

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa



Faculté des Sciences Exactes

Département physique

Mémoire de Master

Option: Dynamique des fluides et énergétique

Thème :

Etude de l'impact de l'aspiration pariétale sur la stabilité d'un écoulement à surface libre de deux couches de fluides immiscibles.

Présenté par :

IZEGHLOUCHE Adem

AREZKI Walid

Soutenu devant les jurys composés de :

Présidente PrMEHIDI Nadia U. A/Mira Béjaïa

Examinatrice

Dr DJESSASS Houria U. A/Mira Béjaïa

Encadrant

Dr DJEMA Amar

U. A/Mira Béjaïa

Promotion 2023/2024

Remerciement

Nombreux ce qu'on souhaitera remercier pour nous avoir idées, soutenues ou accompagnés durant ces quatre mois de recherche. C'est pour leurs montrés tout notre gratitude qu'on leurs dédié ce passage.

Nous souhaiterons adresser nos sincères remerciement a notre encadrent de mémoire monsieur Amar Djema, doctorant à l'université Abderrahmane Mira de Bejaia TARGA OUZEMOUR, qui nous a encadré ce mémoire. Tout au long de ces quatre mois, il a su nous guider, orienté notre recherche au bon moment, nous encourager avec son énergie et sa patience, et nous faire bénéficier de ces connaissances dans le domaine de la mécanique des fluides et énergétique en générale.

On tient à remercier aussi la présidente des jurys madame MEHIDI Nadia, pour avoir acceptée présidée la commission de la soutenance. Merci également à madame DJESSASSE pour avoir acceptés de juger ce travail et se présenté comme membres de jury.

On tient à remercier au final tous les profs qu'ils nous ont enseignés durant notre cursus et en particulier ceux qui nous ont pris en charges dans les deux dernières années pour l'intérêt qu'ils ont apportés à notre travaille car avec les connaissance qu'on a acquérir chez eux, on a pu approfondir et enrichir les problématiques abordé au cours de ce mémoire, dont on peut citer dans un premier lieu, Madame Nawel AMATOUSSE, elle a contribué de manière direct dans ce travail car grasse a son encadrement, elle nous a assurer une bonne formation en ce qui concerne la Mécanique des fluides, on tient à citer aussi la contribution de Madame MEHIDI Nadia et Monsieur Amar Djema, ils nous ont transmis un taux de connaissance considérable et pas mal d'informations qu'on a bien saisie durant les séances de cours théoriques et pratiques effectuées. et merci à tout personne qui a contribuer en générale soit de près ou de loin dans le processus réaliser.

Dédicaces

Je dédier ce travail :

A mes chers parents, mon père et ma mère qui m'ont soutenue durant mes études, qui m'ont offert toutes les moyennes possibles afin de faciliter ma vie et m'assuré un climat idéal pour réaliser un rendement meilleur durant mon cursus, pour leurs bienveillances, leurs affections et leur éternelle amour. Que dieux leur procure bonne santé et une longue vie.

A mon frère AIMED pour son soutien tout au long de ce projet de recherche et sa disponibilité à chaque fois que j'aurais besoin de l'aide. Que dieu te protège ! Je vous souhaite que de bonheur et de la réussite dans ton parcours professionnel.

A mes chers amis, mes cousins mes cousines, mon grand-père, ma grand-mère, mes oncles, à mes vrais voisins et à tout ce qu'ils ont contribué de prêt ou de loin pour que cette recherche soit réalisée, merci à vous tous infiniment.

IZEGHLOUCHE Adem

Je dédier ce travail :

Je dédier ce travail à mes chers parents, qu'ils ont été toujours présent à mes cotes

A mes frères qui mon soutenue tout au long de la réalisation de cette recherche.

A mon collègue et ami Adem IZEGHLOUCHE qui m'a toujours aidé jusqu'à ce jour

A mon cousin Nabil évidemment qui m'a toujours soutenue.

Merci à vous tous infiniment

Arezki Walid

SOMMAIRE

Introduction générale	01
Chapitre 1 : Etude bibliographique	04
1.1 Cas d'une seule couche de fluide newtonien (sans contrôle)	04
1.2 Cas de deux couches de fluides newtonien confinés entre deux plans (sans contrôle)	07
1.3 Cas de deux couches de fluides newtonien avec une surface libre (sans contrôle)	08
1.4 Cas d'une couche de fluides newtonien avec une surface libre avec contrôle	15
1.5 Cas de deux couches de fluide newtonien avec contrôle	16
Chapitre 2 : Formulation du problème	17
2.1 Description du problème	17
2.2 Les équations gouvernantes	18
2.3 Conditions aux limites	19
2.4 Ecoulement de base	23
Chapitre 3 : Analyse de la stabilité linéaire	28
3.1 Équations adimensionnées	28
3.2 Linéarisations par rapport à l'écoulement de base	30
3.3 Systèmes d'équations Orr-Sommerfeld	31
Chapitre 4 : Résolution du problème aux valeurs propres	34
4.1 Résolution numérique	34
4.2 Courbes de stabilité marginale	37
Conclusion générale	41

Listes des Tableaux

Tableau 2.1 : Les propriétés physiques de l'eau et du benzène .	26
--	-----------

Listes des Figures

Figure 1.1 : Yih (1963). Courbes neutres.	5
Figure 1.2 : Floryan (1987). Courbes neutres.	6
Figure 1.3 : Hooper et Boyd (1987). Courbes neutres.	8
Figure 1.4 : schéma uniformisé de la configuration.	9
Figure 1.5 : Kao (1968), seuil de stabilité pour un rapport de densité $\gamma=0.9$.	10
Figure 1.6 : Kao (1968), seuil de stabilité pour un rapport de densité $\gamma=0.1$.	10
Figure 1.7 : Loewenherz et Lawrence (1989). Les deux instabilités de mode interface.	12
Figure 1.8 : Chen (1993). Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d'épaisseurs δ et de tension d'interface dans le cas d'une couche inférieure moins visqueuse. Zones stables (s) et instables (u) en fonction de nombre de Reynolds Re et de nombre d'onde α , pour $m=2.5$, $\gamma=1$ et $\theta=0.2$.	13
Figure 1.9 : Chen (1993). Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d'épaisseurs δ et de tension d'interface dans le cas d'une couche inférieure moins visqueuse. Zones stables (s) et instables (u) en fonction de nombre de Reynolds Re et de nombre d'onde α , pour $m=0.4$, $\gamma=1$ et $\theta=0.2$.	14
Figure 2.1 : schématisation de problème.	18
Figure 2.2 : schématisation de l'écoulement de base.	23
Figure 2.3 : écoulement de base : lignes continues pour le liquide inférieure et les lignes pointillés pour le liquide supérieure avec différentes épaisseurs avec un angle d'inclinaison $\pi/2$.	26
Figure 2.4 : écoulement de base : lignes continues pour le liquide inférieure et les lignes pointillés pour le liquide supérieur avec différentes épaisseurs avec un angle d'inclinaison $\pi/18$.	27
Figure 4.1 : Courbe de stabilité marginale dans le plan (Re, k) pour : $\beta = \pi/2$, $\gamma = 0.1$, $\tilde{H} = 2/3$, $\rho = 0.9$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.9$, $we = 50$.	38
Figure 4.2 : Effet de la variation du paramètre de contrôle γ sur les courbes de stabilité marginale pour : $\beta = \pi/2$, $\tilde{H} = 2/3$, $\rho = 0.9$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.9$, $we = 50$.	39

Listes des Symboles

Symboles	Définitions
x, y et t	Coordonnées de l'espace et du temps
g	Champs gravitationnel
V_i	Champs de vitesse
u, v	Composantes de Champs de vitesse
p	Pression
p_a	Pression atmosphérique
n	Vecteur normale à la surface libre
D	Tenseur de déformation
k	Rayon de courbure
k	Nombre d'onde
$h_1(x, t)$	Interface fluide1, fluide2
$h_2(x, t)$	Surface libre
β	L'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale
σ_i	Tension superficielle
τ	Tenseur des contraintes visqueuses
μ_1, μ_2	La viscosité dynamique de fluide1 et de fluide2
$div, grad$	Opérateur divergence et gradient
ρ_1, ρ_2	Masse volumique de fluide1 et fluide2
H_1	Épaisseur de fluide 1
H_2	Épaisseur de fluide 2
ω	Pulsation propre
c	Vitesse de phase $c = c_r + ic_i$
c_r	Vitesse de propagation d'une perturbation
c_i	Amortissement de la perturbation
Ψ	Fonction de courant des fluides
ϕ	Amplitudes complexes
ω_r	$c_r = \frac{\omega_r}{k}$
ω_i	Taux d'amortissement

Introduction générale

L'étude de l'aspiration pariétale sur la stabilité des écoulements de fluides newtoniens immiscibles sur un plan incliné est un domaine de recherche fondamental en mécanique des fluides. L'aspiration pariétale, est un phénomène physique complexe, se réfère à l'adhésion des particules fluides à une surface solide en mouvement, influençant ainsi la dynamique des écoulements, notamment leur stabilité et leur comportement global.

En 1995, la NASA a réalisé une expérience emblématique en faisant voler son F-16XL, un avion de recherche, à des vitesses élevées près d'une surface plane. Cette expérience a démontré de manière remarquable l'effet d'aspiration pariétale. Lorsque l'avion se déplaçait à grande vitesse près du sol, l'air autour de lui était aspiré vers la surface, créant une zone de basse pression qui affectait significativement la stabilité de l'écoulement d'air. Cet exemple met en évidence l'importance de l'aspiration pariétale même dans des contextes aérodynamiques complexes, soulignant son impact sur la dynamique des fluides.

Avant d'aborder spécifiquement l'aspiration pariétale sur un écoulement de fluides newtoniens immiscibles sur un plan incliné, des travaux préliminaires ont été menés dans différents domaines. Des recherches antérieures se sont concentrées sur les caractéristiques d'écoulement d'un seul fluide newtonien sur un plan incliné, avec et sans conditions de contrôle. Ces études ont jeté les bases de notre compréhension des écoulements sur des surfaces inclinées et ont mis en lumière l'influence de facteurs tels que l'angle d'inclinaison sur la stabilité de l'écoulement.

Plus récemment, l'attention s'est portée sur l'étude des écoulements impliquant deux couches de films minces de fluides newtoniens immiscibles sur un plan incliné, mais sans contrôle. Cette orientation de recherche vise à analyser les interactions complexes entre les deux fluides, ainsi que l'impact de l'aspiration pariétale sur la stabilité de l'écoulement et la formation éventuelle de structures des films minces.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons spécifiquement à l'étude de l'écoulement de deux fluides newtoniens visqueux incompressible immiscibles sur un plan incliné, avec une condition de contrôle imposée. L'objectif de cette recherche est d'analyser comment cette condition de contrôle affecte la dynamique de l'écoulement et les propriétés des fluides (e-ce-que cette dernière stabilise ou déstabilise l'écoulement ?), ainsi que d'explorer les applications potentielles de cette technique dans divers domaines de l'ingénierie et d'industries (quand e-ce-que on peut rencontrer ce phénomène ? ou autrement dit les domaines d'application de ce phénomènes).

Introduction générale

Dans un premier temps, nous présenterons d'abord les principaux concepts et phénomènes liés à l'écoulement de fluides immiscibles sur un plan incliné, en mettant en évidence les aspects pertinents pour notre étude. Ensuite, nous discuterons de la notion de condition de contrôle dans la manipulation de l'écoulement des fluides (exposer sa formule ainsi expliquer le modèle de choix). Enfin, nous présenterons les objectifs et la structure de notre recherche, ainsi que les implications potentielles de nos résultats (que ce que on déduit comme résultats de la stabilité linéaire et l'interprétation des courbes obtenue).

Cette étude vise à contribuer à une meilleure compréhension des phénomènes d'écoulement de deux couches de fluides newtoniens visqueux incompressibles immiscibles sur un plan incliné, ainsi qu'à explorer de nouvelles possibilités de contrôle et de manipulation de ces écoulements pour des applications pratiques.

Le présent mémoire est constitué de quatre chapitres. Ce travail de recherche vise à approfondir notre compréhension des phénomènes d'écoulement et de stabilité dans ce contexte spécifique, ainsi qu'à explorer les possibilités de manipulation de l'écoulement à des fins d'applications pratiques.

Dans Ce manuscrit, le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique qui présente un examen approfondi des travaux réalisés par des chercheurs dans ce domaine, mettant en lumière les avancées récentes et les lacunes potentielles dans la compréhension de ce phénomène complexe.

Le deuxième chapitre aborde la problématique de manière plus détaillée, en fournissant un schéma descriptif de l'écoulement, les équations qui gouvernent le mouvement et leur projection, ainsi qu'une analyse de l'écoulement de base à travers des courbes descriptives.

Le troisième chapitre se concentre sur l'adimensionnement et la linéarisation des équations, en détaillant les échelles utilisées, leur projection dans les équations de mouvement, ainsi que la linéarisation des équations pour faciliter l'analyse.

