

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira de Béjaia  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques



Mémoire de fin cycle  
en vue de l'obtention du diplôme de Master en  
Mathématiques

*Spécialité : Probabilités Statistique et Applications*

Thème

---

Analyse de sensibilité et d'incertitude dans les systèmes  
d'attente via la méthode de Taylor et de Chaos

---

RÉALISÉ PAR :

Saoudi Ferial

DEVANT UN JURY COMPOSÉ DE :

M. OUAZINE Sofiane	Université A.Mira de Béjaia	Rapporteur
Mme. TIMERIDJINE Karima	Université A.Mira de Béjaia	Présidente
Mme. BOURAINE Louiza	Université A.Mira de Béjaia	Examinatrice

2023/2024

## *Remerciements*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenu durant tout mon cursus.

Je remercie chaleureusement mon promoteur *M<sup>r</sup> Ouazine*, pour son encadrement exceptionnel et son soutien indéfectible tout au long de la réalisation de ce travail. Ses précieux conseils, son expertise et sa rigueur scientifique ont été des atouts essentiels à la qualité de ce mémoire. Je le remercie également pour sa disponibilité et sa bienveillance, qui ont grandement facilité notre collaboration.

Je souhaite également remercier les membres du jury, *M<sup>me</sup> L Bouraine* et *M<sup>me</sup> K Timridjine*, d'avoir accepté d'évaluer mon travail et de participer à ma soutenance.

Je les remercie par avance pour leur lecture attentive de mon mémoire et pour les échanges constructifs que nous aurons lors de la soutenance.

*Feriel*

## *Dédicace*

*À mes parents,*

*Merci pour votre amour, votre soutien et vos sacrifices tout au long de mon parcours. C'est grâce à vous que j'ai pu mener à bien ce travail.*

*À la mémoire de ma chère grand-mère, Ce mémoire est dédié à ta mémoire, avec tout l'amour et le respect que je te porte.*

*Avec toute ma gratitude et mon affection,*

***Merci á tous.***

*Feriel*

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>5</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>6</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur les files d'attente</b>	<b>10</b>
1.1 Notions de base . . . . .	10
1.1.1 Processus stochastique . . . . .	10
1.1.2 Propriété : sans mémoire . . . . .	11
1.2 Chaîne de Markov à temps discret . . . . .	11
1.2.1 Classification des états d'une chaîne de Markov . . . . .	12
1.2.2 Comportement stationnaire d'une chaîne de Markov . . . . .	13
1.3 Modélisation d'une file d'attente . . . . .	13
1.3.1 Description d'un phénomène d'attente . . . . .	13
1.3.2 Notation de Kendall . . . . .	14
1.3.3 Analyse mathématique d'un système de file d'attente . . . . .	15
1.3.4 Performances d'un système de file d'attente . . . . .	16
1.3.5 Formules de Little . . . . .	16
1.4 Les types de modèles d'attente . . . . .	17
1.4.1 Files d'attente markoviennes . . . . .	17
1.4.2 Files d'attente non markoviennes . . . . .	17
1.5 Quelques systèmes de files d'attente . . . . .	18
1.5.1 Système de file d'attente M/G/1 . . . . .	18
1.5.2 Système de file d'attente M/G/1/N . . . . .	21
1.6 Revue des études réalisées . . . . .	21
<b>2 Analyse de sensibilité et d'incertitude</b>	<b>23</b>
2.1 Analyse de sensibilité . . . . .	23

2.1.1	Analyse de sensibilité locale . . . . .	24
2.1.2	Analyse de sensibilité globale . . . . .	24
2.1.3	Estimation des indices de sensibilité . . . . .	26
2.2	Analyse d'incertitude . . . . .	27
2.2.1	Différentes sources d'incertitude . . . . .	27
2.2.2	Méthode de développement en série de Taylor . . . . .	28
2.2.3	Présentation des polynômes de chaos . . . . .	30
2.2.4	Généralisation des polynômes de chaos . . . . .	33
2.2.5	Méthode de calcul des coefficients de polynôme de chaos . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Application sur le modèle de file d'attente M/G/1/N</b>	<b>38</b>
3.1	Analyse de sensibilité par la méthode de Sobol . . . . .	38
3.2	Analyse d'incertitude . . . . .	45
3.2.1	Développement en série de Taylor . . . . .	45
3.2.2	L'incertitude via la méthode de chaos polynomial . . . . .	49
3.3	Résultats numériques . . . . .	52
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>55</b>

# Table des figures

1.1	Structure d'un système de files d'attente. . . . .	14
3.1	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/M/1/4 . . . . .	41
3.2	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/E <sub>2</sub> /1/4 . . . . .	43
3.3	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/D/1/4 . . . . .	45

# Liste des tableaux

2.1	Correspondance entre les variables aléatoires et les polynômes orthogonaux . . .	33
3.1	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/M/1/4 . . . . .	40
3.2	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/E <sub>2</sub> /1/4 . . . . .	42
3.3	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/D/1/4 . . . . .	44
3.4	Espérance des composantes $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$ pour le modèle M/M/1/N. . . .	52
3.5	Variance des composantes $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$ pour le modèle M/M/1/N. . . .	52
3.6	Espérance des composantes $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$ pour le modèle M/D/1/N. . . .	53
3.7	Variance des composantes $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$ pour le modèle M/D/1/N. . . .	53
3.8	Espérance des composantes de la distribution stationnaire $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$ pour le modèle M/E <sub>2</sub> /1/N. . . . .	53
3.9	Variance des composantes de la distribution stationnaire $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$ pour le modèle M/E <sub>2</sub> /1/N. . . . .	54

# Introduction Générale

Aujourd'hui, la gestion efficace des files d'attente est devenue cruciale dans de nombreux domaines, soutenue par l'utilisation des mathématiques avancées. Parmi les outils les plus essentiels se trouvent les chaînes de Markov, qui ont évolué depuis leur origine dans les réseaux téléphoniques du début du XXe siècle pour devenir indispensables à la modélisation des systèmes dynamiques. Les systèmes de files d'attente, omniprésents dans les télécommunications, l'informatique, la santé et les transports, représentent un point critique où la demande de services rencontre la capacité disponible. Gérer ces flux efficacement est essentiel pour optimiser les opérations, améliorer l'expérience client et assurer la rentabilité des organisations. Cependant, modéliser ces systèmes n'est pas sans défis, principalement en raison de l'incertitude entourant les variables d'entrée. Cette incertitude peut introduire des variations significatives dans les résultats attendus et les performances mesurées. Pour répondre à ce défi, nous explorons dans ce mémoire deux approches clés :

- Analyse de sensibilité par la méthode de Sobol : Cette approche permet de quantifier l'impact de chaque paramètre du système sur ses performances.
- Analyse d'incertitude par deux méthodes :
  1. développement en série de Taylor : Cette méthode permet d'obtenir une approximation de l'incertitude infligée sur les paramètres du modèle.
  2. Polynôme de Chaos (PC) : ces polynômes permettent de modéliser l'incertitude en utilisant des polynômes orthogonaux pour représenter la réponse du système aux variables d'entrée incertaines.

Dans le domaine de la recherche sur les systèmes de files d'attente, plusieurs auteurs ont étudié l'impact des entrées incertaines sur les sorties des modèles. Par exemple, Kotzurek et Stoyan [51], Whitt [79], Zolotarev [85], Fricker et al. [33], Núñez-Queija et al. [8], Benaouicha et Aïssani [13], ainsi qu'Abbas et Aïssani [4] ont tous examiné comment les perturbations des paramètres peuvent influencer les distributions de probabilités des processus modélisés. Ces études utilisent diverses approches pour quantifier la sensibilité des systèmes de files d'attente, allant des méthodes statistiques aux théories des files d'attente et des processus stochastiques.

Lors de la modélisation des systèmes d'attente, il est essentiel de reconnaître que les paramètres du modèle ne sont pas toujours parfaitement déterminés et peuvent être affectés par une certaine incertitude. Cette incertitude introduit une variabilité significative dans les performances attendues du système. Afin de quantifier et de gérer cette incertitude, une approche probabiliste est adoptée où les paramètres du modèle sont traités comme des variables aléatoires. Cela conduit à considérer les performances du système également comme des variables aléatoires, nécessitant ainsi une analyse approfondie pour évaluer leur sensibilité aux variations des paramètres.



Les indices de Sobol [68] constituent l'une des méthodes d'analyse de sensibilité utilisées pour comprendre le fonctionnement des files d'attente en quantifiant l'impact de chaque paramètre sur la performance du système. En simulant différentes valeurs de ces paramètres et en mesurant les changements de performance, on attribue à chaque paramètre un indice de Sobol compris entre 0 et 1. Cet indice révèle l'influence relative de chaque paramètre sur les résultats du système, ce qui est essentiel pour optimiser ses performances.

Les indices de Sobol peuvent parfois être déterminés de manière analytique lorsque la fonction du modèle est connue. Cependant, cela n'est pas toujours faisable pour des modèles aux équations complexes avec de nombreux paramètres. Il est donc crucial de disposer de méthodes pour estimer ces indices.

Dans la littérature, plusieurs méthodes existent pour estimer les indices de sensibilité [68],[24] et [42]. Parmi celles-ci, on trouve les méthodes basées sur les échantillons Monte Carlo développées par Sobol [68], qui sont les plus simples à mettre en œuvre et les plus couramment utilisées. La méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test), développée par Cukier et al.[24], repose sur la décomposition de Fourier et réduit les décompositions multidimensionnelles à des décompositions unidimensionnelles, ce qui diminue le coût de calcul en remplaçant les intégrales multiples par une intégrale unidimensionnelle. Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur la méthode Monte Carlo de base pour estimer les indices de sensibilité. Cette méthode numérique est utilisée lorsque la distribution d'un échantillon ne peut être déterminée par un raisonnement mathématique. Elle repose sur le tirage de nombres aléatoires. Selon la méthode de Sobol, l'estimation des indices de sensibilité se fait en simulant deux échantillons à partir des grandeurs d'entrée, puis en estimant la variance conditionnelle pour chaque grandeur d'entrée en combinant ces deux échantillons.

Dans notre étude, nous utilisons le développement en séries de Taylor pour analyser les performances des systèmes étudiés. Elles permettent de représenter la performance du système en fonction d'un paramètre clé en calculant un nombre fini de dérivées d'ordre supérieur. Cela nous aide à évaluer comment de petites variations des paramètres affectent la distribution stationnaire du système. Les coefficients des séries de Taylor, basés sur la matrice de déviation décrite par Ouazine [61], nous permettent de quantifier précisément l'impact de ces perturbations sur les performances globales du système.

L'application des séries de Taylor dans l'évaluation des performances des réseaux stochastiques a été initiée par Zazanis [84] ainsi que par Gong et Hu [36]. Par la suite, Baccelli et Schmidt [10] ont approfondi cette méthode pour analyser les réseaux stochastiques. Cao [20] a ensuite établi l'utilisation des séries de Taylor pour déterminer la distribution stationnaire des chaînes de Markov à espace d'état fini. Heidergott et Hordijk [39] ont introduit une nouvelle approche pour ces séries appliquées aux chaînes de Markov avec un espace d'état général. Une méthode alternative basée sur les séries de Taylor pour les chaînes de Markov à espace d'état fini a été développée par Heidergott et al. [40].

Plus récemment, Abbas et ses collaborateurs ([3], [4], [5]) ont concentré leurs recherches sur l'estimation du reste des développements en séries de Taylor, proposant une nouvelle estimation pour celui-ci. Ils ont également mis au point une formule récursive pour la dérivée de la distribution stationnaire des chaînes de Markov à espace d'état fini et à temps discret. Dans des travaux plus récents, Abbas et al. [2] ont exploré la relation entre les bornes de perturbation des chaînes de Markov et l'estimation du reste des développements en séries de Taylor dans le cadre de perturbations linéaires.

En complément des séries de Taylor, Les polynômes de chaos permettent de représenter les réponses d'un système stochastique en fonction des variables aléatoires d'entrée. Cette technique est particulièrement efficace pour modéliser et quantifier l'incertitude, en utilisant une série de polynômes orthogonaux pour approximer la réponse du système.

La théorie des polynômes du chaos à été développée par Wiener [80] et a été largement utilisé dans divers domaines de l'ingénierie (Ghanem et Spanos [34]; Xiu et Karniadakis [83]). Elle consiste à construire la base à partir de polynômes orthogonaux. Cette approche utilise les coefficients du développement polynômial pour analyser l'incertitude et la sensibilité. Ces coefficients permettent d'approximer facilement des quantités telles que les moyennes et les variances des variables analysées. Les méthodes de calcul de ce développement polynômial sont classées en deux catégories : les méthodes intrusives, qui modifient directement le code de calcul (Le Maître et al. [53], Matthies et Keese [57]), et les méthodes non intrusives, qui utilisent le code existant sans le modifier pour estimer les coefficients à partir des résultats de simulations (Tatang et al. [75], Li et Zhang [55], Huang et al. [41], Sudret [70]). Notre étude se concentre particulièrement sur les polynômes de chaos calculés de manière non intrusive, en utilisant la méthode de régression pour estimer les coefficients, comme détaillé par Sudret [70].

Ce mémoire comprend trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

- Dans le premier chapitre, nous décrivons brièvement le formalisme des systèmes de files d'attente, puis nous présenterons une synthèse bibliographique concernant le système de files d'attente  $M/G/1/N$ .
- Dans le deuxième chapitre, nous nous pencherons sur l'estimation des indices de Sobol, une méthode d'analyse de sensibilité globale, nous présentons les méthodes d'analyse d'incertitude (développements en série de Taylor et polynômes de chaos).
- Le troisième chapitre est consacré à l'application de la méthode de développements en séries de Taylor et la méthode de développement en polynôme de chaos au système de files d'attente  $M/G/1/N$ .
- Le travail s'achève par une conclusion générale et une bibliographie.

---

# Chapitre 1

---

## Généralités sur les files d'attente

Les files d'attente sont largement utilisées dans une variété de domaines, et leur application s'étend à de nombreux secteurs (guichet de poste, trafic routier, central téléphonique, atelier de réparation, etc.). Voir par exemple [12],[37] et [49].

Dans ce chapitre, nous commencerons par explorer les concepts fondamentaux des chaînes de Markov, qui constituent une base essentielle pour la compréhension des files d'attente. Ensuite, nous plongerons dans une description complète des systèmes de files d'attente, en examinant en détail leur fonctionnement, leurs caractéristiques et les modèles mathématiques utilisés pour les analyser.

### 1.1 Notions de base

#### 1.1.1 Processus stochastique

**Définition 1.1.1** [12]

*Un processus stochastique  $\{X_t, t \in T\}$  est une famille de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeur dans un espace mesurable  $E$  (ensemble des états du processus). L'ensemble  $T$  des indices est l'espace des temps, avec  $T \subset \mathbb{N}$  ou  $T \subset \mathbb{R}^+$ .*

- Pour un  $t$  fixé dans  $T$ , l'application  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .
- Pour un  $\omega$  fixé dans  $\Omega$ , l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  décrit la trajectoire du processus.

**Remarque 1.1.1** [32]

1. On distingue plusieurs types de processus stochastiques suivant que  $T$  et  $E$  sont discrets ou continus.
2. Un processus stochastique est défini par la donnée  $X = (\Omega, \mathcal{A}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ , ou bien  $X = (\Omega, \mathcal{A}, (A_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  où  $(A_t)_{t \in T}$  est la filtration associée au processus  $(X_t)_{t \in T}$ .

**Définition 1.1.2** [60] *Un processus (aléatoire ou stochastique) rend compte de l'évolution, d'un phénomène aléatoire ; au cours du temps. La réalisation d'un processus est appelée trajectoire. On note  $X(t)$  l'état du phénomène au temps  $t$ .  $X(t)$  est une variable aléatoire.*

- La loi de  $X(t)$  dépend en général de  $t$ .

— Pour deux dates  $t_1$  et  $t_2$  quelconques,  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$  ne sont, en général, pas indépendantes. Un processus prend ses valeurs dans un espace des états et évolue dans un espace des temps

### 1.1.2 Propriété : sans mémoire

La propriété sans mémoire des processus stochastiques stipule que l'avenir d'un processus dépend uniquement de son état actuel, indépendamment de son passé.  $X$  est une variable aléatoire sans mémoire si :

$$P(X > t + t_0 | X > t_0) = P(X > t).$$

En particulier, la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est la seule loi continue sans mémoire.

Nous nous concentrerons uniquement sur les chaînes de Markov à temps discret, car elles fournissent un cadre suffisant pour modéliser et analyser les états du système à des instants précis.

## 1.2 Chaîne de Markov à temps discret

**Définition 1.2.1** [6] Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N})$ , qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire :  $X_n$  représente l'état du système à l'instant  $n$ .

La propriété fondamentale des chaînes de Markov, est que son évolution future ne dépend du passé qu'à travers de sa valeur actuelle, elle est donnée par la formule suivante :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad (1.1)$$

**Définition 1.2.2** On définit la probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  entre les instants  $(n)$  et  $(n + 1)$  par la quantité suivante :

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

**Remarque 1.2.1** Dans une Chaîne de Markov, les probabilités de passer d'un état à un autre peuvent généralement dépendre du temps écoulé entre les transitions. Cependant, lorsque ces probabilités ne changent pas en fonction du temps, nous appelons cela une chaîne de Markov homogène.

