

Département d'Automatique, Télécommunication et d'Electronique

## Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : **Automatique**

Spécialité : **Automatique et Systèmes**

### Thème

**Implémentation des Commandes PI et PID sur un Système Hydraulique à Deux Réservoirs Couplés et Analyse de l'Efficacité à l'Aide de la Théorie des Jeux.**

Préparé par :

- MEDJAHED Kaouther.
- AIT YATA Nadjjet.

Dirigé par :

M. Nacim NAIT MOHAND.  
M. Hocine LEHOUCHE.

Examiné par :

M. Hocine HADDAR.  
M. Lyes TIGHZERT.

Année universitaire : 2023/2024.

## Remerciements

*Nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.*

*Avant tout nous remercions Dieu Le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté, la patience, et la santé durant toutes ces années et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé.*

*En premier lieu, nous remercions sincèrement notre promoteur, Mr NAIT MOHAND et Co-promoteur Mr LEHOUCHE pour leurs conseils avisés, leurs soutiens indéfectibles et leurs patiences tout au long de ce travail. Leurs expertises et leurs encouragements nous ont été d'une aide précieuse.*

*Nous tenons également à remercier l'ensemble des membres du département d'automatique pour leur accueil chaleureux et leur disponibilité. Leurs enseignements et leur expertise ont largement enrichi notre réflexion et nous ont permis de mener à bien ce projet et à tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.*

*Nous souhaitons exprimer notre gratitude à nos familles respectives, en particulier nos parents, pour leur soutien constant, leur amour et leur compréhension tout au long de ces années d'études. Votre encouragement a été une source inépuisable de motivation.*

*Enfin, nous remercions toutes les personnes et les institutions qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, par leurs conseils, leurs ressources ou leur soutien moral.*

*À tous, merci infiniment.*

## *Dédicaces*

*Avant tout, je remercie Dieu de m'avoir accompagné pendant toutes ces années, de m'avoir guidée à faire les bons choix et aidé dans toutes circonstances afin d'être ce que je suis aujourd'hui.*

*Je remercie ma tante Nadia, pour m'avoir toujours traité comme sa fille, de m'avoir aimé, encouragé dans chaque étape de ma vie.*

*Ensuite, et c'est l'essentiel ! Car toute ma vie dépend d'eux. Tout ce que je suis, ce n'est que grâce à mes parents : Tahar et Samira Talaouanou. Leur amour inconditionnel, leurs protections, leurs sacrifices, leurs encouragements, leurs présences à mes côtés dans mes hauts et bas a fait que je m'améliore de jour en jour. Et ce n'est que le début ! Les rendre fiers est mon ultime objectif de vie.*

*Je remercie ma tante Nouara, pour toutes les fois où elle a été à mes côtés et elle m'a remis en confiance.*

*Bien que je n'aie pas de sœur et frère de ma propre mère, mais Dieu m'a donné des formidables cousines et cousins prénommés Nawel, Amina, Yasmina, Djamel et Nassim qui sont plus que sœurs et frères.*

*Je remercie ma meilleure amie Khelidja, pour son soutien moral, ses paroles apaisantes, sa sagesse et son amour. L'avoir dans ma vie est une bénédiction.*

*Et pour finir, je tiens aussi à remercier mes tatas Yasmina, Nadira et mon oncle Omar pour leurs présences, leur amour.*

*Toutes ces personnes citées sont la raison de ma réussite.*

*Finalement, je remercie les membres du jury Mr HADDAR et Mr Tighzert de nous avoir fait honneur d'accepter de juger notre travail.*

**Nadjet**

## *Dédicaces*

*Avant tout je remercie Dieu Le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience, et la santé durant toutes ces années et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé.*

*Je dédie ce modeste travail :*

*En premier, je remercie ma source de motivation et vie et la personne qui a souffert sans me laisser souffrir la meilleure personne et mère ma chère maman quoi que je fasse ou quoi que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit, que dieu te garde pour moi ma source de joie, 'Je t'aime'.*

*Je remercie mon père, mon bras droit ma chère sœur FATIMA et mon pilier mon cher frère BIZEK pour leurs soutiens moraux et leurs conseils précieux tout au long de mes études et ma vie.*

*A mes adorables copines SARAH pour son aide et IMANE malgré la distance qui y est entre nous.*

*A mon confident et cher DIDINE.*

*A ma binôme AIT YATA NADJAT*

*Je vous aime.*

**Kaouther.**

## Liste des Acronymes et Symboles

### Acronymes

**SH** : Système hydraulique

**SD** : Système dynamique

**EDO** : Equations différentielles ordinaires

**EDP** : Equations différentielles partielles

**PI** : Proportionnel intégrale

**PID** : proportionnel intégrale dérivée

**$S_L$**  : Système linéaire

### Symboles

**$q_m$**  : Débit masse

**$\Delta m$**  : La masse de fluide

**$q_v$**  : Débit volume

**$\Delta v$**  : Le volume de fluide

**$\Delta t$**  : Intervalle de temps

**$E$**  : Energie libérée

**$m$**  : L'écart de masse entre l'état initial et l'état final

**$c$**  : Vitesse de la lumière

**$P$**  : La pression du fluide

**$v$**  : La vitesse moyenne du fluide

**$\rho$**  : La masse volumique

**$z$**  : La cote de l'axe de la section

**$g$**  : Accélération de la pesanteur

**$R_1$**  : Le premier réservoir

**$R_2$**  : Le deuxième réservoir

**$a$**  : La section du canal d'écoulement

**$b_1$**  : La section du canal de fuite du premier réservoir

**$b_2$**  : La section du canal de fuite du deuxième réservoir

**$y_1$**  : La hauteur du fluide dans le premier réservoir

**$y_2$**  : La hauteur du fluide dans le deuxième réservoir

**$u_1$**  : Débit d'entrée

**$u_2$**  : Débit d'entrée

$Q_{1\ ext}$  : Débit de fuite du premier réservoir  
 $Q_{2\ ext}$  : Débit de fuite du deuxième réservoir  
 $Q_{ij}$  : Débit d'un réservoir  $i$  vers un réservoir  $j$   
 $u(t)$  : La commande  
 $y(t)$  : La sortie  
 $w(t)$  : La consigne  
 $e$  : L'erreur  
 $K_p$  : Le gain proportionnel  
 $K_d$  : Le gain dérivé  
 $K_i$  : Le gain intégral  
 $\tau$  : Variable temps  
 $T_i$  : Constante de temps d'intégration  
 $T_d$  : Constante de temps de dérivation  
 $H(p)$  : La fonction de transfert  
 $f(x)$  : La matrice d'état  
 $b(x)$  : La matrice de commande  
 $c(x)$  : La matrice d'observation  
 $A(x)$  : La matrice identité  
 $k_i$  : Le degré relatif  
 $p(s)$  : Le polynôme caractéristique

## Liste des tableaux

TABLEAU I.1 : CHAMP D'APPLICATION DES SYSTEMES HYDRAULIQUES.....	6
TABLEAU I.2 : DIFFERENTS TYPES DES SYSTEMES DYNAMIQUES.....	10
TABLEAU I. 3 : LES PARAMETRES DE SIMULATION.....	14
TABLEAU II.1 : COMPARAISON ENTRE LE PI ET PID .....	34
TABLEAU III.1 : VALEURS NUMERIQUES DES PARAMETRES DU SYSTEME HYDRAULIQUES .....	43

## Liste des figures

FIGURE I.1 : SYSTEME HYDRAULIQUE CE150 .....	4
FIGURE I.2 : SCHEMA DU SYSTEME HYDRAULIQUE A DEUX RESERVOIRS COUPLES .....	11
FIGURE I.3 : SCHEMA BLOC DU SYSTEME EN BOUCLE OUVERTE SUR MATLAB SIMULINK.....	15
FIGURE I.4 : REPOSE DU SYSTEME EN BOUCLE OUVERTE .....	15
FIGURE II.1 : REGULATEUR PID .....	18
FIGURE II.2: ACTION PROPORTIONNELLE .....	18
FIGURE II.3 : ACTION INTEGRALE .....	19
FIGURE II.4: ACTION DERIVEE.....	20
FIGURE II.5 : STRUCTURE SERIE DU REGULATEUR PID .....	20
FIGURE II.6: STRUCTURE MIXTE DU REGULATEUR PID .....	21
FIGURE II.7: STRUCTURE EN PARALLELE DU REGULATEUR PID .....	21
FIGURE II.8: REGULATEUR PI.....	21
FIGURE II.9: STRUCTURE SERIE DU REGULATEUR PI.....	22
FIGURE II.10: STRUCTURE EN PARALLELE DU REGULATEUR PI.....	22
Figure II.11: BOUCLE DE LINEARISATION D'UN SYSTEME.....	25
FIGURE II.12 : SCHEMA BLOC DU REGULATEUR PI APPLIQUE SUR LE SYSTEME DE DEUX RESERVOIRS COUPLES .....	29
FIGURE II.13: LA SORTIE EN FONCTION DU TEMPS (SEC).....	29
FIGURE II.14: LA COMMANDE EN FONCTION DU TEMPS (SEC) .....	30
FIGURE II.15: LES ERREURS EN FONCTION DU TEMPS (SEC) .....	30
FIGURE II.16: SCHEMA BLOC DE REGULATEUR PID APPLIQUE SUR LE SYSTEME DE DEUX RESERVOIRS COUPLES .....	31
FIGURE II.17: LA SORTIE EN FONCTION DU TEMPS (SEC).....	32
FIGURE II.18: LA COMMANDE EN FONCTION DU TEMPS (SEC) .....	32
FIGURE II.19: LES ERREURS EN FONCTION DU TEMPS (SEC).....	33

## Table des matières

Liste des Acronymes et Symboles	
Liste des tableaux	
Liste des figures	
Introduction générale .....	01
<b>Chapitre I : Modélisation d'un système hydraulique à deux réservoirs</b>	
I.1 Introduction.....	03
I.2 Les systèmes hydrauliques .....	03
I.2.1 Définition du SH.....	03
I.2.2 Composants principaux .....	03
I.2.3 Energie hydraulique.....	04
I.2.4 Fluide hydraulique.....	04
I.2.5 Champ d'application .....	05
I.2.6 Les contraintes des systèmes hydrauliques .....	06
I.3 Outils de modélisation des systèmes hydrauliques.....	07
I.3.1 La loi de conservation de la masse.....	07
I.3.2 Loi de Bernoulli.....	08
I.4 Les systèmes dynamiques.....	09
I.4.1 Définition du SD.....	09
I.4.2 Les caractéristiques principales des systèmes dynamiques .....	09
I.4.3 Différents types de systèmes dynamiques.....	10
I.5 Modélisation du système hydraulique à deux réservoirs .....	10
I.5.1 Description du système hydraulique .....	10
I.5.2 Choix du système .....	11
I.5.3 Modélisation du système hydraulique considéré.....	12
I.5.4 Simulation du système en boucle ouverte .....	14
I.6 Conclusion.....	16
<b>Chapitre II : Commande et régulation du système hydraulique à deux réservoirs</b>	
II.1 Introduction .....	17
II.2 Commande par régulateur PI et PID .....	17
II.2.1 Commande par PID.....	17
II.2.1.1 Définition.....	17
II.2.1.2 Différents types d'actions.....	18
II.2.1.3 Effet du régulateur PID.....	20
II.2.1.4 Différentes structures d'un PID.....	20
II.2.2 Commande par régulateur PI.....	21
II.2.2.1 Définition.....	21
II.2.2.2 Effet du régulateur PI .....	35
II.2.2.3 Différentes structures d'un PI.....	22
II.3 Principe de linéarisation par bouclage.....	22
II.3.1 Définition .....	22
II.3.2 Principe .....	23
II.3.3 Commande d'une chaîne d'intégrateur .....	25



II.3.4 Régulateur PID .....	25
II.4 Application des commandes PI et PID sur le système à deux réservoirs couplés ....	26
II.4.1 Régulation du système par le PI .....	27
II.4.2 Régulation du système par le PID .....	27
II.5 Les résultats de simulation et comparaison.....	28
II.5.1 Résultat de simulation par le PI .....	28
II.5.2 Résultat de simulation par le PID.....	31
II.5.3 Comparaison .....	34
II.6 Conclusion .....	34
<b>Chapitre III : choix rationnel entre régulateurs PI et PID par la théorie des jeux</b>	
III.1 Introduction .....	35
III.2 La théorie des jeux .....	35
III.2.1 Historique.....	35
III.2.2 Définitions .....	36
III.2.3 Exemple de jeux bi-matriciel .....	38
III.2.4 Equilibre de Nash .....	40
III.3 L'application de la théorie des jeux .....	41
III.4 Conclusion.....	46
Conclusion générale.....	47
<b>Bibliographie</b>	
<b>Résumé</b>	

### Introduction générale

Les systèmes hydrauliques jouent un rôle vital dans de nombreux domaines industriels, allant de l'ingénierie civile à l'aérospatial. Cependant, la gestion et l'automatisation des mécanismes de fonctionnement de ces systèmes complexes nécessitent le développement de méthodes de régulation efficaces pour garantir leur stabilité et leur performance optimale.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'implémentation des régulateurs PI et PID sur un système hydraulique composé de deux réservoirs couplés. Ces réservoirs sont alimentés par deux pompes, chacune dédiée à un réservoir, et possèdent des canaux de fuite. L'objectif central de ce travail est d'identifier le régulateur le plus approprié pour optimiser la performance en minimisant l'erreur statique entre la sortie et la consigne. Pour atteindre notre objectif, nous avons réparti notre travail en trois parties :

- **Première partie** : Nous mettons l'accent sur la description des systèmes hydrauliques, en définissant leurs composants essentiels et leurs divers domaines d'application. Nous nous penchons également sur les outils de modélisation de ces systèmes, en mettant en avant la loi de Bernoulli et la loi de conservation de masse. La partie centrale de cette partie consiste en la description détaillée de notre système hydraulique, sa modélisation et sa simulation en boucle ouverte.
- **Deuxième partie** : Nous abordons les commandes par les régulateurs PI et PID, en détaillant les méthodes de linéarisation par bouclage des équations d'état des systèmes hydrauliques à deux réservoirs couplés. Nous appliquons ensuite ces régulateurs à notre système hydraulique et comparons les résultats de simulation obtenus pour chaque type de régulateur.
- **Troisième partie** : Nous explorons une application de la théorie des jeux non coopératifs pour optimiser le choix des régulateurs de systèmes hydrauliques. Après une introduction détaillée de la théorie des jeux, nous démontrons comment les outils de cette théorie peuvent être mobilisés pour analyser l'efficacité des choix des régulateurs PI et PID dans un contexte stratégique.

La modélisation de notre système a révélé sa nature dynamique non linéaire, caractérisée par une complexité due à la circulation du fluide entre deux réservoirs via un canal de liaison et vers la sortie à travers des canaux de fuite. Cette spécificité non linéaire nous a conduits à effectuer sa linéarisation par bouclage. Cette étape est essentielle pour pouvoir mettre en œuvre efficacement les commandes des régulateurs PI et PID, assurant ainsi une régulation précise et adaptée.

Les résultats obtenus après l'application des régulateurs PI et PID ont confirmé une bonne performance dans la gestion dynamique du système hydraulique étudié. Cependant, cette réussite nous a amenés à réfléchir à une situation hypothétique où deux individus sont impliqués dans le choix des régulateurs pour chaque réservoir. Chaque personne doit décider du type de régulateur à utiliser pour son réservoir respectif. Dans ce contexte, une question pertinente se pose : est-ce que les deux individus ont intérêt à choisir le même type de régulateur, comme PI ou PID, ou bien est-il avantageux de différencier leurs choix ?

Du fait de l'interaction entre les dynamiques des deux réservoirs, cette situation peut être vue comme un jeu où chaque participant cherche à minimiser son erreur statique tout en tenant compte des décisions de l'autre. Pour analyser cette dynamique de choix stratégique, avons utilisé les outils de la théorie des jeux non coopératifs. Cette approche a permis d'évaluer les stratégies possibles des deux individus et d'identifier les équilibres où les décisions individuelles conduisent à des résultats stables.

## CHAPITRE I: Modélisation d'un système hydraulique à deux réservoirs

### I.1 Introduction

L'étude du comportement et de l'évolution d'un système réel dont l'état évolue dans le temps doit passer par une étape de modélisation. Qu'est-ce que la modélisation ? Pour faire simple, il s'agit d'une représentation simplifiée de l'évolution de l'état du système réel à l'aide de fonctions et d'équations mathématiques.

Les systèmes hydrauliques<sup>1</sup> sont des ensembles de composants interconnectés utilisant un fluide sous pression pour effectuer un travail mécanique. La modélisation de ces systèmes est essentiellement basée sur des éléments de la mécanique des fluides, tels que le principe de Bernoulli, la loi de conservation de la masse, ainsi que des outils mathématiques comme les systèmes dynamiques.

L'objectif de ce chapitre est de donner un bref aperçu de quelques notions relatives aux systèmes hydrauliques. Par la suite, nous rappellerons quelques définitions de la mécanique des fluides et des mathématiques utilisées dans la modélisation des systèmes hydrauliques. La dernière partie est consacrée à la description, la modélisation, et la simulation en boucle ouverte d'un système hydraulique à deux réservoirs couplés.

### I.2 Les systèmes hydrauliques

#### I.2.1 Définition du SH

« L'hydraulique » a pour racine mot grec **hudor** (eau). Le concept de base de l'hydraulique s'appuie sur le fait que si une force est appliquée à un fluide à un point donné du système, ce fluide transmettra cette force exactement et l'appliquera à tout autre point du système, puisque par nature le fluide est incompressible. Donc le système hydraulique est un mécanisme qui utilise des fluides sous pression pour transmettre de l'énergie et effectuer un travail mécanique [16, 4].

#### I.2.2 Composants principaux [17]

Un système hydraulique se compose de plusieurs éléments essentiels qui interagissent de manière cohérente. Parmi ces composants clés, on retrouve :

- **Réservoir** : contient le fluide hydraulique, permettant de compenser les variations de volume du système.
- **Pompe hydraulique** : convertit l'énergie mécanique en énergie hydraulique en mettant le fluide sous pression.

---

<sup>1</sup> L'hydraulique tire son nom du mot grec « hudor » qui signifie « eau ».

- **Valve** : contrôle le débit de la pression du fluide dans le système.
- **Tuyaux** : acheminent le fluide hydraulique entre les différents composants, ils assurent la circulation fluide du liquide dans le système.