Enfin, le quatrième chapitre présente les résultats de la stabilité linéaire, en examinant les grandes ondes, à l'aide d'une méthode de résolution numérique pour illustrer les courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs du paramètre de contrôle. Cette dernière combine la technique de Riccati et le schéma numérique de Runge-Kutta d'ordre quatre.

Cette étude contribue ainsi à enrichir le corpus de connaissances sur l'écoulement de deux fluides newtoniens visqueux incompressible immiscibles sur un plan incliné, en explorant les implications de l'aspiration pariétale sur la stabilité de cet écoulement, offrant

Introduction générale

ainsi de nouvelles perspectives pour son contrôle et son optimisation dans divers contextes d'applications.

Etude bibliographique

Chapitre 01 :Etude bibliographique

Cette partie consiste à relater les différents avancés de recherches dans le domaine des instabilités hydrodynamiques on particulier l'écoulement de films minces sur un plan incliné.

Nous considérons tout d'abord le cas d'une seule couche de fluide puis le cas de deux couches et on termine par donner un petit aperçu sur l'objectif de notre travail.

D'un point de vue expérimentale, Kapitza (1949)[1],il a commencé l'étude de ce type de travaux, il a observé à travers son expérience qu'une excitation de haute fréquence et de faible amplitude engendre un train d'ondes quasi-sinusoïdale alors que les pulsations de haute fréquence et d'amplitude relativement importante produisent des ondes solitaires dont le front est plus rapide que l'amont.

La mise en évidence de caractère évolutif des propriétés fondamentaux de l'onde était permit grâce aux expériences récentes qui sont plus élaborées, liu et Gollub 1994[2].la tendance à l'établissement d'un état chaotique de plusieurs paramètres, comme le Reynolds R , le weber W , ainsi l'angle d'inclinaison de plan de mouvement. Quand le Reynolds est très grand, des instabilités transversales sont observé et peuvent devenir significatives.

L'étude analytique de problème était réalisée pour la première fois par les travaux de yih (1963) [3]et benjamin (1957) [4]. Le contenu de ce passage sera introduit dans la section suivante ainsi les autres travaux de recherche effectuer qui s'articule autour du thème sera illustré dans les prochains titres.

1.1 Cas d'une seule couche de fluide newtonien(sans contrôle)

La première étude est effectuée par benjamin (1957) [4]et yih (1963)[3], dont l'inertie de fluide joue un rôle important dans cette instabilité.

Le rapporte entre les forces d'inerties et les forces de viscosités est exprimer par le Reynolds (Re) :

$$Re = \rho U_0 h / \mu$$

ρ : Masse volumique de fluide exprimé en kg/m^3

U_0 : Vitesse de fluide à la surface libre exprimé en m/s

μ : Viscosité de fluide exprimé en $kg.m^{-1}.s^{-1}$

Benjamin et **yih** ont démontrés que les instabilités se produisent uniquement lorsque le : $Re \neq 0$ et ils ont défini un seuil critique d'instabilité de surface, qui dépend uniquement de l'angle d'inclinaison du plan :

$$Re_c = 5 / 6 \cot \beta$$

Etude bibliographique

Ils ont aussi montré que ces instabilités se propagent à une vitesse deux fois à celle de l'écoulement de base du fluide a surface libre.

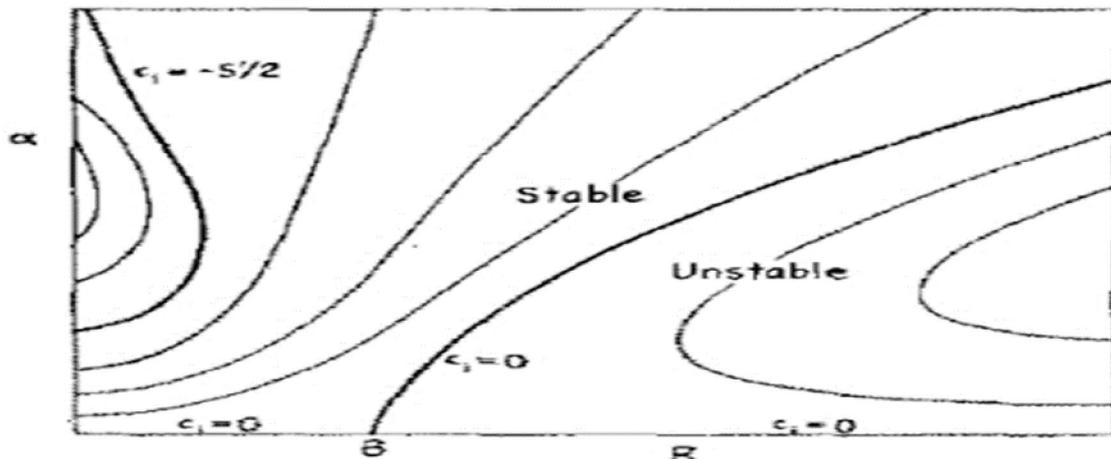


Figure 1.1 Yih (1963) [3]-Courbes neutres.

En gros on comprend à travers leurs recherches quand d'inertie est absente, l'écoulement de fluide devient stable pour des perturbations de longueur d'onde infinie.

La figure suivante est obtenue par yih en (1963)[3]appelé courbe neutre. Elle délimite les zones de stabilités en fonction de nombre de Reynolds et de nombre d'onde α avec une tension superficielle nulle et un angle d'inclinaison $\theta < \pi/2$

Noter bien que : C_i représente le taux d'amplification des ondes

Kelly (1989) et al [5] :

Ont effectuer une analyse énergétique sou-adjacent aux instabilités de surface.

Ils ont déduit que le principal terme de production de l'énergie est lié au travail des forces de cisaillement agissant sur la surface libre déformé, de plus ils ont souligné l'importance de déplacement de la surface libre dans la stabilité de l'écoulement.

Lorsque le saut de vorticité renforce se déplacement, desinstabilités se développent, sinon l'écoulement est stable.

Smith (1990) [6] :

Il a expliqué comment les perturbations à surface libre génèrent un mouvement secondaire dans la couche fluide, amplifiant ou non les perturbations de l'interface selon l'équilibre entre l'inertie et le gradient de pression.

Ses résultats rejoignent ceux de yih 1963 [3] concernant le nombre de Reynolds critique et la célérité des instabilités.

Etude bibliographique

De bruin (1974) [7] et Floryan et al (1987) [8] :

A faible angle d'inclinaison et de grand nombre de Reynolds, ils ont montré l'émergence d'un autre type d'instabilité.

Floryan et al [8] ont mis en évidence l'effet stabilisateur de la tension de surface et de l'augmentation de l'inclinaison sur ces modes de cisaillement.

La figure suivante est obtenue par Floryan1987[8], elle décrit la courbe neutre. Elle délimite les zones de stabilité en fonction de Reynolds et de nombre d'onde K pour un angle d'inclinaison $\theta = 0.5'$ et différentes nombre ζ quantifiant la tension de surface.

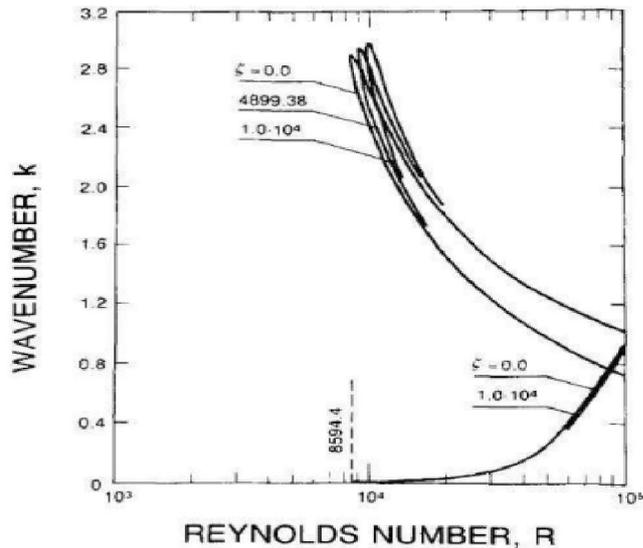


Figure 1.2. Floryan 1987[8]. Courbe neutre

Noter bien :

Les instabilités ne peuvent apparaître au sein de l'écoulement de fluide newtonien sur un plan incliné qu'en présence de l'inertie. $Re \neq 0$

Etude bibliographique

1.2 Cas de deux couches de fluides newtonien confinés entre deux plans (sans contrôle) :

Les facteurs à qui on s'intéresse on ce qui concerne ce type d'écoulement sont : les rapports de viscosité, densités et d'épaisseur des couches car, c'est eux qu'il intervient lorsque on étudie la stabilité du système.

Yih (1967)[3] :

Il a étudié le cas de deux fluides stratifier en viscosité confiné entre deux parois planes, a petit nombre de Reynolds dans le cas de l'écoulement de poiseuille et de couette.

Son étude consiste à faire une approche asymptotique aux grandes longueurs d'ondes.

Pour deux fluides de même densité, il a montré que lorsque la couche inférieure est la plus visqueuse que la couche supérieure, cette stratification en viscosité a un effet déstabilisant sur l'écoulement.

Il a identifié des instabilités pour certaines combinaisons de rapport de viscosité et d'épaisseurs de couches, avec des taux de croissance proportionnel au nombre de Reynolds.

Il a déduit donc que la limite de la stabilité neutre est atteinte pour le nombre de Reynolds Re tend vers 0, et montre aussi l'importance de l'existence de l'inertie pour déclenchés les instabilités.

Craik et Smith (1968) [9] :

Ils ont réalisés des écoulements pour lesquels la viscosité varie de façon continue en fonction de profondeur en s'appuyant aussi sur l'approche aux grandes longueurs d'ondes.

Ils ont identifié un mode instable dont le taux de croissance est proche de zéro lorsque le Re diminue ce qui valide les résultats obtenus par yih (1967)[3].

Hopper et Boyd (1987) [10] :

Ont travailler sur l'écoulement de couette de deux fluides stratifier de viscosité différente ou la couche supérieure à une épaisseur infinie.

Ils ont démontré que les modes de cisaillement sont stables ainsi que les instabilités apparaissent au niveau de l'interface fluide1/fluide2.

Dans le cas où la couche inférieure est plus visqueuse, ils tombent sur les instabilités de type (yih 1967) [3] avec une grande longueur d'onde et un taux de croissance proportionnelle a (1-m)

Avec :

m : rapport de viscosité entre la couche supérieure et la couche inférieure.

Etude bibliographique

Ce cas est donc toujours instable dans la configuration proposée.

Par contre, quand la viscosité de la couche inférieure est plus faible que celle de la couche infinie, cette configuration s'est révélée toujours instable tout en conservant la propriété selon laquelle le taux de croissance est proportionnel au nombre de Reynolds quand il tend vers zéro. Ces instabilités ont des longueurs d'ondes finies.

La figure suivante illustre la courbe neutre dans ce cas.

La fine couche moins visqueuse est nommée (couche lubrifiante) et son effet (effet de la couche fine).

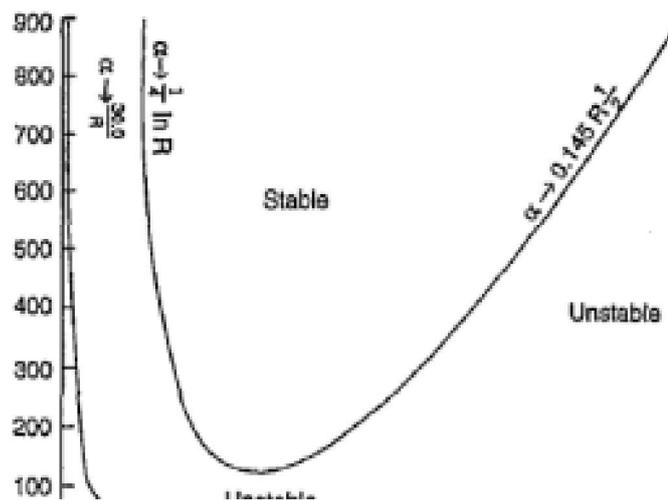


Figure 1.3. Hopper et Boyd (1987) [10] - Courbes neutres

Les instabilités se développent à bas nombre de Reynolds et en l'absence de tension de surface à partir de moment où il y a stratification en viscosité, quel que soit sa direction.

En présence de la tension superficielle et à faible nombre de Reynolds de l'écoulement peut être stable pour toutes les longueurs d'ondes.

L'apparition de cette instabilité est conditionnée par la présence d'inertie.

1.3 Cas de deux couches de fluides newtonien avec une surface libre (sans contrôle)

On va aborder cette étude par une illustration de la configuration de problème.