**Définition 1.2.3 (Matrice de transition)** On appelle matrice stochastique une matrice carrée  $(P_{ij})_{i,j \in \mathbb{E}}$  qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. Leurs éléments sont non négatifs :

$$P_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{E}.$$

2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 :

$$\sum_{j \in \mathbb{E}} P_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathbb{E}.$$

### 1.2.1 Classification des états d'une chaîne de Markov

**Définition 1.2.4** [54] Des états  $i$  et  $j$  sont dits en communication dans une chaîne de Markov si la probabilité de passer de l'état  $i$  à l'état  $j$  en un seul pas est non nulle, c'est-à-dire si  $P_{ij} > 0$ . Cela implique qu'il existe un chemin qui permet de passer directement de l'état  $i$  à l'état  $j$  en une seule transition.

#### Classe irréductible

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov d'espace d'états  $E$ .

**Définition 1.2.1** [27] Soient  $i, j \in E$ . On dit que  $j$  est accessible à partir de  $i$  et on note  $i \rightarrow j$  si  $\exists n \in \mathbb{N}$  :

$$P_{ij}^n = P(X_n = j | X_0 = i) > 0.$$

On dit que  $i$  et  $j$  communiquent si chacun est accessible à partir de l'autre. On note alors  $i \leftrightarrow j$ .

#### Récurrence et transience

**Définition 1.2.2** [47] Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov d'espace d'états  $E$  et  $i \in E$ . La variable aléatoire  $T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$  est appelée temps d'atteinte de  $i$  ou encore temps de retour à  $i$ , lorsque la chaîne  $(X_n)_{n \geq 0}$  part de l'état  $i$ . Par convention, lorsque pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_n \neq i$ , on pose  $T_i = +\infty$ .

**Définition 1.2.5** [47] Un état  $i \in \mathbb{E}$  est dit **récurent** si, partant de  $i$ , on y revient presque sûrement en temps fini.

$$P(T_i < +\infty | X_0 = i) = 1$$

dans le cas contraire, l'état  $i$  est dite **transitoire**, lorsque :

$$P(T_i = +\infty | X_0 = i) > 0$$

En d'autres termes, un état  $i$  est transitoire s'il existe une probabilité strictement positive de quitter cet état sans jamais y revenir.

**Lemme 1.2.1** [43] Si tous les états sont récurrents, la chaîne de Markov elle-même est dite récurrente, et si tous les états sont transitoires, la chaîne de Markov elle-même est dite transiente.

#### État absorbant

**Définition 1.2.3** Un état  $i \in E$  est dit absorbant si  $P_{ii} = 1$ , où  $P_{ij}$  représente la probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$ .

#### État périodique (périodicité)

**Définition 1.2.6** [59] La période  $d_i$  de l'état  $i \in \mathbb{E}$ , s'écrit :

$$d_i = \text{pgcd}\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Si  $d_i = 1$ , l'état  $i$  est apériodique. Dans le cas contraire, l'état  $i$  est périodique.

**Remarque 1.2.2** *L'état  $i$  tel que  $P_{ii} > 0$  est nécessairement apériodique, car on peut y retourner en tout temps entier.*

**Proposition 1.2.1** [17] *Si les états  $i$  et  $j$  communiquent alors ils ont la même période. Tous les états d'une même classe irréductible ont donc la même période. Si celle-ci vaut 1, la classe est apériodique.*

**Définition 1.2.7** *Une chaîne de Markov est dite ergodique si elle est à la fois récurrente positive et apériodique.*

## 1.2.2 Comportement stationnaire d'une chaîne de Markov

**Théorème 1.2.1** *la probabilité  $P_{ij}^{(n)}$  qu'une chaîne de Markov se retrouve dans l'état  $j$  après  $n$  étapes, si elle se trouve actuellement dans l'état  $i$ , est donnée par l'élément  $(i, j)$  de la matrice  $P^{(n)} = \left( P_{ij}^{(n)} \right)_{i,j \in \mathbb{E}}$  [18].*

*Si, partant d'une distribution initiale  $\pi^{(0)}$ , on peut trouver la distribution stationnaire  $\pi^{(n)}$  des états de la chaîne après  $n$  étapes :*

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)}.P^n$$

**Définition 1.2.8** [30] *Une distribution de probabilité  $\pi$  sur  $\mathbb{E}$  est dite stationnaire si elle satisfait :*

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}, \quad \forall j \in \mathbb{E},$$

avec :

$$\sum_{j \in E} \pi_j = 1.$$

**Théorème 1.2.2** [30] *Pour une chaîne de Markov irréductible et apériodique avec un espace d'états fini ou dénombrable infini, il existe une unique distribution stationnaire si et seulement si la chaîne est positive récurrente.*

## 1.3 Modélisation d'une file d'attente

### 1.3.1 Description d'un phénomène d'attente

Une file d'attente constitue un système comportant deux éléments principaux : un espace d'attente où les clients patientent et un espace de service où ils sont pris en charge par des serveurs disponibles. Les clients arrivent de manière aléatoire et doivent attendre dans la file jusqu'à ce qu'un serveur soit disponible pour les servir. Ce processus implique les phases d'arrivée, d'attente et de service des clients.

L'objectif de la théorie des files d'attente est d'analyser, modéliser et optimiser ces systèmes afin d'améliorer leur efficacité opérationnelle et leurs performances.

Comme illustré par la figure (1.1) :

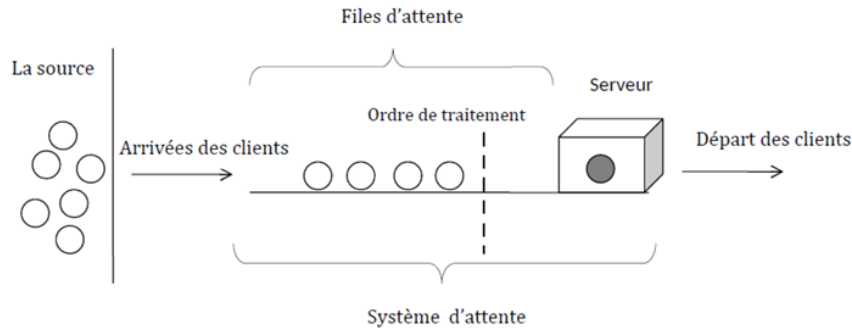


FIGURE 1.1 – Structure d'un système de files d'attente.

Afin de spécifier un système de file d'attente, On doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file [12] :

- **Processus des arrivées** : L'arrivée des clients à la station est décrite à l'aide d'un processus de comptage  $\{X(t); t > 0\}$ .

**Définition 1.3.1** [12] *Un processus de comptage  $\{X(t), t \geq 0\}$  est un processus de renouvellement si et seulement si : les durées des inter-arrivées des clients  $\{T_n, n \geq 1\}$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.*

- **Processus de service** :

**Définition 1.3.2** [12] *Soit  $t_n$  la variable aléatoire qui mesure l'instant de fin de service du  $n$ -ème client. Soit  $S_n$  la variable aléatoire désignant le temps de service du  $n$ -ème client (temps séparant le début de service de la fin de celui-la), on considère que les temps de service consécutifs sont décrits par des variables aléatoires  $(S_n)_{n \geq 1}$  indépendantes et identiquement distribuées.*

- **Structure et discipline de la file** :

- **Nombre de serveurs** : Le nombre de serveurs correspond au nombre maximal de clients pouvant être traités simultanément.
- **Capacité de la file** : La capacité d'accueil d'une file représente le nombre maximal de clients pouvant être présents dans le système à n'importe quel moment.

### 1.3.2 Notation de Kendall

En théorie des files d'attente, la notation de Kendall nous permet de décrire un système à l'aide de six paramètres. Elle porte le nom du mathématicien David George Kendall, qui l'a introduite en 1953. La notation de Kendall est définie comme suit :

$$T/Y/C/K/m/Z.$$

Voici la signification de ces symboles :

1. T : indique la nature de processus d'arrivée des clients. Les codes utilisés sont :
  - M(Markovien) : Inter-arrivées des clients sont indépendamment, identiquement distribuées selon une loi exponentielle.
  - D(Déterministe) : les temps inter-arrivées des clients ou les temps de service sont constants.
  - $E_k$  : Ce symbole désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi d'Erlang d'ordre  $k$ .
  - G (général) : Inter-arrivées de clients ont une distribution générale.
  - GI (loi générale indépendante) : Inter-arrivées des clients ont une distribution générale.



2.  $Y$  : décrit la distribution des temps de service des clients.
3.  $C$  : indique le nombre de serveurs.
4.  $K$  : capacité de la file, le nombre de clients dans le système y compris ceux en service.
5.  $m$  : population des usagers.
6.  $Z$  : discipline de service c'est la façon dont les clients sont ordonnés pour être servi.

Les disciplines utilisées sont les suivantes :

- **FIFO**(First In, First Out) ou **FCFS** (First Come, First Served) : sont deux méthodes de gestion de file où les clients sont servis dans l'ordre de leur arrivée. Cependant, elles diffèrent lorsque plusieurs serveurs sont impliqués. Dans un système FIFO, le premier client arrivé sera également le premier à être servi et à quitter la file. En revanche, dans un système FCFS, le premier client arrivé sera le premier à commencer son service, mais il n'est pas garanti qu'il sera le premier à le terminer si d'autres clients sont servis simultanément par d'autres serveurs.
- **LIFO**(Last In First Out) ou **LCFS** (last come, first served). Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé sera le premier traité. Les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file monoserveur.
- **SIRO** (Served In Random Order) : les clients sont servis aléatoirement.
- **PS** (Processor Sharing) : les clients sont servis de manière égale. [44] c'est-à-dire, tous les clients sont servis en même temps, mais avec une vitesse inversement proportionnelle au nombre de clients simultanément présents. Si le taux du service est égale à  $u$  et qu'à un instant donne il y a  $n$  clients à la station, tous les clients sont donc servis simultanément avec un taux  $u/n$  (Attention,dire que les  $n$  clients sont servis simultanément ne signifie absolument pas qu'il seront libéré simultanément). [9]
- **Round Robin** (Cyclique) : Tous les clients entrent en service a tour de rôle et effectuant un quantum  $Q$  de leur service et sont remplacés dans la file, jusqu'à ce que leur service sont totalement accompli.
- **avec priorité** : Dans les systèmes de files d'attente avec priorité, chaque client se voit attribuer une priorité (qui peut être statique ou dynamique, absolue ou relative). Le serveur sélectionne alors les clients en fonction de leur niveau de priorité.
  - **Priorité relative** : Les clients accèdent au service selon leur niveau de priorité. La file d'attente est organisée de manière à ce que les clients avec des priorités plus élevées soient servis avant ceux avec des priorités plus basses.
  - **Priorité absolue** : Le service d'un client en cours peut être interrompu dès qu'un client avec une priorité supérieure arrive. Le client dont le service a été interrompu est remplacé en tête de file pour reprendre le service une fois que les clients à priorité plus élevée ont été servis.

**Remarque 1.3.1** *si dans la notation de Kendall les trois (3) caractères ( $K, m, Z$ ) sont omis (sont pas données), ils sont considérées par défaut  $K = \infty$ ,  $m = \infty$ ,  $Z = FIFO$ . alors, la notation devient  $T/Y/C$ .*

### 1.3.3 Analyse mathématique d'un système de file d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique.

On s'intéresse principalement au processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  : "Nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ).". En fonction des paramètres d'entrée, on cherche à déterminer :



**Régime transitoire :** Revient à déterminer les probabilités d'états  $P_n = P(X(t) = n)$  qui dépendent de la distribution initiale de processus. On cherche à déterminer comment ces probabilités évoluent au fil du temps  $t$ .

**régime stationnaire** du processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(X(+\infty) = n) = P(X = n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

où  $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelée distribution stationnaire du processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ .

### 1.3.4 Performances d'un système de file d'attente

Les performances d'une file d'attente sont évaluées pour déterminer ou estimer les performances du système dans des conditions de fonctionnement spécifiques.

Cette évaluation se concentre généralement sur le régime stationnaire, et les mesures les plus couramment utilisées comprennent :

- $N$  : le nombre de clients dans le système ;
- $L$  : Nombre moyen de clients dans le système ;
- $L_q$  : Nombre moyen de clients dans la file ;
- $T$  : le temps de séjours dans le système ;
- $W$  : temps moyen de séjour d'un client dans le système ;
- $W_q$  : temps moyen d'attente d'un client dans la file ;
- $W_q^*$  : temps moyen d'attente d'un client qui est obligé d'attendre ;
- $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$  : taux d'occupation du système ;
- $\mathbb{U}$  : taux d'occupation des serveurs ;
- $P_0$  : probabilité que le système soit vide.

Soient les paramètres suivantes :

$\lambda$  : le taux d'arrivées de client dans le système ;

$\mu$  : Taux de service ;

$1/\lambda$  : intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives ;

$1/\mu$  : durée moyenne de service ;

### 1.3.5 Formules de Little

La formule de Little (Démontrée par Little) [56] est un résultat clé et pratique de la théorie des files d'attente. Elle relie simplement le temps moyen passé par un client dans le système au nombre moyen de clients dans le système, simplifiant ainsi les calculs de performance.

Cependant, cette formule ne s'applique qu'aux systèmes stables. La loi de Little s'exprime telle que dans le théorème 1.4.1 suivante :

**Théorème 1.3.1** *La relation entre le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour d'un client dans le système est donnée par la formule :*

$$L = \lambda_e \cdot W.$$

avec,  $\lambda_e$  : Taux d'entrée dans le système.

*La relation entre le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen d'attente d'un client est donnée par la formule suivante :*

$$L_q = \lambda_e \cdot W_q.$$

D'autres relations :

- $L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$ .
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ .

**Remarque 1.3.2 :**

- Si la capacité du système est infinie  $\lambda_e = \lambda$ .
- Si la capacité du système est limitée  $\lambda_e < \lambda$ .

## 1.4 Les types de modèles d'attente

### 1.4.1 Files d'attente markoviennes

Les chaînes de Markov sont particulièrement adaptées pour modéliser les systèmes de files d'attente où les temps inter-arrivées et les temps de service suivent des lois exponentielles indépendantes (modèle M/M/1). Cette propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite grandement l'analyse mathématique de ces systèmes. Pour les étudier, on introduit souvent un processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  représentant le nombre de clients présents, dont l'évolution temporelle est entièrement déterminée par la propriété d'indépendance du passé, caractéristique des chaînes de Markov. Ainsi, les chaînes de Markov constituent un outil puissant pour modéliser et analyser ces systèmes de files d'attente, grâce à leurs propriétés markoviennes qui permettent de simplifier grandement l'étude de ces processus stochastiques dynamiques.

### 1.4.2 Files d'attente non markoviennes

Lorsque les temps entre les arrivées ou les durées de service ne suivent plus une distribution exponentielle, ou lorsque des paramètres supplémentaires sont introduits pour capturer des spécificités du problème, on obtient un modèle non markovien. Cette complexité rend l'analyse mathématique très difficile. Pour simplifier l'étude, on utilise alors l'une des méthodes suivantes pour transformer le modèle en un processus de Markov :

1. **Méthode des étapes d'Erlang** : consiste à diviser une durée en plusieurs étapes fictives, chacune ayant une distribution exponentielle. Toute distribution de durée de vie ayant une transformée de Laplace rationnelle peut être approximée par une loi de Cox, qui est un mélange de distributions exponentielles. Cette approche simplifie l'analyse en transformant des modèles complexes en processus markoviens par étapes.
2. **Méthode de la chaîne de Markov induite** : Élaborée par Kendall [48], est couramment utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instantanés  $1, 2, 3, \dots, n$  (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite  $(X_n, n \geq 0)$ , où  $X_n = X(n)$  soit markovienne et homogène.
3. **Méthode des événements fictifs** : Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

4. **Simulation** : La simulation implique de reproduire artificiellement un processus réel sur un ordinateur. Elle permet l'étude des systèmes d'attente les plus complexes, la prédiction de leurs comportements et le calcul de leurs caractéristiques. Bien que les résultats obtenus soient approximatifs, ils peuvent être utilisés avec une précision satisfaisante. Cette méthode repose sur la génération de variables aléatoires suivant les lois qui régissent le système.
5. **Méthode des variables supplémentaires** : Elle consiste à compléter l'information sur le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus  $(X(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n), t \geq 0)$ . Les variables  $A(t_k)$  avec  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  sont dites supplémentaires.

## 1.5 Quelques systèmes de files d'attente

### 1.5.1 Système de file d'attente M/G/1

Le système M/G/1 est un modèle de file d'attente où les arrivées suivent un processus de Poisson (Markovien) de paramètre  $\lambda$ , mais les temps de service suivent une distribution générale  $B(\cdot)$  de taux  $\mu$ . Ce système comporte un seul serveur. Une discipline de service FIFO (First In, First Out). La propriété du Markov n'étant pas vérifiée pour le processus  $\{X_t, t \geq 0\}$ , son analyse se fera par l'une des méthodes d'analyse des processus non markoviens.