Pour illustrer ces composants, la figure suivante donne un aperçu de ces composants à travers le système hydraulique CE105 [13].

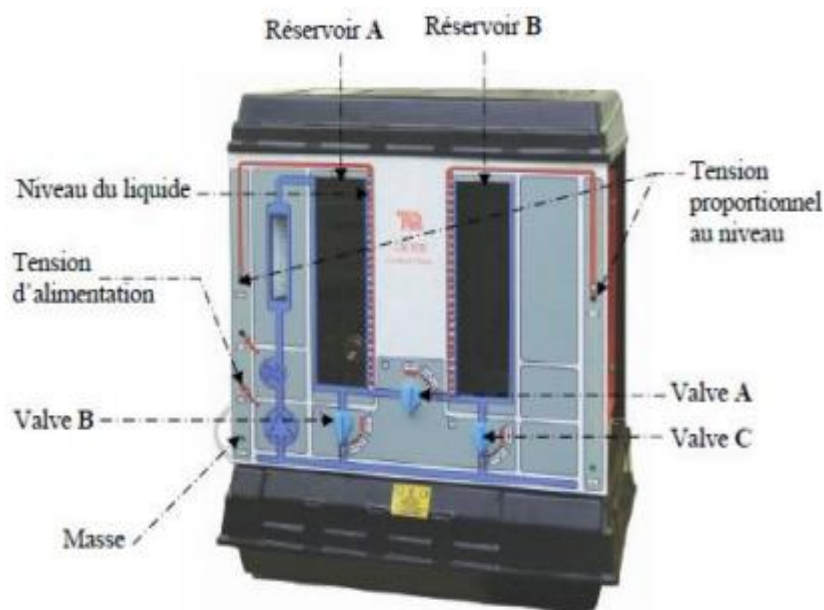


Figure I.1 : Système hydraulique CE105.

### I.2.3 Énergie hydraulique [7]

Différentes formes d'énergies sont utilisées en hydraulique :

- **L'énergie potentielle (par gravité)** : comme un château d'eau, cette forme d'énergie est stockée dans la hauteur du fluide, permettant de générer de la pression et d'alimenter des systèmes hydrauliques.
- **L'énergie cinétique (par vitesse)** : comme une turbine hydroélectrique, cette énergie est obtenue à partir du mouvement rapide d'un fluide, convertissant ainsi l'énergie cinétique en énergie mécanique.
- **L'énergie par pression** : Prédominante dans les systèmes hydrauliques industriels et mobiles, cette forme d'énergie résulte de la pression exercée sur un fluide. Elle est utilisée pour actionner des composants hydrauliques et réaliser un travail mécanique.

### I.2.4 Fluide hydraulique

#### a. Fluide [7, 18]

Les fluides sont des substances dont les molécules se déplacent aisément les unes par rapport aux autres, adoptant la forme du récipient qui les contient. Un fluide hydraulique,

également appelé huile hydraulique, est un liquide spécialement conçu pour transmettre de la puissance dans un système hydraulique, jouant un rôle essentiel dans la transmission des forces et l'exécution des mouvements.

Les fluides sont classés en deux groupes :

- **Les liquides** : ils sont peu compressibles, ce qui en fait un choix idéal pour les systèmes hydrauliques opérant à des pressions élevées [7].
- **Les gaz** : en revanche, ils sont très compressibles, les rendant inefficaces comme transporteurs d'énergie dans les applications hydrauliques [7].

### b. Débit [7]

Le débit est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

Le débit est classé en deux groupes :

- **Débit masse** :

Il est défini comme le rapport en la masse  $\Delta_m$  de fluide traversant une section droite de la conduite pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  donné. Son unité est :  $(kg/s)$ .

$$q_m = \frac{\Delta_m}{\Delta t}. \quad (I.1)$$

- **Débit volume** :

Il représente le volume  $\Delta_v$  de fluide traversant une section donnée de la conduite pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  donné. Son unité est :  $(m^3/s)$

$$q_v = \frac{\Delta_v}{\Delta t}. \quad (I.2)$$

### I.2.5 Champ d'application

Les systèmes hydrauliques sont utilisés dans une variété de domaines pour accomplir une gamme étendue de tâches. Le tableau suivant donne quelques-uns des principaux champs d'application où l'hydraulique joue un rôle crucial [16] :

**Tableau I.1** : Champ d'application des systèmes hydrauliques.

<b>Champ d'utilisation</b>	<b>Description</b>
<i>Machine-outil</i>	Ce secteur comprend une grande variété d'applications, mais les machines-outils restent parmi les principaux utilisateurs de composants hydrauliques. Ces composants sont utilisés pour le bridage des pièces, la prise d'outil, la commande de l'avance et la transmission de mouvements. Les presses à découper ou à emboutir sont des exemples d'applications directes de l'hydraulique.
<i>Engins de travaux publics</i>	Les engins de travaux publics font également un usage intensif de composants hydrauliques pour la transmission des mouvements et la commande des outils. Ces machines sont utilisées pour creuser, soulever, déplacer et niveler divers matériaux.
<i>Véhicules industriels</i>	Les applications des systèmes hydrauliques dans ce domaine sont variées, allant du levage des bennes ou des hayons au système de rotation des cabines de camions.
<i>Manutention</i>	Les chariots élévateurs constituent un secteur traditionnellement important pour l'utilisation des systèmes hydrauliques. Ces systèmes sont utilisés pour des mouvements linéaires dans des opérations de levage où le matériel doit résister à des efforts importants.
<i>Aviation</i>	L'hydraulique destinée à l'aviation occupe une place spécifique. Fournie par des sociétés spécialisées, elle est soumise aux mêmes lois de la physique mais doit répondre à des exigences spécifiques liées à la sécurité et aux performances aéronautiques.

### **I.2.6 Les contraintes des systèmes hydrauliques [16]**

Les systèmes hydrauliques, malgré leurs nombreux avantages, sont également soumis à diverses contraintes qui nécessitent une attention particulière. Voici quelques-unes des contraintes les plus courantes associées aux systèmes hydrauliques :

- L'utilisation de pressions élevées (50 à 700 bars) dans les systèmes hydrauliques, peut engendrer des accidents.
- L'utilisation d'une huile hydraulique minérale inflammable peut engendrer des incendies.

- Les composants hydrauliques représentent des matériels coûteux dont la maintenance et onéreuse du fait du prix de revient élevé des composants, du remplacement de l'huile hydraulique et des filtres.

### I.3 Outils de modélisation des systèmes hydrauliques

#### I.3.1 La loi de conservation de la masse

##### a- Historique

**Antoine Lavoisier**<sup>2</sup> a révolutionné notre compréhension de la matière avec sa célèbre loi de conservation de la masse, énoncée en 1774. Cette loi fondamentale établit que dans toute réaction chimique, la masse totale des substances reste constante, défiant ainsi les idées précédentes de création ou de destruction de matière [15].

##### b- Définition [15]

Le théorème de conservation de la masse, également connu sous le nom de *principe de conservation de la masse*, stipule que la masse totale d'un système isolé reste constante au fil du temps, quelle que soit l'interaction ou la transformation des constituants du système. Cette loi est cruciale dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie.

##### c- Exemple

Dans une réaction chimique, la masse totale des réactifs est égale à celle des produits. Par exemple, lors de la formation de l'eau à partir d'hydrogène et d'oxygène, la masse totale des réactifs est égale à celle de l'eau produite, illustrant ainsi la loi de conservation de la masse [15].

##### d- Distinction entre la masse et le poids [15]

Il est important de différencier la masse, qui est une mesure de la quantité de matière et reste constante quel que soit l'endroit, et le poids, qui varie en fonction de la gravité. La loi de conservation de la masse se concentre sur la masse, indépendamment de la gravité.

##### e- L'énoncé du théorème [11]

Pour un système fermé (sans échange de matière avec son environnement), la somme des masses des réactifs est toujours égale à la somme des masses des produits formés.

##### f- Limites et remarques

---

<sup>2</sup> Antoine-Laurent de Lavoisier (1743-1794) était un chimiste français souvent considéré comme le père de la chimie moderne. Ses contributions majeures ont révolutionné la discipline et jeté les bases de la chimie moderne.



La loi de conservation de masse ne s'applique pas aux systèmes ouverts où la matière peut être échangée avec l'environnement. De plus, dans les réactions nucléaires, où les masses des noyaux des constituants initiaux et finaux diffèrent, la différence de masse se traduit par de l'énergie selon la célèbre relation d'Einstein :  $E = m c^2$ , où  $E$  représente l'énergie libérée lors de la réaction,  $m$  l'écart de masse entre l'état initial et l'état final, et  $c$  la vitesse de la lumière [11].

### I.3.2 Loi de Bernoulli

#### a- Définition

La loi de **Bernoulli**<sup>3</sup> est un principe fondamental en mécanique des fluides, énoncé par Daniel Bernoulli en 1738. Cette loi décrit le comportement des fluides en mouvement et exprime la conservation de l'énergie dans un flux de fluide incompressible et sans viscosité [6, 20].

#### b- Énoncé de la loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli énonce que dans un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide, la somme de la pression dynamique, de la pression statique et de l'énergie cinétique par unité de volume reste constante le long d'une ligne de courant. Cette loi est exprimée par l'équation suivante [6, 9] :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P = \text{constante}, \quad (\text{I.3})$$

où :

- $P$  est la pression du fluide (Pa).
- $v$  est la vitesse moyenne du fluide (m/s).
- $\rho$  est la masse volumique (constante) du fluide ( $\text{kg/m}^3$ ).
- $z$  est la hauteur (m).
- $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $9.81\text{m/s}^2$ ).

#### c- Interprétations physiques du théorème de Bernoulli

La constante le long de la ligne de courant a la dimension d'une pression est la somme de plusieurs termes qui ont tous la dimension d'une pression.

On distingue : [6]

- **La pression statique** :  $P + \rho g z$ , qui est liée à la pression  $P$  régnant dans le fluide et à la hauteur  $z$ .

---

<sup>3</sup> Daniel Bernoulli, né en 1700 à Groningue, aux Pays-Bas, était un physicien et mathématicien suisse. Il est surtout connu pour ses contributions à la mécanique des fluides et son travail sur l'énergie cinétique.

- **La pression dynamique** :  $\frac{1}{2}\rho v^2$ , qui est liée à la vitesse  $v$  de l'écoulement.

### I.4 Les systèmes dynamiques

#### I.4.1 Définition du SD

Un système dynamique (SD) est un concept fondamental en mathématiques, utilisé pour modéliser et comprendre l'évolution temporelle d'un ensemble de variables d'état. Ces variables évoluent au fil du temps, souvent sous l'influence de paramètres d'entrée ou de forces extérieures. La dynamique d'un système dynamique est habituellement gouvernée par des équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces équations décrivent comment les variables d'état changent en fonction du temps et de l'état actuel du système, fournissant ainsi un aperçu précieux de son comportement au fil du temps.

Formellement un système dynamique s'écrit :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (\text{I.4})$$

où :

- $\dot{x}(t) = \frac{d x(t)}{d t}$  représente la dérivée temporelle des variables d'état  $x(t)$ .
- $u(t)$  désigne le vecteur des paramètres d'entrée ou des forces extérieures au temps  $t$ .
- $t$  est le temps.
- $f$  est la fonction qui décrit la dynamique du système, dépendant des variables d'état  $x(t)$ , des paramètres d'entrée  $u(t)$ , et du temps  $t$ . [5]

#### I.4.2 Les caractéristiques principales des systèmes dynamiques

Pour modéliser et analyser les systèmes dynamiques, ils doivent se conformer aux caractéristiques suivantes<sup>6</sup> :

- 1) **Variable d'état** : décrivent l'état du système à un instant donné. Elles évoluent selon des équations spécifiques.
- 2) **Equation de transition** : déterminent comment les variables d'état changent dans le temps, souvent sous forme d'équations différentielles.
- 3) **Paramètres** : des constantes qui influencent le comportement du système.
- 4) **Conditions initiales** : les valeurs des variables d'état au début de l'analyse, essentielles pour résoudre les équations de transition.
- 5) **Entrée/ Sorties** : les entrées sont les influences externes sur le système, et les sorties sont les réponses du système.
- 6) **Stabilité** : la capacité du système à revenir à un état d'équilibre après une perturbation.

## I.4.3 Différents types de systèmes dynamiques

Le tableau suivant donne un aperçu des différents types de systèmes dynamiques et de leurs caractéristiques distinctives : [10]

**Tableau I.2** : Différents types des systèmes dynamiques.

Types de systèmes Dynamiques	Description
<i>Linéaires</i>	Caractérisés par des équations différentielles linéaires où les variables d'état évoluent de manière proportionnelle aux paramètres et aux entrées.
<i>Non-linéaires</i>	Présentent des relations non linéaires entre les variables d'état, pouvant afficher des comportements complexes.
<i>Continus</i>	Évoluent de manière continue dans le temps et sont décrits par des équations différentielles.
<i>Discrets</i>	Évoluent à des intervalles de temps discrets et sont décrits par des équations aux différences.

## I.5 Modélisation du système hydraulique à deux réservoirs

Dans cette section dédiée à la modélisation du système hydraulique à deux réservoirs, nous allons d'abord explorer en détail la configuration et le fonctionnement de ce système essentiel. Ensuite nous étudierons comment ces deux réservoirs interagissent pour contrôler le débit et la pression de l'eau en utilisant les lois de conservation de la masse et Bernoulli.

### I .5.1 Description du système hydraulique

Nous considérons un système hydraulique composé de deux réservoirs verticaux, notés  $R_1$  et  $R_2$ , ayant chacun une section droite égale à 1 unité et reliés par un canal d'écoulement de section  $a$ , ( $a \geq 0$ ). Chaque réservoir  $R_i$ ,  $i \in \{1,2\}$  possède un canal de fuite de section  $b_i$  ( $b_i \geq 0$ ). Les deux réservoirs sont équipés de capteurs permettant de mesurer la hauteur du fluide, assurant ainsi un contrôle précis du niveau de liquide dans chacun d'eux.

Pour appliquer la loi de Bernoulli, nous partons du principe que les deux réservoirs se remplissent avec un fluide *incompressible*, c'est-à-dire que sa masse volumique reste constante.

De plus, nous supposons que le fluide est *non visqueux*, ce qui implique qu'il n'y a pas de frottement interne entre les couches de fluide. Enfin, nous considérons que le fluide est en régime permanent, ce qui signifie que ses propriétés ne changent pas avec le temps.

Les deux réservoirs sont alimentés en fluide par deux pompes distinctes, chacune destinée à un réservoir spécifique. L'entrée du système, notée  $u_i, i \in \{1,2\}$  pour chaque réservoir  $R_i$ , mesure le débit d'entrée du fluide par la pompe. En sortie,  $y_i, i \in \{1,2\}$  pour chaque réservoir  $R_i$  représente la hauteur du fluide dans ce réservoir.

La figure suivante donne un schéma descriptif du système considéré :

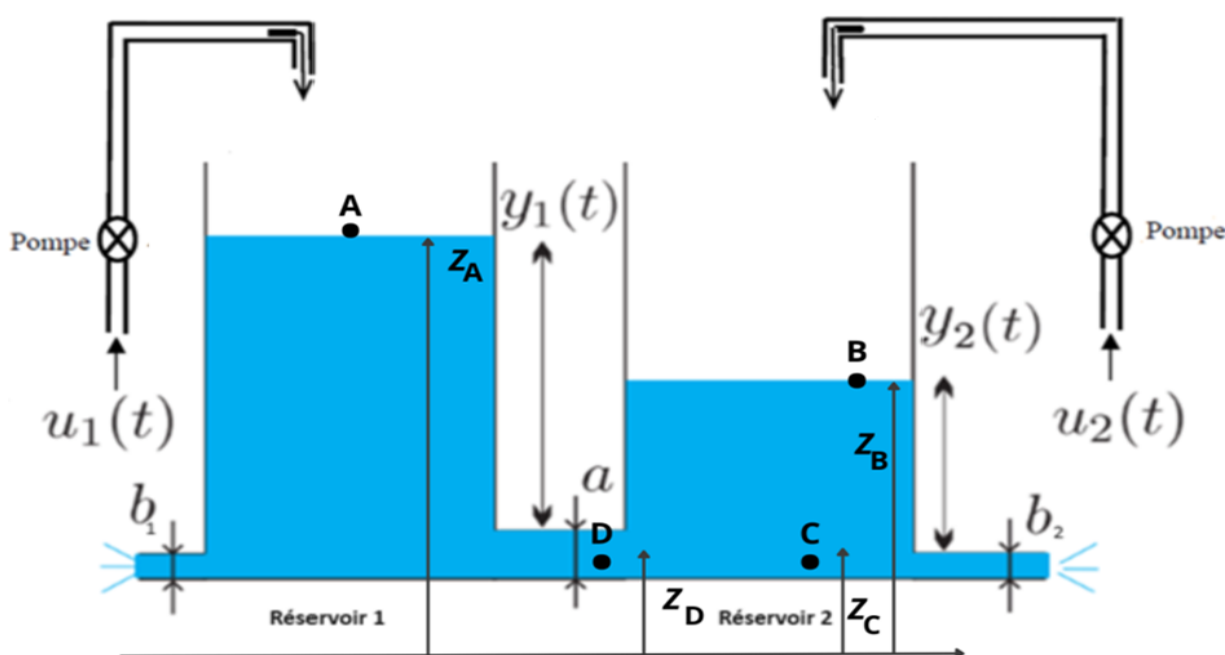


Figure I. 2 : Schéma du système hydraulique à deux réservoirs couplés.

### I.5.2. Choix du système

Notre choix de ce système hydraulique est motivé par sa pertinence par rapport aux situations rencontrées dans le monde réel et par son potentiel d'étude des interactions entre les niveaux de liquide dans les deux réservoirs.

Tout d'abord, ce système trouve des applications directes dans divers secteurs industriels et domestiques. En simulant deux réservoirs interconnectés, il reproduit fidèlement la complexité des systèmes hydrauliques réels, constituant ainsi une plateforme de modélisation permettant d'analyser les phénomènes hydrauliques dans des conditions proches de la réalité.

De plus, la configuration à deux réservoirs permet d'explorer les dynamiques complexes des mouvements du fluide. Les changements de niveau de fluide dans l'un des réservoirs affectent directement le niveau de fluide de l'autre réservoir, ce qui montre une interaction

stratégique entre les deux. Cette interaction ouvre une perspective intéressante pour l'utilisation des outils de la théorie des jeux dans le choix des types de commande (voir chapitre 3).