Etude bibliographique

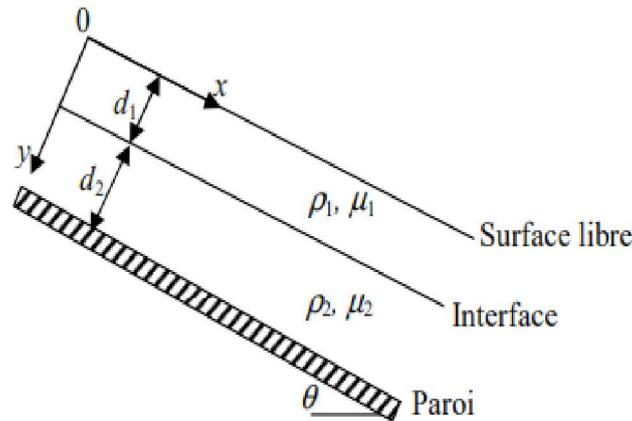


Figure 1.4. Schéma uniformisé de la configuration

$$\delta = D = \frac{d_1}{d_2} \rightarrow \text{représente le rapport d'épaisseur des couches noté } \delta$$

$$\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2} \rightarrow \text{représente le rapport des masses volumiques noté } \gamma$$

$$m = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \text{représente le rapport des viscosités dynamique noté } m$$

Le nombre de Reynolds est constitué avec les propriétés de la couche adjacente à la paroi ρ_2, μ_2, d_2 et une vitesse de référence noté U_R qui change selon les études

$$Re = \rho_2 U_R d_2 / \mu_2$$

Kao (1965) [11] et (1968) [12] :

C'est le premier qui a intéressé à l'effet d'une stratification discontinue de la viscosité sur la stabilité d'un écoulement de couche de fluide newtonien immiscible avec une surface libre. Il a négligé la tension de surface σ . la vitesse de référence noté U_R pour la construction de Reynolds Re est la vitesse moyenne sur l'épaisseur totale. il a établie pour les systèmes multicouches a surface libre composé de fluides de propriétés physiques différentes (ρ, μ), le nombre de modes pouvant être instable est égale au nombre d'interfaces de système.

A deux couches, il y'a un mode dit d'interface localisé entre les couches est un mode dit de surface sur la surface libre.

Il a fait l'étude d'un écoulement a deux couches donc, de deux modes dans le cas particulier a longueurs d'ondes infiniment grands (comme yih 1963) et il a suivie leurs interactions.

Pour ce type d'écoulement, il montré que les modes de cisaillement sont amorties et que la stabilité est déterminée par les ondes de surfaces.

Etude bibliographique

Concernant les modes de surface et d'interface qui se manifeste au premier, dépend des paramètres de l'écoulement (rapport d'épaisseur δ , densité γ , viscosité m) entre les couches

Il a déduit aux finales qu'il y'a compétition entre les modes pour le déclenchement des instabilités.

Pour spécifier le rôle de chacun des modes sur la stabilité globale de l'écoulement, il a tracés courbes neutres de stabilité des deux modes en fonction des rapports de viscosité m et d'épaisseurs δ entre les couches pour rapport de densité γ différentes.

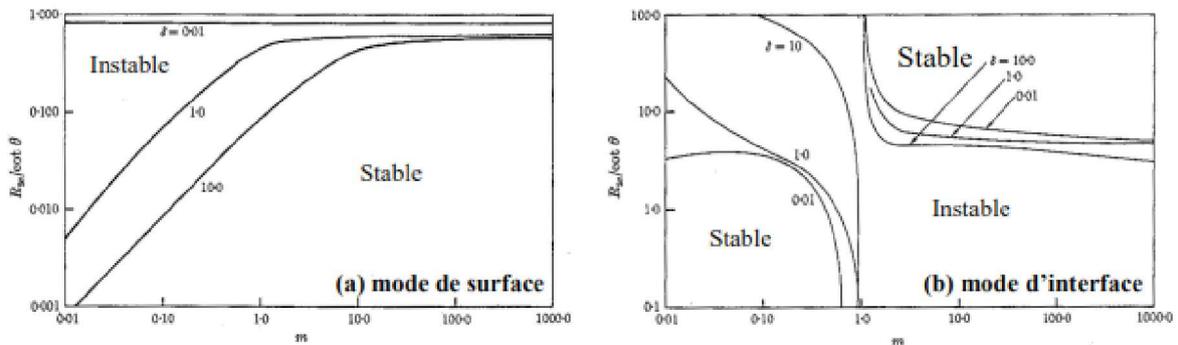


Figure 1.5. Kao (1968) [12]- Seuils de stabilité pour un rapport de densités $\gamma = 0.9$.

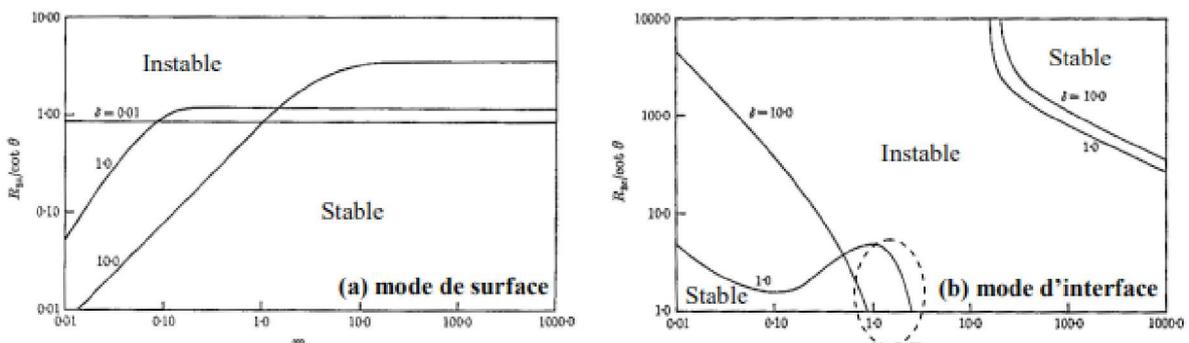


Figure 1.6. Kao (1968) [12]- Seuils de stabilité pour un rapport de densités $\gamma = 0.1$.

Re_c est en fonction de rapport de viscosité m , et de rapport d'épaisseur δ .

D'après les courbes neutres obtenue, il a constaté que :

Quand $m < 1$, c'est à dire, la couche inferieure est la plus visqueuse, le seconde mode (interface) est stabilisé, et en parallèle, le premier mode est déstabilisé.

Etude bibliographique

Dans ce cas, le premier mode (surface libre) est critique pour le déclenchement d'instabilité. En revanche pour $m > 1$, le second mode (interface) est toujours instable alors que le premier mode (surface libre) a un seuil de déclenchement $Re_c / \cot\theta$ de l'ordre de 1.

La seule exception qu'il a notée à ces conclusions est celle de déclenchement de mode de surface pour m faiblement supérieure à 1, δ de l'ordre de 1 et $\gamma = 0.1$.

Cette zone est illustrée sur la figure **Fig6b** est entouré en pointillés.

Noter bien que ces résultats ne sont valables que pour des perturbations de grandes longueurs d'ondes.

Loewenherz et Lawrence 1989 [13] :

Ils ont étudié la déformation des glaciers rocheux. Ils confirment dans leurs études que dans les écoulements de films minces à deux couches superposées avec une surface libre, l'inertie n'est pas nécessaire pour le déclenchement des instabilités de surface.

Ils ont étudié un système à deux couches ayant une même densité ($\gamma=1$) mais de viscosité différentes ($m \neq 1$) et de tension de surface négligeable ($\sigma \approx 0$).

Leur nombre de Reynolds Re s'appuie sur la vitesse moyenne dans la couche inférieure.

Dans le départ, ils ont observé à la surface supérieure des glaciers, dont la vitesse de déplacement est très faible, d'une périodicité de relief qui suggère l'apparition de phénomène d'instabilité. Ils ont estimé que les nombres de Reynolds dans ce type d'écoulement sont de l'ordre 10^{-18} .

Dans le cas où la couche de fond a une viscosité plus faible que celle de la couche en surface, ils font l'approximation $Re=0$ et ils ont identifié des instabilités qui se créent au niveau des interfaces dans chaque couche.

Dans la configuration inverse, lorsque la couche supérieure est la moins visqueuse, ces instabilités ne sont pas observables et comme le mode de surface est stable (c'est à dire, le premier mode dans la limite de Reynolds Re tend vers 0), ce système est donc globalement stable.

Noter bien, qu'ils ont remis en cause l'hypothèse qui consiste à ne considérer que les instabilités de grandes longueurs d'ondes, donc ils ont réalisé leurs études à une large gamme de longueur d'onde.

Etude bibliographique

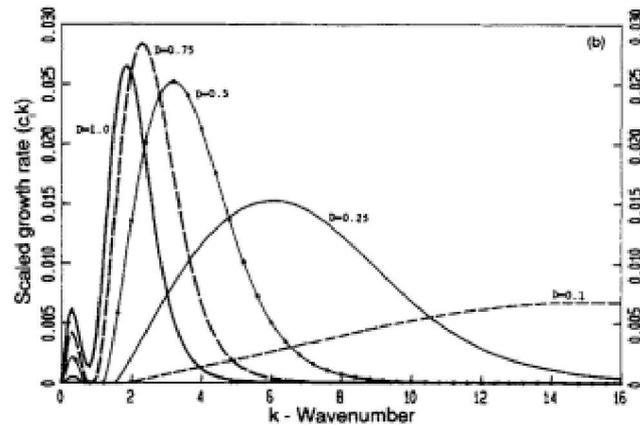


Figure 1.7. Loewenherz et Lawrence (1989)[13]– Les deux instabilités du mode d’interface.

D’après, la figure 7, on constate qu’il y’a deux pics de taux de croissance en fonction du nombre d’onde.

→ Le premier Pic : est à faible nombre d’onde et correspond donc aux instabilités à grandes longueurs d’ondes observé par (1968).

Noter bien que le nombre d’onde correspondant à ce pic ne varie pas en fonction du rapport d’épaisseur δ et que le plus fort taux de croissance est pour un rapport d’épaisseur $\delta > 1$. C’est à dire : quand la couche supérieure est la plus épaisse.

→ Le second Pic : il se situe dans des longueurs d’ondes finies et le nombre d’onde varie en fonction du rapport d’épaisseur δ (mais très peu en fonction du rapport de viscosité m et de l’angle d’inclinaison θ). la longueur d’onde de mode le plus croissant augmente quand l’épaisseur de la couche supérieure diminue. Le taux de croissance est maximal pour un rapport d’épaisseur de l’ordre de $\delta = 0.75$.

Ils ont tracé ensuite le taux de croissance maximum en prenant des valeurs entre 0 et 1 des rapports de viscosité m et des rapports d’épaisseur δ . ils ont déduits en final que les plus forts taux de croissance apparaissent pour des rapports de viscosité m de l’ordre (0.4,0.6) et d’épaisseur δ de l’ordre de (1.5,2.5).

En définitive, Loewenherz et Lawrence (1989) [13] concluent que :

Quand la couche la moins visqueuse est située au fond, le second mode est toujours le plus instable, même à $Re=0$ (sans inertie).

- L’instabilité qui croît le plus rapidement à une longueur d’onde de l’ordre de l’épaisseur de la couche supérieure.
- Dans le cas inverse (couche la plus visqueuse en bas), l’écoulement à $Re=0$ est stable pour toutes les longueurs d’ondes.

Chen (1993) [14] a étudié les instabilités dans une configuration à deux couches de même densité, en se concentrant sur le cas où la couche supérieure est plus épaisse (rapport $\delta > 1$) pour se rapprocher asymptotiquement du cas étudié par Hopper et Boyd (1987). Utilisant la vitesse de l’interface entre les

Etude bibliographique

couches comme référence (UR), il a tracé les courbes neutres de stabilité en fonction des rapports de viscosité (m) et d'épaisseur (δ) entre les couches, illustrées dans les Figures 10 et 11. Les zones marquées "S" sont stables, et celles marquées "U" sont instables.

- Dans la Figure 8 :
- **Fig. 8(a)** : Les courbes neutres du mode de surface montrent des résultats similaires à une seule couche, avec un seuil critique pour des longueurs d'onde infinies ($\alpha = 0$). Quand δ tend vers zéro, le nombre de Reynolds critique converge vers la valeur donnée par Yih (1963).
- **Fig. 8(b) et 8(c)** : Deux zones d'instabilité sont observées pour différentes longueurs d'onde, confirmant les résultats de Loewenherz et Lawrence (1989) pour $m > 1$. Quand $\delta \rightarrow \infty$, l'instabilité près des axes disparaît, atteignant la configuration limite de Hopper et Boyd (1987). Quand $\delta \rightarrow 0$, le mode interfacial devient marginalement stable pour $Re = 0$, avec un effet d'anti lubrification maximal quand les deux couches ont la même épaisseur ($\delta = 0$).
- **Fig. 8(d)** : La tension de surface influence principalement les petites longueurs d'onde, réduisant significativement les instabilités de longueur d'onde finie, tout en laissant les instabilités de grandes longueurs d'onde inchangées. La tension de surface a un effet stabilisant plus efficace à l'interface qu'à la surface libre.