**Définition 1.5.1** [71] *Dans une file M/G/1 avec arrivées Poissonniennes de taux  $\lambda$  et services indépendants de durée moyenne  $\mathbb{E}(Y)$ , si  $p_0$  est la probabilité pour que le serveur soit inoccupé, alors :*

$$1 - p_0 = \lambda \mathbb{E}(Y).$$

#### La chaîne de Markov induite :

Considérons le processus  $X(t)$  : le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  aux instants  $(t_n, n = 1, 2, \dots)$  ou  $t_n$  est l'instant de départ du  $n$ -ème client. On définit ainsi le processus stochastique à temps discret  $\{X_n = X(t_n); n = 1, 2, \dots\}$  représentant le nombre de clients dans le système juste après le départ du  $n$ -ème client. La variable aléatoire  $X_n$  est une chaîne de Markov a temps discret.

On considère le processus  $A_n$  : "le nombre de clients qui entrent dans le système pendant que le  $n$ -ème client est servi". Les variables aléatoires  $A_n$  sont indépendantes entre elles ; leur distribution commune est donnée par :

$$\mathbb{P}_r[A_n = k] = a_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Alors,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1, \\ A_{n+1} & \text{si } X_n = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

tel que, l'équation fondamentale de la chaîne s'écrit sous la forme suivante :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + A_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

avec :

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{Si } X_n > 0 \\ 0 & \text{Si } X_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ceci montre que  $X_{n+1}$  ne dépend que de  $X_n$  et de  $A_{n+1}$  et non pas des valeurs de  $X_{(n-1)}, X_{(n-2)}, \dots$ . Ce qui signifie que la suite  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  ainsi définie est la chaîne de Markov induite du processus  $\{X(t); t \geq 0\}$ .

**régime transitoire**

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite  $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$  sont données par :

$$P_{ij} = \mathbb{P}_r[X_{n+1} = j | X_n = i] = \begin{cases} P_{0j} = a_j, & \text{Si } j \geq 0, \quad i = 0; \\ P_{ij} = a_{j-i+1} & \text{Si } 1 \leq i \leq j + 1; \\ P_{ij} = 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

On en déduit que la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.5.1** 1. L'expression (1.4) permet de vérifier la propriété de Markov.

2. c'est une chaîne de Markov irréductible, Puisqu'il est possible de passer de chaque état à n'importe quel autre état.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} k.P(A_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} dB(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t} dB(t) \\ &= \lambda \int_0^{\infty} t dB(t) \\ &= \lambda \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{u} = \varphi. \end{aligned}$$

**Régime stationnaire**

Supposons que  $\varphi < 1$ , et sois  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots)$  la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$  ou ;

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = k]$$

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution  $\pi$  elle-même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante  $\Pi(Z)$ . Ceci, en utilisant la définition de la distribution de probabilité discrète stationnaire par rapport à une matrice stochastique  $P$ ,

$$\pi.P = \pi$$

et la fonction génératrice de la distribution stationnaire s'écrit comme suit :

$$\pi(Z) = \frac{\pi_0 P(Z)(Z-1)}{Z - P(Z)}. \quad (1.5)$$

Cette formule est connue sous le nom de la formule de **Pollaczek-Khinchine** avec :

$$P(Z) = \sum_{j \geq 0} P_j Z^j = \int_0^\infty e^{\lambda(Z-1)s} dB(s)$$

C'est la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service,  $Z \in \mathbb{C}$ ,  $|Z| < 1$ . De la relation (1.5), on tire  $A_{n+1} = X_{n+1} - X_n + \delta_n$ , puisqu'on se trouve en régime stationnaire,

$$\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(\delta_n) = \mathbb{P}r[X_n > 0] = 1 - \mathbb{P}r[X_n = 0].$$

donc on a,

$$\mathbb{E}(A_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}r[X_n = 0].$$

Où,  $\delta$  : est égale à l'espérance mathématique de  $A_n$ . Alors,  $\pi_0 = 1 - \delta$ . Et la formule (1.15) s'écrit encore :

$$\pi(Z) = B^*(\lambda - \lambda Z) \frac{(1 - \delta)(Z - 1)}{Z - B^*(\lambda - \lambda Z)}. \quad (1.6)$$

Où  $B^*(.)$  est la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service.

### Mesures de performance

- Le nombre moyen de client dans le système :

$$L = \mathbb{E}(X) = \varphi + \frac{\varphi^2 + \lambda^2 * Var(Y)}{2(1 - \varphi)}.$$

- le nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = L - \varphi = \frac{\varphi^2 + \lambda^2 * Var(Y)}{2(1 - \varphi)}.$$

- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \left( Var(Y) + \frac{1}{\mu^2} \right)}{2(1 - \varphi)}.$$

- temps moyen d'attente d'un client dans la file :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda \left( Var(Y) + \frac{1}{\mu^2} \right)}{2(1 - \varphi)}.$$

Où  $Y$  est la durée de service et  $Var$ , la variance.

### 1.5.2 Système de file d'attente M/G/1/N

Le système M/G/1/N est un modèle de file d'attente où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et des temps de service distribués selon une distribution générale  $B(\cdot)$  de taux  $\mu$ . Avec un unique serveur et une capacité maximale de  $N$  clients, incluant ceux en service et en attente, le système gère les arrivées et les services selon une discipline FIFO (First In, First Out). L'état de ce système d'attente est gouverné par le processus stochastique à temps discret  $\{X_n = X(t_n), n = 1, 2, \dots\}$ , où  $t_n$  représente l'instant de départ du  $n$ -ème client, et  $X_n$  prend des valeurs dans un espace d'états discret  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . [12]

Contrairement aux processus markoviens, l'analyse de ce modèle se fait par des méthodes adaptées aux processus non markovien telles que les techniques de transformée de Laplace ou des simulations informatiques.

**Régime stationnaire :** Soit  $A_n$  le nombre de clients entrant dans le système durant le service du  $n$ -i<sup>é</sup>me client. Les variables aléatoires  $A_n$  sont indépendantes et leur distribution est :

$$\mathbb{P}_r[A_n = k] = a_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Et, la **matrice de transition** du modèle est donnée comme suit ;

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} a_k \\ \vdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-3} & 1 - \sum_{k=0}^{N-3} a_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 1 - a_0 \end{pmatrix}$$

La chaîne de Markov  $X_n$  étant aperiodique et irréductible, alors elle est ergodique et admet une distribution stationnaire unique, notée  $\pi$ .

## 1.6 Revue des études réalisées

Pour analyser les métriques de performance de la file d'attente M/G/1/N, différentes méthodes d'approximation ont été explorées, dont l'analyse numérique polynomiale, notamment étudiée par Abbas et al [4]. Ces approches permettent de modéliser les performances du système en fonction de ses paramètres.

Le modèle de file d'attente M/G/1/N, qui représente un système à serveur unique avec une capacité maximale de  $N$  clients, a fait l'objet de nombreuses études en raison de ses applications pratiques dans divers domaines tels que les télécommunications, les réseaux informatiques et les systèmes de production. Takács [74] a été l'un des premiers à développer des formules pour les probabilités d'état en régime permanent. Kleinrock [50] a ensuite posé les bases en analysant les temps d'attente moyens, les probabilités de rejet, et les distributions stationnaires en utilisant des techniques de transformées de Laplace. Cohen [23] a poursuivi ces travaux en approfondissant l'analyse des systèmes à serveur unique. Chaudhry et Templeton [21] ont exploré des extensions avec des arrivées par lots. Grassmann [37] a proposé des méthodes

numériques pour résoudre les équations de Chapman-Kolmogorov. Boxma et Groenendijk [15] ont analysé des files d'attente connectées par un serveur commutant. Sauer et Chandy [67] ont utilisé des techniques de simulation pour modéliser des distributions réalistes de temps de service et quantifier leurs impacts. Whitt [78] a développé des approximations pour les systèmes M/G/1/N basées sur des moments et des approches de diffusion. Abate et Whitt [1] ont exploré des variantes avec des temps de service dépendants de l'état. Sze [72] a étudié des modèles avec des distributions de temps de service tronquées. Medhi [58] a approfondi les analyses de performances des systèmes M/G/1/N, incluant des temps de séjour et des distributions de files d'attente. Yechiali, Hassin et Haviv [38] se sont concentrés sur les stratégies de service, la gestion des priorités et les aspects économiques. Kulkarni [52] a inclus des mécanismes de feedback et des interruptions pour modéliser des systèmes plus complexes.

Ces recherches démontrent l'importance et la polyvalence du modèle M/G/1/N, offrant des insights précieux pour la gestion et l'optimisation des systèmes de file d'attente à capacité limitée.

Dans les chapitres suivants, nous explorerons en détail différentes méthodes d'approximation, notamment la série de Taylor et les polynômes du chaos, Ainsi l'estimation des indices de sobol.

---

## Chapitre 2

---

# Analyse de sensibilité et d'incertitude

L'analyse de sensibilité permet de hiérarchiser l'influence des différentes entrées d'un modèle sur une variable de sortie. Elle identifie quelles entrées ont le plus d'impact sur la sortie et doivent donc être connues avec précision pour réduire l'incertitude. Dans ce chapitre, nous abordons l'analyse de sensibilité et la notion de l'incertitude paramétrique sur les modèles mathématiques. La première section traite des mesures de sensibilité, en mettant en lumière la décomposition de la variance et en se concentrant notamment sur les indices de Sobol.

La seconde partie sera consacrée à l'analyse d'incertitude, qui vise à quantifier l'impact global des incertitudes des paramètres sur les prédictions du modèle. Deux méthodes principales seront explorées : le développement en série de Taylor et la méthode de chaos polynomial.

### 2.1 Analyse de sensibilité

Considérons un modèle mathématique qui a un ensemble de variables d'entrée aléatoires  $X$ , fait correspondre, via une fonction  $f$  déterministe, une variable de sortie  $Y$  (ou réponse) aléatoire. Soit :

$$\begin{aligned} f : \Omega^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow Y = f(X), \end{aligned}$$

où  $(\mathbf{X}) = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  est un vecteur de  $p$  variables d'entrée.

L'analyse de sensibilité permet d'étudier un modèle mathématique en évaluant l'impact de la variabilité des paramètres sur la variable de sortie. Elle permet d'identifier les paramètres ayant le plus d'influence sur la variabilité de la sortie, ce qui est crucial pour réduire la variance lorsque l'incertitude sur la sortie est élevée. En identifiant les paramètres moins importants, on peut simplifier le modèle en fixant ces paramètres à une valeur standard sans altérer de manière significative les résultats. Cela permet de simplifier le modèle en réduisant le nombre de variables à prendre en compte lors des calculs, ce qui peut rendre le modèle plus facile à gérer et moins coûteux en termes de calculs.

Différentes approches d'analyse de sensibilité ont été proposées dans la littérature Cukier et al [26], Saltelli et al [66], Sobol [68]. Généralement, on peut classer ces méthodes en deux groupes : *locale* et *globale*



### 2.1.1 Analyse de sensibilité locale

L'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations autour d'une valeur  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0)$  des entrées se répercutent sur la valeur de la sortie. Les indices de sensibilité définis par :

$$S_i = \frac{\partial Y}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_p^0).$$

Pour une revue de ces méthodes, le lecteur pourra se référer à Turanyi [77].

### 2.1.2 Analyse de sensibilité globale

#### Méthode basée sur la régression

Les méthodes basées sur la régression utilisent la régression linéaire entre les variables d'entrée et les variables de sortie pour estimer la sensibilité du modèle. Cependant, elles présentent des limitations importantes :

- La linéarisation n'est pas valable si le modèle n'est pas strictement monotone.
- Elles ont tendance à sous-estimer les effets totaux provenant des interactions entre les variables d'entrée.

#### Méthode basée sur la décomposition de variance

L'analyse de sensibilité repose sur la décomposition de la variance de la réponse du modèle comme la somme de la contribution de chaque variable en entrée, ainsi que toutes les combinaisons possibles d'interaction entre eux. Ces méthodes sont souvent appelées ANOVA (Analysis Of VAriance) [28] en statistique. Les indices de Sobol sont un exemple de méthode basée sur la variance et ont été développés selon cette approche.

La plupart des méthodes basées sur la variance dépendent de l'estimation de la quantité suivante :

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)}.$$

Où  $Y$  désigne la variable de sortie,  $X_i$  désigne une variable d'entrée,  $\mathbb{E}(Y | X_i)$  représente l'espérance conditionnelle de  $Y$  pour une valeur fixée de  $X_i$ , et la variance est calculée sur toutes les valeurs possibles de  $X_i$ .  $\text{Var}(Y)$  est la variance totale de la variable de sortie  $Y$ .

#### Indice de sensibilité : la méthode de Sobol

Sobol [68] a introduit cet indice de sensibilité en décomposant la fonction  $f$  du modèle en somme de fonctions de dimensions croissantes :

$$Y = f(X_1, \dots, X_p), \quad (2.1)$$

$$= f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1,2,\dots,p}(X_1, X_2, \dots, X_p). \quad (2.2)$$

ou,

$$f_0 = \mathbb{E}(Y).$$

$$\begin{aligned}
 f_i(X_i) &= \mathbb{E}(Y|X_i) - \mathbb{E}(Y), \\
 f_{ij}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(Y|X_i, X_j) - \mathbb{E}(Y|X_i) - \mathbb{E}(Y|X_j) + \mathbb{E}(Y), \\
 f_{ijp} &= \mathbb{E}(Y|X_i, X_j, X_p) - \mathbb{E}(Y|X_i, X_j) - \mathbb{E}(Y|X_i, X_p) - \mathbb{E}(Y|X_j, X_p).
 \end{aligned}$$

**Théorème 2.1.1** [64] "la décomposition de Sobol de la variance"

$$V = \sum_{i=1}^p V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} + \dots + V_{1,2,\dots,p}, \quad (2.3)$$

Où,

$$\begin{aligned}
 V_i &= V(\mathbb{E}[Y|X_i]). \\
 V_{ij} &= V(E[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j. \\
 V_{ijk} &= V(\mathbb{E}[Y|X_i, X_j, X_k]) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k. \\
 V_{1,\dots,p} &= V - \sum_{i=1}^p V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq p} V_{i_1,\dots,i_{p-1}}.
 \end{aligned}$$

La décomposition de la variance nous permet de calculer les différents indices de Sobol jusqu'à l'ordre  $p$ .

On peut définir les **indices de sensibilité de premier ordre** [68] :

$$S_i = \frac{V(\mathbb{E}[Y|X_i])}{V(Y)} = \frac{V_i}{V}.$$

Il quantifie la sensibilité de la sortie  $Y$  à la variable d'entrée  $X_i$ , ou encore la part de variance de  $Y$  due à la variable  $X_i$ .

les **indices de sensibilité de deuxième ordre** :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V}.$$

expriment la sensibilité de la variance de  $Y$  à l'interaction des variables  $X_i$  et  $X_j$ .

les **indices de sensibilité de troisième ordre** :

$$S_{ijk} = \frac{V_{ijk}}{V}.$$

expriment la sensibilité de la variance de  $Y$  à l'interaction des variables  $X_i, X_j$  et  $X_k$ .

**Propriété 2.1.1** [68] La somme des indices de Sobol du premier jusqu' à l'ordre  $p$  est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^p S_i + \sum_{i < j} S_{ij} + \dots + S_{i_1,\dots,i_s} = 1. \quad (2.4)$$

Et, La valeur de l'indice de sensibilité  $S_i$  est comprise entre 0 et 1.

$$S_{i_1,\dots,i_s} \in [0, 1], \quad 1 \leq s \leq p. \quad (2.5)$$

**Remarque 2.1.1** Si ( $S_i$ ) est proche de 1, cela signifie que  $X_i$  contribue de manière significative

à la variabilité du modèle. À l'inverse, si  $S_i$  est proche de 0, cela indique que  $X_i$  a une influence négligeable. Dans ce cas, les variables de l'ensemble  $X_i$  peuvent être fixées à une valeur nominale et ne sont plus considérées comme impactant la variance de la sortie.

## Indice de sensibilité totale

$$S_i^{tot} = \frac{\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} V_{i_1, \dots, i_s}}{V} = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} S_{i_1, \dots, i_s} \quad (2.6)$$

Cet indice mesure l'effet total de la variable  $X_i$ , incluant ses interactions avec toutes les autres variables. C'est-à-dire, il représente la proportion de la variance de la sortie due à  $X_i$  et à toutes les interactions entre  $X_i$  et les autres variables.

### 2.1.3 Estimation des indices de sensibilité

Le calcul exact des indices de Sobol, n'est pas toujours réalisable (intégrale de grande dimension, forme non analytique du modèle ...). En effet, les distributions des paramètres d'entrée et l'expression de la sortie du modèle  $Y$  peuvent être extrêmement complexes. Les intégrales qui définissent les variances et les variances d'espérances conditionnelles nécessaires pour ces indices peuvent être impossibles à résoudre analytiquement.