### I.5.3. Modélisation du système hydraulique considéré

À partir de la figure descriptive du système, nous pouvons voir que la hauteur  $y_1$  du fluide dans le réservoir  $R_1$  est supérieure à la hauteur  $y_2$  du fluide dans le réservoir  $R_2$ . Par conséquent, le fluide s'écoule de  $R_1$  en direction de  $R_2$ .

Dans le réservoir  $R_1$ , le fluide s'écoule de façon fluide, contrairement au réservoir  $R_2$ , où des turbulences existent. Ces turbulences absorbent l'énergie cinétique du fluide et la transforment en chaleur. Sans ces turbulences, nous aurions un mouvement de va-et-vient éternel du fluide entre les deux réservoirs.

Pour appliquer la loi de Bernoulli dans le réservoir  $R_1$ , considérons un tube de courant, c'est-à-dire un tube virtuel à l'intérieur duquel le fluide possède un mouvement fluide et ne traverse pas les parois. La relation de Bernoulli nous dit que dans ce tube, en tout point on a :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P = \text{constante} , \quad (I.5)$$

où  $P$  est la pression au point considéré,  $z$  son altitude,  $v$  la vitesse de l'eau en ce point. Le coefficient  $\rho$  est la masse volumique de l'eau et  $g$  est la constante de gravitation.

A partir de la relation de Bernoulli on peut déduire cette égalité aux points  $A$  et  $D$  de tube de courant :

$$P_D + \rho \frac{v_D^2}{2} + \rho g z_D = P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A . \quad (I.6)$$

On peut déduire à partir de (I.6)

$$P_D = P_A - \rho \frac{v_D^2}{2} + \rho g (z_A - z_D) . \quad (I.7)$$

Supposons que le point  $C$  est loin de la zone de turbulence et que le fluide est immobile (vitesse nulle). Ainsi, selon la loi de Bernoulli aux points  $C$  et  $B$  :

$$P_C + \rho g z_C = P_B + \rho g z_B . \quad (I.8)$$

La relation (I.8) donne :

$$P_C = P_B + \rho g (z_B - z_C) . \quad (I.9)$$

Dans la zone de turbulence, le fluide est ralenti, mais nous pouvons supposer que la pression varie pas, c'est-à-dire  $P_C = P_D$ . Ainsi, d'après (I. 6) et (I. 8), nous avons :

$$P_B + \rho g (z_B - z_C) = P_A - \rho \frac{v_D^2}{2} + \rho g (z_A - z_D). \quad (I. 10)$$

Comme  $P_A = P_B$ , et que  $z_D = z_C$ , l'équation (I. 10) se simplifie :

$$\rho g (z_A - z_B) = \rho \frac{v_D^2}{2}. \quad (I. 11)$$

De (I. 10), on peut déduire que :

$$v_D = \sqrt{2g(z_A - z_B)}. \quad (I. 12)$$

Supposons maintenant que dans notre système, le réservoir que la hauteur  $y_2$  du fluide dans le réservoir  $R_2$  est supérieure à la hauteur  $y_1$  du fluide dans le réservoir  $R_1$ , une étude similaire permettra d'obtenir :

$$v_D = -\sqrt{2g(z_B - z_A)}. \quad (I. 13)$$

Le signe négative indique que le fluide circule du réservoir  $R_2$  en direction de  $R_1$ .

A partir des relations (I. 11) et (I. 12), la générale pour la vitesse de fluide dans le canal est :

$$v_D = \text{sign} (z_A - z_B) \sqrt{2g|z_A - z_B|}. \quad (I. 14)$$

Etant donné que la section du canal reliant les deux réservoir est  $a$  et la relation (I. 14), le débit  $Q_{ij}$  du fluide du réservoir  $R_i$  en direction de  $R_j$  est :

$$Q_{ij} = a \text{sign} (y_i - y_j) \sqrt{2g|y_i - y_j|}. \quad (I. 15)$$

Etant donné que la section du canal fuite du réservoir  $R_i, i \in \{1,2\}$  est  $b_i$  et la relation (I. 15), le débit  $Q_{i \text{ ext}}$  de fuite vers l'extérieur du réservoir  $R_i$  est

$$Q_{i \text{ ext}} = b_i \cdot \sqrt{2g y_i}. \quad (I. 16)$$

Appliquons maintenant la loi de conservation de masse, pour étudier la variation du volume fluide dans les deux réservoirs du système. Selon le principe de cette loi, la somme des débits entrants moins la somme des débits sortants donne la variation du volume de fluide dans chaque réservoir. Ce fait se traduit par ce système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -Q_{1 \text{ ext}} - Q_{12} + u_1 \\ \dot{y}_2 = -Q_{21} - Q_{2 \text{ ext}} + u_2 \end{cases} \quad (I. 17)$$

En utilisant (I. 17), les équations d'état du système s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -b_1 \sqrt{2 g y_1(t)} - a \operatorname{sign}(y_1(t) - y_2(t)) \sqrt{2 g |y_1(t) - y_2(t)|} + u_1(t). \\ \dot{y}_2(t) = -b_2 \sqrt{2 g y_2(t)} + a \operatorname{sign}(y_1(t) - y_2(t)) \sqrt{2 g |y_1(t) - y_2(t)|} + u_2(t). \end{cases} \quad (I. 18)$$

Les équations (1.18) décrivent le système hydraulique comme un système dynamique non linéaire. Cette nature non linéaire est attribuable à plusieurs facteurs :

- **Dépendance non Linéaire des débits par rapport aux hauteurs de fluide** : Les termes  $\sqrt{2 g y_1(t)}$  et  $\sqrt{2 g y_2(t)}$  montrent que les débits dépendent des racines carrées des hauteurs de liquide  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ . Cette relation non linéaire entre les débits et les hauteurs de liquide rend le système non linéaire.
- **Interaction complexes entre les réservoirs** : Les termes  $\operatorname{sign}(y_1(t) - y_2(t)) \sqrt{2 g |y_1(t) - y_2(t)|}$  dans les deux équations montrent que les débits dépendent de la différence entre les hauteurs de liquide des deux réservoirs. Cette interaction complexe entre les réservoirs introduit une non linéarité dans le système.
- **Dépendance des paramètres par rapport aux hauteurs de fluide** : Les paramètres  $b_1$  et  $b_2$  des débits de fuite ainsi que le paramètre  $a$  de la section du canal dépendent des hauteurs de liquide  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ . Cette dépendance non linéaire des paramètres rend également le système non linéaire.

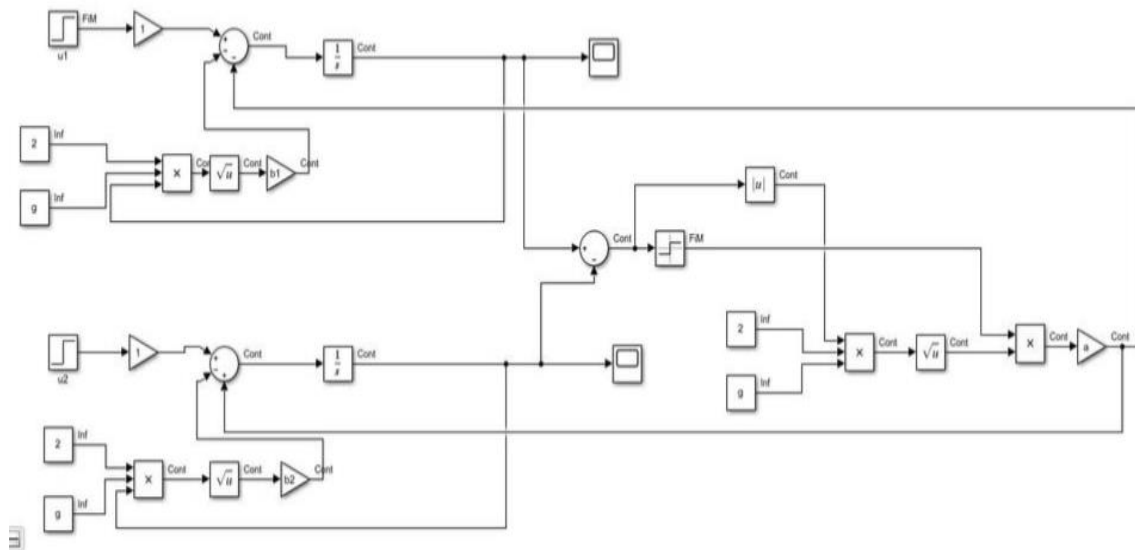
### I.5.4 Simulation du système en boucle ouverte

Pour réaliser une simulation en boucle ouverte de notre système, nous allons considérer les valeurs des paramètres suivantes :

**Tableau I.3** : Les paramètres de simulation.

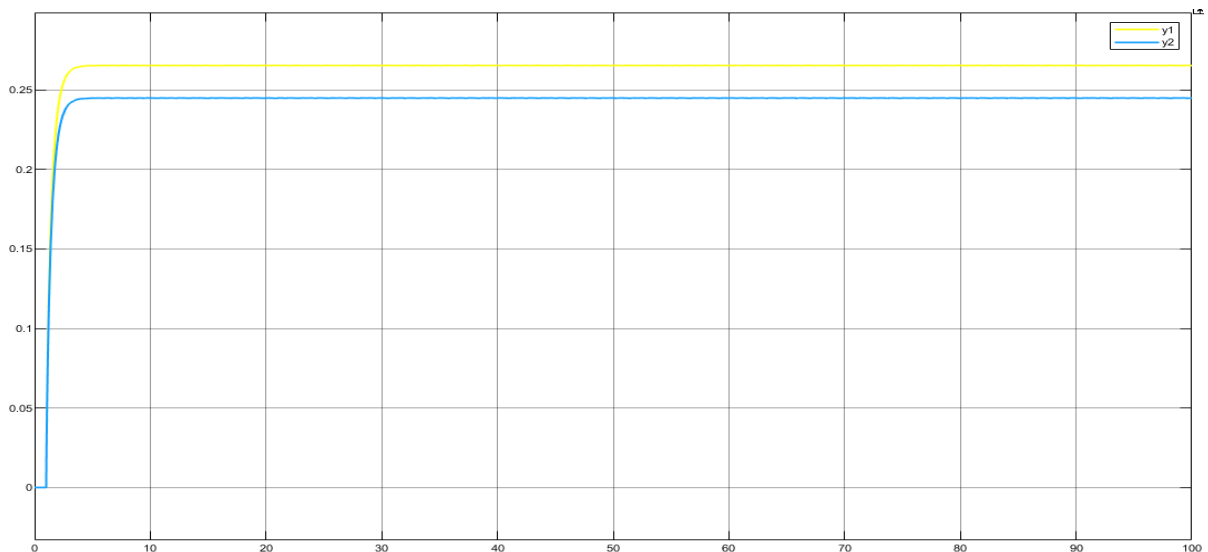
Paramètres	Paramètres	Valeur numérique
Section du canal de fuite de $R_1$	$b_1$	0,3 m <sup>2</sup>
Section du canal de fuite de $R_2$	$b_2$	0,6 m <sup>2</sup>
Constante de gravitation	$g$	9.81m/s <sup>2</sup>
Section du canal reliant $R_1$ et $R_1$	$a$	0,5 m <sup>2</sup>
hauteur initiale de fluide dans $R_1$	$y_1(0)$	0
hauteur initiale de fluide dans $R_2$	$y_2(0)$	0
Durée de simulation	t_spam	100
Débit d'entrée du fluide dans $R_1$	$u_1(t)$	1 m <sup>3</sup> /s
Débit d'entrée du fluide dans $R_2$	$u_2(t)$	1 m <sup>3</sup> /s

La figure suivante illustre le schéma bloc du système élaboré sur Matlab pour simuler le comportement du système hydraulique à deux réservoirs en boucle ouverte :



**Figure I.3 :** Schéma bloc du système en boucle ouverte sur MATLAB.

La réponse en boucle ouverte du système est donnée par la figure 4 :



**Figure I.4 :** Réponse du système en boucle ouverte.

Les sorties  $y_1$  et  $y_2$  commencent à zéro et augmentent rapidement au début, ce qui suggère une réponse initiale à une entrée ou une perturbation appliquée au système. Après cette augmentation initiale, les deux sorties atteignent un plateau, indiquant que le système a atteint un état d'équilibre ou un régime permanent. La sortie  $y_1$  (jaune) atteint un plateau légèrement plus élevé que la sortie  $y_2$  (bleue), cela peut indiquer une différence dans les caractéristiques dynamiques des deux sorties.



### I.6 Conclusion

Ce chapitre a exploré en détail la modélisation et la description détaillée d'un système hydraulique à deux réservoirs, en mettant en évidence les interactions essentielles entre les composants. Nous avons défini et examiné les notions fondamentales telles que le débit, la pression et les mécanismes de contrôle, tout en intégrant ces concepts dans un schéma bloc illustrant la dynamique du système. L'utilisation de simulation nous a permis d'analyser précisément le comportement hydraulique.

### Chapitre II : Commande et régulation du système hydraulique à deux réservoirs

#### II.1 Introduction

Les systèmes hydrauliques sont omniprésents dans plusieurs industries, jouant un rôle crucial dans le transport et le contrôle des fluides. Les ingénieurs en automatique sont appelés à intervenir dans la modélisation et la conception des commandes de contrôle et de régulation de ces systèmes. Cependant, la complexité des modèles dynamiques de ces systèmes, qui sont de nature non linéaire, exige la conception d'approches de contrôle adaptées.

Les problèmes de contrôle et de régulation de ces systèmes peuvent être classés en trois catégories. La première s'intéresse à la problématique de la régulation du niveau de liquide dans les réservoirs de fluides en ajustant les débits d'entrée et/ou de sortie. La deuxième catégorie s'intéresse à la régulation de la pression dans les systèmes hydrauliques, ce qui nécessite des contrôles précis des pompes et des valves. Enfin, la troisième catégorie concerne le contrôle de la vitesse et de la position des actionneurs hydrauliques, souvent utilisés dans les systèmes industriels pour des tâches automatisées complexes.

Dans ce chapitre, nous considérons le système hydraulique décrit dans le chapitre 1, et nous nous intéressons à la problématique de la régulation des niveaux de liquide dans deux réservoirs couplés en ajustant les débits d'entrée. Nous faisons recours à la méthode de la linéarisation par bouclage et nous appliquons deux types de commandes : le régulateur proportionnel intégral (PI) et le régulateur proportionnel intégral dérivé (PID).

Les résultats de ces deux régulations seront analysés et comparés pour démontrer l'efficacité des deux approches.

#### II.2 Commande par régulateur PI et PID

##### II.2.1 Commande par PID

###### II.2.1.1 Définition

Le régulateur PID (proportionnel intégral dérivé) est le régulateur standard le plus utilisé dans l'industrie, car il permet de régler à l'aide de ses trois paramètres les performances (amortissement, temps de réponse, temps de montée ...) d'une régulation d'un processus modélisé par un deuxième ordre.

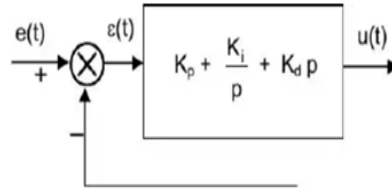
Le régulateur PID est bien adapté à la plupart des processus de type industriel. Et est relativement robuste par rapport aux variations des paramètres du procédé [1].

Il remplit essentiellement trois fonctions :

- Il fournit un signal de commande  $u(t)$  en tenant compte de l'évolution du signal de sortie  $y(t)$  par rapport à la consigne  $w(t)$ .

- Il minimise l'erreur statique grâce au terme intégrateur.
- Il anticipe les variations de la sortie grâce au terme dérivateur.

Le régulateur PID relie directement le signal de commande  $u(t)$  au signal d'écart  $e(t)$  [19].



**Figure II.1:** Régulateur PID.

Sa description temporelle est la suivante :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (\text{II.1})$$

où

- $K_p$  : Le gain proportionnel
- $K_d$  : Le gain dérivé
- $K_i$  : Le gain intégral

Avec l'écart (erreur statique) défini comme suit :

$$e(t) = w(t) - y(t). \quad (\text{II.2})$$

Sa fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{U(p)}{e(p)} = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p. \quad (\text{II.3})$$

### II.2.1.2 Différents types d'actions

#### a) Action proportionnelle

Le régulateur à action proportionnelle, ou régulateur P, a une action simple et naturelle, puisqu'il construit une commande  $u(t)$  proportionnelle à l'erreur  $e(p)$ . Sa commande ne dépend pas du passé, ni d'une tendance, mais simplement de ce qui passe à l'instant présent. L'action Proportionnelle corrige de manière instantanée, donc rapide, tout écart de la grandeur à régler. Il permet donc d'améliorer notablement la précision [19].

La loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot e(t). \quad (\text{II.4})$$



**Figure II.2 :** Action Proportionnelle [8].

- ✓ L'effet d'une augmentation du gain entraîne une diminution de l'erreur statique, rend le système plus rapide mais augmente l'instabilité du système.
- ✓ Augmente la bande passante du système, ce qui améliore la rapidité du système et augmente l'instabilité du système.

### b) Action intégrale

L'action intégrale est utilisée lorsqu'on désire avoir en régime permanent une précision parfaite.

La loi de commande :

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (\text{II.5})$$

avec  $T_i$  est la Constante de temps d'intégration.



**Figure II.3:** Action Intégrale [8].

L'action intégrale permet :

- D'améliorer la précision en réduisant ou annulant l'erreur statique.
- D'accélère la réponse du système.
- Plus l'action intégrale est élevée ( $T_i$  petit), plus la réponse s'accélère et plus la stabilité se dégrade (provoque des oscillations et du fort dépassement) [19].
- Il introduit un déphasage de  $-90^\circ$  ce qui risque de rendre le système instable du fait de la diminution de la marge de phase [8].

### c) Action dérivée

L'intérêt principal de la correction dérivée est sa sensibilité aux variations de l'erreur. Elle s'oppose aux grandes variations de l'erreur.

Elle permet :

- A introduire un déphasage de  $+90^\circ$  ce qui augmente la stabilité du système [8].
- D'accélérer la réponse transitoire du système grâce à l'effet d'anticipation.
- De compenser les effets du temps mort (retard) du procédé.
- Mais fait diminuer la précision du système, et amplifie les bruits de hautes fréquences.

