M. G. Genoni, and I. Gianani, *Phys. Lett. A* **384**, 126311 (2020).
- [48] J. Liu, H.-N. Xiong, F. Song, and X. Wang, *Physica A* **410**, 167 (2014).
- [49] One has $Q(\lambda) = 8 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [1 - |\langle \psi_{\lambda-\epsilon/2} | \psi_{\lambda+\epsilon/2} \rangle|^2] / \epsilon^2$ and $|\langle \psi_{\lambda-\epsilon/2} | \psi_{\lambda+\epsilon/2} \rangle|^2 = 1 - \frac{1}{2} N \epsilon^2 + O(\lambda) + O(\epsilon^2)$.
- [50] F. Albarelli, A. Ferraro, M. Paternostro, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **93**, 032112 (2016).
- [51] R. M. Wilcox, *J. Math. Phys.* **8**, 962 (1967).
- [52] R. M. Wilcox, *J. Math. Phys.* **11**, 1235 (1970).
- [53] A. Candeloro, S. Razavian, M. Piccolini, B. Teklu, S. Olivares, and M. G. A. Paris, *Entropy* **23**, 1353 (2021).

Résumé

Dans la présente thèse, nous exploitons les outils métrologiques offerts par la théorie de l'estimation quantique afin d'étudier des systèmes quantiques ayant un hamiltonien faiblement perturbé, de la forme $(H = H_0 + \lambda H^*$ où $(\lambda = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \})$ et $(H^* = \{ H_1, H_2, \dots \})$, avec $(|\lambda| \ll 1)$. Nous abordons des situations où H^* est connu mais les valeurs des couplages λ ne le sont pas et l'objectif étant la détermination de leurs valeurs en effectuant des mesures sur le système. Nous considérons deux scénarios : dans le premier, nous supposons que les mesures sont effectuées sur un état stationnaire donné du système, par exemple l'état fondamental, tandis que dans le second, un état initial est préparé puis mesuré après une évolution. Dans les deux cas, nous recherchons les mesures optimales pour estimer les couplages et évaluons les limites ultimes de précision. En particulier, nous obtenons des résultats généraux pour un et deux couplages et analysons en détail certains modèles de qubits spécifiques. Nos résultats indiquent que les schémas d'estimation dynamique peuvent fournir une précision améliorée grâce à un choix approprié de la préparation initiale et du temps d'interaction.

Abstract

In this thesis, we exploit the metrological tools offered by the theory of quantum estimation to study quantum systems with weakly perturbed Hamiltonians, of the form $H = H_0 + \lambda H^*$, where $(\lambda = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \})$ and $(H^* = \{ H_1, H_2, \dots \})$, with $(|\lambda| \ll 1)$. We address situations where H^* is known but the values of the couplings λ are not, and the objective is to determine their values by performing measurements on the system. We consider two scenarios: in the first one, we assume that measurements are performed on a given stationary state of the system, for example, the ground state, while in the second one; an initial state is prepared and then measured after evolution. In both cases, we seek the optimal measurements to estimate the couplings and evaluate the ultimate limits of precision. In particular, we obtain general results for one and two couplings and analyze in detail some specific qubit models. Our results indicate that dynamic estimation schemes may provide enhanced precision through a suitable choice of initial preparation and interaction time.

ملخص

في هذه الأطروحة، نستغل الأدوات القياسية التي تقدمها نظرية التقدير الكمي لدراسة الأنظمة الكمية ذات الهاميلتونيات المضطربة نتناول $(|\lambda| \ll 1)$ مع $(H^* = \{ H_1, H_2, \dots \})$ و $(\lambda = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \})$ حيث $H = H_0 + \lambda H^*$ بشكل ضعيف، على الشكل غير معروفة، والهدف هو تحديد قيمها من خلال إجراء قياسات على λ معروفاً ولكن قيم الاقترانات H^* الحالات التي يكون فيها النظام. نعتبر سيناريوين: في الأول، نفترض أن القياسات تتم على حالة ثابتة معينة للنظام، على سبيل المثال، الحالة الأرضية، بينما في الثاني؛ يتم إعداد حالة أولية ثم قياسها بعد التطور. في كلتا الحالتين، نسعى إلى الحصول على القياسات المثلى لتقدير الاقترانات وتقييم حدود الدقة القصوى. على وجه الخصوص، نحصل على نتائج عامة لاقتران واحد واثنين ونحل بالتفصيل بعض نماذج الكيوبت المحددة. تشير نتائجنا إلى أن طرق التقدير الديناميكية قد توفر دقة محسنة من خلال اختيار مناسب للإعداد الأولي ووقت التفاعل.