Par conséquent, il est souvent nécessaire d'utiliser des méthodes d'approximation numérique. Dans la littérature, il existe plusieurs techniques pour l'estimation des indices de Sobol[11],[22]. Parmi les méthodes les plus couramment utilisées pour estimer les indices de Sobol figurent les méthodes Monte-Carlo [11],[22].

#### Estimation des indices de Sobol par la méthode Monte-Carlo

Considérons un échantillon de taille  $N$ ,  $X = (X_{k1}, \dots, X_{kp})_{1, \dots, N}$  pour  $k = 1, \dots, N$ , constitué de réalisations de variables d'entrée indépendantes  $(X_1, \dots, X_p)$ . Pour estimer l'espérance de  $E(Y) = f_0$ , et sa variance,  $Var(Y) = V$ , nous utilisons les formules suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = f_0 = \int_{\Omega^p} f(X) dX = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k).$$

$$V = \int_{\Omega^p} f^2(X) dX - f_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(X_k) - f_0^2.$$

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation de la variance de l'espérance conditionnelle :

$$V_i = Var[E(Y|X_i)].$$

Pour estimer la variance de l'espérance conditionnelle, il est proposé dans [14] d'utiliser deux échantillons indépendants  $X_{(N)}^{(1)}$  et  $X_{(N)}^{(2)}$  suivant la même loi de probabilité. L'idée est de fixer le paramètre  $X_i$  dans le premier échantillon et de prendre les autres paramètres du deuxième échantillon. Ainsi, la variance de  $X_i$  est estimée par :

$$V_i = V - \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} [f(X) - f(X_i, X'_{\sim i})]^2 dX dX'_{\sim i}, \quad (2.7)$$

Où  $f$  est une fonction donnée et  $X'_{\sim i}$  st le vecteur  $X$  sans sa  $i$ -ème composante  $X_i$ .

Pour une estimation pratique, cela se réduit souvent à une moyenne empirique sur un échantillon fini :

$$V_i \approx V - \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [f(X_k) - f(X_{ik}, X'_{\sim ik})]^2, \quad (2.8)$$

où  $X_k$  sont des échantillons de la loi de probabilité, et  $X_{ik}$  est l'échantillon  $k$  du premier ensemble avec  $X_i$  fixé.

d'où le premier indice de sensibilité est :

$$S_i = \frac{V_i}{V}. \quad (2.9)$$

Dans le cas de sensibilité totale, nous fixons le paramètre  $X_i$  du deuxième échantillon et on prend les autres paramètres du premier échantillon.

$$V_i^{tot} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} [f(X) - f(X'_i, X_{\sim i})]^2 dX dX'_{\sim i} \approx \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [f(X_k) - f(X'_{ik}, X_{\sim ik})]^2. \quad (2.10)$$

D'où l'indice de sensibilité totale est estimé comme suit :

$$S_i^{tot} = \frac{V_i^{tot}}{V}.$$

## 2.2 Analyse d'incertitude

Tout modèle mathématique comporte une part d'incertitude. En effet, même les modèles les plus sophistiqués reposent sur des hypothèses simplificatrices et des données imparfaites. Cette incertitude peut provenir de mesures approximatives, de simplifications dans la modélisation, ou de données manquantes.

L'analyse d'incertitude vise à identifier, quantifier et gérer ces différentes sources d'incertitude. Son objectif est d'estimer l'impact de ces incertitudes sur les résultats du modèle, afin d'en évaluer la fiabilité et les limites.

### 2.2.1 Différentes sources d'incertitude

Les différentes sources d'incertitude peuvent être classées en trois catégories :

- **L'incertitude structurelle** : Cette incertitude surgit au moment du passage du phénomène réel au modèle mathématique. En effet, les modèles mathématiques sont une approximation de la réalité, basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices constituant des sources d'incertitude [29].
- **L'incertitude numérique** : Les modèles mathématiques sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielles traduisant la variation dans le temps et/ou dans l'espace des échanges de quantité de mouvement, de masse ou d'énergie. Pour ces modèles, il n'existe généralement pas de solution analytique, d'où le recours à des solutions numériques. Ces solutions contiennent des imprécisions inhérentes à toute simulation numérique, car nous approchons un système continu par un autre discret (dans l'espace et/ou dans le temps)

[29].

- **L'incertitude paramétrique** : Les modèles contiennent souvent un nombre important de paramètres présentant des incertitudes importantes liées à leur estimation, tels que les constantes physiques, les valeurs initiales, les conditions aux limites, la géométrie initiale, etc. On distingue alors l'incertitude aléatoire de l'incertitude épistémique. L'incertitude aléatoire provient de la variabilité naturelle des paramètres d'entrée du modèle, et elle est parfois expliquée comme étant responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète plusieurs fois dans des conditions identiques une expérience. Alors que l'incertitude épistémique découle du manque de connaissance, telle que l'estimation des paramètres par le biais d'un échantillon ne contenant pas assez de mesures, ou un échantillon non représentatif. Cette incertitude peut être réduite en recueillant des informations supplémentaires. Connaître l'influence des différents paramètres d'entrée et quantifier l'impact de leur incertitude sur la réponse du modèle constitue alors l'objet de la "propagation des incertitudes" (Saltelli et al 2006) [65].

## Objectifs principaux de la propagation d'incertitude

Les principaux objectifs de la propagation d'incertitudes sont les suivants :

- Assurer que de petites perturbations des données incertaines ne modifient pas radicalement le comportement global du modèle.
- Comparer les résultats simulés et les mesures expérimentales.
- Mesurer la variation des résultats autour de la moyenne ou de la valeur nominale de la réponse du système.
- Quantifier la variabilité des résultats.
- Identifier les paramètres les plus influents sur l'incertitude.

Plusieurs méthodes de propagation d'incertitude ont été proposées dans la littérature, classées généralement en deux grandes catégories : les méthodes numériques telles que la méthode de Monte Carlo et l'échantillonnage Latin Hypercube (LHS), et les méthodes analytiques. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons particulièrement sur deux approches analytiques : les développements en séries de Taylor et les développements en polynômes de chaos.

### 2.2.2 Méthode de développement en série de Taylor

La méthode de développement en série de Taylor, initiée par le mathématicien Brook Taylor [76], Utilisée dans divers domaines tels que les équations différentielles, les systèmes non linéaires et les systèmes de files d'attente, elle permet d'obtenir des approximations polynomiales de fonctions autour de points d'intérêt où l'expression analytique peut être complexe ou inconnue. En exploitant les dérivées successives connues, cette méthode assure des approximations polynomiales précises dans le voisinage du point d'intérêt.

Dans cette partie, nous présentons une nouvelle approche basée sur les développements en série de Taylor proposé par Ouazine et Abbas [61], axée sur le calcul des dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire en fonction de la matrice fondamentale pour les chaînes de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini.

#### Formule de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1712, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme

dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

**Définition 2.2.1** [16] Soient  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $x_0$  un point intérieur de  $I$ ,  $f \in C^n(I)$ . On appelle polynôme de Taylor d'ordre  $n$  en  $x_0$  de  $f$ , le polynôme :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (2.11)$$

On appelle reste de Taylor d'ordre  $n$  en  $x_0$  de  $f$ , la fonction  $R_n$  définie sur  $I$  comme suit :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

## Dérivées successives de la distribution stationnaire

Nous considérons une chaîne de Markov  $X = \{X_n; n \geq 0\}$  avec un espace d'état  $E = \{0, 1, \dots, N\}$ . La matrice  $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$  représente les probabilités de transition de la chaîne de Markov  $X$ .  $P$  est une matrice stochastique, c'est-à-dire que  $p_{ij} \geq 0$  et que la somme des probabilités de transition depuis un état  $i$  est égale à 1 pour tout  $i \in E$ .

Le vecteur  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$  est un vecteur unité, où la notation  $T$  indique la transposée. Nous supposons que la chaîne de Markov  $X$  a une unique distribution stationnaire, notée  $\pi = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(N))$ . Nous avons  $\pi P = \pi$  et  $\pi \times e = 1$ .

Dans notre étude, nous considérons  $P$  comme une matrice dépendant d'un paramètre  $\theta$ , notée  $P_\theta$ , et nous notons la distribution stationnaire de  $P_\theta$  par  $\pi_\theta$ . Par exemple,  $\theta$  peut représenter le taux d'arrivée des clients ou le taux de service dans un modèle de file d'attente. [69]

Dans ce contexte, la matrice fondamentale joue un rôle crucial dans l'analyse des chaînes de Markov. Avant de présenter le résultat principal de cette approche, qui concerne l'expression des dérivées de la distribution stationnaire en fonction de la matrice fondamentale, nous allons d'abord introduire cette notion essentielle.

## Matrice fondamentale

Lorsque nous étudions des modèles de files d'attente à capacités finies, modélisés par des chaînes de Markov finies, nous introduisons une matrice particulièrement intéressante appelée "Matrice Fondamentale  $Z_\theta$ ". Cette matrice joue un rôle central dans le calcul des différentes caractéristiques stationnaires essentielles de la chaîne de Markov analysée. L'introduction de la notion de "Matrice fondamentale" remonte à Kemeny et Snell [46], Keilson [45] a étendu leur travail aux processus de Markov, en obtenant diverses formules pour les premiers moments de certaines caractéristiques.

**Théorème 2.2.1** [46] Si  $P_\theta$  est une matrice de transition d'une chaîne de Markov finie et ergodique, alors la matrice inverse  $Z = (I - P_\theta + \pi_\theta)^{-1}$  existe, et :

1.  $P_\theta Z_\theta = Z_\theta P_\theta$
2.  $Z_\theta e = e$
3.  $\pi_\theta Z_\theta = \pi_\theta$
4.  $(I - P_\theta) Z_\theta = I - \Pi_\theta$
5.  $Z_\theta = I + \sum_{i=1}^{\infty} (P_\theta^i - \Pi_\theta)$

**Théorème 2.2.2** [61] *Pour comprendre l'évolution de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov ergodique par rapport à un paramètre  $\theta$ , On suppose toutes les composantes de la matrice de probabilités de transition  $P_\theta$  sont de classe  $C^k$  par rapport à  $\theta$ , où  $\theta$  est un point intérieur d'un certain intervalle  $\Theta$ . Alors, la  $k$ -ème dérivée de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$  par rapport au paramètre  $\theta$  est donnée par :*

$$\frac{d^k}{d\theta^k} \pi_\theta = \pi_\theta^{(k)} = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \pi_\theta^{(m)} \left( P_\theta^{(k-m)} \right) Z_\theta \quad (2.12)$$

avec,  $\left( P_\theta^{(k)} \right)$  est la matrice dont les composantes sont les dérivées  $k$ -ièmes des composantes de  $P_\theta$ , tandis que  $\left( \pi^{(k)} \right)$  est le vecteur dont les composantes sont les dérivées  $k$ -ièmes des composantes de  $\pi$  par rapport à  $\theta$ .

La représentation explicite des dérivées de la distribution stationnaire  $\pi_\theta$  d'ordre inférieur est donnée par [61] :

la première dérivée est comme suit :

$$\pi_\theta^{(1)} = \pi_\theta P_\theta^{(1)} Z_\theta$$

La dérivée seconde peut être écrite comme suit :

$$\pi_\theta^{(2)} = \pi_\theta P_\theta^{(2)} Z_\theta + 2\pi_\theta^{(1)} P_\theta^{(1)} Z_\theta$$

De la même façon, nous obtenons la troisième dérivée :

$$\pi_\theta^{(3)} = \pi_\theta P_\theta^{(3)} Z_\theta + 3\pi_\theta^{(2)} P_\theta^{(1)} Z_\theta + 3\pi_\theta^{(1)} P_\theta^{(2)} Z_\theta$$

### 2.2.3 Présentation des polynômes de chaos

Les polynômes de chaos ont été introduit par les mathématiciens Stephen Smale [63] et Tien-Yien Li dans les années 1980 comme une extension de la théorie du chaos aux systèmes réversibles.

## Notions fondamentales

Dans cette section, une brève définition sera donnée pour les polynômes orthogonaux. Ceux-ci seront utilisés dans le contexte de la décomposition des polynômes du Chaos.[9]

### Polynômes orthogonaux : Cas univarié

**Définition 2.2.2** (Fonction poids [11] ) *Soit  $I$  un intervalle dans  $\mathbb{R}$ . Une fonction de poids  $w$  est une fonction intégrable non négative de  $x \in I$ .*

**Définition 2.2.3** (Espace pondéré  $L^2 \notin \mathbb{R}$  ) *Soit  $L_w^2(I)$  un ensemble de fonctions  $g$  qui sont carrés intégrables par rapport à la fonction poids  $w$ , c'est-à-dire l'intégrale :*

$$\|g(x)\|^2 = \int_I g(x)^2 w(x) dx,$$

est finie. Dans ce cas, la norme de  $g$  est  $\|g(x)\|$ .

**Définition 2.2.4** (Produit scalaire dans l'espace  $L^2 \notin \mathbb{R}$ ) Pour toute fonction  $g, h \in L_w^2(I)$ , le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $g$  et  $h$  est :

$$\langle g, h \rangle = \int_I g(x)h(x)w(x) dx.$$

L'espace  $L_w^2(I)$  est un espace de Hilbert.

**Définition 2.2.5** (Orthogonalité dans l'espace  $L^2 \notin \mathbb{R}$ ) Soit  $L_w^2(I)$  un espace de Hilbert, soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dans  $L_w^2(I)$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont orthogonales si  $\langle g, h \rangle = 0$ .

**Définition 2.2.6** (Polynômes orthogonaux [7]) Soit  $L_w^2(I)$  un espace de Hilbert, l'ensemble des polynômes  $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$  sont dits orthogonaux si  $\Psi_n$  est un polynôme de degré  $n$  :

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_I \Psi_n(x)\Psi_m(x)w(x) dx = h_n^2 \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

où,  $\delta_{n,m}$  est le symbole de Kronecker, défini par :

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Et,  $h_n^2$  est une constante non nulle. Pour tous les polynômes orthogonaux, le polynôme de degré zéro  $\Psi_0$  est égal à un ( $\Psi_0 = 1$ ). De plus, si  $h_n = 1$ , le système est appelé orthonormé. L'orthonormalité est définie comme suit :

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_I \Psi_n(x)\Psi_m(x)w(x) dx = \delta_{n,m}. \quad n, m \in \mathbb{N}$$

**Définition 2.2.7** (La fonction de densité de probabilité) Soit  $I \in \mathbb{R}$  et  $w$  une fonction poids sur  $I$ . Pour tout  $x \in I$ , la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{w(x)}{\int w(x) dx}, \quad x \in I, \quad (2.14)$$

est dite fonction de densité de probabilité.

**Propriété 2.2.1** (Espérance des polynômes orthogonaux [11]) Soit  $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}(X)$  un ensemble de polynômes orthogonaux. Supposons que  $X$  est une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$E(\Psi_0(X)) = 1,$$

Et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$E(\Psi_n(X)) = 0.$$



**Propriété 2.2.2** (*Variance des polynômes orthogonaux*) Soit  $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}(X)$  un ensemble de polynômes orthogonaux. Supposons que  $X$  est une variable aléatoire de densité de probabilité  $f(x)$  :

$$\text{Var}(\Psi_0(X)) = 0,$$

Et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\text{Var}(\Psi_n(X)) = \frac{\|\Psi_n(X)\|^2}{\int w(x) dx}.$$

## Quelques polynômes classiques

### Polynômes de Legendre

[70] Les polynômes de Legendre sont orthogonaux sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par rapport à la fonction de poids  $w(x) = 1$ , donc la fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

Ce qui correspond à la distribution uniforme ( $\mathcal{U}[-1, 1]$ ) en théorie des probabilités. À partir de  $P_0 = 1$ , les premiers polynômes de Legendre sont donnés [73] :

$$\begin{cases} P_0 &= 1, \\ P_1 &= x, \\ P_2 &= \frac{3x^2-1}{2}, \\ P_3 &= \frac{5x^3-3x}{2}, \\ P_4 &= \frac{35x^4-30x^2+3}{8}, \\ P_5 &= \frac{63x^5-70x^3+15x}{8}. \end{cases}$$

Le reste des termes peut être déterminé à partir de la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

### Polynôme d'Hermite

Les polynômes de Hermite  $H_n$  sont orthogonaux sur l'intervalle  $[-\infty, +\infty]$  par rapport à la fonction de poids  $w(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ . Ils sont la solution de l'équation différentielle suivante [70] :

$$Y'' - xY' + nY = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant (2.13), on obtient la densité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction de densité des polynômes de Hermite correspond à la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Les premiers polynômes de la base sont donc les suivants :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = x^2 - 1, \\ P_3(x) = x^3 - 3x, \\ P_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \\ P_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15. \end{cases}$$

La famille des polynômes de Hermite est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} He_{-1}(x) = 0, & He_0(x) = 1, \\ He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x). \end{cases}$$

### 2.2.4 Généralisation des polynômes de chaos

Le développement en chaos polynomial, aussi appelé développement de Wiener-Hermite, est une méthode pour représenter des variables aléatoires en utilisant des polynômes de Hermite. Cameron et Martin [19] ont montré que cette méthode fonctionne très bien quand les variables suivent une distribution normale standard (centrée et réduite). Cependant, si les variables ne suivent pas cette distribution, Xiu et Karniadakis (2003) [82] ont montré que la rapidité et l'efficacité de la méthode dépend des densités de probabilités des variables aléatoires. En effet, des correspondances optimales entre des familles de lois de probabilité et des familles de polynômes orthogonaux ont été établies.