La loi de commande :

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} = T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (\text{II.6})$$

$T_d$  : Constante de temps de dérivation.

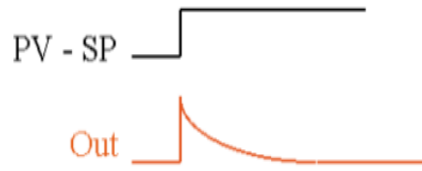


Figure II.4 : Action Dérivée [8].

### II.2.1.3 Effet du régulateur PID

Le régulateur PID combine les trois actions de manière que chacune compense la caractéristique Indésirable de l'autre. L'action intégrale en régime permanent annule l'erreur, et l'effet oscillant de cette action est supprimé par l'action dérivée, car l'effet anticipé accélère la réponse et augmente-la stabilité relative du système. L'action proportionnelle modifie la vitesse pour atteindre la consigne. Ces comportements peuvent être observés en augmentant la valeur de chaque action individuellement dans le processus [19].

### II.2.1.4 Différentes structures d'un PID

Il existe trois types d'algorithme PID :

#### 1) Le PID série

Dans cette configuration, les composantes proportionnelles, intégrales et dérivées sont connectées en série, chacune influençant le signal de commande de manière séquentielle.

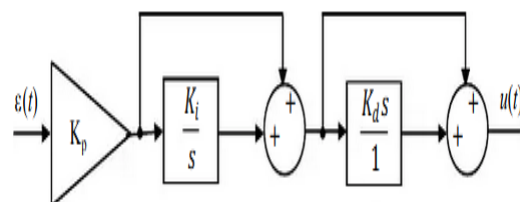


Figure II.5 : Structure série du régulateur PID [19].

#### 2) Le PID mixte

Cette configuration combine des aspects des structures série et parallèle, en utilisant parfois des éléments en série et d'autres en parallèle, selon les besoins spécifiques du système.

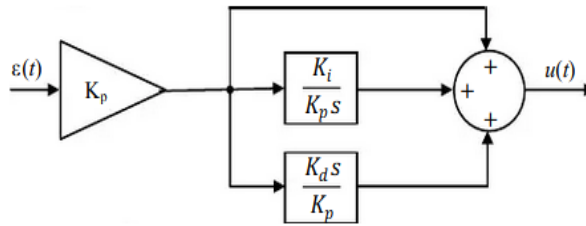


Figure II.6 : Structure mixte du régulateur PID [19].

### 3) Le PID parallèle

Dans cette configuration, les composantes proportionnelle, intégrale et dérivée fonctionnent de manière indépendante et leurs sorties sont combinées pour former le signal de commande final.

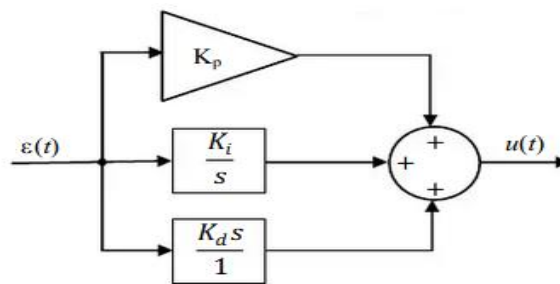


Figure II.7 : Structure en parallèle du régulateur PID [19].

## II.2.2 Commande par régulateur PI

### II.2.2.1 Définition

Le régulateur à action proportionnelle intégrale noté PI couvre une large gamme D'applications industrielles.

Il délivre une commande au processus à partir de l'erreur entre la consigne et la sortie régulée

$$e(t) = w(t) - y(t) . \quad (\text{II.7})$$

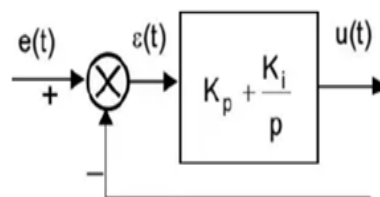


Figure II.8: Régulateur PI.

Sa description temporelle est la suivante :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (\text{II.8})$$

Sa fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{U(p)}{e(p)} = K_p + \frac{K_i}{p}. \quad (\text{II.9})$$

- ❖  $K_p$  Est le gain de l'action proportionnelle. Si le gain  $K_p$  augmente, l'erreur statique et le Temps de réponse sont réduits.
- ❖  $K_i$  Est le gain de l'action intégrale qui permet d'éliminer l'erreur statique. Si le gain  $K_i$  augmente, le système élimine l'erreur statique et rejette l'effet des perturbations plus rapidement, mais le dépassement sur la sortie s'amplifie [3].

### II.2.2.2 Effet du régulateur PI

Le régulateur PI assure une transmission instantanée du signal d'erreur  $e(t)$ , suivi d'une intégration de ce signal. Il est privilégié dans les systèmes où une correction permanente est nécessaire pour annuler ou réduire au minimum une erreur persistante, ce qui se traduit par une amélioration significative de la précision du système. De plus, le PI induit une augmentation du gain global du système aux basses fréquences, contribuant ainsi à une meilleure stabilité et à une réponse plus rapide aux variations du signal de commande [19].

### II.2.2.3 Différentes structures d'un PI

Il existe deux types d'algorithme PI :

#### 1) Le PI série [19]

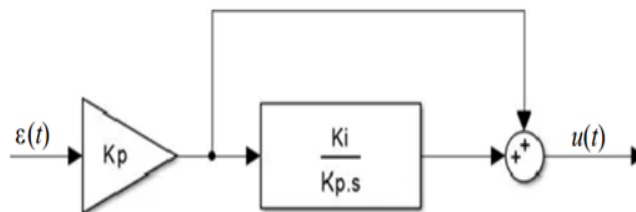


Figure II.9: Structure série du régulateur PI.

#### 2) Le PI parallèle [19]

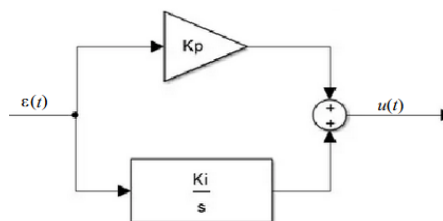


Figure II.10: Structure en parallèle du régulateur PI.

## II.3 Principe de linéarisation par bouclage

### II.3.1 Définition

La linéarisation par bouclage a fait son apparition dans les années 1980 avec les travaux d'Isidori et les apports bénéfiques de la géométrie différentielle. Un grand nombre de systèmes non linéaires peuvent être partiellement ou complètement transformés en systèmes possédant un

comportement entrée-sortie ou entrée-état linéaire à travers le choix approprié d'une loi de commande par retour d'état non linéaire endogène. Lorsque les dynamiques des zéros sont stables, il est possible de transformer le système non linéaire en une chaîne d'intégrateurs. Après linéarisation, les techniques classiques des systèmes linéaires peuvent être appliquées.

Cette approche a souvent été employée pour résoudre des problèmes pratiques de commande mais cette technique impose que le vecteur d'état soit mesuré et demande un modèle précis du procédé à commander. De plus, les propriétés de robustesse ne sont pas garanties face aux incertitudes paramétriques du modèle. En effet, cette technique est basée sur l'annulation exacte des termes non linéaires. Par conséquent, la présence d'incertitudes de modélisation sur les termes non linéaires rend l'annulation inexacte et l'équation entrée-sortie résultante non linéaire [2].

### II.3.2 Principe

L'objectif de la linéarisation par bouclage est de transformer le système non linéaire en un système linéaire.

Considérons le système non linéaire décrit par [12] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + b(x)u, \\ y = c(x), \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

où

- $u$  : est le vecteur de commande (d'entrée) ;
- $y$  : est le vecteur de sortie ;
- $f(x)$  : est la matrice d'état ;
- $b(x)$  : est la matrice de commande ;
- $c(x)$  : est la matrice d'observation .

Nous supposons que les dimensions de l'entrée du système et la sortie sont toutes deux égale à  $m$ .

L'idée de la linéarisation par bouclage, est de boucler le système (II.10) par une commande du type  $u = r(x, v)$ , où  $v$  est la nouvelle entrée, aussi de dimension  $m$ . Si cela n'est pas le cas, on se doit de fabriquer un observateur, mais dans un contexte non linéaire, cela est une opération très difficile. Puisqu'ici l'état est supposé accessible,  $y$  ne doit pas vraiment être considérée comme une sortie, mais plutôt comme le vecteur des variables consignées.



Pour effectuer ce bouclage, il nous faut exprimer les dérivées successives de chacun des  $y_i$  en fonction de l'état et de l'entrée. On s'arrête de dériver  $y_i$ , dès que les entrées commencent à intervenir dans l'expression de la dérivée. Nous disposons ainsi d'une équation du type

$$\begin{pmatrix} y_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(k_m)} \end{pmatrix} = A(x)u + b(x), \quad (\text{II.11})$$

Où  $k_i$  désigne le nombre de fois qu'il nous faut dériver  $y_i$  pour y voir apparaître une entrée. Sous l'hypothèse que la matrice  $A(x)$  soit inversible, le bouclage suivant :

$$u = A^{-1}(x)(v - b(x)), \quad (\text{II.12})$$

Où  $v$  est notre nouvelle entrée, forme un système linéaire  $S_L$  de  $m$  entrées à  $m$  sorties décrit par les équations différentielles :

$$S_L \begin{cases} y_1^{(k_1)} = v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m^{(k_m)} = v_m \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Ce système est linéaire et complètement découplé (c'est-à-dire que chaque entrée  $v_i$  agit sur une et une seule sortie  $y_i$ ). Ici, comme le système à commander est constitué de chaînes d'intégrateurs découplés, nous utiliserons  $m$  régulateurs de types PID (proportionnel intégral et dérivées). Notons que pour utiliser de tels régulateurs, il est nécessaire de disposer des dérivées des sorties. La remarque suivante explique comment les obtenir dans notre contexte de linéarisation par bouclage [12].

➤ **Remarque (II.1) :**

En analysant bien le cheminement pour obtenir l'équation (II.8), on se rend compte que la  $j^{\text{ième}}$  dérivée de la  $i^{\text{ième}}$  sortie  $y_i^{(j)}$  s'exprime sous la forme

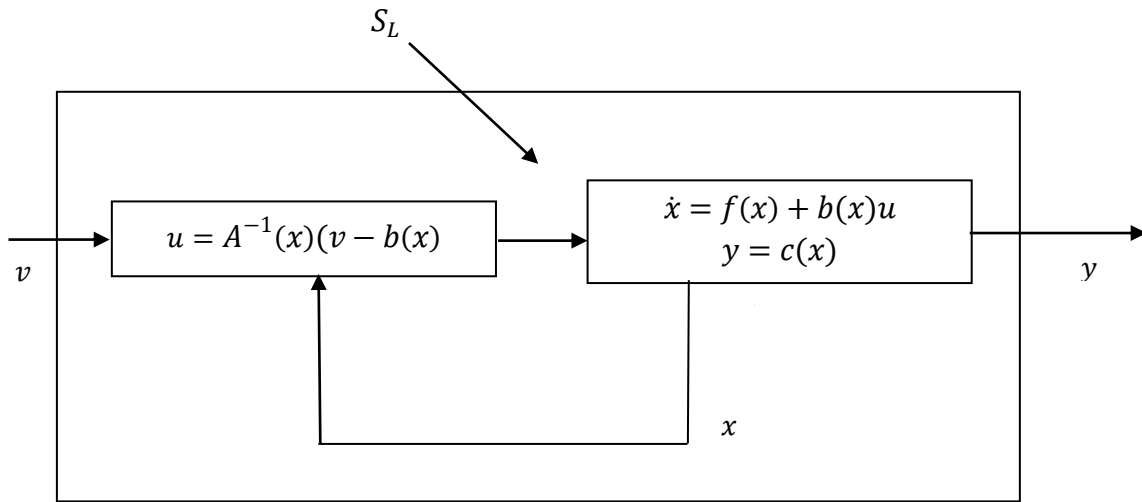
$$y_i^{(j)} = \begin{cases} \hat{b}_{ij}(x), & \text{si } j < k_i; \\ \hat{a}_{ij}^T(x) \cdot u + \hat{b}_{ij}(x), & \text{si } j = k_i; \\ \hat{a}_{ij}(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots), & \text{si } j > k_i. \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Le coefficient  $k_i$  s'appelle le degré relatif de la  $i^{\text{ième}}$  sortie. Si on mesure l'état du système  $x$  et son entrée  $u$ , on peut donc disposer de toutes les dérivées successives des sorties  $y_i^{(j)}$ , tant que  $j$  reste inférieur ou égal à  $k_i$ . En effet, en raison de bruits hautes fréquences apparaissant dans les signaux, on ne peut pas disposer de la dérivée des signaux par l'utilisation de dérivateurs de façon fiable. Nous avons donc une fonction analytique :

$$\Delta: (x, u) \rightarrow \Delta(x, u) = \left( y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(k_1)}, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_m^{(k_m)} \right). \quad (II.15)$$

Qui nous permet de disposer de toutes les dérivées des sorties (jusqu'à leur degré relatif), et ceci sans avoir à utiliser de dérivateurs de signaux [12].

Cette figure décrit de façon simplifiée comment linéariser un système non linéaire par la technique de la linéarisation par bouclage



**Figure 11.11:** Boucle de linéarisation d'un système [12].

### II.3.3 Commande d'une chaîne d'intégrateur

On considère le système d'entrée  $u$  et de sortie  $y$  décrit par l'équation différentielle suivante :

$$y^{(n)} = u. \quad (II.16)$$

### II.3.4 Régulateur PID

On propose de stabiliser le système (II. 16) par un régulateur proportionnel et dérivée et afin de compenser les perturbations constantes nous rajoutons un terme intégral. Nous obtenons une commande de type PID de la forme :

$$u = \alpha_{-1} \int_{\tau=0}^t (w(\tau) - y(\tau)) d\tau + \alpha_0 (w - y) - \alpha_1 \dot{y} - \dots - \alpha_{n-1} y^{(n-1)}, \quad (II.17)$$

où :  $w$  est la consigne.

Notons que le fait que ce régulateur nécessite les dérivées de  $y$  n'est pas un problème dans le cadre défini par la linéarisation par bouclage. En effet, toutes ces dérivées peuvent être écrites comme fonction analytique de l'état  $x$  du système et de l'entrée  $u$  (voir la remarque II.1).

Le système bouclé est décrit par l'équation différentielle :

$$y^{(n)} = \alpha_{-1} \int_{\tau=0}^t (w(\tau) - y(\tau)) d\tau + \alpha_0(w - y) - \alpha_1 \dot{y} - \dots - \alpha_{n-1} y^{(n-1)}. \quad (\text{II. 18})$$

D'où, en dérivant une fois, on obtient :

$$y^{(n+1)} + \alpha_{n-1} y^{(n)} + \dots + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 \dot{y} + \alpha_{-1} y = \alpha_{-1} w + \alpha_0 \dot{w}. \quad (\text{II. 19})$$

Ce système bouclé admet un gain statique qui est toujours égal à 1, ce qui signifie que sous l'hypothèse de stabilité, une consigne  $w$  constante se traduit par une sortie  $y$  qui converge vers  $w$ .

Le polynôme caractéristique du système est donné par :

$$P(s) = s^{n+1} + \alpha_{n-1} s^{(n)} + \dots + \alpha_1 s^2 + \alpha_0 s + \alpha_{-1}. \quad (\text{II. 20})$$

Le polynôme peut donc être choisi arbitrairement (comme pour la commande proportionnelle et intégrale) parmi les polynômes de degré  $n$ . Bien sûr, on choisira un polynôme dont les racines sont toutes à parties réelles négatives afin d'assurer la stabilité du système [12].

➤ **Remarque (II.2)**

Une fois le système stabilisé, la valeur de la grandeur asservie n'est pas forcément égale à la consigne souhaitée. L'écart entre la valeur souhaitée et la valeur attendue est appelée erreur statique.

**II.4 Application des commandes PI et PID sur le système à deux réservoirs couplés**

Dans cette section, nous appliquons les régulateurs PI et PID à notre système hydraulique à deux réservoirs couplés. Nous reprenons le modèle mathématique du système (II.19),

Puis nous détaillerons les méthodes de conception des régulateurs PI et PID. Enfin, nous comparerons les performances des deux régulateurs à travers des simulations.

Les équations d'état obtenues pour le système sont :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -b_1 \alpha(y_1) - a \alpha(y_1 - y_2) + u_1, \\ \dot{y}_2 = -b_2 \alpha(y_2) + a \alpha(y_1 - y_2) + u_2, \end{cases} \quad (\text{II. 21})$$

où :  $\alpha(y) = \text{sign}(y) \sqrt{2g|y|}$ , on a  $\text{sign}(y_1) = \text{sign}(y_2) = 1$ .

La forme vectorielle du système (II.21) est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \alpha(y_1) - a \alpha(y_1 - y_2) \\ -b_2 \alpha(y_2) + a \alpha(y_1 - y_2) \end{pmatrix} & & (\text{II. 22}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A(x) & u & b(x) \end{array}$$

Le bouclage par linéarisation donne :

$$u = A^{-1}(x)(v - b(x)) = v - \begin{pmatrix} -b_1 \alpha(y_1) - a \alpha(y_1 - y_2) \\ -b_2 \alpha(y_2) + a \alpha(y_1 - y_2) \end{pmatrix}, \quad (\text{II. 23})$$

Où  $v$  est notre nouvelle entrée, qui rend le système (II. 21) linéaire. Plus précisément ce dernier a la forme :

$$S_L: \begin{cases} \dot{y}_1 = v_1. \\ \dot{y}_2 = v_2. \end{cases} \quad (\text{II. 24})$$

### II.4.1 Régulation du système par le PI

Cherchons maintenant à réguler le système linéaire (II. 24) par un régulateur composé de deux régulateurs PI (proportionnel et intégrale) de la forme :

$$R_L: \begin{cases} v_1(t) = \alpha_0(w_1(t) - y_1(t)) + \alpha_{-1} \int_0^t (w_1(\tau) - y_1(\tau))d\tau, \\ v_2(t) = \beta_0(w_2(t) - y_2(t)) + \beta_{-1} \int_0^t (w_2(\tau) - y_2(\tau))d\tau, \end{cases} \quad (\text{II. 25})$$

Où  $w_1$  et  $w_2$  sont les nouvelles consignes pour  $y_1$  et  $y_2$ .