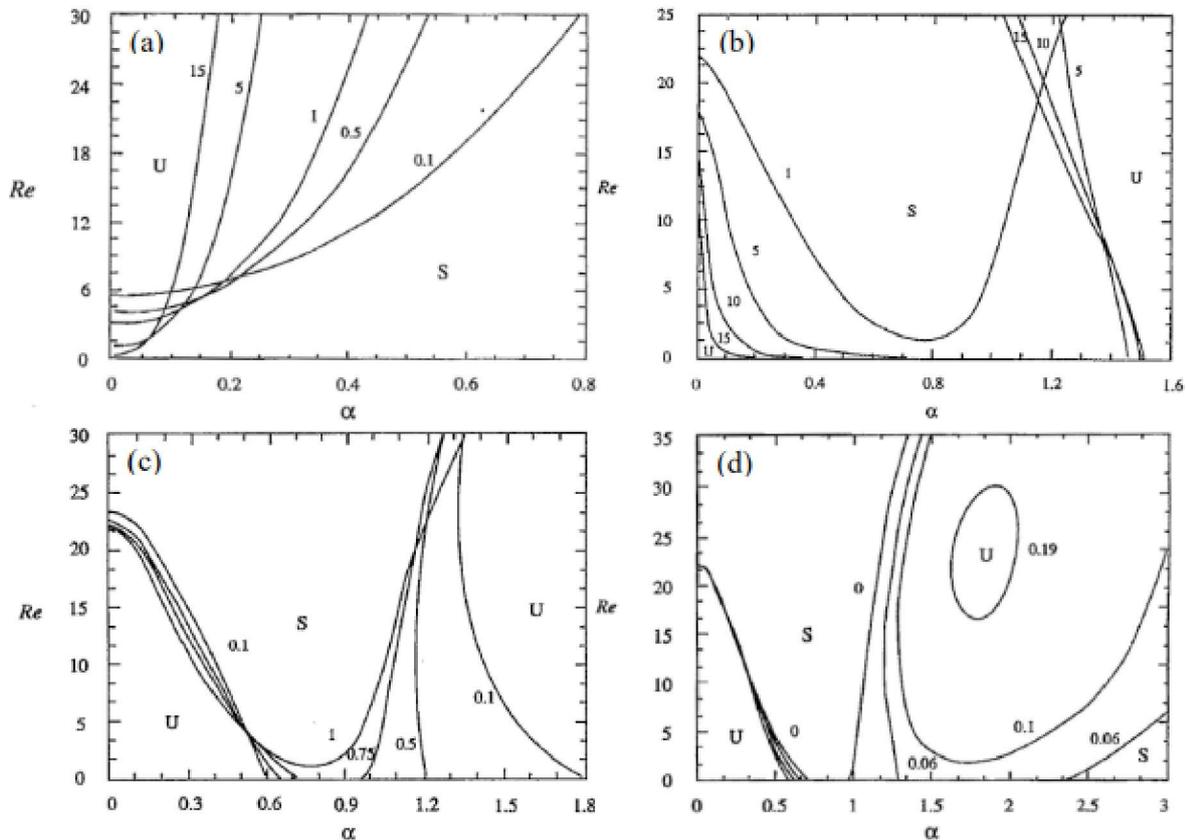


Figure 1.8. Chen (1993) [14]- Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d'épaisseur δ et tensions d'interface dans le cas d'une couche inférieure moins visqueuse. Zones stables (S) et instables (U) en fonction du nombre de Reynolds Re et du nombre d'onde α pour $m=2.5$, $\gamma=1$ et $\theta=0.2$

La Figure 9 présente les courbes neutres de stabilité pour la configuration où la couche inférieure est la plus visqueuse. Voici les observations clés :

Etude bibliographique

- **Fig. 9(a)** : Concernant le mode de surface, elle confirme les conclusions de la Figure 10(a).
- **Fig. 9(b)** : Pour le mode d'interface, il est stable pour les grandes longueurs d'onde, comme montré par Kao (1968), mais devient instable au-delà d'un certain nombre d'onde (α). Plus la couche supérieure est fine, plus la zone stable est large, et les tendances asymptotiques discutées précédemment pour δ restent valables.
- **Fig. 9(c)** : Le mode d'interface est stabilisé par l'ajout de tension de surface à l'interface. Le nombre de Reynolds critique pour déclencher les instabilités se trouve pour une longueur d'onde finie, remettant en question les conclusions de Kao (1968) basées sur des ondes longues. En présence de tension de surface, les instabilités de surface apparaissent dans une gamme restreinte de nombres de Reynolds, tandis que les instabilités d'interface apparaissent au-delà de cette gamme. Par exemple, pour $\delta = 1$ et une tension de surface de 0.5, l'écoulement est stable pour $Re < 1.2$, présente des instabilités de surface pour $1.2 < Re < 8.4$, et des instabilités d'interface pour $Re > 8.4$.

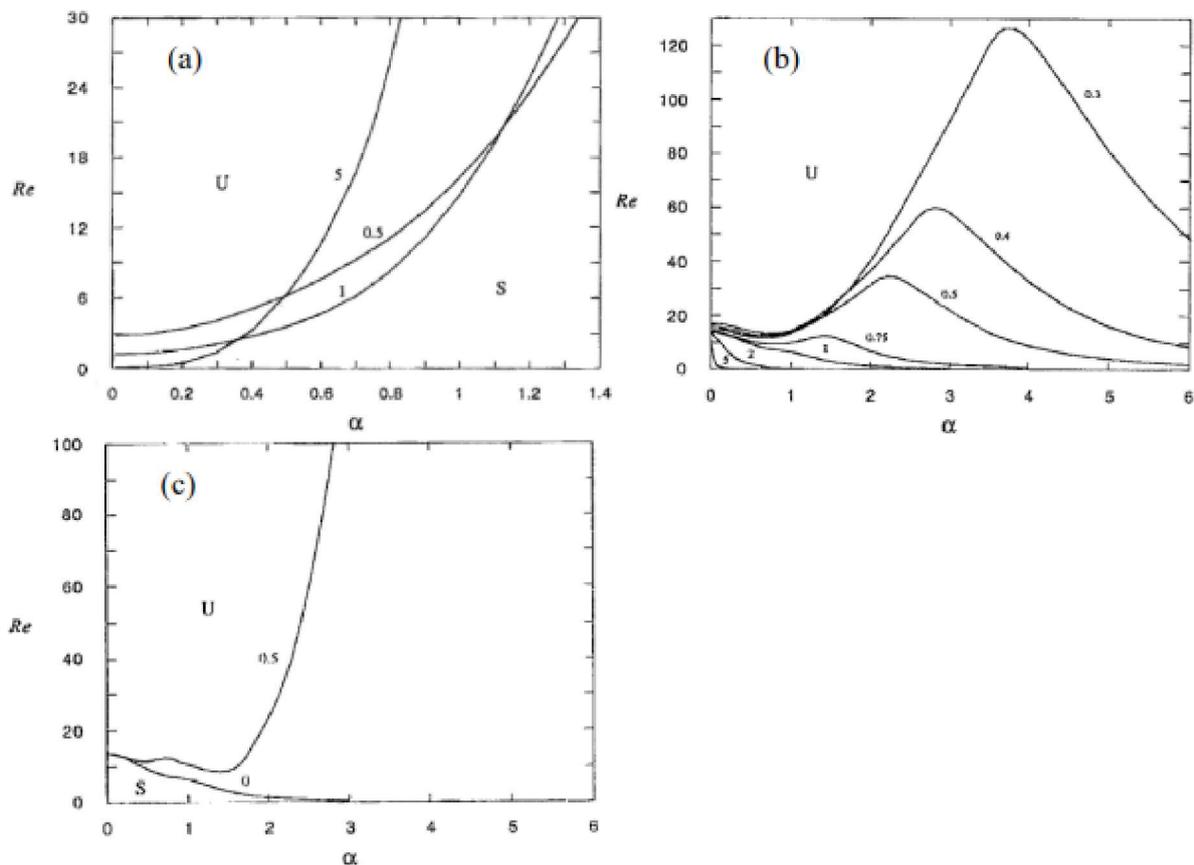


Figure 1.9. Chen (1993) [14]- Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d'épaisseur δ et tensions d'interface dans le cas d'une couche inférieure plus visqueuse. Zones stables (S) et instables (U) en fonction du nombre de Reynolds Re et du nombre d'onde α pour $m=0.4$, $\gamma=1$ et $\theta=0.2$.

Finalement, Chen (1993) a démontré que, pour des nombres de Reynolds faibles, un système peut être stable pour des longueurs d'onde grandes mais finies, et instable pour des longueurs d'onde plus petites. Il a souligné l'insuffisance des études de stabilité limitées aux grandes longueurs d'onde pour tirer des conclusions sur la stabilité globale du système. La stratification en viscosité joue un rôle

Etude bibliographique

crucial, en l'absence de tensions de surface, où deux contributions interagissent pour alimenter la croissance des modes d'interface :

1. Effet de couche mince ("thin-layer effect") : Manifesté en présence d'inertie et dominant quand l'épaisseur de la couche supérieure est grande, comme dans la configuration de Hopper et Boyd (1987).
2. Effet d'anti lubrification ("anti lubrication effect") : Toujours présent, même pour de très petits nombres de Reynolds, identifié par Kao (1968) et Loewenherz et Lawrence (1989), dû à la déformabilité de la surface libre et ses interactions avec les interfaces liquide-liquide, dépendant de la tension de surface et de la distance entre la surface libre et l'interface.

Ces effets, résultant de la stratification en viscosité, sont en compétition. Leur domination dépend du nombre de Reynolds :

- À très faible nombre de Reynolds, avec la couche la moins visqueuse adjacente à la paroi, l'effet d'anti lubrification domine, masquant l'effet de couche mince.
- Dans la configuration inverse, l'effet d'anti lubrification n'apparaît pas, et l'ajout de tension de surface stabilise l'écoulement en étouffant l'effet de couche mince à bas nombre de Reynolds.

1.4 Cas d'une couche de fluides newtonien avec une surface libre avec contrôle

Les recherches qui abordent ce thème sont toujours dans l'évolution, et il y'a pas mal de chercheurs qu'ils ont essayé de traiter et interpréter les résultats obtenus dans l'intérêt de les étudier dans divers domaines tel que l'industrie.....etc.

L'exemple qu'on va citer dans ce passage s'articule autour d'une recherche effectuée par Alice Thompson et al [\[15\]](#).

Dans son étude, il a essayé d'imposer une condition de contrôle sur les films minces par ce qu'ils interviennent dans autant de processus industriels.

Le contrôle des dynamiques de films minces est crucial pour optimiser les applications industrielles. L'approche consiste souvent à manipuler les paramètres de la paroi ou du film pour influencer les transitions dynamiques. En modifiant la topographie de la paroi de manière contrôlée, on peut induire des états stationnaires désirés et ajuster les propriétés de stabilité du système. Par exemple, l'utilisation de parois ondulées permet de créer des motifs prévisibles et contrôlables dans l'écoulement, favorisant ou inhibant la formation d'instabilités spécifiques.

Des études expérimentales et numériques ont montré que l'application de perturbations régulières à la paroi peut stabiliser ou déstabiliser l'écoulement selon les besoins. Les modèles à ondes longues et les simulations numériques complètes sont utilisés pour prédire les effets de différentes configurations de paroi et de paramètres de flux. Cette compréhension approfondie permet de concevoir des systèmes de contrôle qui maintiennent l'écoulement dans un régime stable ou exploitent les instabilités pour améliorer le mélange et le transfert de chaleur ou de masse.

Etude bibliographique

En somme, le contrôle des films liquides minces par la manipulation de la topographie de la paroi et d'autres paramètres est une stratégie efficace pour gérer les transitions dynamiques et optimiser les performances dans diverses applications industrielles.

1.5 Cas de deux couches de fluide newtonien avec contrôle

La documentation dans ce type d'écoulement n'est pas vaste et elle est toujours en évolution. C'est ce que on essaie de mettre en disposition et de traiter à travers les prochains chapitres. Et bien sûr, tout une théorie sera construite à base de ce que qu'on a introduit auparavant comme résultat et donnés. On va essayer de suivre la même logique et raisonnement avec notre propre méthodes d'analyse et de résolution.

L'écoulement de deux fluides newtoniens immiscibles sur un plan incliné est un phénomène d'importance fondamentale dans divers domaines comme l'ingénierie et les sciences de la Terre. Lorsque deux fluides de viscosité différente s'écoulent simultanément sur une surface inclinée, des interactions complexes se produisent, influençant la dynamique de l'écoulement et la répartition des fluides le long de la surface. Cette dynamique peut être encore plus complexe lorsque des conditions de contrôle sont introduites dans le système, modifiant ainsi les caractéristiques de l'écoulement.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons spécifiquement à l'étude de ce type d'écoulement, avec une condition de contrôle imposée. L'objectif de cette recherche est d'analyser comment cette condition de contrôle affecte la dynamique de l'écoulement et les propriétés des fluides, ainsi que d'explorer les applications potentielles de cette technique.

Dans le prochain passage, nous présenterons d'abord les principaux concepts et phénomènes liés à l'écoulement de fluides immiscibles sur un plan incliné, en mettant en évidence les aspects pertinents pour notre étude. Ensuite, nous discuterons de la notion de condition de contrôle et de son rôle dans la manipulation de l'écoulement des fluides. Enfin, nous présenterons les objectifs et la structure de notre recherche, ainsi que les implications potentielles de nos résultats.