La décomposition en PC s'étend au cas général de variables aléatoires  $X = \{X_1, \dots, X_p\}$  indépendantes suivant des densités de probabilités connues. Le tableau 2.1 donne quelques correspondances entre les variables et les familles de polynômes uni-variés associés pour la construction du chaos polynomial.

	Distribution $\xi$	Polynôme	Support
v.a continue	Gaussian	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
	Gamma	Laguerre	$[0, +\infty]$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniform	Legendre	$[a, b]$
v.a discrète	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, \dots, N\}$
	Negative Binomial	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hypergeometric	Hahn	$\{0, 1, \dots, N\}$

TABLE 2.1 – Correspondance entre les variables aléatoires et les polynômes orthogonaux

## Polynômes orthogonaux : Cas multivarié

**Définition 2.2.8** Soit  $\Psi_{\alpha_i}^{(k)}(x_i)$  une famille de polynômes orthogonaux univariés. Les éléments de la base polynomiale multivariée sont construits par le produit tensoriel des éléments univariés, c'est-à-dire :

$$\Psi_{\alpha}^k \equiv \Psi_{\alpha} \quad \text{et} \quad \Psi_k(x) = \prod_{i=1}^p \Psi_{\alpha_i}^{(k)}(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, P_p^d$$

les notations  $\Psi_k$  et  $\Psi_{\alpha}$  sont utilisées selon le contexte de  $\alpha$ . où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  est un multi-indice,  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, d\}$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$ , et  $|\alpha| = \sum_{i=1}^p \alpha_i$ . De plus :

$$\mathcal{P}_p^d = \frac{(p+d)!}{d! p!}$$

est le nombre d'éléments d'une base polynomiale multivariée complète de degré  $d$ .  $\Psi_0(x), \Psi_1(x), \dots, \Psi_{P_p^d}(x)$  est une base polynomiale multivariée de degré  $d$ , avec  $P_p^d + 1$  termes.

**Définition 2.2.9** Soit  $I \in \mathbb{R}$  un intervalle tel que :

$$I = I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_p$$

Où  $I_1, I_2, \dots, I_p$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Et soit la fonction poids multivariée  $w(x) : I \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$  associée au produit tensoriel telle que :

$$W(x) = w(x_1)w(x_2) \dots w(x_p),$$

Où ;  $w_i : I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sont des fonctions intégrables non négatives de  $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ .

Pour toute fonction  $g, h \in L_w^2(I)$ , le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $g$  et  $h$  est :

$$\langle g, h \rangle = \int_I g(X)h(X)w(X) dx. \quad (2.15)$$

Les éléments de la base polynomiale multivariée sont construites de la même manière (produit tensoriel d'éléments uni-variés).

### Propriété 2.2.3 L'espérance et la variance des polynômes orthogonaux multivariés

Soit  $X$  une variable aléatoire multivariée de fonction de densité multivariée  $f(X)$ , où  $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,p}$  sont des variables aléatoires indépendantes.

Par conséquent,

$$\begin{cases} E(\Psi_1(x)) = 1, \\ E(\Psi_k(x)) = 0, \text{ pour } k > 1. \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \text{Var}(\Psi_1(x)) = 0, \\ \text{Var}(\Psi_k(x)) = \prod_{i=1}^p E(\psi_{\alpha_i}^{(k)}(x_i)^2), \text{ pour } k > 1. \end{cases}$$

## Développement de polynôme de chaos :

Le développement en polynôme de chaos (PC) est une méthode probabiliste introduite pour la première fois par Wiener [80]. Cette technique mathématique permet de représenter des variables aléatoires à travers une série de polynômes orthogonaux, initialement les polynômes de Hermite, pour des variables aléatoires gaussiennes. Grâce aux travaux de Cameron et Martin (1947) [19], cette méthode a été étendue aux mesures non gaussiennes.[25]

Le développement en PC est une décomposition spectrale polynomiale des variables aléatoires sur une base de polynômes orthogonaux, tels que les polynômes d'Hermite, de Legendre, etc. En propagation d'incertitudes, la variable aléatoire décomposée est la réponse du modèle, et le vecteur des variables aléatoires décrit les paramètres incertains. Le développement classique en PC utilise une base de polynômes de Hermite pour des variables aléatoires gaussiennes, qui converge pour n'importe quelle fonction  $L^2$  dans l'espace aléatoire.

Considérons le modèle mathématique  $Y = M(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $L^2(\Omega, F, P)$  un espace d'Hilbert muni d'un ensemble de bases orthogonales. Comme  $Y \in L^2(\Omega, F, P)$  et est  $X$ -mesurable, le théorème de Cameron-Martin affirme que  $Y$  peut s'écrire sous la forme d'une décomposition en polynômes de chaos (de Hermite) :

$$M(X_1, \dots, X_p) = y_0 \Psi_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} y_{i_1} \Psi_1(X_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} y_{i_1, i_2} \Psi_2(X_{i_1}, X_{i_2}) +$$

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} y_{i_1, i_2, i_3} \Psi_3(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}) + \dots,$$

ou encore,

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \Psi_i(X), \quad (2.16)$$

où  $\Psi_i$  sont les polynômes de chaos orthogonaux.

L'expression (2.16) représente le développement spectral d'une variable aléatoire  $Y$  en fonction d'une base de polynômes orthogonaux multivariés  $\{\Psi_i(X), i = 0, \dots, \infty\}$  et de coefficients déterministes  $y_i$ . Lorsque les variables aléatoires suivent des lois connues, on parle de développement par Chaos Polynomial (PC), où les polynômes forment une base orthonormée.

En pratique, on limite la série jusqu'à un certain degré polynomial  $p$ . Le nombre total de termes dans le développement est déterminé par le nombre de variables et le degré  $p$  choisi pour le PC. Cette formule donne le nombre total de termes :

$$P_p^d + 1 = \frac{(p+d)!}{d!p!}$$

Ainsi, l'équation précédente devient :

$$Y = \sum_{i=0}^{P_p^d} y_i \Psi_i(X) \quad (2.17)$$

### 2.2.5 Méthode de calcul des coefficients de polynôme de chaos

Dans le domaine des polynômes de chaos (PC), les méthodes de calcul de leurs coefficients peuvent être regroupées en deux catégories : *intrusives* et *non intrusives*. Les approches intrusives impliquent l'intégration directe du calcul des coefficients du PC dans le modèle numérique lui-même, permettant ainsi de les déterminer en une seule exécution du modèle. Cependant, cette méthode peut s'avérer complexe et rencontrer des difficultés avec des modèles fortement non linéaires. En revanche, les approches non intrusives ne nécessitent aucune modification du modèle numérique et considèrent celui-ci comme une boîte noire. Les coefficients du PC sont alors obtenus en évaluant le modèle à différents points de l'espace des paramètres, généralement définis par un plan d'expériences. Néanmoins, trouver une méthode non intrusive précise et efficace en termes d'évaluations du modèle reste un défi majeur.

Parmi les approches non intrusives, deux méthodes principales se démarquent : la méthode de projection et la méthode de régression.

- **Méthode de projection** : Cette approche implique de reformuler chaque coefficient sous forme d'intégrales multidimensionnelles, comme détaillé dans la référence [35]. Ces intégrales peuvent être calculées soit par simulation, soit par quadrature. Cette approche a l'avantage de permettre d'obtenir des expressions analytiques des coefficients, facilitant l'analyse et l'interprétation du modèle par polynômes de chaos. Cependant, le calcul de ces intégrales peut s'avérer très coûteux, surtout pour des problèmes de grande dimension.
- **Méthode de régression** : Ici, les coefficients du polynôme de chaos sont déterminés en minimisant l'erreur quadratique moyenne de l'approximation de la réponse. Cette méthode est discutée en profondeur dans la littérature [29].

#### Méthode de régression

La méthode de régression permet de calculer les coefficients des polynômes de chaos en minimisant l'erreur quadratique moyenne. Supposons que le modèle  $M(X)$  soit représenté par :

$$Y = M(X) = M(X) + \epsilon,$$

avec,

$$Y = M(X) = \sum_{i=0}^P y_i \Psi_i(X). \tag{2.18}$$

où  $\epsilon$  est une erreur de moyenne nulle. L'échantillon  $Y = \{y_i, i = 1, \dots, n\}$  représente la réponse du modèle  $M(X)$  pour un plan d'expérience de taille  $n$ , c'est-à-dire  $n$  réalisations du vecteur  $X = \{x_i, i = 1, \dots, n\}$ .

L'objectif de la méthode de régression est de minimiser la variance de l'erreur  $\epsilon$ . Cette minimisation se traduit par la résolution de l'équation suivante :

$$Y = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y^T \Psi(x^{(i)}) - M(x^{(i)}))^2 \right\}.$$

où  $\operatorname{arg min}$  désigne les valeurs de  $Y_j$  qui minimisent la fonction.

La solution à ce problème de minimisation est donnée par :

$$\hat{a} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{y}.$$

ici,  $\Psi$  est la matrice des valeurs des polynômes de chaos évaluées en chaque point du plan d'expérience, et  $\mathbf{y}$  est le vecteur des réponses du modèle.

Cette méthode est largement discutée dans la littérature, notamment dans [29].

## Méthode de projection

Cette méthode a été utilisée par (Puig et al. [62], Xiu et Karniadakis [81], Field and Grigoriu [31]) en raison de l'orthogonalité des polynômes d'Hermite par rapport à la mesure gaussienne. En effet, en multipliant le développement (2.17) par  $\Psi_j(X)$  et en intégrant par rapport à la loi jointe  $f_X(x)$  de  $X$ , on obtient :

$$a_j = \mathbb{E} [M(X)\Psi_j(X)] \equiv \int_{\mathbb{D}_X} M(x)\Psi_j(x)f_X(x) dx. \quad (2.19)$$

En pratique, on estime l'expression ci-dessous au moyen de techniques d'intégration numérique, qui visent à approcher l'intégrale multidimensionnelle par une somme pondérée comme suit :

$$\hat{a}_j \approx \sum_{i=1}^N w_i M(x^i)\Psi_j(x^i). \quad (2.20)$$

## Conclusion

Ce chapitre a exploré deux concepts clés : l'analyse de sensibilité globale et l'analyse d'incertitude. L'analyse de sensibilité globale, en particulier la méthode de Sobol, utilise les indices de sensibilité pour quantifier l'impact des variables d'entrée sur la variance de la sortie du modèle. Cette approche permet d'identifier les variables les plus influentes. L'analyse d'incertitude, quant à elle, vise à identifier les sources d'incertitude et à en quantifier les effets sur les prédictions du modèle. Nous avons abordé des méthodes analytiques comme les développements en séries de Taylor et en polynômes de chaos pour traiter ces incertitudes.

---

## Chapitre 3

---

# Application sur le modèle de file d'attente M/G/1/N

Dans l'étude des systèmes de files d'attente, le modèle d'intérêt  $Y = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$  décrit la relation entre les variables d'entrée  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$  et la sortie  $Y$  du système. L'analyse de sensibilité et d'incertitude est essentielle pour comprendre et gérer ces systèmes de manière efficace. Cependant, les modèles complexes de files d'attente, comme le M/G/1/N, présentent des défis significatifs en raison de leur nature stochastique non linéaire.

Spécifiquement, notre objectif principal est d'analyser la sensibilité et de propager l'incertitude dans trois modèles de files d'attente : M/M/1/N, M/D/1/N, et M/E<sub>2</sub>/1/N. Nous utilisons les indices de Sobol pour identifier les paramètres les plus influents sur la sortie du modèle, tandis que pour évaluer la propagation de l'incertitude, nous employons des méthodes telles que le développement en série de Taylor et les polynômes de chaos. Ces approches nous permettent d'estimer la moyenne et la variance de la distribution stationnaire du système, que nous comparons aux résultats de simulations de Monte Carlo pour validation.

### 3.1 Analyse de sensibilité par la méthode de Sobol

Dans cette section, nous allons estimer les indices de Sobol sur la distribution stationnaire d'un modèle de file d'attente, afin d'évaluer la contribution des variables d'entrée.

Pour définir l'analyse de sensibilité globale via les indices de Sobol, il est nécessaire d'introduire la distribution stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$  dont la forme analytique n'est pas exactement connue. Les étapes essentielles pour calculer la distribution stationnaire du modèle de file d'attente (M/G/1/N) sont données dans l'algorithme suivant :1.

---

**Algorithm 1** Distribution stationnaire du modèle étudié

---

- 1: **Début**
  - 2: **Étape 1** : Introduction des paramètres d'entrée :
    - La capacité de la file d'attente  $N$  ;
    - Le taux d'arrivée des clients dans le système  $\lambda$  ;
    - Le taux de service au cours de la période de service  $\mu$  ;
  - 3: **Étape 2** : La matrice de transition :
    - Calculer les probabilités  $p_{00}$ ,  $p_{0j}$  et  $p_{ij}$  données en section 1 chapitre 3 ;
    - Calculer la matrice de transition  $P$  donnée en section 1 chapitre 3 ;
  - 4: **Étape 3** : La distribution stationnaire du modèle :
    - Calculer la distribution stationnaire  $\pi$  pour la matrice de transition  $P$  à l'aide de la méthode d'inversion d'une matrice ;
  - 5: **Fin.**
- 

Pour évaluer la sensibilité des paramètres d'entrées dans notre modèle, nous utilisons les indices de sensibilité de Sobol de premier ordre. Afin d'étudier l'effet de cette perturbation, nous calculons les indices de Sobol, par la méthode de Monte Carlo présenté dans le chapitre 2. Pour cela, on génère deux échantillons de réalisations des variables d'entrée de chaque système. La répétition de cette instruction  $k$  fois permet d'obtenir les  $k$  indices de Sobol de premier ordre.

L'algorithme suivant décrit la procédure détaillée pour calculer ces indices en simulant les échantillons de chaque paramètre d'entrée et en estimant la moyenne et la variance des performances du système.

---

**Algorithm 2** Indices de sensibilité de Sobol de premier ordre de système M/M/1/N

---

- Entrées**  $A, B, C, D, n, N$  ;
- 1: **for**  $i = 1$  to  $n$  **do**
    - Étape 1** : Simulation des deux échantillons de chaque paramètre d'entrées
      - $\lambda(i) = (B - A) \times u1(i) + A$  ;  $\lambda'(i) = (B - A) \times v1(i) + A$
      - $\mu(i) = (D - C) \times u2(i) + C$  ;  $\mu'(i) = (D - C) \times v2(i) + C$
      - Avec  $u_k(i)$  et  $v_k(i) \sim \mathcal{U}[0, 1]$  ;  $\forall k \in \{1..2\}$  et  $\forall i \in \{1..n\}$
  - 2: **for**  $j = 1$  to  $N$  **do**
    - Étape 2** : Calcul de la distribution stationnaire
      - $\pi_1(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), \mu(i), N]$
      - $\pi_2(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), \mu'(i), N]$
      - $\pi_3(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda'(i), \mu(i), N]$
  - 3: **end for**
    - Étape 3** : Estimation de la moyenne  $\hat{f}_0$ 
      - $\hat{f}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j)$
    - Étape 4** : Estimation de la variance  $\hat{V}$ 
      - $\hat{V} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\pi_1(j)]^2 - \hat{f}_0^2$
    - Étape 5** : Estimation de la quantité  $\hat{U}_j$ 
      - $\hat{U}_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_2(j)$
      - $\hat{U}_\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_3(j)$
  - 4: **end for**
    - Avec  $\hat{S}_\alpha = \frac{\hat{U}_\alpha - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$
    - Sortie** : Les indices de Sobol  $[\hat{S}_\lambda, \hat{S}_\mu]$
-



Dans l'analyse des performances d'un système de files d'attente, le processus de service des clients dans le système joue un rôle très important. En effet, la détermination du processus de service est nécessaire pour la maîtrise de l'espace d'attente. Cependant, dans la plupart des situations, le processus du temps service dans un système de files d'attente est souvent différent du processus de Poisson. Dans ce sens, nous avons considéré trois types de distributions du temps de service à savoir : Déterministe (D) ; Exponentielle (M) et Erlang (E).

Dans la suite, nous supposons que les paramètres  $\lambda, \mu, \mu_1, \mu_2, d$  sont uniformément répartis sur  $[1, 3]$ . Nous fixons la capacité de la file  $N = 4$  et nous estimons les valeurs des indices de sensibilité de premier ordre pour chaque composante de la distribution stationnaire pour chaque modèle analysé par la méthode de Monte Carlo.