Si on souhaite avoir pour pôles uniquement des -1, il faut (voir équation) que :

$$\begin{cases} s^2 + \alpha_0 s + \alpha_{-1} = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1. \\ s^2 + \beta_0 s + \beta_{-1} = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1. \end{cases} \quad (\text{II. 26})$$

Soient :  $k_p = \alpha_0 = \beta_0 = 2$ , et  $k_i = \alpha_{-1} = \beta_{-1} = 1$ .

Les équations d'état pour le régulateur  $R_L$  sont donc :

$$R_L: \begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 - y_1. \\ \dot{z}_2 = w_2 - y_2. \\ v_1 = 2(w_1 - y_1) + z_1. \\ v_2 = 2(w_2 - y_2) + z_2. \end{cases} \quad (\text{II. 27})$$

En tenant compte de l'équation (II. 23), les équations d'état d'un régulateur par retour d'état  $R_{NL}$  pour notre système non linéaire (II. 21) peuvent être exprimées comme suit :

$$R_{NL}: \begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 - y_1. \\ \dot{z}_2 = w_2 - y_2. \\ u_1 = 2(w_1 - y_1) + z_1 + b_1 \alpha(y_1) + a \alpha(y_1 - y_2). \\ u_2 = 2(w_2 - y_2) + z_2 + b_2 \alpha(y_2) - a \alpha(y_1 - y_2). \end{cases} \quad (\text{II. 28})$$

### II.4.2 Régulation du système par le PID

Cherchons maintenant à réguler le système linéaire (II. 25) par un régulateur composé de trois régulateurs PID (proportionnel et intégrale et dérivé) de la forme :

$$R_L: \begin{cases} v_1(t) = \alpha_0(w_1(t) - y_1(t)) + \alpha_{-1} \int_0^t (w_1(\tau) - y_1(\tau))d\tau + \alpha_1 \frac{d(w_1(t) - y_1(t))}{dt}, \\ v_2(t) = \beta_0(w_2(t) - y_2(t)) + \beta_{-1} \int_0^t (w_2(\tau) - y_2(\tau))d\tau + \beta_1 \frac{d(w_2(t) - y_2(t))}{dt}, \end{cases} \quad (\text{II. 29})$$

où :  $w_1$  et  $w_2$  sont les consignes pour  $y_1$  et  $y_2$ .

Le système (II. 29) peut s'écrire également sous la forme :

$$R_L: \begin{cases} v_1(t) = \alpha_0(w_1(t) - y_1(t)) + \alpha_{-1} \int_0^t (w_1(\tau) - y_1(\tau))d\tau - \alpha_1 \dot{y}_1(t). \\ v_2(t) = \beta_0(w_2(t) - y_2(t)) + \beta_{-1} \int_0^t (w_2(\tau) - y_2(\tau))d\tau - \beta_1 \dot{y}_2(t). \end{cases} \quad (\text{II. 30})$$

Car  $\frac{dw_1(t)}{dt} = 0$ , et  $\frac{dw_2(t)}{dt} = 0$ .

Si on souhaite avoir pour pôles uniquement des -1, il faut que :

$$\begin{cases} s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_0 s + \alpha_{-1} = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1. \\ s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_0 s + \beta_{-1} = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1. \end{cases} \quad (\text{II. 31})$$

Soient :  $k_p = \alpha_0 = \beta_0 = 3$ ,  $k_i = \alpha_{-1} = \beta_{-1} = 1$ , et  $k_d = \alpha_1 = \beta_1 = 3$ .

Les équations d'état pour le régulateur  $R_L$  sont donc :

$$R_L: \begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 - y_1. \\ \dot{z}_2 = w_2 - y_2. \\ v_1 = 3(w_1 - y_1) + z_1 - 3\dot{y}_1. \\ v_2 = 3(w_2 - y_2) + z_2 - 3\dot{y}_2. \end{cases} \quad (\text{II. 32})$$

En tenant compte de l'équation(II. 23), les équations d'état d'un régulateur par retour d'état  $R_{NL}$  pour notre système non linéaire (II. 21) peuvent être exprimées comme suit :

$$R_{NL}: \begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 - y_1. \\ \dot{z}_2 = w_2 - y_2. \\ u_1 = 3(w_1 - y_1) + z_1 - 3\dot{y}_1 + b_1 \alpha(y_1) + a \alpha(y_1 - y_2). \\ u_2 = 3(w_2 - y_2) + z_2 - 3\dot{y}_2 + b_2 \alpha(y_2) - a \alpha(y_1 - y_2). \end{cases} \quad (\text{II. 33})$$

## II.5 Les résultats de simulation et comparaison

Nous allons utiliser à la fois la technique de linéarisation par bouclage, et faire recours à l'utilisation des commandes PI et PID. On obtient ces résultats en utilisant le modèle mathématique du système hydraulique à deux réservoirs couplés avec les paramètres de simulation donnée dans le tableau (I.3) en rajoutant les consignes  $w_1$  et  $w_2=1$ .

### II.5.1 Résultat de simulation par le PI

#### ➤ Les équations du système

Le modèle mathématique du système donné dans le premier chapitre est :

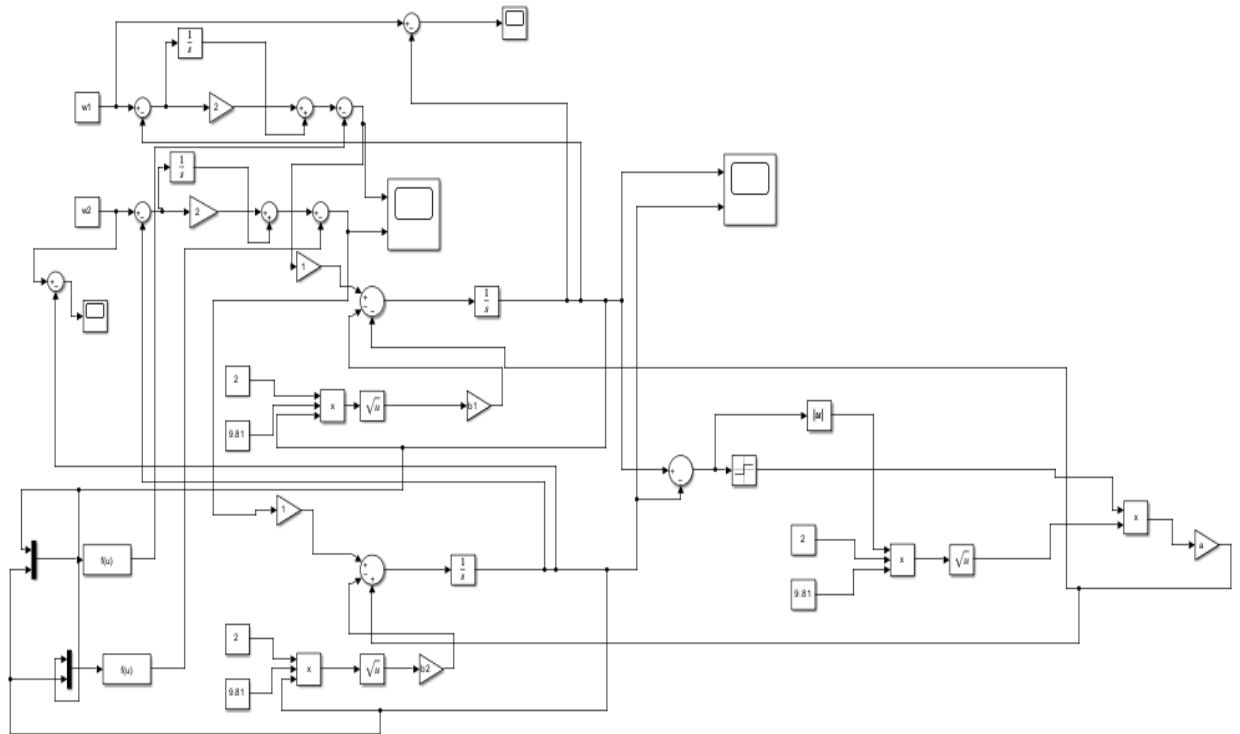
$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -b_1 \sqrt{2 g y_1(t)} - a \mathbf{sign}(y_1(t) - y_2(t)) \sqrt{2 g |y_1(t) - y_2(t)|} + u_1(t). \\ \dot{y}_2(t) = -b_2 \sqrt{2 g y_2(t)} + a \mathbf{sign}(y_1(t) - y_2(t)) \sqrt{2 g |y_1(t) - y_2(t)|} + u_2(t). \end{cases} \quad (\text{I. 18})$$

➤ **Linéarisation par bouclage** : Les équations d'état d'un régulateur par retour d'état sont :

$$R_{NL}: \begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 - y_1. \\ \dot{z}_2 = w_2 - y_2. \\ u_1 = 2(w_1 - y_1) + z_1 + b_1 \alpha(y_1) + a \alpha(y_1 - y_2). \\ u_2 = 2(w_2 - y_2) + z_2 + b_2 \alpha(y_2) - a \alpha(y_1 - y_2). \end{cases} \quad (\text{II. 28})$$

#### ➤ MATLAB Simulink

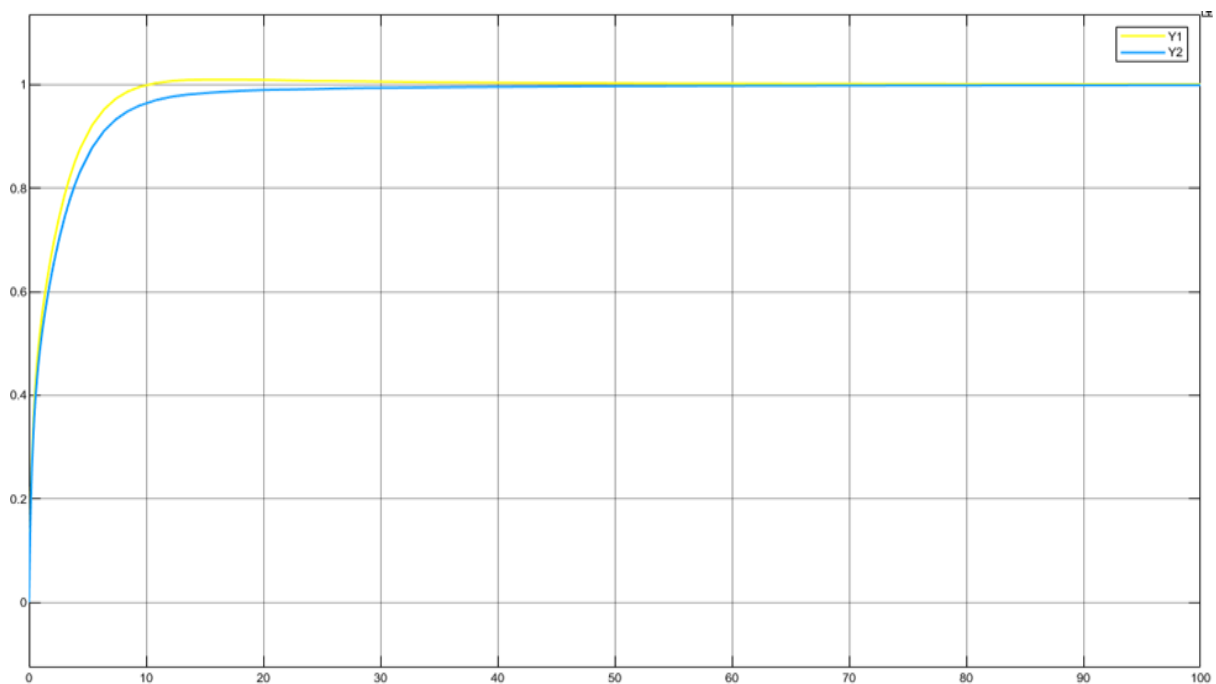
Le schéma bloc du régulateur PI appliquée sur le système à deux réservoirs couplés



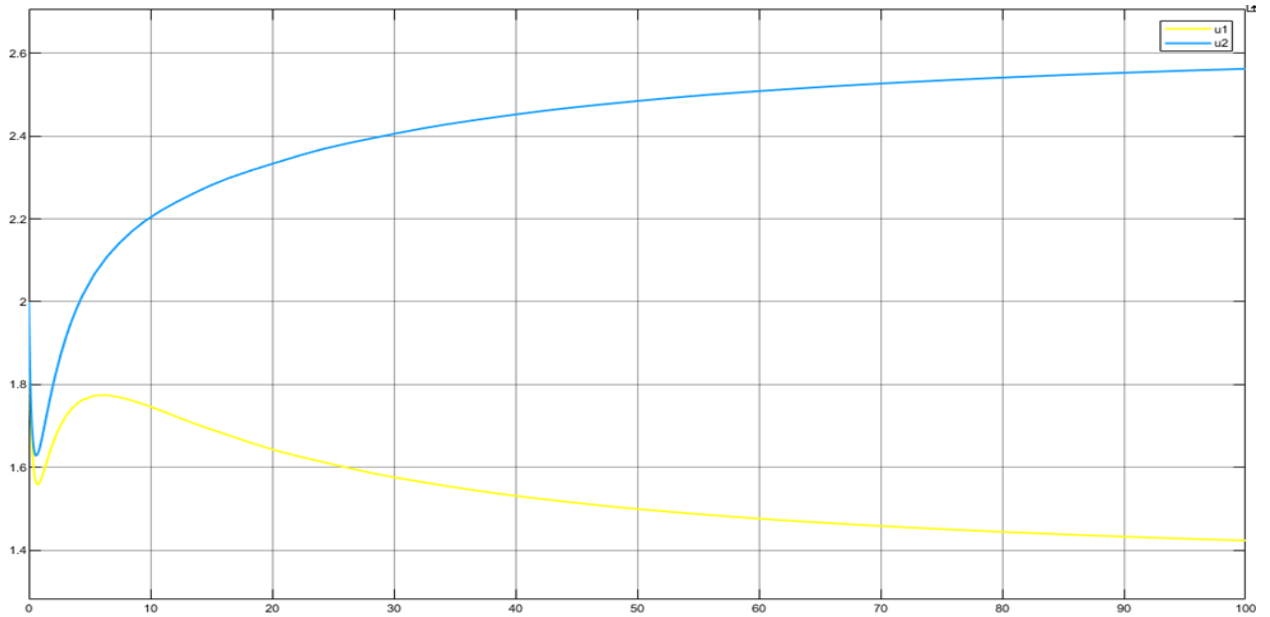
**Figure II.12:** Schéma bloc du régulateur PI appliqué sur le système de deux réservoirs couplés.

### ➤ Les graphes

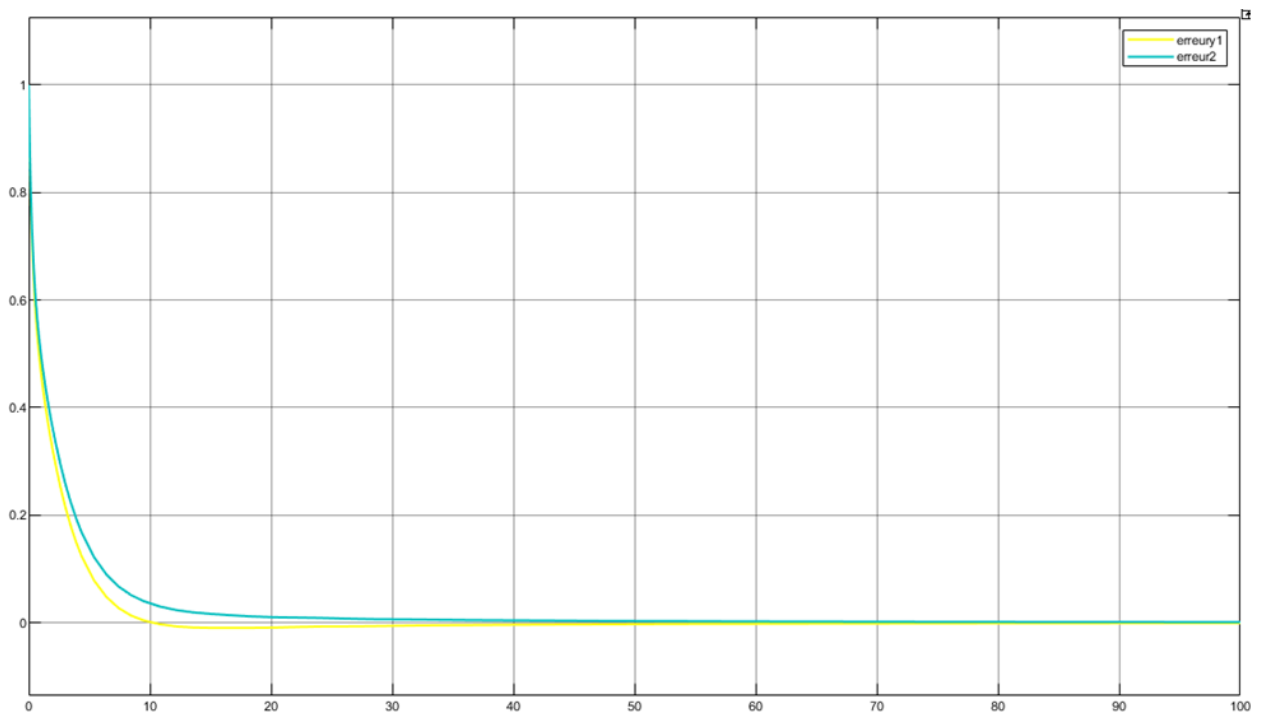
Après avoir appliqué la commande PI sur notre système à deux réservoirs couplés on obtient les figures suivantes :



**Figure II.13 :** La sortie en fonction du temps (sec).



**Figure II.14:** La commande en fonction du temps (sec).



**Figure II.15 :** Les erreurs en fonction du temps.

Les résultats de simulation de la commande par régulateur PI appliquée sur le système à deux réservoirs couplés, sont présentés sur les figures (II.13, II.14, II.15). La première montre l'évolution de la sortie au cours du temps, avec les courbes jaune et bleu indiquant respectivement les niveaux de liquide  $y_1$  et  $y_2$  des réservoirs. On observe un dépassement petit mais plus élevé dans le signal  $y_1$  que du signal  $y_2$  suivi d'un temps de réponse un peu lent ou les niveaux atteignent la stabilité autour de la valeur cible. La deuxième figure présente les

commandes PI pour le remplissage de chaque réservoir, ou la courbe bleu  $u_2$  montre une montée rapide avant de se stabiliser, tandis que la courbe jaune  $u_1$  affiche un comportement oscillatoire initiale avant de se stabiliser. La troisième figure montre l'erreur statique des deux signaux de sorties ; ou les deux diminuent rapidement et se stabilisent autour de zéro, confirmant que les systèmes de commande PI minimisent efficacement l'erreur statique et maintiennent les niveaux de liquide proches des valeurs de consigne. Ensemble, ces figures démontrent l'efficacité des systèmes de commande PI pour réguler avec précision les niveaux de liquide dans les réservoirs.