Cette étude vise à contribuer à une meilleure compréhension des phénomènes d'écoulement de deux fluides newtonien visqueux incompressible immiscibles sur un plan incliné, ainsi qu'à explorer de nouvelles possibilités de contrôle et de manipulation de ces écoulements pour des applications pratiques.

Formulation du problème

Chapitre 2 : Formulation du problème

On établit dans ce chapitre les équations de base régissant l'écoulement de deux fluides newtonien visqueux incompressible le long d'un plan incliné sous les effets conjugués de la gravité et de la tension superficielle. Le plan de mouvement est incliné d'un angle β par rapport à l'horizontale est supposé suffisamment étendu dans la direction transversale pour justifier l'existence d'un écoulement bidimensionnelle.

2.1. Description du problème

On considère deux couches de fluides newtonien incompressible et immiscibles sur un plan incliné faisant un angle β . On note $i = 1$ le fluide au de-sous et $i = 2$ pour le deuxième fluide (voir la figure 10). La masse volumique des deux fluides et leurs viscosités sont notées respectivement ρ_i et μ_i . La vitesse de l'écoulement noté \vec{V} et la pression notée p_i .

Hypothèses :

- La géométrie du système est supposée infinie dans la direction x .
- On néglige toute circulation d'air au-dessus des deux films.
- La pression de l'air est supposée constante et noté P_a .
- L'écoulement est isotherme (pas d'échange thermique) et on suppose qu'il y'a pas d'échange de matière(masse) entre les deux fluides ou bien entre la couche supérieure et l'air.
- Les deux liquides sont Newtonien et incompressible. (Le profil de vitesse est linéaire, la densité volumique ρ est constante).
- La tension superficielle noté σ est supposé constante.

Formulation du problème

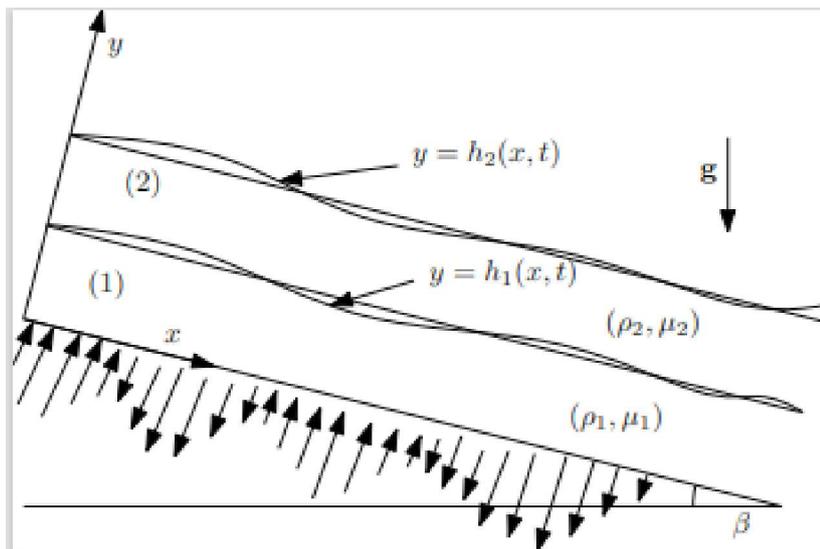


Figure 2.1 : Schématisation du problème

2.2 Les équations gouvernantes

Les équations de base sont la conservation de masse (équation de continuité) et le bilan de la quantité de mouvement (Navier stocks). Le repère choisie est cartésien $(x,0,y)$, d'ont l'axe y est normale au plan du mouvement.

2.2.1. Equations de continuité :

La conservation de la masse ou (équation de continuité) pour un fluide newtonien Incompressible se traduit par la divergence nulle du champ de vitesse $\vec{v}_i(u_i, v_i)$.

$$\nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (2.1)$$

Sa projection sur les deux axes s'écrit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Avec : $i=1,2$

2.2.2. Equations de quantité de mouvement :

Ce bilan exprime la variation de la quantité de mouvement par unité de volume comme la somme des efforts volumiques et surfaciques appliqués.

Formulation du problème

$$\rho_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla \right) \bar{v}_i = -\overline{\text{grad}} p_i + \mu_i \nabla^2 \bar{v}_i + \rho_i g \quad (2.3)$$

Pour le fluide 1 :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} u_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial y} u_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial x} p_1 + \mu_1 \Delta u_1 + \rho_1 g \sin \beta \quad (2.4)$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} v_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial y} v_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial y} p_1 + \mu_1 \Delta v_1 - \rho_1 g \cos \beta \quad (2.5)$$

Pour le fluide 2 :

$$\rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} u_2 + u_2 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + v_2 \frac{\partial}{\partial y} u_2 \right) = -\frac{\partial}{\partial x} p_2 + \mu_2 \Delta u_2 + \rho_2 g \sin \beta \quad (2.6)$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} v_2 + u_2 \frac{\partial}{\partial x} v_2 + v_2 \frac{\partial}{\partial y} v_2 \right) = -\frac{\partial}{\partial y} p_2 + \mu_2 \Delta v_2 - \rho_2 g \cos \beta \quad (2.7)$$

2.3 Conditions aux limites

2.3.1 Condition à la paroi

Le fluide 1 s'écoule sur la paroi ($y=0$) avec une condition d'adhérence (non glissement) et une condition de perméabilité due aux contrôles donner par :

$$\text{En } y=0 \quad \bar{V}_1 = (0, F(x, t)) \quad (2.8)$$

C'est-à-dire,

$$u_1 = 0, v_1 = F(x, t) \quad (2.9)$$

2.3.2 Condition à l'interface

Formulation du problème

A l'interface $y = h_1(x, t)$, on a la continuité des vitesses, la condition cinématique, la condition dynamique.

- Continuité des vitesses

$$\left[\bar{v}_i \right] = 0 \quad (2.10)$$

Ou, le crochet défini par : $[f] = f_1 - f_2$

Et on écrit :

$$u_1 = u_2, v_1 = v_2 \quad (2.11)$$

- Condition cinématique

Cette condition traduit l'imprimabilité à l'interface (pas d'échange de masse entre les deux fluides). Elle exprime le fait que les deux fluides à l'interface d'équation $y - h_1(x, t) = 0$, ont la même vitesse normale, d'où :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla \right) (y - h_1(x, t)) = 0 \quad (2.12)$$

Elle s'écrit sous forme simplifiée suivante :

$$v_i = h_{1t} + u_i h_{1x} \quad (2.13)$$

- Condition dynamique

La condition de raccordement des contraintes traduit la continuité de la contrainte tangentielle et le saut de la contrainte normale. Ce dernier est dû à la tension superficielle entre les deux fluides d'où l'équation :

$$\left[p \cdot \bar{n}_1 - (\tau \cdot \bar{n}_1) \right] = -\sigma_1 k_1 \bar{n}_1 \quad (2.14)$$

Avec :

K_1 : rayon de courbure / $K_1 = \text{div } \bar{n}_1$
 σ_1 : tension au niveau de l'interface

Formulation du problème

Expression du vecteur normale

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+h_{1x}^2}} \begin{pmatrix} -h_{1x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

- Condition tangentielle :

$$[(p_2 - p_1)\vec{n}_1 \cdot \vec{t}_1 - (\tau_2 - \tau_1)\vec{n}_1 \cdot \vec{t}_1] = \sigma_1 k_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{t}_1 \quad (2.16)$$

$$\left[\frac{\mu}{1+h_{1x}^2} ((1-h_{1x}^2)(u_y + v_x) - 2u_x h_{1x} + v_x h_{1x}) \right] = 0 \quad (2.17)$$

- La condition normale :

$$[p \cdot \vec{n}_1 - (\tau \cdot \vec{n}_1)] = \sigma_1 k_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 \quad (2.18)$$

$$\left[p - \frac{\mu}{(1+h_{1x}^2)} (v_y - 2u_x h_{1x}^2 - 2(u_y + v_x)h_{1x}) \right] = -\frac{\sigma_1 h_{1xx}}{(1+h_{1x}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.19)$$

2.2.3.3 Condition à la surface libre

Au niveau de la surface libre $y = h_2(x, t)$, on a la continuité des vitesses, la condition cinématique, la condition dynamique.

- La condition cinématique en $y = h_2(x, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_2 \cdot \nabla \right) (y - h_2) = 0 \quad (2.20)$$

$$v_2 = h_{2t} + u_2 h_{2x} \quad (2.21)$$

- Condition tangentielle en $y=h$

Formulation du problème

$$(\tau_2 \cdot \bar{n}_2) \cdot \bar{t}_2 = 0 \quad (2.22)$$

C'est-à-dire :

$$\left[\frac{\mu}{1+h_{2x}^2} \left((1-h_{2x}^2)(u_{2y} + v_{2x}) - 2u_{2x}h_{2x} + v_{2x}h_{2x} \right) \right] = 0 \quad (2.23)$$

- Condition normale en y=h

$$[(p_2 - p_1) \bar{n}_2 \cdot \bar{t}_2 - (\tau_2 - \tau_1) \bar{n}_2 \cdot \bar{t}_2] = \sigma_2 k_2 \bar{n}_2 \cdot \bar{t}_2$$

$$\left[p_a - p_2 - \frac{\mu}{(1+h_{2x}^2)} (v_{2y} - 2u_{2x}h_{2x}^2 - 2(u_{2y} + v_{2x})h_{2x}) \right] = -\frac{\sigma_s h_{2xx}}{(1+h_{2x}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.24)$$

Expression du vecteur rayon de courbure

$$k_i = \frac{-h_{ixx}}{(1+h_{ix}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.25)$$

Expression du vecteur tangente

$$\bar{t}_i = \frac{1}{\sqrt{1+h_{ix}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ h_{ix} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Expressions de tenseur des contraintes visqueuse : $\tau_i = 2\mu_i D_i$ avec D est le tenseur des taux de déformation donne par

$$2D = \begin{pmatrix} 2u_x & u_y + v_x \\ u_y + v_x & 2v_y \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Formulation du problème

2.4. Ecoulement de base

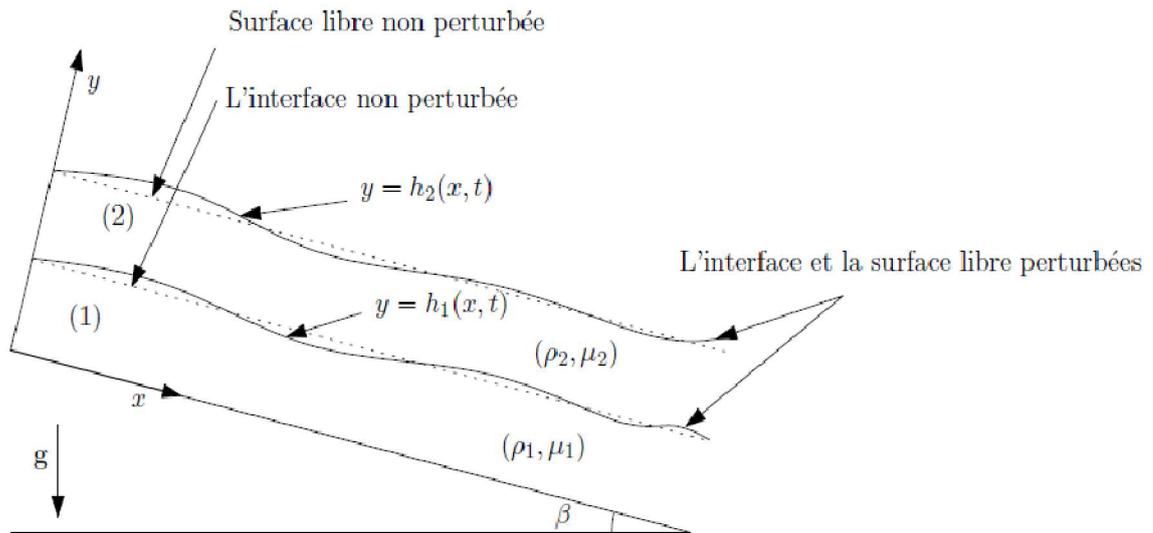


Figure 2.2. Schématisation de l'écoulement de base

Afin de calculer la solution de base de l'écoulement d'un film mince sur un plan incliné, on va considérer les hypothèses suivantes :

-Ecoulement est stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

- le film liquide subit a un écoulement parallèle (la surface libre $h = h_0 = \text{constante}$ est aussi plate),