**Exemple 3.1.1** *Considérons le modèle M/M/1/4, où la distribution des inter-arrivées et celle de temps de service sont exponentielles de moyenne  $\frac{1}{\lambda}$  et  $\frac{1}{\mu}$  respectivement ; La densité de probabilité des inter-arrivées est donnée par :*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

*Les résultats numériques obtenus des indices de Sobol pour la file d'attente M/M/1/4 en appliquant l'algorithme (2) sont résumés dans le tableau suivant :*

	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$
$S_\lambda$	0.4876	0.5039	0.4878	0.1351	0.4870
$S_\mu$	0.3876	0.4383	0.4858	0.1284	0.4881

TABLE 3.1 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/M/1/4

le figure (3.1) illustre indices de Sobol pour les paramètres du modèle M/M/1/4 :

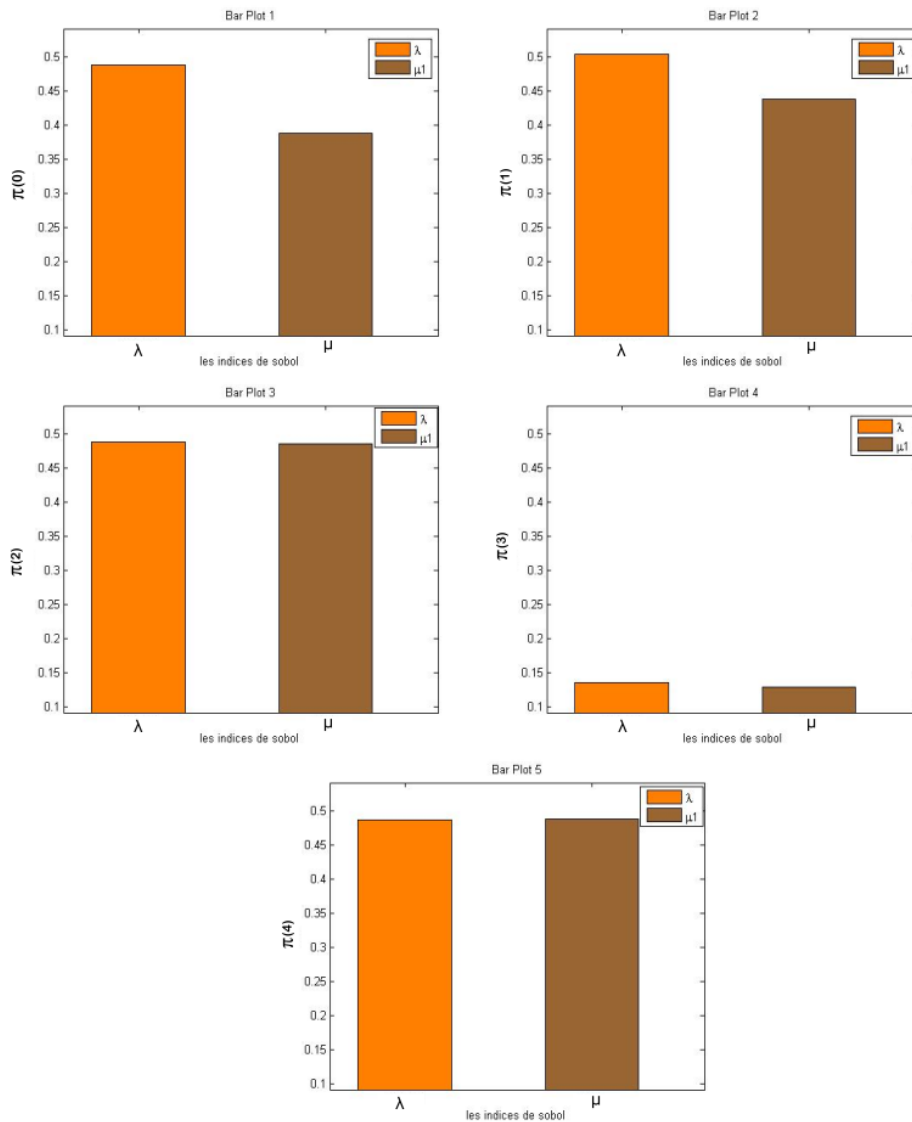


FIGURE 3.1 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/M/1/4

D'après la figure (3.1), nous constatons que les valeurs des indices de sensibilité les plus élevées sont celles qui correspondent aux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  pour chaque composante de la distribution stationnaire, donc ces deux derniers sont les plus dominants sur la sortie du modèle.

**Exemple 3.1.2** On considère le modèle d'attente M/E<sub>2</sub>/1/4 classique, où l'arrivée des clients est distribuée selon un processus poissonnien de taux  $\lambda$ , et le temps de service suit une distribution de Erlang de deuxième ordre de taux  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , la distribution de la loi de Erlang d'ordre 2 est donnée par la formule suivante :

$$f(t) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t})}{(\mu_2 - \mu_1)}, t \geq 0$$

L'algorithme suivant décrit la procédure détaillée pour calculer ces indices en simulant les échantillons de chaque paramètre d'entrée et en estimant la moyenne et la variance des performances du système.

---

**Algorithm 3** Indices de sensibilité de Sobol de premier ordre pour le système M/E<sub>2</sub>/1/N
 

---

**Entrées**  $A, B, C, D, n, N$  ;  
 1: **for**  $i = 1$  to  $n$  **do**  
     **Étape 1 : Simulation des échantillons des paramètres**  $\lambda, \mu_1$  et  $\mu_2$   
      $\lambda(i) = (B - A) \times u1(i) + A$  ;  $\lambda'(i) = (B - A) \times v1(i) + A$   
      $\mu_1(i) = (D - C) \times u2(i) + C$  ;  $\mu_1'(i) = (D - C) \times v2(i) + C$   
      $\mu_2(i) = (D - C) \times u3(i) + C$  ;  $\mu_2'(i) = (D - C) \times v3(i) + C$   
     Avec  $u_k(i)$  et  $v_k(i) \sim \mathcal{U}[0, 1]$  ;  $\forall k \in \{1..3\}$  et  $\forall i \in \{1..n\}$   
 2:     **for**  $j = 1$  to  $N$  **do**  
        **Étape 2 : Calcul de la distribution stationnaire pour**  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$   
         $\pi_1(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), \mu_1(i), \mu_2(i), N]$   
         $\pi_2(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), \mu_1(i), \mu_2'(i), N]$   
         $\pi_3(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), \mu_1'(i), \mu_2(i), N]$   
         $\pi_4(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), \mu_1'(i), \mu_2'(i), N]$   
 3:     **end for**  
        **Étape 3 : Estimation de la moyenne**  $\hat{f}_0$   
         $\hat{f}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j)$   
        **Étape 4 : Estimation de la variance**  $\hat{V}$   
         $\hat{V} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\pi_1(j)]^2 - \hat{f}_0^2$   
        **Étape 5 : Estimation de la quantité**  $\hat{U}_j$   
         $\hat{U}_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_2(j)$   
         $\hat{U}_{\mu_1} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_3(j)$   
         $\hat{U}_{\mu_2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_4(j)$   
 4: **end for**  
     Avec  $\hat{S}_\lambda = \frac{\hat{U}_\lambda - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$ ,  $\hat{S}_{\mu_1} = \frac{\hat{U}_{\mu_1} - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$  et  $\hat{S}_{\mu_2} = \frac{\hat{U}_{\mu_2} - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$   
     **Sortie** : Les indices de Sobol [ $\hat{S}_\lambda, \hat{S}_{\mu_1}, \hat{S}_{\mu_2}$ ]

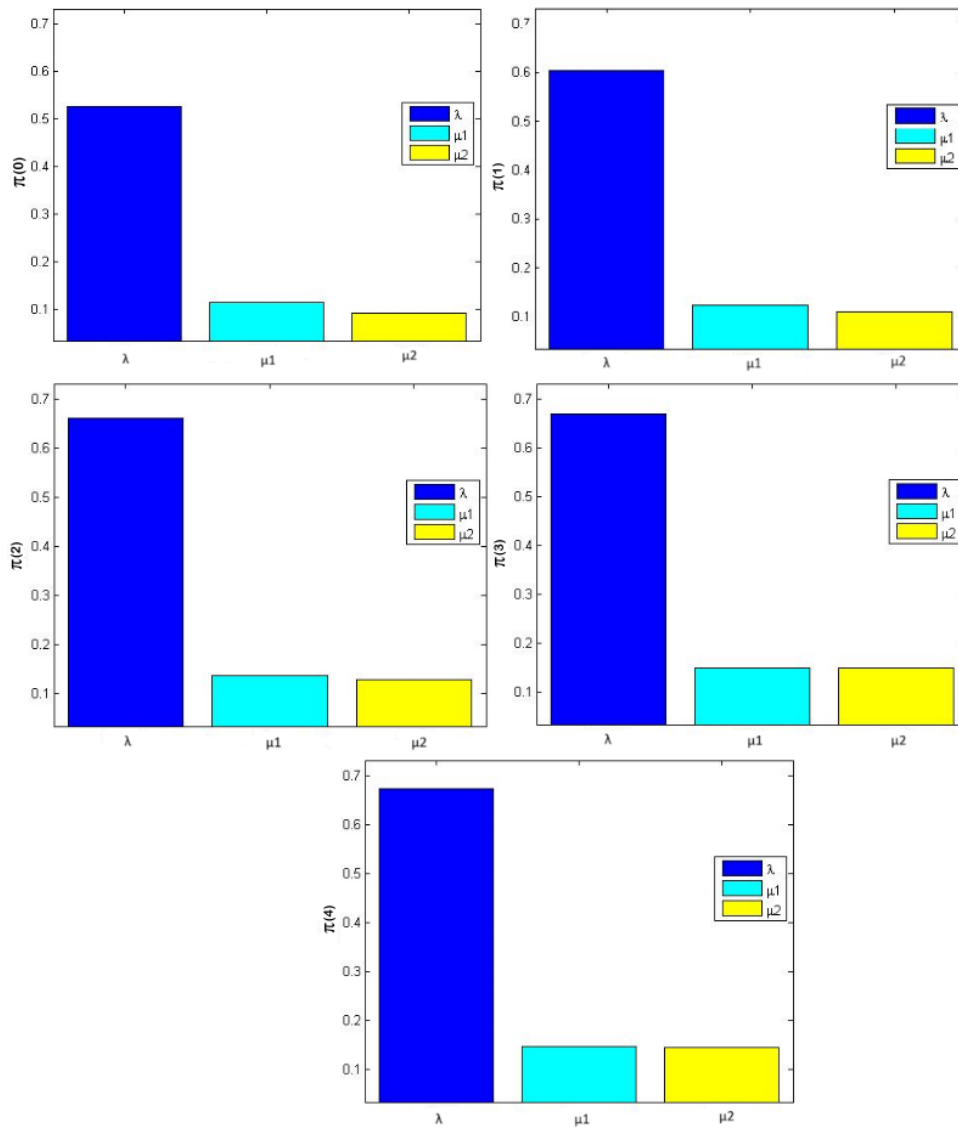
---

Les indices de Sobol pour les paramètres  $\lambda, \mu_1$ , et  $\mu_2$  du modèle M/E<sub>2</sub>/1/4 sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$
$S_\lambda$	0.5255	0.6035	0.6613	0.6696	0.6732
$S_{\mu_1}$	0.1132	0.1239	0.1370	0.1486	0.1470
$S_{\mu_2}$	0.0915	0.1094	0.1292	0.1479	0.1438

TABLE 3.2 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/E<sub>2</sub>/1/4

Ces résultats sont illustré graphiquement par des histogrammes qui sont présentes dans la figure (3.2) :


 FIGURE 3.2 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/ $E_2$ /1/4

D'après les résultats obtenus dans la figure (3.2), il convient de noter que la plus grande valeur de l'indice de sensibilité est celle correspondant aux paramètres  $\lambda$  pour chaque composante de la distribution stationnaire. Cela est suffisamment convenable pour dire que ce paramètre est le plus influent sur le modèle étudié. Les paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont moins influents, vu qu'ils n'ont pas une influence importante sur la distribution stationnaire. C'est la raison qui nous permet de les prendre comme déterministes (constant).

**Exemple 3.1.3** on considère la file d'attente M/D/1/4, dont le processus des inter-arrivées est exponentielle du taux  $d$ , la durée de service est déterministe de moyenne  $1/\mu$ .

L'algorithme suivant décrit la procédure détaillée pour calculer ces indices en simulant les échantillons de chaque paramètre d'entrée et en estimant la moyenne et la variance des performances du système M/D/1/N.

---

**Algorithm 4** Indices de sensibilité de Sobol de premier ordre pour le système M/D/1/N
 

---

**Entrées**  $A, B, C, D, n, N$  ;  
 1: **for**  $i = 1$  to  $n$  **do**  
     **Étape 1 : Simulation des échantillons des paramètres  $\lambda$  et  $d$**   
      $\lambda(i) = (B - A) \times u1(i) + A$  ;  $\lambda'(i) = (B - A) \times v1(i) + A$   
      $d(i) = (D - C) \times u2(i) + C$  ;  $d'(i) = (D - C) \times v2(i) + C$   
     Avec  $u_k(i)$  et  $v_k(i) \sim \mathcal{U}[0, 1]$  ;  $\forall k \in \{1..2\}$  et  $\forall i \in \{1..n\}$   
 2:     **for**  $j = 1$  to  $N$  **do**  
        **Étape 2 : Calcul de la distribution stationnaire pour  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$**   
         $\pi_1(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), d(i), N]$   
         $\pi_2(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda(i), d'(i), N]$   
         $\pi_3(j) = \text{distribution stationnaire(Algo 1)}[\lambda'(i), d(i), N]$   
 3:     **end for**  
        **Étape 3 : Estimation de la moyenne  $\hat{f}_0$**   
         $\hat{f}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j)$   
        **Étape 4 : Estimation de la variance  $\hat{V}$**   
         $\hat{V} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\pi_1(j)]^2 - \hat{f}_0^2$   
        **Étape 5 : Estimation de la quantité  $\hat{U}_j$**   
         $\hat{U}_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_2(j)$   
         $\hat{U}_d = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_1(j) \times \pi_3(j)$   
 4: **end for**  
     Avec  $\hat{S}_\lambda = \frac{\hat{U}_\lambda - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$  et  $\hat{S}_d = \frac{\hat{U}_d - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$   
     **Sortie** : Les indices de Sobol  $[\hat{S}_\lambda, \hat{S}_d]$

---

les indices de sensibilité de Sobol obtenu obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessus :

	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$
$S_\lambda$	0.1822	0.2493	0.3637	0.4869	0.48163
$S_d$	0.1942	0.2533	0.3605	0.4902	0.4843

TABLE 3.3 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/D/1/4

D'après les résultats, nous constatons que les valeurs des indices de sensibilité les plus élevées correspondent aux paramètres  $d$  et  $\lambda$ , ce qui indique qu'ils sont les plus influents sur la distribution stationnaire.

La figure (3.3) illustre les valeurs des indices de Sobol pour les paramètres  $d$  et  $\lambda$ , fournissant une visualisation claire de leur contribution respective à la variabilité de la distribution stationnaire du système.

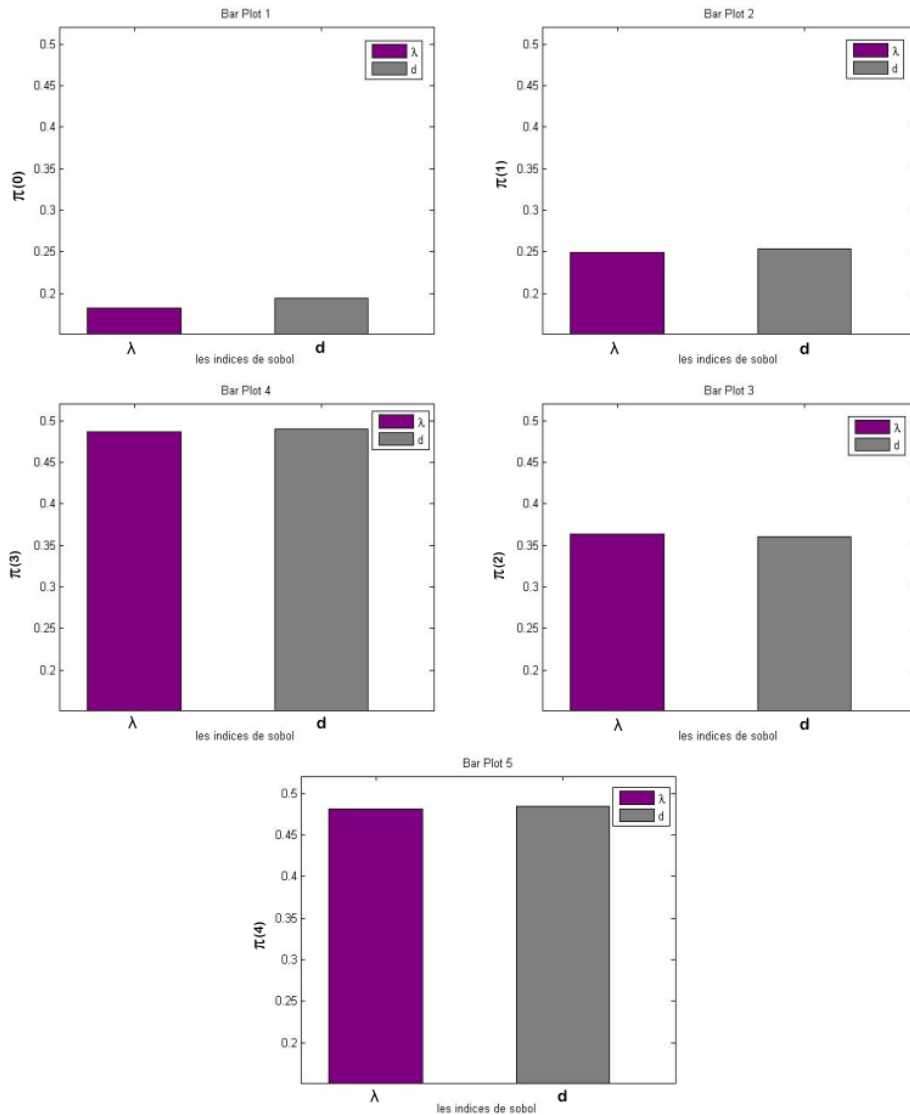


FIGURE 3.3 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/D/1/4

## 3.2 Analyse d'incertitude

Dans cette section, nous utiliserons deux approches : le développement en polynôme de Chaos et le développement en série de Taylor pour propager les incertitudes affectant certains paramètres des modèles de files d'attente sur la distribution stationnaire.