### II.5.2 Résultat de simulation par le PID

➤ **Les équations du système**

Le modèle mathématique du système donné dans le premier chapitre est :

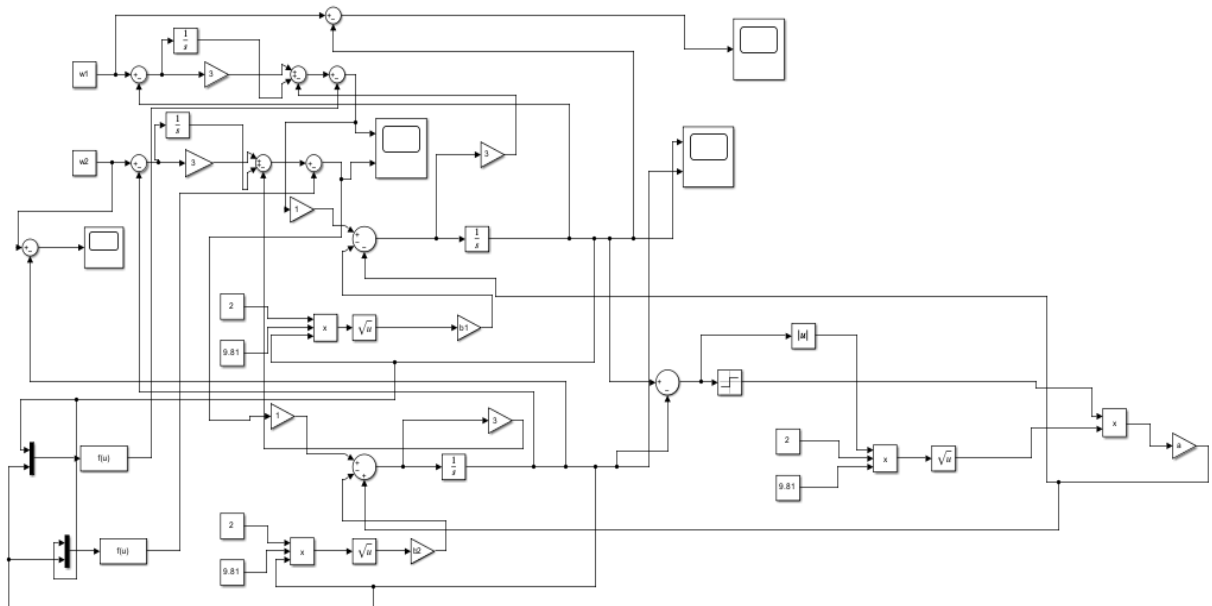
$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -b_1 \sqrt{2 g y_1(t)} - a \mathbf{sign}(y_1(t) - y_2(t)) \sqrt{2 g |y_1(t) - y_2(t)|} + u_1(t). \\ \dot{y}_2(t) = -b_2 \sqrt{2 g y_2(t)} + a \mathbf{sign}(y_1(t) - y_2(t)) \sqrt{2 g |y_1(t) - y_2(t)|} + u_2(t). \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

➤ **Linéarisation par bouclage**

Les équations d'état d'un régulateur par retour d'état sont :

$$R_{NL} : \begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 - y_1. \\ \dot{z}_2 = w_2 - y_2. \\ u_1 = 3(w_1 - y_1) + z_1 - 3\dot{y}_1 + b_1\alpha(y_1) + \alpha\alpha (y_1 - y_2). \\ u_2 = 3(w_2 - y_2) + z_2 - 3\dot{y}_2 + b_2\alpha(y_2) - \alpha\alpha (y_1 - y_2). \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

➤ **MATLAB Simulink** : Le Schéma bloc du régulateur PID appliquée sur le système à deux réservoirs couplés :

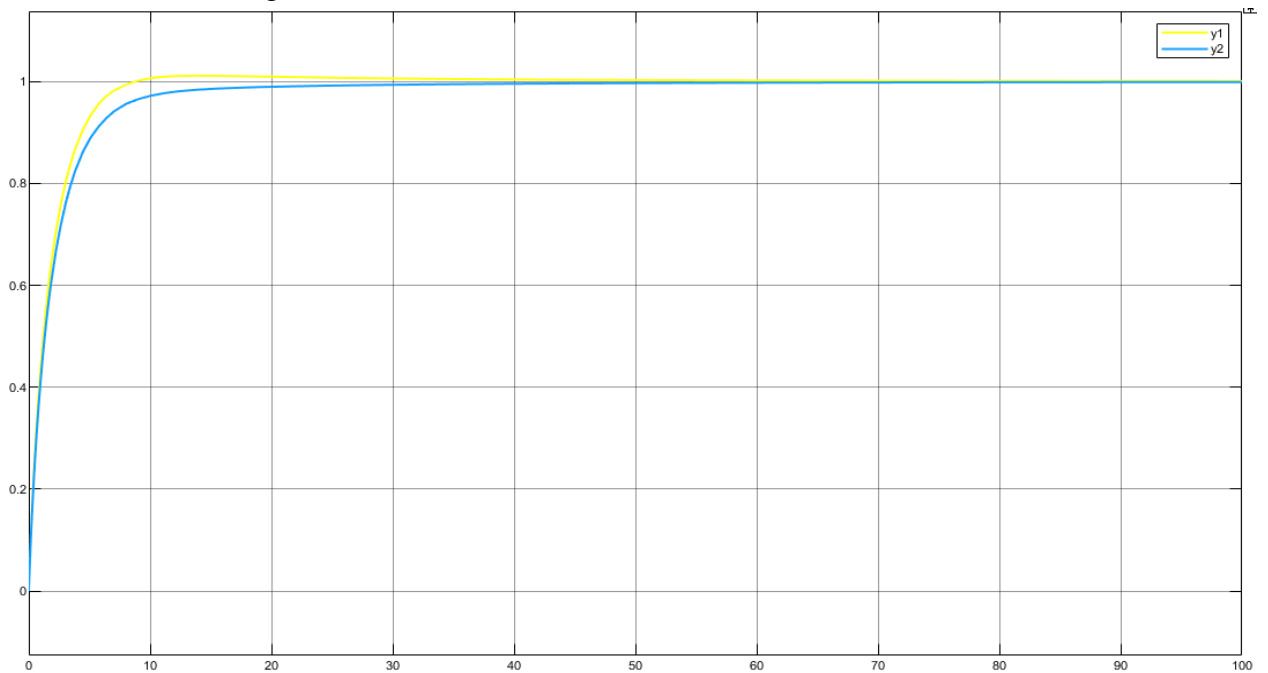


**Figure II.16:** Schéma bloc du régulateur PID appliqué sur le système de deux réservoirs couplés.

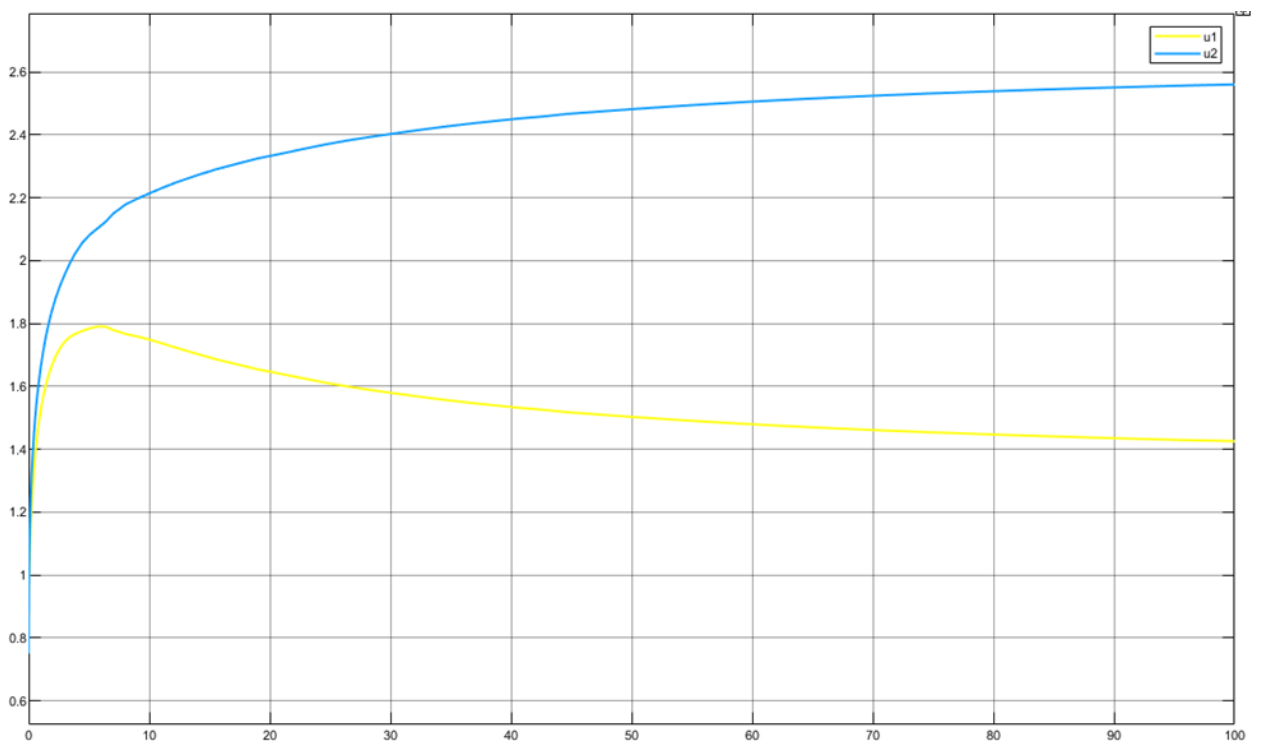
➤ **Les graphes**



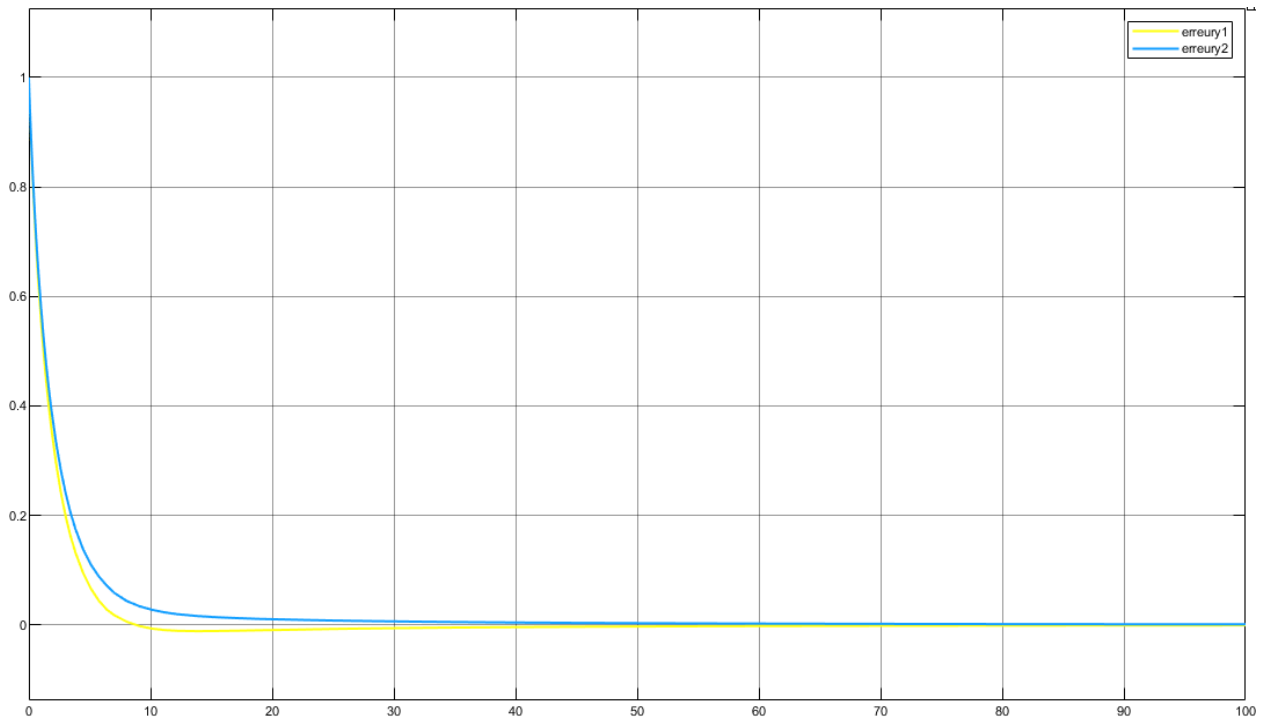
Après avoir appliqué la commande PID sur notre système à deux réservoirs couplés on obtient les figures suivantes :



**Figure II.17 :** La sortie en fonction du temps (sec).



**Figure II.18:** La commande en fonction du temps (sec).



**Figure II.19** : Les erreurs en fonction du temps (sec).

Les résultats de simulation de la commande par régulateur PID appliquée sur le système à deux réservoirs couplés, sont présentés sur les figures (II.17 ,II.18,II.19). La première montre l'évolution de la sortie au cours du temps, avec les courbes jaune et bleu indiquant respectivement les niveaux de liquide  $y_1$  et  $y_2$  des réservoirs. On observe un dépassement plus élevé dans le signal  $y_1$  que du signal  $y_2$  suivi d'un temps de réponse rapide ou les niveaux atteignent la stabilité autour de la consigne ce qui est acceptable par rapport à la commande PID. La deuxième figure présente les commandes PID pour le remplissage de chaque réservoir, ou la courbe bleu  $u_2$  montre une montée rapide avant de se stabiliser, tandis que la courbe jaune  $u_1$  affiche au début une montée puis descend pour se stabiliser. La troisième figure montre l'erreur statique des deux signaux de sorties ; ou les deux diminuent rapidement et que l'erreur du signal  $y_1$  est plus petite que l'erreur  $y_2$  puis se stabilisent autour de zéro, confirmant que les systèmes de commande PID minimisent efficacement l'erreur statique et maintiennent les niveaux de liquide proches des valeurs de consigne. Ensemble, ces figures démontrent l'efficacité des systèmes de commande PID pour réguler avec précision les niveaux de liquide dans les réservoirs.

### II.5.3 Comparaison

Tableau II.1: Comparaison entre le PI et PID.

PI	PID
Dépassement plus élevé. Qui égale à 1,098%	Minimiser le dépassement grâce à l'action dérivé. Qui égale à 0,89%
Temps de réponse lent. 7.952s	Temps de réponse rapide. 6.048s
Stabilisation lente.	Stabilisation plus rapide.
L'erreur statique et presque similaire à celle du PID grâce à l'action intégrale. L'erreur du signal $y_1 = 8.892 \times 10^{-4}$ L'erreur du signal $y_2 = 9.076 \times 10^{-4}$	L'erreur statique et presque similaire à celle du PI grâce à l'action intégrale. L'erreur du signal $y_1 = 9.361 \times 10^{-4}$ L'erreur du signal $y_2 = 9.481 \times 10^{-4}$

### II.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, on a présenté un bref aperçu sur la linéarisation par bouclage et son application au système hydraulique à deux réservoirs couplés. Nous avons vu que cette technique est basée sur l'idée de transformer un système non-linéaire en un système linéaire puis lui appliquer les deux commande PID et PI. Pour des raisons de comparaison. Les résultats de simulation sont satisfaisants et montrent une bonne performance.

### Chapitre III : Choix rationnel entre régulateurs PI et PID par la théorie des jeux.

#### III.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, pour la commande de régulation du système hydraulique à deux réservoirs couplés, les régulateurs PI et PID peuvent être appliqués. La comparaison des résultats montre qu'en termes d'erreur statique, les performances des régulateurs PI et PID sont presque similaires grâce à l'action intégrale (voir le tableau II.1...).

Dans ce chapitre, nous abordons la situation où chaque type de commande est défini par un contrôleur (personne). L'objectif de chaque contrôleur est de choisir le type de commande PI ou PID pour minimiser l'erreur statique dans le réservoir qu'il contrôle. Plus précisément, les questions suivantes sont explorées : est-ce que les deux contrôleurs ont intérêt à choisir le même type de commande, ou bien est-ce qu'ils ont intérêt à choisir des commandes de contrôle différentes ? Quel impact aura la configuration du système hydraulique (par exemple, lorsque  $b_1 = b_2$  ou  $b_1 \neq b_2$ ) sur les choix des deux contrôleurs ? Quel impact aura l'état initial du système sur les choix stratégiques des deux contrôleurs ?

Pour répondre à ces questions, nous nous appuyons sur des concepts de la théorie des jeux, qui permettent d'analyser l'efficacité des régulateurs PI et PID en tenant compte des interactions stratégiques entre les décisions des deux contrôleurs. Nous introduisons dans un premier temps les principaux concepts de la théorie des jeux non coopératifs<sup>4</sup>, puis nous appliquons ces concepts pour étudier les dynamiques de choix entre PI et PID dans le cadre de notre système hydraulique à deux réservoirs.

#### III.2 La théorie des jeux

##### III.2.1 Historique

La théorie des jeux est née en 1944 avec l'ouvrage "Theory of Games and Economic Behavior" de John Von Neumann<sup>5</sup> et Oskar Morgenstern<sup>6</sup>. Son concept remonte toutefois à Leibniz<sup>7</sup>, qui envisageait une théorie mathématique des jeux de société. Depuis son introduction, elle s'est développée et a trouvé des applications dans divers domaines. En 1951, John Nash<sup>8</sup> a étendu le travail initial en introduisant l'*équilibre de Nash* pour les jeux non coopératifs. Les

---

<sup>4</sup> Nous tenons à préciser qu'à ce stade, nous n'allons pas donner un aperçu exhaustif de la théorie des jeux, mais nous nous limiterons à des jeux coopératifs, statiques, à deux joueurs, finis et à information complète.

<sup>5</sup> John von Neumann, né à Budapest en 1903 et décédé à Washington en 1957, était un mathématicien, physicien, informaticien et économiste hongrois-américain.