Ce qui donne:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (2.29)$$

Pas de variation par rapport à t par conséquent à x , et après calcul on peut vérifier facilement que la composante normale de vitesse v est nulle. Les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites (2.1) -(2.11) se résume :

$$y=0 \quad u_1 = 0 \quad (2.30)$$

Formulation du problème

$$0 < y < H_1 \quad \mu_1 u_{1,yy} + \rho_1 g \sin \beta = 0, \quad p_{1,y} = -\rho_1 g \cos \beta. \quad (2.31)$$

$$y = H_1 \quad u_1 = u_2, \quad \mu_1 u_{1,y} - \mu_2 u_{2,y} = 0, \quad p_2 = p_1. \quad (2.32)$$

$$H_1 < y < d \quad \mu_2 u_{2,yy} + \rho_2 g \sin \beta = 0, \quad p_{2,y} = -\rho_2 g \cos \beta. \quad (2.33)$$

$$y = d \quad u_{2,y} = 0, \quad p_2 = p_a. \quad (2.34)$$

Il est facile de résoudre ce système différentiel et pour solution stationnaire qui s'écrit :

$$\text{Pour } u_b \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(y) = -\frac{\rho_1 g \sin \beta}{\mu_1} \left[\frac{1}{2} y^2 - (H_1 + \rho H_2) y \right] \\ u_2(y) = u_1(H_1) + \frac{\rho_2 g \sin \beta}{2\mu_2} d^2 \left[\frac{-2H_1}{d} + \frac{H_1^2}{d^2} + 2\frac{y}{d} - \left(\frac{y}{d}\right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

$$\text{Pour } P_b \quad \Rightarrow p_2(d) = p_a + \rho_2 g \cos \beta dz_2 \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow p_1 = p_a + \rho_1 g H_1 \cos \beta (H_1 + \rho H_1 - y)$$

Avec :

$$H = \frac{H_2}{H_1}, \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad d = H_1 + H_2, \quad z_1 = (1 + \rho H - y / H_1), \quad z_2 = (1 - y / d)$$

Formulation du problème

Calcul de débit :

Pour le fluide 1 :

$$Q_1 = \int_0^{H_1} u_1(y) \cdot dy \quad (2.37)$$

Pour le fluide 2 :

$$Q_2 = \int_{H_1}^d u_2(y) \cdot dy \quad (2.38)$$

On définit aussi la vitesse moyennée :

$$u_m = \frac{Q_1 + Q_2}{d} \quad (2.39)$$

Après la simplification des équations on obtient les solutions de Nusselt de l'écoulement de base, qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_{1b} &= \frac{\rho_1 H_2^2 g \sin \beta}{2\mu_1} (r^2 - (r-z)^2), p_{1b} = p_{2b}(\tilde{H}) + \rho_1 H_2 g \cos \beta (\tilde{H} - z) \text{ avec } 0 \leq z \leq \tilde{H} \\ u_{2b} &= u_{1b}(\tilde{H}) + \frac{\rho_2 H_2^2 g \sin \beta}{2\mu_2} ((1-\tilde{H})^2 - (1-z)^2), p_{2b}(z) = p_a + \rho_2 H_2 g \cos \beta (1-z) \text{ avec } \tilde{H} \leq z \leq 1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

ou H_1 et H_2 représentent respectivement l'épaisseur du film inférieure et du film supérieure de nusselt, et $z=y/H_2$, $\tilde{H} = H_1 / H_2$, $r = \tilde{H} + \rho(1 - \tilde{H})$, $\rho = \rho_2 / \rho_1$, $\mu = \mu_2 / \mu_1$

Dans le tableau ci-dessous on a les valeurs des paramètres physique qu'on va utiliser prochainement pour tracer les courbes de l'écoulement de base :

Formulation du problème

Exemple d'application :

Fluides	Densités g/cm^3	Viscosités Cm^2/s	Tension superficielle g/cm^2
Eau	0.998	0.0101	72
Benzène	0.879	0.0074	29

Tableau 2.1 Les propriétés physiques de l'eau et du benzène

C'est dernières équations, et grâce à l'aide d'un logicielle de programmation 'Maple', on a pu obtenir des courbes illustratifs qui décrit l'écoulement de base

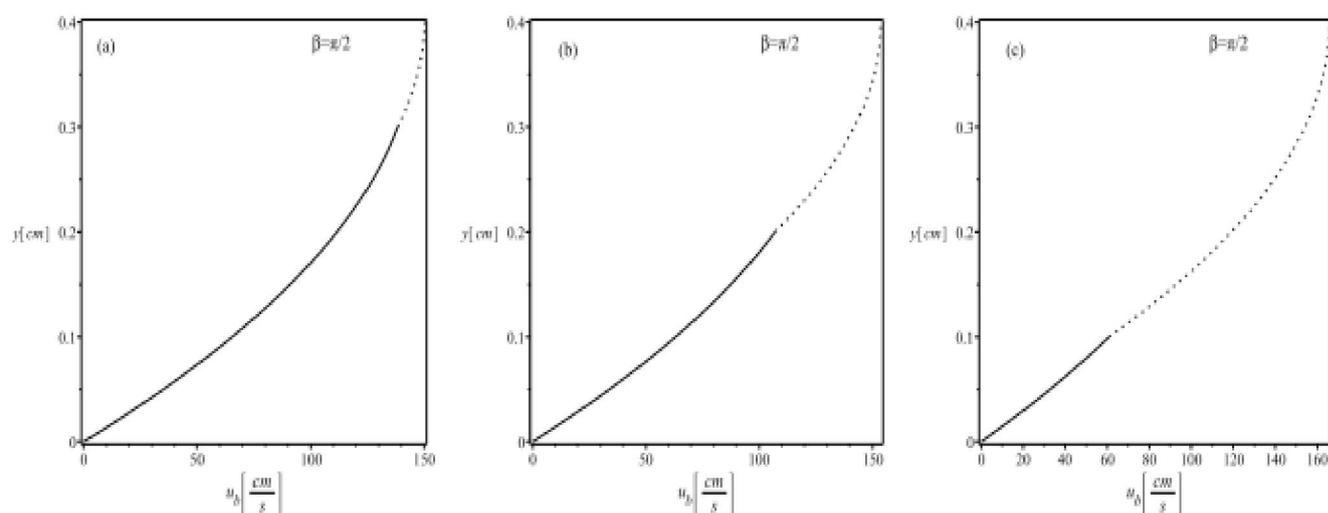


Figure 2.3 : "écoulement de base : ligne continue pour le liquide inférieur et ligne pointillée pour le liquide supérieur avec différentes épaisseurs." avec un angle d'inclinaison $\pi / 2$

Formulation du problème

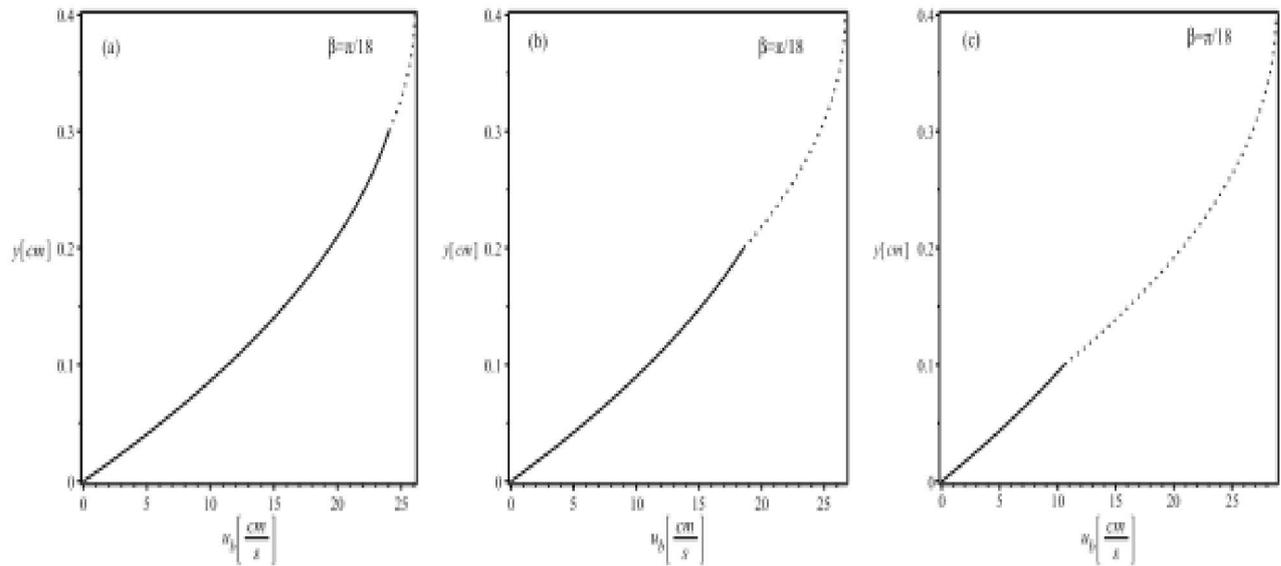


Figure 2.4 : "écoulement de base : ligne continue pour le liquide inférieur et ligne pointillée pour le liquide supérieur avec différentes épaisseurs. Avec un angle d'inclinaison $\pi / 18$

Chapitre 3 : Analyse de stabilité linéaire

L'analyse de la stabilité est très courante dans le domaine de l'hydrodynamique. Elle consiste à perturber un état de référence d'un système physique et à étudier l'évolution spatio-temporelle des perturbations. Deux comportements sont alors possibles, soit ces perturbations sont amorties dans le temps et l'espace et l'état de référence est dit stable, soit elles s'amplifient et l'état de référence est alors instable. Le but d'une étude de stabilité est donc d'examiner comment des instabilités peuvent apparaître pour éventuellement être suivies et même contrôlées.

Dans ce travail, On se restreint à l'étude d'instabilité temporelle, qui détecte la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de base et donne aussi le seuil d'instabilité en fonction des paramètres du problème.

3.1 Équations adimensionnées

La solution de Nusselt précédente donne lieu à un débit total établi à l'entrée de l'écoulement cela nous permet de définir une vitesse moyennée u_m (voir chapitre 02), choisie comme vitesse caractéristique. Par ailleurs, on fait alors intervenir l'échelle d'espace : la hauteur d . Ainsi, les échelles caractéristiques sont d , d/u_m et $\mu_1 u_m/d$ pour x , y , le temps t et la pression p , respectivement. A partir de ces échelles caractéristiques, les variables adimensionnelles suivantes sont introduites :

$$x = d \cdot x^*, y = d \cdot y^*, u_i = u_m \cdot u_i^*, p_i = \mu_1 \frac{u_m}{d} \cdot p_i^*, t = \frac{d}{u_m} \cdot t^* \quad (3.1)$$

En adimensionnant les équations de Navier-Stokes ainsi les conditions aux limites et en omettant le symbole « * », on obtient

Analyse de stabilité linéaire

Pour le fluide 1 :

$$u_{1,x} + v_{1,y} = 0, \quad (3.2)$$

$$\text{Re}(u_{1,t} + u_1 u_{1,x} + v_1 u_{1,y}) + p_{1,x} = u_{1,xx} + u_{1,yy} + G \quad (3.3)$$

$$\text{Re}(v_{1,t} + u_1 v_{1,x} + v_1 v_{1,y}) + p_y = v_{1,xx} + v_{1,yy} - G \cot \beta \quad (3.4)$$

Avec

$$\text{Re} = \frac{\rho_1 u_m d}{\mu_1} \quad \text{et} \quad G = \frac{\rho_1 g \sin \beta d^2}{\mu_1 u_m}$$

Pour le fluide 2 :

$$u_{2,x} + v_{2,y} = 0, \quad (3.5)$$

$$\text{Re}(u_{2,t} + u_2 u_{2,x} + v_2 u_{2,y}) + p_{2,x} = \mu(u_{2,xx} + u_{2,yy}) + \rho G \quad (3.6)$$

$$\text{Re}(v_{2,t} + u_2 v_{2,x} + v_2 v_{2,y}) + p_y = \mu(v_{2,xx} + v_{2,yy}) - \rho G \cot \beta \quad (3.7)$$

avec

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Conditions aux limites :

$$\text{En } y=0 \quad u_1 = 0, \quad v_1 = f(x, t) \quad (3.8)$$

Ou : $f = F/u_m$

$$\text{En } y = h_1(x, t) \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad (3.9)$$

$$((1-h_{1x}^2)(u_{1,y} + v_{1,x}) - 2u_{1,x}h_{1x} + v_{1,x}h_{1x}) - \mu((1-h_{1x}^2)(u_{2,y} + v_{2,x}) - 2u_{2,x}h_{1x}^2 - v_{2,x}h_{1x}) = 0 \quad (3.10)$$

$$p_2 - p_1 - \mu(v_{2,y} - 2u_{2,x}h_{1x}^2 - 2(u_{2,y} + v_{2,x})h_{1x}) - (v_{1,y} - 2u_{1,x}h_{1x}^2 - 2(u_{1,y} + v_{1,x})h_{1x}) = -\text{Re}We \frac{h_{1xx}}{(1+h_{1x}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.11)$$

avec

$$We = \frac{\sigma_1}{\rho_1 u_m^2}$$

$$\text{En } y=h(x,t) \quad v_2 = h_{2t} + u_2 h_{2x} \quad (3.12)$$

$$(1-h_{2x}^2)(u_{2,y} + v_{2,x}) - 2u_{2,x}h_{2x} + v_{2,x}h_{2x} = 0 \quad (3.13)$$

Analyse de stabilité linéaire

$$p_2 - (v_{2,y} - 2u_{2,x}h_{2x}^2 - 2(u_{2,y} + v_{2,x})h_{2x}) = -\text{Re}We\sigma \frac{h_{2xx}}{(1+h_{2x}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.14)$$

avec

$$\sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

3.2 Linéarisations par rapport à l'écoulement de base

La solution de l'écoulement de base, notée (u_{ib}, v_{ib}, p_{ib}) , une fois adimensionné s'écrit :

$$u_{1b} = \frac{G}{2}(r^2 - (r-y)^2); \quad v_{1b} = 0; \quad p_{1b} = G \cot(\beta)(\tilde{H} - y) + p_{2b}(\tilde{H}) \quad \text{si } 0 \leq y \leq \tilde{H}$$

$$u_{2b} = \frac{\rho G}{2\mu}((1-\tilde{H})^2 - (1-y)^2) + u_{1b}(\tilde{H}); \quad v_{2b} = 0; \quad p_{2b} = \rho G \cot(\beta)(1-y) \quad \text{si } \tilde{H} \leq y \leq 1$$

Où $r = \tilde{H} + (1-\tilde{H})\rho$.