À partir de l'analyse de sensibilité effectuée sur la distribution stationnaire du modèle de file d'attente étudié, nous avons identifié les paramètres les plus influents. Nous allons ensuite étudier l'incertitude associée à ces paramètres, en estimant la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire  $\pi_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, N$ .

### 3.2.1 Développement en série de Taylor

Dans cette section, nous allons utiliser le développement en série de Taylor pour propager l'incertitude des paramètres d'un modèle de file d'attente sur sa distribution stationnaire.

Rappelons que l'analyse de sensibilité nous a permis d'identifier les paramètres les plus

influent du modèle. L'objectif ici est d'estimer la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire  $\pi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , en tenant compte de l'incertitude sur ces paramètres clés

## Cas de deux variables

### Sur le modèle M/M/1/N

Dans le modèle M/M/1/N, la distribution stationnaire  $\pi(n)$  représente la probabilité d'avoir  $n$  clients dans le système lorsque celui-ci atteint un état d'équilibre. Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont souvent sujets à des variations incertaines. On les modélise ici comme des variables aléatoires normales centrées réduites  $\epsilon_\lambda$  et  $\epsilon_\mu$ , respectivement :

$$\begin{aligned}\lambda &= \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \epsilon_\lambda, & \epsilon_\lambda &\sim \mathcal{N}(0, 1), \\ \mu &= \bar{\mu} + \sigma_\mu \epsilon_\mu, & \epsilon_\mu &\sim \mathcal{N}(0, 1).\end{aligned}$$

Nous avons approximé la densité de la distribution stationnaire du modèle d'attente M/M/1/N, étant donné que celle-ci est inconnue. Pour ce faire, nous utilisons une méthode approximative basée sur le développement en séries de Taylor. Cette approche commence par le calcul des dérivées d'ordre supérieur de la distribution stationnaire, qui sont exprimées en fonction de la matrice fondamentale. Ces dérivées représentent les coefficients du polynôme de Taylor en fonction du bruit  $\epsilon$ .

### Approximation de la densité :

L'approximation de  $\pi(\lambda, \mu)$  par un polynôme de Taylor d'ordre 3 s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\pi(\lambda, \mu) &\approx \pi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + \frac{\partial \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} \sigma_\lambda \epsilon_\lambda + \frac{\partial \pi(\lambda, \mu)}{\partial \mu} \sigma_\mu \epsilon_\mu \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^2} (\sigma_\lambda \epsilon_\lambda)^2 + 2 \frac{\partial^2 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu} (\sigma_\lambda \epsilon_\lambda) (\sigma_\mu \epsilon_\mu) + \frac{\partial^2 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \mu^2} (\sigma_\mu \epsilon_\mu)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^3} (\sigma_\lambda \epsilon_\lambda)^3 + 3 \frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^2 \partial \mu} (\sigma_\lambda \epsilon_\lambda)^2 (\sigma_\mu \epsilon_\mu) + 3 \frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu^2} (\sigma_\lambda \epsilon_\lambda) (\sigma_\mu \epsilon_\mu)^2 \right. \\ &\left. + \frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \mu^3} (\sigma_\mu \epsilon_\mu)^3 \right).\end{aligned}$$

où :

$\pi(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  est la distribution stationnaire évaluée aux valeurs moyennes  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{\mu}$ .

$\frac{\partial \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial \pi(\lambda, \mu)}{\partial \mu}$  sont les dérivées partielles premières de  $\pi(\lambda, \mu)$  par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ .

$\frac{\partial^2 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \mu^2}$ , et  $\frac{\partial^2 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu}$  sont les dérivées partielles secondes de  $\pi(\lambda, \mu)$  par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ .

$\frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^3}$ ,  $\frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \mu^3}$ ,  $\frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^2 \partial \mu}$ , et  $\frac{\partial^3 \pi(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu^2}$  sont les dérivées partielles troisièmes de  $\pi(\lambda, \mu)$  par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ .

$\sigma_\lambda$  et  $\sigma_\mu$  sont les écarts-types associés aux incertitudes sur  $\lambda$  et  $\mu$ , respectivement.

$\epsilon_\lambda$  et  $\epsilon_\mu$  sont les réalisations des variables aléatoires.

### Dérivées de la Distribution Stationnaire

Pour calculer les dérivées de la distribution stationnaire, il est essentiel d'utiliser la matrice de déviation  $\mathbf{Z}$  définie par :

$$Z = (I - P_\theta + \pi_\theta)^{-1}$$

Première dérivée par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\pi'_\lambda = \pi \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda} \cdot Z, \quad \pi'_\mu = \pi \cdot \frac{\partial P}{\partial \mu} \cdot Z.$$

Seconde dérivée par rapport à  $\lambda$  :

$$\pi''_{\lambda\lambda} = \pi \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \cdot Z + 2 \cdot \pi'_\lambda \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda} \cdot Z$$

Seconde dérivée par rapport à  $\mu$  :

$$\pi''_{\mu\mu} = \pi \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \cdot Z + 2 \cdot \pi'_\mu \cdot \frac{\partial P}{\partial \mu} \cdot Z.$$

Dérivée croisée par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\pi''_{\lambda\mu} = \pi \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial \mu} \cdot Z + \pi'_\lambda \cdot \frac{\partial P}{\partial \mu} \cdot Z + \pi'_\mu \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda} \cdot Z.$$

Troisième dérivée par rapport à  $\lambda$  :

$$\pi'''_{\lambda\lambda\lambda} = \pi \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3} \cdot Z + 3 \cdot \pi''_{\lambda\lambda} \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda} \cdot Z + 3 \cdot \pi'_\lambda \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \cdot Z.$$

Troisième dérivée par rapport à  $\mu$  :

$$\pi'''_{\mu\mu\mu} = \pi \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial \mu^3} \cdot Z + 3 \cdot \pi''_{\mu\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mu} \cdot Z + 3 \cdot \pi'_\mu \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \cdot Z.$$

Dérivée mixte par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\pi'''_{\lambda\lambda\mu} = \pi \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \cdot Z + 2 \cdot \pi'_{\lambda\lambda} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \cdot Z + \pi''_{\lambda\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mu} \cdot Z + 2 \cdot \pi'_\lambda \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial \mu} \cdot Z.$$

Dérivée mixte par rapport à  $\mu$  et  $\lambda$  :

$$\pi'''_{\mu\mu\lambda} = \pi \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial \mu^2 \partial \lambda} \cdot Z + 2 \cdot \pi'_{\mu\mu} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} \cdot Z + \pi''_{\mu\lambda} \cdot \frac{\partial P}{\partial \lambda} \cdot Z + 2 \cdot \pi'_\mu \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \mu \partial \lambda} \cdot Z.$$

**Calcul de la moyenne et de la variance** : à partir de l'approximation de Taylor, nous pouvons calculer la moyenne et la variance de la distribution stationnaire approximée.



## Pour le modèle M/D/1/N

Dans le modèle M/D/1/N, où le temps de service  $d$  est déterministe avec une durée constante, les paramètres  $\lambda$  (taux d'arrivée) et  $d$  sont souvent sujets à des variations incertaines. Nous les modélisons ici comme des variables aléatoires normales centrées réduites :

$$\begin{aligned}\lambda &= \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \epsilon_\lambda, & \epsilon_\lambda &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ d &= \bar{d} + \sigma_d \epsilon_d, & \epsilon_d &\sim \mathcal{N}(0, 1)\end{aligned}$$

L'analyse d'incertitude par la méthode de développement en série de Taylor pour ce modèle peut être réalisée en suivant les étapes spécifiques adaptées au caractère déterministe du temps de service  $d$ . Voici les principales étapes pour cette analyse :

1. **Matrice de transition** : La structure de la matrice de transition  $T$  sera différente pour le modèle M/D/1/N, mais l'approche pour calculer ses dérivées reste la même.
2. **Calcul des dérivées** : Nous calculons les dérivées de la distribution stationnaire par rapport aux paramètres  $\lambda$  et  $d$ , en utilisant la matrice fondamentale. Les dérivées premières et secondes sont obtenues et utilisées pour l'approximation de Taylor.
3. **Approximation de Taylor** : La distribution stationnaire  $\pi(\lambda, d)$  est approximée par un polynôme de Taylor d'ordre 2 en fonction des variations de  $\lambda$  et  $d$ . Cette approximation prend en compte les dérivées premières et secondes calculées précédemment.
4. **Moyenne et variance** : Les formules pour la moyenne et la variance de la distribution stationnaire approximée sont dérivées en fonction des écarts-types associés aux incertitudes sur  $\lambda$  et  $d$ . Ces formules permettent de quantifier l'impact de l'incertitude sur la distribution stationnaire.

### Cas d'une variable

## Pour le modèle M/E<sub>2</sub>/1/N

Dans le modèle M/E<sub>2</sub>/1/N, E<sub>2</sub> représente une distribution Erlang de paramètre 2 pour le temps de service. Nous considérons  $\lambda$  (taux d'arrivée) comme le seul paramètre incertain. Les paramètres  $u_1$  et  $u_2$ , qui caractérisent les deux phases de la distribution Erlang-2 du temps de service, sont considérés comme déterministes car ils ont généralement une influence moindre sur la sortie du modèle comparée à  $\lambda$ .

L'analyse d'incertitude est réalisée en appliquant la méthode de développement en série de Taylor, ce qui nous permet d'évaluer l'impact des variations de  $\lambda$  sur les performances du système.

Nous modélisons  $\lambda$  comme une variable aléatoire normale centrée réduite :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \epsilon_\lambda, \quad \epsilon_\lambda \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

L'application de la méthode de développement en série de Taylor pour ce modèle suit les étapes suivantes :

1. **Matrice de transition** :

La matrice de transition  $H$  est définie pour le modèle M/E<sub>2</sub>/1/N. Cette matrice tient compte de la nature Erlang du temps de service.

## 2. Approximation de Taylor

La distribution stationnaire  $\pi(\lambda)$  est approximée par un polynôme de Taylor d'ordre 3 en fonction des variations de  $\lambda$  :

$$\pi(\lambda) \approx \pi(\bar{\lambda}) + \frac{\partial\pi(\lambda)}{\partial\lambda}\sigma_\lambda\epsilon_\lambda + \frac{1}{2}\pi''_{\lambda\lambda}(\sigma_\lambda\epsilon_\lambda)^2 + \frac{1}{6}\pi'''_{\lambda\lambda\lambda}(\sigma_\lambda\epsilon_\lambda)^3$$

## 3. Dérivées de la distribution stationnaire :

Nous calculons les dérivées de la distribution stationnaire par rapport à  $\lambda$  en utilisant la matrice de déviation  $Z$  :

$$Z = (I - \mathbf{H} + \pi)^{-1}$$

Première dérivée par rapport à  $\lambda$  :

$$\pi'_\lambda = \pi \cdot \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot Z$$

Seconde dérivée par rapport à  $\lambda$  :

$$\pi''_{\lambda\lambda} = \pi \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} \cdot Z + 2 \cdot \pi'_\lambda \cdot \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot Z$$

troisième dérivée par rapport à  $\lambda$  :

$$\pi'''_{\lambda\lambda\lambda} = \pi \cdot \frac{\partial^3 H}{\partial \lambda^3} \cdot Z + 3 \cdot \pi''_{\lambda\lambda} \cdot \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot Z + 3 \cdot \pi'_\lambda \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} \cdot Z$$

## 4. Moyenne et variance :

Pour la moyenne et la variance de la distribution stationnaire approximée, nous utilisons les dérivées calculées :

$$M = \pi(\bar{\lambda}) + \frac{\sigma_\lambda^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \pi(\lambda)}{\partial \lambda^2}$$

$$V = \sigma_\lambda^2 \cdot \left( \frac{\partial \pi(\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2$$

### 3.2.2 L'incertitude via la méthode de chaos polynomial

La méthode des polynômes de chaos (PC) est une approche puissante pour quantifier et propager l'incertitude dans les modèles complexes, y compris les files d'attente. Cette méthode permet de représenter l'incertitude sur les paramètres du modèle en utilisant des polynômes orthogonaux construits à partir de variables aléatoires.

Dans le cadre de cette étude, nous appliquons la méthode des polynômes de chaos unidimensionnelle et multidimensionnelle pour analyser l'impact de l'incertitude sur les paramètres clés des modèles de files d'attente M/M/1/N, M/D/1/N et M/E<sub>2</sub>/1/N. Les paramètres considérés comme incertains. Les paramètres du modèle identifiés comme étant les plus influents sont représentés par des variables aléatoires.

## Cas multidimensionnelle

**Exemple 3.2.1** Soit le système d'attente M/D/1/N avec  $\lambda$  et  $d$  les paramètres les plus influents pour chaque composante  $\pi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  de la distribution stationnaire  $\pi_{\lambda,d}$ . Pour présenter cette incertitude dans ces paramètres, afin de simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire, nous allons faire appel aux deux nouveaux modèles associés aux paramètres incertains  $\lambda$  et  $d$ , définis comme suit :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \epsilon_\lambda, \quad \epsilon_\lambda \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.1)$$

$$d = \bar{d} + \sigma_d \epsilon_d, \quad \epsilon_d \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.2)$$

où

$\lambda$  : la moyenne de paramètre incertain  $\lambda$ .

$\sigma_\lambda$  : l'écart-type de  $\lambda$ .

$\epsilon_\lambda$  : le bruit blanc associé à  $\lambda$ .

$d$  : la moyenne de paramètre incertain  $d$ .

$\sigma_d$  : l'écart-type de  $d$ .

$\epsilon_d$  : le bruit blanc associé à  $d$ .

L'approximation fonctionnelle d'une composante  $\pi_i(\lambda, d)$  du vecteur stationnaire par le développement en PC s'écrit :

$$\pi_i(\lambda, d) = \sum_{i=0}^{P_d^P} y_i \Psi_i(\lambda, d) \quad (3.3)$$

où  $\{\Psi_i(\lambda, d)\}_{0 \leq i \leq P}$  forment une base polynomiale d'hermite, et  $y_i$  sont les coefficients du développement en PC.

**Exemple 3.2.2** Considérons le système d'attente M/M/1/N, où les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont les plus influents pour chaque composante  $\pi_i$  de la distribution stationnaire  $\pi_{\lambda,\mu}$ , avec  $i = 0, 1, \dots, N$ . Pour représenter l'incertitude dans ces paramètres et simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire, nous introduisons les modèles pour les paramètres incertains  $\lambda$  et  $\mu$ , définis comme suit :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \epsilon_\lambda, \quad \epsilon_\lambda \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.4)$$

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_\mu \epsilon_\mu, \quad \epsilon_\mu \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.5)$$

où

$\lambda$  : la moyenne de paramètre incertain  $\lambda$ .

$\sigma_\lambda$  : l'écart-type de  $\lambda$ .

$\epsilon_\lambda$  : le bruit blanc associé à  $\lambda$ .

$\mu$  : la moyenne de paramètre incertain  $\mu$ .

$\sigma_\mu$  : l'écart-type de  $\mu$ .

$\epsilon_\mu$  : le bruit blanc associé à  $\mu$ .

L'approximation fonctionnelle d'une composante  $\pi_i(\lambda, \mu)$  du vecteur stationnaire par le développement en PC s'écrit :

$$\pi_i(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^{P_d^P} y_i \Psi_i(\lambda, \mu).$$

où  $\{\Psi_i(\lambda, \mu)\}_{0 \leq i \leq P}$  forment une base polynomiale d'hermite car les variables suivent une loi normale centrée réduite, et  $y_i$  sont les coefficients du développement en PC.

Dans ce qui suit, on s'intéresse au calcul de la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire du modèle M/M/1/4, qui sont calculées en fonction des deux variables aléatoire  $\lambda$  et  $\mu$ , tout en utilisant de développement de polynôme de chaos.