<sup>6</sup> Oskar Morgenstern, né à Görlitz en Allemagne en 1902 et décédé à Princeton aux États-Unis en 1977, était un économiste germano-américain.

<sup>7</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) était un polymathe allemand qui a apporté des contributions significatives aux mathématiques, à la philosophie, aux sciences et à la diplomatie.

<sup>8</sup> John Forbes Nash Jr. (1928-2015) était un mathématicien américain renommé, célèbre pour ses contributions à la théorie des jeux, à la géométrie différentielle et aux équations aux dérivées partielles.

années 60 ont vu des avancées avec l'intégration du temps par Selten<sup>9</sup> et de Harsanyi<sup>10</sup> dans les modèles mathématiques de jeu. La théorie des jeux a influencé la biologie, notamment avec la théorie des jeux évolutionnaires, et l'informatique, en devenant essentielle pour les systèmes multi-agents et l'algorithmique. En économie, elle a été utilisée pour analyser les marchés et analyser les politiques économiques [14].

### III.2.2 Définitions

#### *i. Qu'est-ce que la théorie des jeux ?*

La théorie des jeux est une branche des mathématiques qui développe des outils d'analyse des situations d'interaction stratégique entre individus, agents, entreprises, etc. Les outils de cette théorie permettent de modéliser les configurations dans lesquelles l'utilité d'un individu dépend non seulement de ses propres décisions, mais aussi des décisions prises par les autres individus.

La théorie des jeux est aussi une approche d'étude du comportement humain. Dans certaines situations, l'individu a intérêt à négocier avec les autres pour une augmentation de son utilité, tandis que dans d'autres, l'individu n'a pas intérêt ou il n'a pas le droit de négocier avec les autres individus. Parfois, l'individu dispose d'une information complète sur son environnement, alors que dans d'autres, l'individu doit deviner l'information sur son environnement. De temps en temps, on peut observer une auto-émergence de coalitions, les individus coopèrent afin de survivre, alors que dans d'autres cas la coopération n'est pas profitable.

L'existence ou la non existence d'une autorité supérieure capable de faire respecter les accords établis par des individus en situation d'interaction stratégique et en conflit d'intérêt, permet de distinguer deux approches de la théorie des jeux : l'approche coopérative et l'approche non coopérative. Ces deux approches sont issues d'un cadre institutionnel qui précise la nature des accords de coopération et non pas la manière de jouer [14].

#### *ii. Qu'est-ce qu'un jeu non coopératif?*

Les théoriciens des jeux utilisent le mot « jeu non coopératif » pour désigner tout modèle comportant au moins les trois éléments suivants (Kreps, 1990) :

---

<sup>9</sup> Reinhard Selten (1930-2016) était un économiste allemand, connu pour ses contributions à la théorie des jeux, pour lesquelles il a reçu le prix Nobel d'économie en 1994, conjointement avec John Nash et John Harsanyi.

<sup>10</sup> John Harsanyi (1920-2000) était un économiste hongrois-américain, connu pour ses contributions majeures à la théorie des jeux et à l'économie, notamment pour son travail sur l'équilibre de Nash et l'analyse des jeux à information incomplète.

- 1) Une liste d'individus, appelés *joueurs*, ayant pour but de maximiser leurs fonctions d'utilités compte tenu de l'information dont ils disposent.
- 2) Un ensemble d'éléments, appelés *stratégies*, pour chaque individu. Les choix simultanés par chacun des joueurs d'une stratégie engendrent une issue du jeu.
- 3) Une *fonction des gains* (ou d'utilité) pour chaque joueur, qui associe à un chaque issue du jeu un gain [14].

**iii. Qu'est-ce qu'un jeu non coopératif statique?**

Un jeu non coopératif est dit statique (one-shot game) lorsque tous les joueurs choisissent simultanément leurs stratégies et reçoivent ensuite leurs gains respectifs. Ce type de jeux peut être représenté sous la forme normale (forme stratégique) suivante [14] :

$$J = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N} \rangle, \quad (\text{III. 1})$$

où :

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$  est l'ensemble de joueurs.
  - $X_i$  désigne l'ensemble des stratégies du  $i^{\text{ème}}$  joueur.
  - $x, (x \in \prod_{i \in N} X_i = X)$  désigne une issue de jeu. On notera par  $x = (y_i, x_{-i}) \in X$  pour spécifier que le joueur  $i$  a joué sa stratégie  $y_i \in X_i$  et le reste des joueurs ont joué leurs stratégies  $x_j \in X_j, \forall j \in N \setminus \{i\}$ .
- $f_i, (f_i: X \rightarrow R),$  , désigne la fonction d'utilité (de gain ou de paiement) du  $i^{\text{ème}}$  joueur.

**iv. Qu'est-ce qu'un jeu fini ?**

Le jeu (III. 1) est dit fini, si les ensembles des stratégies des joueurs ont tous un nombre fini d'éléments. Formellement :

$$J \text{ est fini} \Leftrightarrow \forall i \in N, |X_i| < \infty. \quad (\text{III. 2})$$

**v. Qu'est-ce qu'un jeu bi matriciel?**

Le jeu (III. 1) est dit bi matriciel fini si :

- $N = \{1, 2\}$ .
- $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}\}$ , et  $X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\}$  avec  $m < \infty$  et  $n < \infty$ .

Dans ce cas le jeu va être entièrement caractérisé par une bi-matrice  $M = (A, B) = (a_{ij}, b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m; \\ j=1, \dots, n}}$ , où  $a_{ij}$  (respectivement  $b_{ij}$ ) est le gain du joueur 1 (respectivement du joueur

2) quand il joue sa stratégie  $x_{1i}$  et le second joueur joue sa stratégie  $x_{2j}$ , autrement dit :

$$a_{ij} = f_1(x_{1i}, x_{2j}) \text{ et } b_{ij} = f_2(x_{1i}, x_{2j}).$$

### vi. *Qu'est-ce qu'un jeu à information complète?*

Le jeu (III. 1) est dit à information complète, si chaque joueur connaît lors de la prise de décision tous les éléments du jeu:

- ✓ ses possibilités d'actions.
- ✓ les possibilités d'actions des autres joueurs.
- ✓ les gains résultants de ces actions.
- ✓ les motivations des autres joueurs.

Si un de ces éléments du jeu n'est pas connu pour un des joueurs, alors le jeu sera dit à information incomplète.

### III.2.3 Exemple de jeux bi-matriciel

#### ❖ Exemple 1. Dilemme du prisonnier

Un exemple classique de jeu bi-matriciel est le dilemme du prisonnier. Deux individus  $I_1$  et  $I_2$  arrêtés ensemble en possession d'armes à feu sont soupçonnés d'un délit fait en commun. Les policiers les mettent dans des cellules différentes et proposent à chacun d'entre eux le marché suivant :

- Si tu dénonces ton complice et qu'il ne te dénonce pas, tu seras remis en liberté et l'autre écoperà de 10 ans de prison.
- Si tu le dénonces et lui aussi, vous écopererez tous les deux de 5 ans de prison.
- Si personne ne se dénonce, vous aurez tous deux 6 mois de prison.

#### *Le jeu*

- Les joueurs sont :  $I_1$  et  $I_2$
- L'ensemble des stratégies du joueur  $I_i, i = 1,2$  est  $X_{I_i} = \{\text{dénoncer, ne pas dénoncer}\}$ .

La forme normale de dilemme du prisonnier :

$$J = \langle \{I_1, I_2\}, \quad X_{I_1} = X_{I_2} = \{\text{Dénoncer, Ne pas dénoncer}\}, \quad M_1 \rangle, \quad (\text{III. 3})$$

où  $M_1$  est matrice de gain des joueurs  $I_1$  et  $I_2$

$$M_1 = I_1 \begin{array}{c} \text{Dénoncer} \\ \text{Ne pas dénoncer} \end{array} \begin{array}{cc} I_2 & \\ \text{Dénoncer} & \text{Ne pas dénoncer} \end{array} \left( \begin{array}{cc} (5, 5) & (0, 10) \\ (10, 0) & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right)$$

La question qui se pose : qu'elle sera la décision à prendre ?

Si les deux joueurs choisissent de ne pas dénoncer, ils obtiennent le meilleur résultat collectif (6 mois chacun), Cela représente une option favorable par rapport aux autres scénarios où les peines sont beaucoup plus sévères (5 ans ou 10 ans de prison), mais ce choix est risqué car chacun pourrait être tenté de dénoncer pour son bénéfice individuel.

### ❖ Exemple 2. Concurrence de deux entreprises

Alpha Motors et Beta Motors sont deux entreprises concurrentes dans l'industrie automobile. Elles doivent décider si elles automatisent leurs lignes de production ou non. La décision d'automatisation permet à l'entreprise de produire une qualité standardisée et d'être plus efficace en réduisant ses coûts. Toutefois, cette décision engendre une perte de la demande des consommateurs qui préfèrent la qualité artisanale.

- Si les deux entreprises décident d'automatiser leurs lignes de production, elles réduisent leurs coûts de production et partagent la demande des consommateurs qui préfèrent la qualité standardisée. Chaque entreprise obtient un gain égal à 5.
- Si l'une des entreprises décide d'automatiser et l'autre ne le fait pas, l'entreprise qui décide d'automatiser réduit ses coûts et capte la totalité de la demande des consommateurs qui préfèrent la qualité standardisée, obtenant un gain égal à 10. En revanche, l'entreprise qui décide de ne pas automatiser capte la totalité de la demande des consommateurs qui préfèrent le produit artisanal et obtient un gain égal à 6.
- Si les deux entreprises décident de ne pas automatiser leurs lignes de production, elles partagent la demande des consommateurs qui préfèrent la qualité artisanale. Chaque entreprise obtient un gain égal à 3.

### Le jeu

- Les joueurs sont :  $\alpha$  (Alpha Motors) et  $\beta$  (Beta Motors).
- L'ensemble  $X_\alpha$  des stratégies de  $\alpha$  est  $X_\alpha = \{\text{Automatiser, Ne pas automatiser}\}$ .
- L'ensemble  $X_\beta$  des stratégies de  $\beta$  est  $X_\beta = \{\text{Automatiser, Ne pas automatiser}\}$ .

La forme normale de la concurrence entre les entreprises:

$$J = \langle \{ \alpha, \beta \}, \quad X_\alpha = X_\beta = \{\text{Automatiser, Ne pas automatiser}\}, \quad M_2 \rangle, \quad (\text{III. 4})$$

où  $M_2$  est matrice de gain des joueurs  $\alpha$  et  $\beta$ .

$$M_2 = \alpha \begin{array}{l} \text{Automatiser} \\ \text{Ne pas automatiser} \end{array} \begin{array}{cc} \beta & \\ \text{Automatiser} & \text{Ne pas automatiser} \end{array} \left( \begin{array}{cc} (5, & 5) & (10, & 6) \\ (6, & 10) & (3, & 3) \end{array} \right)$$



La question qui se pose : qu'elle sera la décision à prendre ?

- Si les deux entreprises décident d'automatiser, elles obtiennent chacune un gain égal à 5. Cette situation (*Automatiser, Automatiser*) est risquée car chaque entreprise pourrait être tentée de dévier unilatéralement. Si l'une des entreprises décide de dévier vers la décision *Ne pas automatiser* pendant que l'autre entreprise maintient sa décision d'*Automatiser*, l'entreprise qui dévie capterait la totalité de la demande des consommateurs qui préfèrent la qualité artisanale, augmentant ainsi son gain à 6, tandis que l'entreprise qui maintient sa décision augmenterait également son gain à 10 en captant la totalité de la demande pour la qualité standardisée.
- Si les deux entreprises décident de ne pas automatiser, elles obtiennent chacune un gain égal à 3. Cette situation (*Ne pas automatiser, Ne pas automatiser*) est risquée car chaque entreprise pourrait être tentée de dévier unilatéralement. Si l'une des entreprises décide de dévier vers la décision *Automatiser* pendant que l'autre entreprise maintient sa décision de *Ne pas automatiser*, l'entreprise qui dévie capterait la totalité de la demande des consommateurs qui préfèrent la qualité standardisée, augmentant ainsi son gain à 10, tandis que l'entreprise qui maintient sa décision augmenterait également son gain à 6 en captant la totalité de la demande pour la qualité artisanale.
- Les deux situations (*Automatiser, Ne pas automatiser*) et (*Ne pas automatiser, Automatiser*) semblent stables au sens où, une fois ces choix faits, les deux entreprises n'ont pas intérêt à dévier. Dans ces cas, chaque entreprise maximise son gain en réponse à la stratégie de l'autre, créant ainsi un équilibre où aucune des deux entreprises ne bénéficie d'un changement unilatéral de stratégie. Ces situations correspondent au concept de solution de jeu connu sous le nom d'équilibre de Nash.

### III.3 Equilibre de Nash

L'idée de l'équilibre de Nash est simple en soi et cohérent avec l'essence des jeux non coopératifs. Les jeux non coopératifs correspondent à des situations d'interaction entre individus libres dans leurs choix et poursuivant des objectifs propres et indépendants. Ces individus ne communiquent pas avant le jeu et n'ont pas nécessairement le moyen de s'engager à poursuivre une stratégie particulière. Dans ce contexte, l'équilibre de Nash cherche les résultats qui sont stables par rapport aux déviations individuels, donc unilatérales. L'équilibre de Nash désigne une situation où chacun des joueurs maximise ses gains une fois connu le choix des autres. Plus précisément, un équilibre de Nash est une combinaison de stratégies, une par joueur, telle que personne n'aurait pu augmenter strictement son gain en retenant une stratégie différente de celle

que lui attribue cette combinaison, une fois connues les stratégies des autres joueurs qui y figurent. Ceci peut être résumé, de façon un peu vague, en disant qu'un équilibre de Nash est une situation où aucun joueur n'a intérêt à changer sa stratégie, au vu du choix des autres [14].

### Définition III.1.

Une issue  $x^* \in X$  est un équilibre de Nash du jeu (III. 1) si :

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*), \forall x_i \in X_i, \forall i \in N. \quad (III. 5)$$

Cette définition se ramène au concept suivant de meilleure réponse.

### Définition III.2.

On appelle fonction de meilleure réponse de joueur  $i \in N$ , la correspondance  $MR_i$  définie comme suit :

$$MR_i : \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} X_j \mapsto R \quad (III. 6)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \mapsto \arg \max_{x_i \in X_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$$

L'équilibre de Nash est la situation dans laquelle la stratégie de chaque joueur est la meilleure réponse aux stratégies choisies par les autres joueurs. Formellement.

### Définition III.3.

Une issue  $x^* \in X$  est un équilibre de Nash du jeu (III. 1), si :

$$x_i^* = MR_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*), \quad \forall i \in N. \quad (III. 7)$$

## III.4 L'application de la théorie des jeux

Dans cette section, nous allons mobiliser les outils de la théorie des jeux pour analyser l'efficacité des régulateurs en tenant compte des interactions stratégiques entre les décisions des deux contrôleurs agissant sur le système hydraulique. Les deux contrôleurs ont le choix entre deux régulateurs : PI (Proportionnel-Intégral) et PID (Proportionnel-Intégral-Dérivé). Compte tenu des interactions entre leurs décisions, le niveau de remplissage d'un réservoir dépend non seulement du débit d'entrée dans ce réservoir, mais aussi du niveau de l'entrée ou de la sortie de fluide vers l'autre réservoir par le canal reliant les deux réservoirs.

## CHAPITRE III : choix rationnel entre régulateurs PI et PID par la théorie des jeux

---

Nous allons analyser l'efficacité des choix des contrôleurs en fonction de plusieurs paramètres du système hydraulique, notamment :

- L'écart entre les sections des canaux de fuite des deux réservoirs.
- La section de canal reliant les deux réservoirs.
- Les conditions initiales du système.

Pour mener à bien notre analyse nous considérons le jeu suivant :

*Les joueurs :*

- Contrôleur 1 ( $C_1$ )
- Contrôleur 2 ( $C_2$ )

*Stratégies des joueurs :* Chaque contrôleur décide du type de régulateur à utiliser pour son réservoir respectif :

- $C_1$  choisit entre PI et PID pour réguler le réservoir  $R_1$ .
- $C_2$  choisit entre PI et PID pour réguler le réservoir  $R_2$ .

*Gain des joueurs*

- Le gain de  $C_1$  est son erreur statique absolue :  $e_1(T) = |w_1 - y_1(T)|$ .
- Le gain de  $C_2$  est son erreur statique absolue :  $e_2(T) = |w_2 - y_2(T)|$ .

L'objectif de chaque contrôleur est de choisir le type de régulateur qui minimise son erreur statique.

Étant donné que ce jeu implique deux joueurs, est fini, et que nous supposons qu'il est statique et à information complète, nous allons utiliser des matrices de gain de la forme suivante tout au long de notre analyse :

$$C_1 \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} C_2 \\ PI \quad PID \end{array} \\ \begin{array}{c} PI \\ PID \end{array} & \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix} \end{array} \quad (\text{III.8})$$

où :

- ✓  $a_{11}$  (respectivement  $b_{11}$ ) est l'erreur statique  $e_1(T)$  (respectivement  $e_2(T)$ ) lorsque  $C_1$  choisit *PI* et  $C_2$  choisit *PI*.

- ✓  $a_{12}$  (respectivement  $b_{12}$ ) est l'erreur statique  $e_1(T)$  (respectivement  $e_2(T)$ ) lorsque  $C_1$  choisit *PI* et  $C_2$  choisit *PID*.
- ✓  $a_{21}$  (respectivement  $b_{21}$ ) est l'erreur statique  $e_1(T)$  (respectivement  $e_2(T)$ ) lorsque  $C_1$  choisit *PID* et  $C_2$  choisit *PI*.
- ✓  $a_{22}$  (respectivement  $b_{22}$ ) est l'erreur statique  $e_1(T)$  (respectivement  $e_2(T)$ ) lorsque  $C_1$  choisit *PID* et  $C_2$  choisit *PID*.

En vertu de la définition (III.1), nous donnons à présent les conditions pour qu'une issue soit un équilibre de Nash :

- L'issue (*PI, PI*) est un équilibre de Nash si et seulement si  $a_{11} \leq a_{21}$  et  $b_{11} \leq b_{12}$ .
- L'issue (*PI, PID*) est un équilibre de Nash si et seulement si  $a_{12} \leq a_{22}$  et  $b_{12} \leq b_{11}$ .
- L'issue (*PID, PI*) est un équilibre de Nash si et seulement si  $a_{21} \leq a_{11}$  et  $b_{21} \leq b_{22}$ .
- L'issue (*PID, PID*) est un équilibre de Nash si et seulement si  $a_{22} \leq a_{12}$  et  $b_{22} \leq b_{21}$ .