Considérons l'écoulement perturbé par une perturbation infinitésimale $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{p}_i)$ et \tilde{h}_i de l'écoulement de base. Cette perturbation est définie par :

$$u_i = u_{ib}(y) + \delta \tilde{u}_i = u_{ib}(y) + \delta U_i \quad (3.10)$$

$$v_i = 0 + \delta \tilde{v}_i = \delta V_i$$

$$p_i = p_{ib}(y) + \delta \tilde{p}_i = p_{ib}(y) + \delta P_i$$

$$s = s_0 + \delta \tilde{s}$$

$$h = 1 + \delta \tilde{h}$$

Les équations de l'écoulement perturbé sont alors linéarisées, ce qui donne lieu à des équations aux perturbations linéaires sous forme :

Dans le fluide 01 :

$$u_{1,x} + v_{1,y} = 0, \quad (3.11)$$

$$\text{Re}(u_{1,t} + u_{1b}u'_{1,x} + v_{1b}u'_{1,t}) + p_{1,x} = u_{1,xx} + u_{1,yy} \quad (3.12)$$

$$\text{Re}(v_{1,t} + u_{1b}v'_{1,x}) + p_y = v_{1,xx} + v_{1,yy} \quad (3.13)$$

Dans le fluide 02 :

$$u_{2,x} + v_{2,y} = 0, \quad (3.14)$$

Analyse de stabilité linéaire

$$\operatorname{Re}(u_{2,t} + u_{2b}u_{2,x} + v_2u_{2b}') + p_{2,x} = \mu(u_{2,xx} + u_{2,yy}) \quad (3.15)$$

$$\operatorname{Re}(v_{2,t} + u_{2b}v_{2,x}) + p_y = \mu(v_{2,xx} + v_{2,yy}) \quad (3.16)$$

En $y=0$:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = f(x, t) \quad (3.17)$$

En $y=\tilde{H}$

$$u_1 = u_2 + (1-\mu)u_{2b}'h_1, \quad v_1 = v_2 \quad (3.18)$$

$$[\tilde{\mu}(u_y + v_x)] = (1-\rho)Gh_1 \quad (3.19)$$

$$[p - 2\tilde{\mu}v_y] = (1-\rho)G \cot \beta h_1 - \operatorname{Re}Weh_{1,xx} \quad (3.20)$$

$$h_t + u_b h_x = v \quad (3.21)$$

$$\text{Avec : } \mu = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \\ \mu & \text{si } i=2 \end{cases}$$

En $y=1$

$$v_2 = h_{2,t} + u_{2b}h_{2,x} \quad (3.22)$$

$$\mu(u_y + v_x) = \rho Gh_2 \quad (3.23)$$

$$p_2 - 2\mu v_{2y} = \rho G \cot(\beta)h_2 - \sigma \operatorname{Re}Weh_{2,xx} \quad (3.24)$$

3.3 Système d'équations Orr-Sommerfeld

Choix de contrôle :

Noter bien que notre choix de contrôle est inspiré de travail Alice Thompson [14] et al, dont la vitesse normale à la paroi est supposée linéaire par rapport à la perturbation de la surface libre. Dans notre travail, nous considérons le même choix du contrôle qui est le suivant :

$$f(x, t) = -\gamma_0 (h_2(x, t) - 1) \quad (3.25)$$

Avec : γ_0 le coefficient de contrôle

Modes normaux :

Les équations aux perturbations linéaires sont à coefficients constantes par rapport aux variables x et t , et variable par rapport à y . Ce qui nous permet de supposer que les solutions sont en forme d'exponentiel, tel que $f(x, y, t) = g(y)e^{ax+bt}$. Cette forme de solution est nommée « Les modes normaux ».

Analyse de stabilité linéaire

Afin de simplifier les équations précédentes et retrouver des équations de type Orr-Sommerfeld, on introduit la fonction courant, notée Ψ , définie par :

$$\psi(x, y, t) = \phi(y).e^{i(kx - \omega t)} = \phi(y).e^{ik(x - ct)} \quad (3.26)$$

$k \in \mathbb{R}$: le nombre d'onde. Dans notre étude, on le considère réel puisqu'on examine que la stabilité temporelle.

$c \in \mathbb{R}$: la célérité. $\omega = kc$ Représente la pulsation

On pose :

$$\tilde{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.27)$$

La fonction courante est classe C^2 , donc d'après le théorème de Schwartz l'équation de la conservation de masse est automatiquement vérifiée. En effet :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.28)$$

Après substitution l'expression du potentiel (3.27) dans les équations linéarisés (3.11)-(3.24) et on éliminant les pressions on obtient le système d'équations de Orr-Sommerfeld suivante :

$$\left(D^2 - ik \frac{\tilde{\rho} \text{Re}}{\tilde{\mu}} \left((u_b - c)D + \frac{\tilde{\rho} G}{\tilde{\mu}} \right) \right) \phi = 0 \quad (3.25)$$

$$D = \frac{d^2}{dy^2} - k^2, \tilde{\rho}_1 = 1, \tilde{\rho}_2 = \rho \quad (3.26)$$

Les perturbations des interfaces s'écrivent :

$$\tilde{h}_1(x, t) = \hat{h}_1 e^{i(kx - ct)}, \quad \tilde{h}_2(x, t) = \hat{h}_2 e^{i(kx - ct)}$$

Analyse de stabilité linéaire

Les conditions aux limites s'écrivent sous les formes simplifiées :

$$\begin{aligned}
 ik\phi_1(0) = \gamma_0 \hat{h}_1, \phi_1'(0) &= 0 & (3.27) \\
 [\phi]_{s_0} = 0, [\phi'] &= \frac{1-\mu}{\mu} \rho G (1-\tilde{H}) \hat{h}_1, [\tilde{\mu}(\phi'' + k^2\phi)]_{\tilde{H}} = (1-\rho) G \hat{h}_1 \\
 \tilde{\mu}(\phi''' - 3k^2\phi') + ik \operatorname{Re} \tilde{\rho} [(c - u_b)\phi' + u_b'\phi]_{\tilde{H}} &= ik ([\rho] G \cot(\beta) + k^2 \operatorname{Re} We) \hat{h}_1 \\
 \phi_2''(1) + k^2 \phi_2(1) &= \frac{\rho G}{\mu} \hat{h}_2 \\
 \mu(\phi_2''' - 3k^2\phi_2') + ik \operatorname{Re} \rho ((c - u_b)\phi' + u_b'\phi) &= ik (\rho G \cot(\beta) + k^2 \sigma \operatorname{Re} We) \hat{h}_2 \\
 \hat{h}_1 = \frac{\phi_1(\tilde{H})}{c - u_{1b}(\tilde{H})}, \hat{h}_2 = \frac{\phi_2(1)}{c - u_{2b}(1)}, &
 \end{aligned}$$

Etude de la stabilité linéaire

On étudie la stabilité linéaire temporelle vis-à-vis d'une perturbation de nombre d'onde K réel fixé, et de célérité c complexe inconnue : $c = c_r + ic_i$

La partie réel c correspond à la célérité de l'onde et $k c_i$ représente le taux d'amplification.

Dans ces conditions, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire nous avons, si nous notons $g(y)$ l'une des quelconque amplitudes complexes de champ perturbé :

$$g(y) = G(y) \cdot C^{kc_i t} e^{ik(x - c_r t)}$$

On comprend alors l'appellation étude temporelle.

Supposer que c est complexe, revient à imposer que la perturbation se développe ou s'atténue dans le temps, suivant x , elle ne fait que se propager comme une onde classique.

Le terme d'amplitude dans la relation précédente est donné par $e^{kc_i t}$, ce qui permet de définir que la stabilité ou l'instabilité de la perturbation est lié au signe de la partie imaginaire c_i :

-si $c_i > 0$ l'amplitude et la perturbation augmente avec le temps et on dit que la perturbation est instable.

-si $c_i < 0$ cela correspond à une perturbation stable.

-si $c_i = 0$ cela veut dire que la perturbation est neutre. Dans ce dernier cas l'écoulement est dit marginale.

Chapitre 4 : Résolution du problème aux valeurs propres

Dans ce chapitre on va résoudre le système d'équations OS avec deux méthodes, commençant d'abord par une résolution asymptotique par la suite on réalise une étude numérique des équations. Ce procédé sera appliqué pour le traitement des grandes ondes qui apparaissent lors de déstabilisation de l'écoulement.

4.1. Résolution numérique

Afin de chercher les solutions numériques du problème d'Orr-Sommerfeld, nous utilisons la méthode de Riccati. La théorie générale de cette méthode a été donnée initialement par Scott [21]. Davey [22] l'a appliqué à l'équation d'Orr-Sommerfeld, dans le cas d'une seule couche, pour le cas d'un fluide newtonien. Cette méthode a été aussi utilisée pour le même problème par Amaouche *et al.* [19] dans le cas de deux fluides superposés entre deux plaques infinies. Amaouche *et al.* [23], Djema [24] ont mis encore en évidence l'importance de cette méthode, et cela en résolvant numériquement un problème aux limites de type O.S. d'un écoulement d'un fluide non newtonien à surface libre. Ce dernier contient des singularités sur la surface libre qui sont traitées sans difficulté, contrairement à d'autres méthodes.

Dans notre cas, cette méthode permet de transformer notre problème aux valeurs propres en deux problèmes non linéaire, l'un pour le fluide un l'autre pour le fluide deux, avec condition initiale respectivement en $y=0$ et $y=1$.

Afin de réécrire notre problème sous forme d'un système matricielle différentielle du premier ordre, on pose :

$$X_1 = (\phi_1, \phi_1', \hat{h}_1)^T$$

$$X_2 = (\phi_2, \phi_2')^T$$

$$Y_i = (\phi_i'', \phi_i''')^T$$

Donc le système d'équations Orr-Sommerfeld s'écrit sous forme matricielle suivante :

Analyse de stabilité linéaire

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} X_i = A_1^i X_i + A_2^i Y_i \\ \frac{d}{dy} Y_i = B_1^i X_i + B_2^i Y_i \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec :

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ik \operatorname{Re}((c - u_{1b})k^2 + G) - k^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et : } B_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ik \operatorname{Re}(u_{1b} - c) + 2k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ik \operatorname{Re}}{\mu} \left((c - u_{2b})k^2 + \frac{G\rho}{\mu} \right) - k^4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et : } B_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{ik \operatorname{Re} \rho}{\mu} (u_{2b} - c) + 2k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites en $y=0$ et $y=1$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_1 X_1(0) &= 0 \\ E_1 X_2(1) &= E_3 Y_2(1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Avec :

$$E_1 = \begin{pmatrix} ik & 0 & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -k^2 - 1/(u_{2b}(1) - c) & 0 \\ -ik \operatorname{Re} \rho u_{2b}' + ik(\rho G \cot(\beta) + k^2 \sigma \operatorname{Re} \mathcal{W}e) / (u_{2b}(1) - c) & -3\mu k^2 + ik \operatorname{Re} \rho (c - u_{2b}(1)) \end{pmatrix}$$

$$\text{et : } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

On introduit les matrices de Riccati R_i ($i=1,2$) définie par :

$$X_i(y) = R_i(y) Y_i(y) \quad (4.3)$$

Analyse de stabilité linéaire

Nous dérivons l'expression (3.4) par rapport à y et en utilisant les relations (3.2), nous obtenons deux problèmes aux valeurs initiales suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} R_1 = -R_1 B_1^1 R_1 - R_1 B_2^1 + A_1^1 R_1 + A_2^1 & \text{si } 0 < y < \tilde{H} \\ E_1 R_1(0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} R_1 = -R_1 B_1^2 R_1 - R_1 B_2^2 + A_1^2 R_1 + A_2^2 & \text{si } \tilde{H} < y < 1 \\ E_2 R_2(1) = E_3 \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous résolvons ces deux problèmes aux valeurs initiales (3.4) et (3.5) par le schéma de Runge-kutta d'ordre quatre. Pour remplir les conditions aux limites en $y = \tilde{H}$, la valeur propre c doit être variée jusqu'à ce que :