### *Simulations numériques*

Pour pouvoir calculer les valeurs des erreurs statiques en fonction des choix des contrôleurs, nous avons réalisé quatre schémas-blocs sur MATLAB Simulink, correspondant aux quatre scénarios possibles des choix des contrôleurs. Pour chacun de ces scénarios, les schémas-blocs ont été configurés pour simuler le comportement dynamique du système hydraulique, prenant en compte les interactions entre les réservoirs via le canal reliant les deux réservoirs et les différentes sections des canaux de fuite. Les erreurs statiques  $e_1(T)$  et  $e_2(T)$  ont été calculées pour chaque combinaison de régulateurs afin de déterminer les gains des joueurs dans la matrice de gain.

#### ❖ *Cas 1. Système hydraulique hétérogène : $|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2| \neq \mathbf{0}$*

Dans ce cas nous considérons le système hydraulique à deux réservoirs couplés avec les valeurs des paramètres suivantes :

**Tableau III.1** : Valeurs numériques des paramètres du système hydrauliques

Paramètres	Paramètres	Valeur numérique
Section du canal de fuite de $R_1$	$b_1$	0,3
Section du canal de fuite de $R_2$	$b_2$	0,6
Constante de gravitation	$g$	$9.81m/s^2$
Section du canal reliant $R_1$ et $R_1$	$a$	0,5
hauteur initiale de fluide dans $R_1$	$y_1(0)$	0
hauteur initiale de fluide dans $R_2$	$y_2(0)$	0
Durée de simulation	$T$	100

$$D_1 = C_1 \begin{array}{cc} & C_2 \\ & \begin{array}{cc} PI & PID \end{array} \\ \begin{array}{c} PI \\ PID \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (8.892 \times 10^{-4}, 9.076 \times 10^{-4}) & (8.989 \times 10^{-4}, 9.219 \times 10^{-4}) \\ (9.365 \times 10^{-4}, 9.310 \times 10^{-4}) & (9.361 \times 10^{-4}, 9.481 \times 10^{-4}) \end{array} \right) \quad (III.9)$$

À partir de cette matrice, on peut déduire que les deux contrôleurs ont intérêt à choisir mutuellement le même type de régulateur *PI*. En termes de théorie des jeux, l'issue (*PI, PI*) est un équilibre de Nash. La meilleure réponse d'un contrôleur, quand l'autre contrôleur choisit le type de régulateur *PI*, est également de choisir le régulateur *PI* pour minimiser son erreur statique.

Les autres issues possibles du jeu ne sont pas stables, c'est-à-dire qu'elles ne constituent pas des équilibres de Nash. Par exemple, si un contrôleur choisit *PID* tandis que l'autre choisit *PI*, celui qui a choisit *PID* trouvera avantageux de changer son choix pour *PI* afin de minimiser son erreur statique. Cette dynamique explique pourquoi l'issue (*PI, PI*) est la seule issue stable et optimale pour les deux contrôleurs dans ce contexte.

❖ **Cas 2. Impact de la section de canal reliant les deux réservoirs**

Dans ce cas, nous considérons le système hydraulique avec les paramètres donnés dans le tableau 5. Nous changeons uniquement la valeur de la section du canal reliant les deux réservoirs qui prend la valeur suivante :  $a = 1$ .

La matrice  $D_2$  de gains correspondant au cas 2 est la suivante :

$$D_2 = C_1 \begin{array}{cc} & C_2 \\ & \begin{array}{cc} PI & PID \end{array} \\ \begin{array}{c} PI \\ PID \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1.642 \times 10^{-3}, 1.659 \times 10^{-3}) & (1.621 \times 10^{-3}, 1.656 \times 10^{-3}) \\ (1.670 \times 10^{-3}, 1.664 \times 10^{-3}) & (1.638 \times 10^{-3}, 1.654 \times 10^{-3}) \end{array} \right) \quad (III.10)$$

À partir de cette matrice, on peut constater que l'issue (*PI, PID*) est un équilibre de Nash. Cela signifie que si  $C_1$  choisit *PI* et  $C_2$  choisit *PID*, aucun des deux contrôleurs n'aura intérêt à changer sa stratégie.

De point de vue pratique, cela montre qu'une augmentation de la section du canal reliant les deux réservoirs (passage de  $a = 0,5$  à  $a = 1$ ) amène le contrôleur  $C_2$  du réservoir ayant le canal

de fuite avec une section plus élevée par rapport à l'autre à opter pour le régulateur *PID*. Cela s'explique par le fait que le  $C_2$  ajuste son choix en fonction de la configuration du système, cherchant ainsi à minimiser son erreur statique.

❖ *Cas 3. Système hydraulique homogène :  $|b_1 - b_2| = 0$*

Dans ce cas, nous considérons le système hydraulique avec les paramètres donnés dans le tableau 5. Nous mettons uniquement les valeurs des sections de canaux de fuites des deux réservoirs à une valeur égale :  $b_1 = b_2 = 0,6$ .

La matrice  $D_3$  de gains correspondant au cas 3 est la suivante :

$$D_3 = C_1 \begin{matrix} & & C_2 \\ & & \begin{matrix} PI & PID \end{matrix} \\ \begin{matrix} PI \\ PID \end{matrix} & \left( \begin{array}{cc} (1.360 \times 10^{-7}, 1.360 \times 10^{-7}) & (1.020 \times 10^{-2}, 1.085 \times 10^{-2}) \\ (8.812 \times 10^{-4}, 8.654 \times 10^{-4}) & (3.109 \times 10^{-15}, 3.109 \times 10^{-15}) \end{array} \right) \end{matrix} \quad (III.11)$$

A partir de  $D_3$ , on peut déduire que le jeu admet deux équilibres de Nash : (PI,PI) et (PID,PID). Cela indique que dans le cas du système hydraulique homogène, où  $b_1 = b_2 = 0,6$  les deux contrôleurs ont intérêt à choisir le même type de régulateur pour minimiser leurs erreurs statiques. L'issue (PI, PI) correspond à un équilibre de Nash où les deux contrôleurs choisissent le régulateur PI. Si l'un des contrôleurs envisage de changer pour le régulateur PID alors que l'autre reste avec PI, cela augmenterait son erreur statique, ce qui n'est pas optimal pour lui.

De même, l'issue (PID, PID) est également un équilibre de Nash, où les deux contrôleurs choisissent le régulateur PID. Changer de stratégie pour passer à PI n'apporterait pas d'avantage en termes de réduction d'erreur statique pour l'un des contrôleurs.

Ainsi, dans le contexte d'un système homogène où les caractéristiques hydrauliques des réservoirs sont égales, les deux contrôleurs trouvent avantageux de choisir le même type de régulateur, assurant ainsi un équilibre stable où aucune partie n'a intérêt à dévier de sa stratégie initiale.

❖ *Cas 4. Impact des conditions initiales du système hydraulique*

Dans ce cas, nous considérons le système hydraulique avec les paramètres donnés dans le tableau (III.1). Nous changeons uniquement les conditions initiales du système hydraulique :  $y_1(0) = 0.3$  et  $y_2(0) = 0.3$ .

La matrice  $D_4$  de gains correspondant au cas 4 est la suivante :

$$D_4 = C_1 \begin{matrix} & & C_2 \\ & & \begin{matrix} PI & PID \end{matrix} \\ \begin{matrix} PI \\ PID \end{matrix} & \left( \begin{array}{cc} (6.159 \times 10^{-4}, 6.220 \times 10^{-4}) & (5.531 \times 10^{-4}, 5.669 \times 10^{-4}) \\ (1.803 \times 10^{-3}, 1.789 \times 10^{-3}) & (6.283 \times 10^{-4}, 6.352 \times 10^{-4}) \end{array} \right) \end{matrix} \quad (III.12)$$

A partir de  $D_4$  on peut déduire que l'équilibre de Nash dans ce cas est l'issue  $(PI, PID)$ . Cela signifie que si  $C_1$  choisit  $PI$  et  $C_2$  choisit  $PID$ , aucun des deux contrôleurs n'aura intérêt à changer sa stratégie.

De manière pratique, cela montre que l'ajustement des conditions initiales du système hydraulique (passage de  $y_1(0) = y_2(0) = 0$  à  $y_1(0) = y_2(0) = 0.3$ ) influence le choix des régulateurs par les contrôleurs. Dans ce cas précis, l'erreur statique de  $C_1$  est plus faible avec  $PI$  tandis que celle de  $C_2$  est plus faible avec  $PID$ , ce qui équilibre les gains entre les deux joueurs.

### III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré plusieurs concepts de la théorie des jeux non coopératifs. Nous avons mis en lumière comment les configurations spécifiques des systèmes hydrauliques à deux réservoirs couplés influencent les choix des contrôleurs en matière de régulateurs pour minimiser les erreurs statiques. Nous avons constaté que les différences entre les réservoirs, telles que des sections de canaux de fuite hétérogènes ou homogènes, ont un impact significatif sur les stratégies adoptées par les contrôleurs. En outre, nous avons montré que la section du canal reliant les deux réservoirs ainsi que les conditions initiales du système hydraulique jouent un rôle crucial dans le choix des types de régulateurs par les contrôles.

## Conclusion générale

Dans ce projet, nous avons entrepris une démarche complète englobant la modélisation détaillée, la simulation en boucle ouverte, ainsi que l'implémentation et l'évaluation des performances des régulateurs PI et PID sur un système hydraulique complexe, caractérisé par l'interaction dynamique entre deux réservoirs couplés.

Sur le plan de la formation en automatique, ce projet nous a confrontés à une tâche essentielle pour tout ingénieur en automatique et systèmes : mener une recherche bibliographique approfondie sur les techniques de modélisation des systèmes hydrauliques. Parallèlement, nous avons mis en pratique nos connaissances théoriques en contrôle et commande des systèmes en utilisant MATLAB Simulink pour implémenter les régulateurs PI et PID. Cette expérience a renforcé notre compréhension concrète des défis et des solutions liées à la régulation automatique d'un système hydraulique à deux réservoirs couplés.

Dans cette même optique, l'analyse des résultats obtenus a généré une réflexion approfondie sur les méthodes d'évaluation de l'efficacité des solutions proposées. Nous avons exploré les concepts de la théorie des jeux, en appliquant ses outils pour déterminer quels régulateurs choisir afin d'assurer une solution stable et performante, tout en minimisant l'erreur statique.

Ce projet a ouvert de nouvelles perspectives de recherche et de développement dans le domaine de l'automatique. Certaines pistes se révèlent particulièrement prometteuses :

- En matière de modélisation, enrichir le système hydraulique en intégrant d'autres composants tels que des réservoirs supplémentaires, des valves pour contrôler les canaux de fuite et les connexions entre les réservoirs, ainsi que d'autres sources d'alimentation, pourrait généraliser les résultats obtenus et étendre l'applicabilité des solutions développées.
- En matière de régulation, il est pertinent d'explorer d'autres types de régulateurs, comme les régulateurs avancés basés sur des algorithmes plus complexes tels que les régulateurs flous ou adaptatifs. Ces approches pourraient offrir des performances améliorées pour des systèmes aussi complexes.
- En appliquant la théorie des jeux dans ce contexte complexe, nous avons pu tirer des enseignements précieux sur la manière dont les décisions individuelles de régulation peuvent être coordonnées ou différenciées pour maximiser l'utilité des joueurs. Ce travail pourrait être étendu à d'autres systèmes dynamiques où l'interaction entre les composants joue un rôle crucial.



## Bibliographie

- [1] A.BESANÇON-VODA. S. GENTIL. « Régulateurs PID analogiques et numériques ». Techniques de l'Ingénieur [R 7416].
- [2] AMIEUR TOUFIK, (2009), mémoire de fin d'étude : Commande des Systèmes Non Linéaires par Mode Glissant Flou.
- [3] BELOUFA NAÏMA et ARDJANI IKRAM. (2020). « Modélisation d'un contrôleur PI-PSO pour la régulation de la vitesse d'un moteur asynchrone ». Mémoire de Fin d'Etudes, ELECTROTECHNIQUE Saïda.
- [4] BENCHABANE. (2020). Cours Actionneur : Systèmes pneumatiques et hydrauliques.
- [5] G. Bastin. (2013). Modélisation et analyse des systèmes dynamiques.
- [6] GUILHEM MOLLON. (2012-2013). Hydraulique des terrains séance 4 : Formule de Bernoulli. Polytech Grenoble.
- [7] KENNAT MOHAMMED et BRAHMIA OUSSAMA. (2021-2022), dirigé par Mr. BOUDJEHEM Badr Eddine. Mémoire de fin d'étude : Modélisation et commande d'un système hydraulique à trois réservoirs. Université 8 Mai 1945. Guelma.
- [8] KERMICHE ABDELHAMMID. (2013/2014). Dirigé par Mr. BOUGUERRA ABDERRAHMEN Mémoire de fin d'étude : commande non-linéaires d'un système hydraulique CE105à réservoirs couplés.
- [9] Khan Academy. Fluid Dynamics : Qu'est-ce que l'équation de Bernoulli. <https://fr.khanacademy.org/science/physics/fluids/fluid-dynamics/a/what-is-bernoullis-equation>.
- [10] KHEMICI SOUAD et BOUTORA BASMA. (2017). Dirigé par GASRI AHLEM. Mémoire de fin d'étude : Systèmes dynamiques et Chaos. Université de Larbi Tébessa. Tébessa.
- [11] Lewebpedagogique. (2018). Leçon10. Lois chimiques.
- [12] LUC JAULIN .2005. « Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes ». Hermès-Lavoisier.
- [13] MOKRANI HOUSSAM et BOULOUDNINE WAIL. (2019), dirigé par LABIOD SALIM Mémoire de fin d'étude : Sur la commande d'un système hydraulique à deux réservoirs couplés. Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel.
- [14] NAIT MOHAND NACIM. (2017). Thèse de doctorat : Qualité des aliments, formation des prix et disponibilité de l'offre. Une approche par la théorie des jeux. Université de Bejaia, Algérie.
- [15] Objets scientifiques. (9.02.2024). loi de conservation de la masse.
- [16] Technologue pro. (2010). Etude des systèmes hydrauliques : Généralités sur l'hydraulique.<https://www.technologuepro.com/Mecanique/Etude-des-systemes-hydrauliques/1-Generalites-sur-hydraulique.pdf>.

- [17] Technologue pro. (2010). Etude des systèmes hydrauliques : hydraulique industriel. <https://www.technologuepro.com/Mecanique/Etude-des-systemes-hydrauliques/2-Hydraulique-Industriel.pdf>.
- [18] ZERROUT AMAR. (2016-2017). Cours de systèmes hydrauliques et pneumatiques (UED 3.1). Université Hassiba Ben Bouali, Chlef.
- [19] Moussa Yaser. (2020, Décembre 14). Chapitre 3 Les Régulateurs Standards P, I, D, PI, PD Et PID. Scribd. <https://fr.scribd.com/document/214851583/Chapitre-3-Les-Regulateurs-Standards-P-I-D-PI-PD-Et-PID>.
- [20] Wikipedia. Théorème de Bernoulli (consulté le 15/05/2024) [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Bernoulli](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Bernoulli)

## Résumé

Dans ce projet, nous avons examiné l'implémentation des régulateurs PI et PID sur un système hydraulique complexe composé de deux réservoirs couplés. Après une description détaillée du système, nous l'avons modélisé en utilisant les lois : de Bernoulli et de conservation de masse, puis nous avons simulé le système en boucle ouverte. Pour mettre en œuvre les commandes PI et PID, nous avons d'abord réalisé une linéarisation des équations d'état du système par bouclage, suivie d'une comparaison des résultats obtenus. Enfin, nous avons appliqué la théorie des jeux non coopératifs pour analyser l'efficacité stratégique des choix de régulateurs par deux individus. Les résultats ont démontré que les régulateurs PI et PID offrent de bonnes performances dans la gestion dynamique du système hydraulique. En appliquant la théorie des jeux, nous avons pu identifier des stratégies d'équilibre de Nash pour le choix des régulateurs, garantissant des résultats stables et minimisant l'erreur statique.

**Mots clés :** système hydraulique, PI, PID, théorie des jeux.

## Abstract

In this Project, we investigated the implementation of PI and PID controllers on a complex hydraulic system consisting of two coupled reservoirs. Following a detailed description of the system, we modeled it using Bernoulli's equation and the principle of mass conservation. We then performed an open-loop simulation. To implement PI and PID controls, we first linearized the system's state equations through feedback. Subsequently, we compared the obtained results from both controllers. Finally, we applied non-cooperative game theory to analyze the strategic effectiveness of the controller choices made by two individuals. The results demonstrated that both PI and PID controllers offer good performance in dynamically managing the hydraulic system. By applying game theory, we were able to identify Nash equilibrium strategies for controller selection, ensuring stable results and minimizing steady-state error.

**Keywords:** hydraulic system, PI, PID, game theory.

## ملخص

في هذا المشروع، قمنا بفحص تنفيذ وحدات التحكم PI و PID على نظام هيدروليكي معقد يتكون من خزانين مقترنين. بعد وصف تفصيلي للنظام، قمنا بتصميمه باستخدام قانون برنولي وحفظ الكتلة، ثم قمنا بمحاكاة النظام في حلقة مفتوحة. لتنفيذ أوامر PI و PID، قمنا أولاً بإجراء عملية خطية لمعادلات حالة النظام عن طريق التكرار، متبوعة بمقارنة النتائج التي تم الحصول عليها. وأخيراً، قمنا بتطبيق نظرية اللعبة غير التعاونية لتحليل الفعالية الاستراتيجية لاختيارات المنظمين من قبل شخصين. أظهرت النتائج أن منظمات PI و PID تقدم أداءً جيداً في الإدارة الديناميكية للنظام الهيدروليكي. ومن خلال تطبيق نظرية اللعبة، تمكنا من تحديد استراتيجيات توازن ناش لاختيار المنظمين، مما يضمن نتائج مستقرة ويقلل من الخطأ الثابت.

**الكلمات المفتاحية:** النظام الهيدروليكي، PI، PID، نظرية الألعاب.