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_d & -\mu I_d \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (4.6)$$

Où I_d est la matrice identité, $\mathbf{0}$ est la matrice nulle et

Analyse de stabilité linéaire

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\mu-1}{\mu} \rho G (1-\tilde{H}) \\ 1 & 0 & u_{1b}(\tilde{H})-c \end{pmatrix}, F_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & (\rho-1)G \\ ik \operatorname{Re} u'_{1b}(\tilde{H}) & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \\
 \text{et : } F_4 &= -\begin{pmatrix} \mu k^2 & 0 \\ ik \operatorname{Re} \rho u'_{2b}(\tilde{H}) & a_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -3k^2 + ik \operatorname{Re}(c - u_b(\tilde{H})), \\
 a_2 &= ik((\rho-1)G \cot(\beta) - k^2 \operatorname{Re} We), \\
 a_3 &= -3k^2 + ik \operatorname{Re} \rho(c - u_b(\tilde{H})).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Analyse de stabilité linéaire

4.2 Courbes de stabilité marginale et résultats

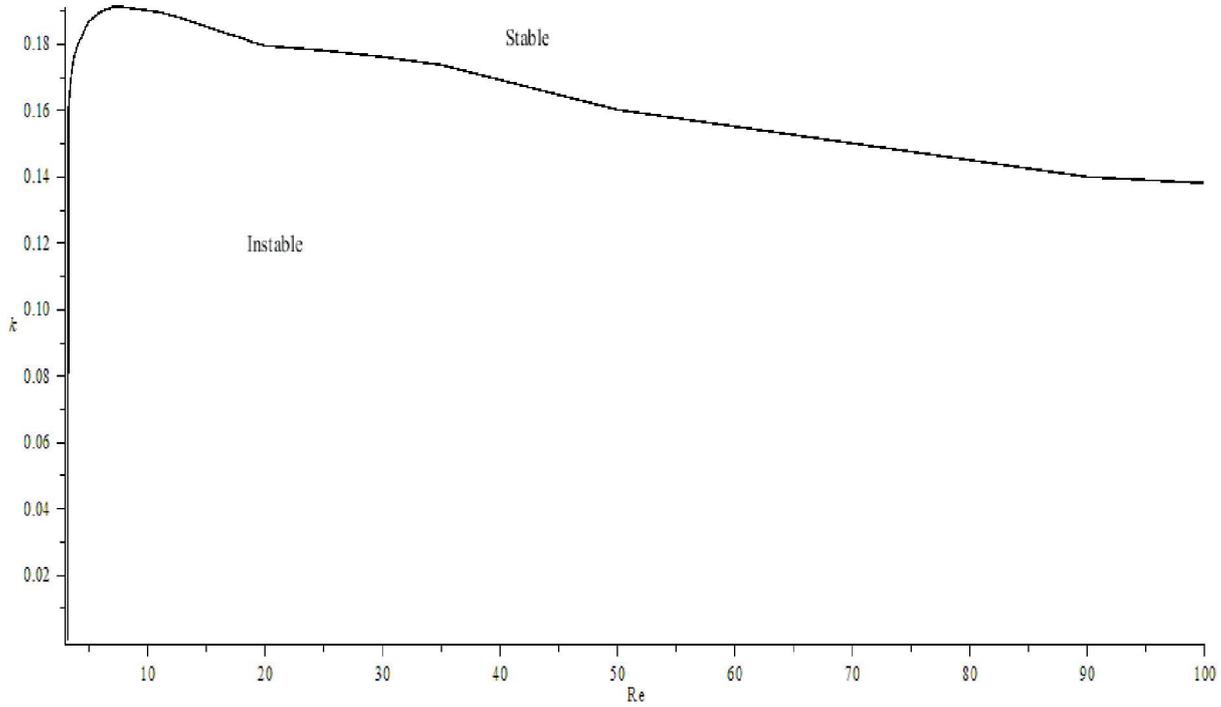


Figure 4.1- Courbe de stabilité marginale dans le plan (Re, k) pour :

$$\beta = \pi / 2, \gamma = 0.1, \tilde{H} = 2/3, \rho = 0.9, \mu = 0.1, \sigma = 0.9, we = 50.$$

Analyse de stabilité linéaire

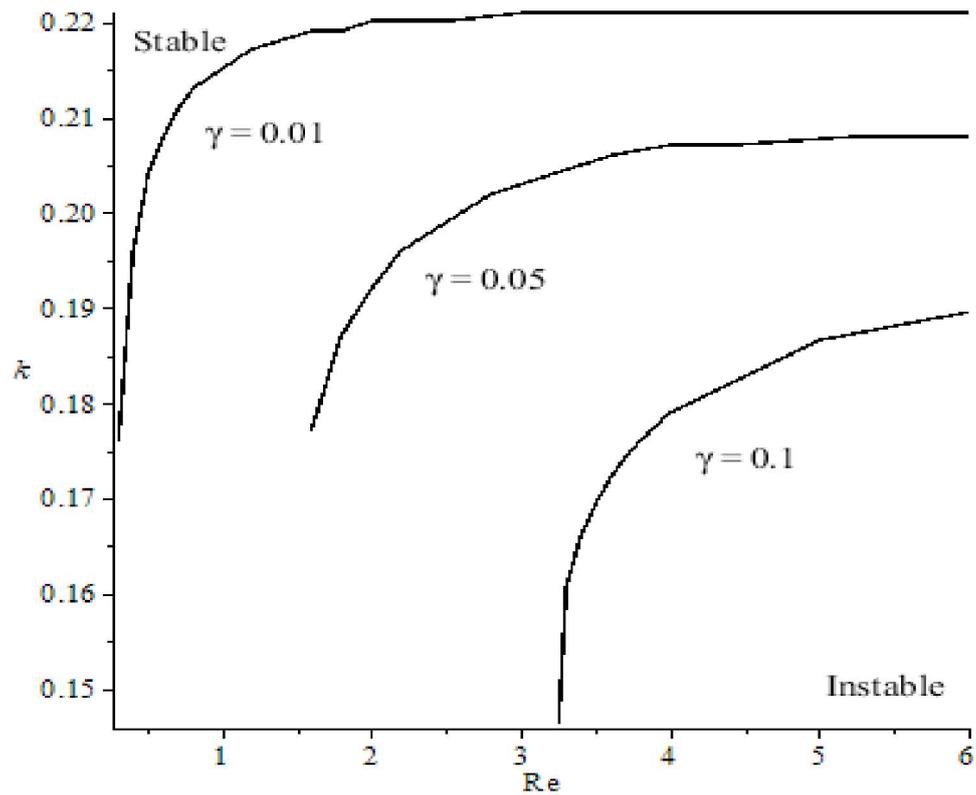


Figure 4.2- Effet de la variation du paramètre de contrôle γ sur les courbes de stabilité marginale pour : $\beta = \pi/2$, $\tilde{H} = 2/3$, $\rho = 0.9$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.9$, $we = 50$.

Analyse de stabilité linéaire

La figure 4.1 montre la variation du nombre d'onde marginale en fonction du nombre de Reynolds pour le cas $\beta = \pi/2$, $\tilde{H} = 2/3$, $\rho = 0.9$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.9$, $we = 50$. La courbe sépare la zone instable de la zone stable. On remarque que, très proche du nombre d'onde nulle ($k = 0$), une discontinuité de la courbe de stabilité par rapport à l'axe $k = 0$. Cette discontinuité vient de la condition de contrôle de l'écoulement par la paroi. Et il est justifié du fait que le problème d'Orr-Sommerfeld n'admet pas de développement en série entière par rapport à k au voisinage de zéro.

La figure 4.2 illustre l'effet de la variation du paramètre de contrôle γ sur les courbes de stabilité marginale. On peut remarquer que l'augmentation de γ accroît la gamme des nombres d'ondes instables ce qui est un effet déstabilisant.

5. Conclusion générale

Dans notre travail, on a effectué une analyse de stabilité temporelle de deux couches de fluides minces immiscible sur un plan incliné, donc on a tracé au finale les courbes de stabilité marginale et cela été effectuer pour différente valeurs du paramètre de contrôle. La résolution été effectuer numériquement en combinant la méthode de Riccati et le schéma de Ruge-Kutta.

Premièrement on a réussi l'application de la méthode de Riccati pour les deux fluides à surface libre et la présence d'une condition de raccordement entre la paroi solide et l'interface des deux fluides. Deuxièmement nous avons mis en évidence l'importance du paramètre de contrôle sur la stabilité de l'écoulement. Nos résultats montrent que l'aspiration du liquide stabilise l'écoulement.

Perspectives :

On souhaite généraliser se travail pour qu'il peut être exploité d'une manière approfondie et d'aboutir des résultats plus précis et aussi on peut faire élargir la recherche par exemple :

- Pour étudier le cas de deux fluides non newtoniens
- refaire le travail pour d'autre type de contrôle.
- Rajouter à l'étude des effets spéciaux (électrique, magnétique, thermique...).

Références bibliographiques

- [1] Kapitza P. L. and Kapitza S. P., Wave flow of thin layers of a viscous fluid, Zh. Eksp.
- [2] Liu, J., and Gollub, J. P., 1994. “Solitary wavel dynamics of film flows”. *Physics of Fluids*, 6(5), pp. 1702–1712
- [3] C.-S. Yih, “Stability of liquid flow down an inclined plane,” *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 3, pp. 321–334, 1963.
- [4] T. B. Benjamin, “Wave formation in laminar flow down an inclined plane,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 2, no. 06, pp. 554–573, 1957
- [5] KELLY, R. E., GOUSSIS, D. A., LIN, S. P. et HSU, F. K., 1989. The mechanism for surface wave instability in film flow down an inclined plane. *Phys. Fluids A* 1(5), 819-828.
- [6] SMITH, M. K., 1990. The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. *J. Fluid Mech.* 217, 469-485.
- [7] DEBRUIN, J. G., 1974. Stability of a Layer of Liquid Flowing Down an Inclined Plane. *J. Eng. Math.* 8, 259-270.
- [8] FLORYAN, J. M., DAVIS, S. H. et KELLY, R. E., 1987. Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane. *Phys. Fluids* 30(4), 983-989
- [9] CRAIK, A. D. D. et SMITH, F. I. P., 1968. The stability of free -surface flows with viscosity stratification. *J. Fluid Mech.* 34(2), 393-406.
- [10] HOOPER, A. P. et BOYD, W. G. C., 1987. Shear -flow instability due to a wall and a viscosity discontinuity at the interface. *J. Fluid Mech.* 179, 201-225.
- [11] KAO, T. W., 1965. Role of the Interface in the Stability of Stratified Flow down an Inclined Plane. *Phys. Fluids* 8(12), 2190-2194.

-
- [12] KAO, T. W., 1968. Role of viscosity stratification in the stability of two layer flow down an incline. *J. Fluid Mech.* 33, 561-572.
- [13] LOEWENHERZ, D. S. et LAWRENCE, C. J., 1989. The effect of viscosity stratification on the stability of a free surface flow at low Reynolds number. *Phys. Fluids A* 1(10), 1686-1693
- [14] CHEN, K., 1993. Wave formation in the gravity-driven low-Reynolds number flow of two liquid films down an inclined plane. *Phys. Fluids A* 5(12), 3038-3048
- [15] : [A.B.Thompson, S.N. Gomes, G.A. Pavliotis, D.T. Papageorgiou , “Stabilising falling liquid film flows using feedback control ”, *Physics of Fluids*, 28, 012107, 2016] .
- [16] A .Eljaouhry, S.Aniss : Etude de stabilité linéaire d’un écoulement sur un plan incliné en présence d’oscillations verticales et de surfactant , 13^{ème} congrès de mécanique 11-14 Avril 2017.
- [17] N.Malamataris, M.Vlachogiannis and V.Bontozoglou , Solitary waves on inclined films: flow structure and binary interactions, *Phys. Fluids* 14, (2002) 1082-1094.
- [18] Hu et al, Linear temporal and spatiotemporal stability analysis of two-layer falling films with density stratification, *Phys. Rev. E* 77, 026302 (2008).
- [19] M.Amaouche , N.Mehidi , N.Amatousse, Linear stability of a two-layer flow down an inclined channel: a second order weighted residual approach , *Phys. Fluids*, 19, 1-14 (2007)

[20] Séverine Millet. Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2007.

[21] M.R. SCOTT. An initial value method for the eigenvalue problem for systems of ordinary differential equations. *J. Comput. Phys.*, (12) :334.347, 1973.

[22] A. Davey. On the numerical solution of difficult boundary-value problems. *J.Comp. Phys.*, 35 :36.47, 1980.

[23] M. Amaouche A. Djema and H. Ait Abderrahmane. Film flow for power-law fluids : Modelling and linear stability. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 34 :70.84, 2012.

[24] A. Djema. Sur la dynamique non linéaire de l'écoulement d'un fluide non newtonien sur un plan incliné : modèles et bifurcations. Thèse de doctorat, Université A.Mira-Béjaïa, décembre 2016.