Les étapes essentielles de cette démarche sont données dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 5** Simulation de l'incertitude par le polynôme de Chaos

---

1: **Début**

2: **Entrer**  $N, n, \mu, \lambda, \sigma_\lambda, \sigma_\mu, j$

— Calculer  $\lambda = \lambda + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda$ , avec  $\varepsilon_\lambda \sim \mathcal{N}(0, 1)$

— Calculer  $\mu = \mu + \sigma_\mu \varepsilon_\mu$ , avec  $\varepsilon_\mu \sim \mathcal{N}(0, 1)$

3: **for**  $j = 1 : n$  **do**

— Calculer la distribution stationnaire  $\pi_l(X)$  pour chaque réalisation du vecteur  $(\lambda^{(j)}, \mu^{(j)}, N)$

$$y(i) = \pi_l(X)$$

— Calculer les polynômes de Hermite pour les paramètres  $(\lambda^{(j)}, \mu^{(j)}, N)$

4: **end for**

Déterminer la matrice de transition  $\Psi$

Calculer les coefficient à l'aide de la formule :

$$\mathbf{a} = (\Psi^\top \Psi)^{-1} \Psi^\top \mathbf{Y}$$

Calculer l'espérance  $E(\pi) = a_0$

Calculer la variance  $\text{Var}(\pi) = \sum_{j=1}^n a_j^2$

**Sortie**  $Mean_Y, Var_Y$

**Fin**

---

## Cas unidimensionnelle

**Exemple 3.2.3** *Considérons le système d'attente M/E<sub>2</sub>/1/N avec les paramètres d'entrée  $\lambda$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , où  $\lambda$  est considéré comme le paramètre le plus influent sur la sortie du modèle, tandis que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont considérés comme déterministes. Pour représenter l'incertitude dans le paramètre  $\lambda$  et simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire, nous introduisons un modèle pour ce paramètre incertain.*

*Nous définissons le modèle pour  $\lambda$  comme suit :*

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

*où  $\bar{\lambda}$  est la valeur moyenne de  $\lambda$ ,  $\sigma_\lambda$  est l'écart-type, et  $\varepsilon_\lambda$  est une variable aléatoire suivant une distribution normale standard.*

L'approximation fonctionnelle d'une composante  $\pi_l(\lambda)$  du vecteur stationnaire par le développement en Polynômes de Chaos (PC) en cas unidimensionnel s'écrit comme suit :

$$\pi_l(\lambda) = \sum_{i=0}^P y_i \Psi_i(\lambda)$$

où :

$\lambda$  est le paramètre incertain,

$P$  est le degré du polynôme de Chaos,

$y_i$  sont les coefficients du développement en PC,

$\Psi_i(\lambda)$  sont les polynômes de la base orthogonale utilisée dans l'expansion.

### 3.3 Résultats numériques

Pour illustrer l'application de la méthode de développement en série de Taylor sur les trois systèmes étudiés ( $M/M/1/N$ ,  $M/D/1/N$ , et  $M/E_2/1/N$ ), nous présentons ici les résultats numériques pour  $N = 4$ .

Nous calculons la moyenne et la variance pour chaque composante  $\pi_l (l = 0, \dots, 4)$  de la distribution stationnaire pour chaque système.

#### Système M/M/1/N

Les tableaux 3.4 et 3.5 nous montrent l'espérance et la variance de chaque composante  $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$  approchées par le développement en séries de Taylor, les polynômes de chaos et la simulation.

Composante	$\pi_l(0)$	$\pi_l(1)$	$\pi_l(2)$	$\pi_l(3)$	$\pi_l(4)$
Taylor	0.0984	0.1905	0.2818	0.2836	0.1455
PC	0.0985	0.1904	0.2818	0.2836	0.1456
Simulation	0.0990	0.1911	0.2821	0.2829	0.1446

TABLE 3.4 – Espérance des composantes  $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$  pour le modèle M/M/1/N.

Les valeurs de l'espérance obtenues par les trois méthodes sont très proches les unes des autres.

Composante	$\pi_l(0)$	$\pi_l(1)$	$\pi_l(2)$	$\pi_l(3)$	$\pi_l(4)$
Taylor	0.00083	0.00101	0.00011	0.00113	0.00129
PC	0.00092	0.00099	0.00008	0.00103	0.00136
Simulation	0.00090	0.00097	0.00008	0.00102	0.00134

TABLE 3.5 – Variance des composantes  $\pi_l(i), i = 0, 1, 2, 3, 4$  pour le modèle M/M/1/N.

De même, les variances obtenues par les différentes méthodes sont également similaires.

### Système M/D/1/N

Pour le modèle M/D/1/N, les résultats numériques de l'espérance et de la variance sont présentés ci-dessous. Les valeurs sont exprimées en différentes unités en fonction des ordres de grandeur des résultats.

Composante	$\pi_l(0)$	$\pi_l(1)$	$\pi_l(2)$	$\pi_l(3)$	$\pi_l(4)$
Unité	$\times 10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-3}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$
Taylor	0.239	3.105	5.422	1.657	8.287
PC	0.806	2.950	4.297	1.577	8.379
Simulation	1.023	3.097	4.303	1.575	8.380

TABLE 3.6 – Espérance des composantes  $\pi_l(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  pour le modèle M/D/1/N.

Les valeurs de l'espérance pour le modèle M/D/1/N montrent une plus grande variabilité comparée au modèle M/M/1/N. Les différences entre les méthodes de Taylor et de chaos polynomial sont plus prononcées, mais globalement, elles restent proches des valeurs de simulation, ce qui montre la robustesse des méthodes analytiques.

Composante	$\pi_l(0)$	$\pi_l(1)$	$\pi_l(2)$	$\pi_l(3)$	$\pi_l(4)$
Unité	$\times 10^{-8}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
Taylor	5.5548	5.8064	1.4202	4.9005	4.9530
PC	0.0137	5.8064	1.4202	4.9005	4.9530
Simulation	0.0035	0.0133	0.0208	2.3113	2.7353

TABLE 3.7 – Variance des composantes  $\pi_l(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  pour le modèle M/D/1/N.

### Système M/E<sub>2</sub>/1/N

Pour le modèle M/E<sub>2</sub>/1/N, les résultats obtenus sont les suivants :

Composante	$\pi_l(0)$	$\pi_l(1)$	$\pi_l(2)$	$\pi_l(3)$	$\pi_l(4)$
Unité	$\times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$
Taylor	6.845	8.946	7.300	3.306	5.867
PC	6.972	8.992	7.304	3.305	5.866
Simulation	6.986	9.012	7.315	3.307	5.586

TABLE 3.8 – Espérance des composantes de la distribution stationnaire  $\pi_l(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  pour le modèle M/E<sub>2</sub>/1/N.

Composante	$\pi_l(0)$	$\pi_l(1)$	$\pi_l(2)$	$\pi_l(3)$	$\pi_l(4)$
Unité	$\times 10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$
Taylor	0.967	0.931	2,285	4,697	1,612
PC	1,615	1.212	2.504	4.500	1.664
Simulation	1.707	1.243	2.502	4.462	1.650

TABLE 3.9 – Variance des composantes de la distribution stationnaire  $\pi_l(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  pour le modèle M/ $E_2$ /1/N.

Les résultats montrent que les deux méthodes, Taylor et PC, fournissent des estimations très proches des valeurs obtenues par la simulation de Monte Carlo. Les écarts entre les valeurs calculées par Taylor et PC sont minimales, ce qui indique que les deux méthodes sont robustes et précises. Pour le modèle M/M/1/N, les valeurs de l'espérance et de la variance des composantes de la distribution stationnaire sont presque identiques entre Taylor et PC, et correspondent également bien aux résultats de la simulation. Une tendance similaire est observée pour les modèles M/D/1/N et M/ $E_2$ /1/N, où les résultats des deux méthodes concordent bien avec ceux de la simulation.

Lors de la mise en œuvre de ces deux méthodes pour l'analyse de la sensibilité et la propagation de l'incertitude dans les systèmes de files d'attente, la complexité algorithmique et la simplicité d'utilisation diffèrent. La méthode de Taylor est relativement simple et efficace pour des systèmes de petite à moyenne taille, nécessitant principalement des calculs de dérivées d'ordre supérieure de la distribution stationnaire. En revanche, les polynômes de chaos nécessitent la construction et la manipulation de polynômes orthogonaux, ce qui peut être mathématiquement intensif et demande une compréhension plus avancée des concepts de polynômes de chaos. En plus de leur précision, les méthodes d'approximation par la série de Taylor et par les polynômes de chaos démontrent une robustesse notable face à des variations des paramètres du système. En effet, en analysant les écarts-types ( $\sigma$ )<sup>2</sup> associés aux variances des composantes de la distribution stationnaire des systèmes d'attente, on observe une stabilité accrue des résultats.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué deux approches d'analyse importantes aux modèles d'attente. D'abord, l'utilisation de la méthode de Sobol pour l'analyse de sensibilité a permis d'identifier les paramètres les plus influents sur la performance du système. Ensuite, l'analyse d'incertitude a été menée par deux méthodes : développement en série de Taylor des chaînes de Markov (Ouazine et Abbas AMM 2016) [61] et le développement en polynômes de chaos. La validation de ces résultats par simulation a renforcé la fiabilité des statistiques obtenues, offrant ainsi une base solide pour la compréhension et l'optimisation des systèmes d'attente.

# Conclusion Générale

Les modèles de files d'attente sont intrinsèquement sujets à de nombreuses sources d'incertitude qui peuvent affecter significativement leurs performances. Ce mémoire a exploré deux approches principales : l'analyse de sensibilité et la propagation d'incertitude dans les systèmes de files d'attente, en se concentrant sur les modèles  $M/M/1/N$ ,  $M/D/1/N$  et  $M/E_2/1/N$ . L'objectif était d'identifier les paramètres les plus influents et de quantifier comment les incertitudes dans ces paramètres se propagent à travers les modèles.

En utilisant les indices de Sobol, nous avons pu déterminer les paramètres ayant le plus grand impact sur la distribution stationnaire des systèmes de files d'attente.

Par ailleurs, deux méthodes ont été utilisées pour la propagation de l'incertitude : les développements en série de Taylor et les polynômes de chaos. Ces méthodes ont permis d'estimer avec précision la moyenne et la variance des distributions stationnaires. Les résultats obtenus ont été comparés et validés par des simulations de Monte Carlo, confirmant ainsi la robustesse et la fiabilité des approches proposées.

Les contributions majeures de ce mémoire peuvent être résumées comme suit :

- Identification des paramètres clés influençant la performance des systèmes de files d'attente à l'aide des indices de Sobol.
- Application des méthodes de propagation d'incertitude basées sur les développements en série de Taylor et les polynômes de chaos.
- Validation des résultats par des simulations de Monte Carlo, démontrant l'efficacité des méthodes utilisées.

En combinant ces deux approches, nous pouvons non seulement mieux comprendre et prédire le comportement des systèmes de files d'attente, mais aussi prendre des décisions informées pour optimiser les ressources, réduire les coûts et améliorer la satisfaction des clients. Cela conduit à des systèmes plus efficaces et adaptables, capables de fonctionner de manière optimale même face à des variations imprévues.

Pour les travaux futurs, il serait pertinent d'élargir ces études à des modèles plus complexes, tels que les réseaux de files d'attente, et de généraliser l'analyse d'incertitude en utilisant des "P-boxes". De plus, l'application de l'analyse de sensibilité et d'incertitude pourrait être étendue à des problèmes d'ingénierie, notamment en génie civil et en chimie.



# Bibliographie

- [1] ABATE, Joseph et WHITT, Ward. “The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions”. In : *Queueing systems* 10 (1992), p. 5-87.
- [2] ABBAS, Karim, BERKHOUT, Joost et HEIDERGOTT, BF. “A Critical Account of Perturbation Analysis of Markovian Systems”. In : *(No Title)* (2015).
- [3] ABBAS, Karim, HEIDERGOTT, Bernd et AISSANI, Djamil. “A Taylor series approach to the numerical analysis of the M/D/1/N queue”. In : *Procedia Computer Science* 1.1 (2010), p. 1553-1560.
- [4] ABBAS, Karim, HEIDERGOTT, Bernd et AISSANI, Djamil. “A functional approximation for the M/G/1/N queue”. In : *Discrete Event Dynamic Systems* 23 (2013), p. 93-104.
- [5] ABBAS, Karim, HEIDERGOTT, BF et AISSANI, Djamil. “A Taylor series expansion approach to the functional approximation of finite queues”. In : *(No Title)* (2011).
- [6] ABDERAHMANE, Bechkit et AMOR, Taibi. “Processus De Sauts De Markov Application A La File M/er/1”. Mém. de mast. Université M’hamed Bougara - Boumerdes, 2017.
- [7] ABRAMOWITZ, Milton. “Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, nbs”. In : *Applied Math. Series* 55 (1964), p. 232.
- [8] ALBIN, Susan L. “Analyzing M/M/1 queues with perturbations in the arrival process”. In : *Journal of the Operational Research Society* 35 (1984), p. 303-309.
- [9] ANISSA, MEBARAKOU. “Analyse de sensibilité et d’incertitude du modèle M/G/1/N avec vacances via la méthode de Chaos”. Université A.Mira de Bejaia, 2021.
- [10] BACCELLI, François et SCHMIDT, Volker. “Taylor series expansions for Poisson-driven-linear systems”. In : *The Annals of Applied Probability* 6.1 (1996), p. 138-185.
- [11] BACHI, Katia. “Analyse fonctionnelle de quelques modèles de fiabilité par l’approche des développements en séries de Taylor”. Thèse de doct. Université de Béjaia-Abderrahmane Mira.
- [12] BAYNAT, Bruno. *La théorie des files d’attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit*. Hermès, 2000.
- [13] BENAOUICHA, Mustapha et AISSANI, Djamil. “Strong stability in a //1 queueing system”. In : *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 71 (2005), p. 25-36.
- [14] BILAL, Nasir. “Implementation of Sobol’s method of global sensitivity analysis to a compressor simulation model”. In : *(No Title)* (2014).
- [15] BOXMA, Onno Johan et GROENENDIJK, Wilhelmus Petrus. *Two queues with alternating service and switching times*. Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1987.
- [16] BRELOT, Marcel. “Sur la formule de Taylor”. In : *Annales de l’université de Grenoble. Nouvelle série. Section sciences mathématiques et physiques* 21 (1945), p. 91-93.

- [17] BRÉMAUD, Pierre. *Initiation aux Probabilités : et aux chaînes de Markov*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [18] BRÉMAUD, Pierre. *Markov chains : Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. T. 31. Springer Science & Business Media, 2013.
- [19] CAMERON, Robert H et MARTIN, William T. “The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals”. In : *Annals of Mathematics* (1947), p. 385-392.
- [20] CAO, Xi-Ren. “The Maclaurin series for performance functions of Markov chains”. In : *Advances in Applied Probability* 30.3 (1998), p. 676-692.
- [21] CHAUDHRY, Mohan L et TEMPLETON, James GC. “A first course in bulk queues”. In : *(No Title)* (1983).
- [22] CHEURFA, Fatah et al. “Functional sensitivity analysis of ruin probability in the classical risk models”. In : *Scandinavian Actuarial Journal* 2021.10 (2021), p. 936-968.
- [23] COHEN, Jacob Willem. *The single server queue*. Elsevier, 2012.
- [24] CUKIER, RI, LEVINE, HB et SHULER, KE. “Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems”. In : *Journal of computational physics* 26.1 (1978), p. 1-42.
- [25] DJAMILA, Babouri et KARIM, Abbas. “Analyse De Sensibilité Et D’incertitude Dans Le Modèle De Risque Classique”. Mém. de mast. Université Abderrahmane Mira - Bejaia, 2019.
- [26] DOSHI, Bharat T. “Queueing systems with vacations—a survey”. In : *Queueing systems* 1 (1986), p. 29-66.
- [27] DURRETT, Rick. *Probability : theory and examples*. T. 49. Cambridge university press, 2019.
- [28] EFRON, Bradley et STEIN, Charles. “The jackknife estimate of variance”. In : *The Annals of Statistics* (1981), p. 586-596.
- [29] FAJRAOUI, Noura. “Analyse de sensibilité globale et polynômes de chaos pour l’estimation des paramètres : Application aux transferts en milieu poreux”. Thèse de doct. Strasbourg, 2014.
- [30] FELLER, William et al. “An introduction to probability theory and its applications”. In : *Physics Today* (1971).
- [31] FIELD JR, RV et GRIGORIU, M. “On the accuracy of the polynomial chaos approximation”. In : *Probabilistic Engineering Mechanics* 19.1-2 (2004), p. 65-80.
- [32] FOATA, Dominique et FUCHS, Aimé. *Processus stochastiques : Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*. Dunod., 2002.
- [33] FRICKER, Christine, GUILLEMIN, Fabrice et ROBERT, Philippe. “Perturbation analysis of an M/M/1 queue in a diffusion random environment”. In : *Queueing Systems* 61 (2009), p. 1-35.
- [34] GHANEM, Roger G et SPANOS, Pol D. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Courier Corporation, 2003.
- [35] GHIOCEL, Dan M et GHANEM, Roger G. “Stochastic finite-element analysis of seismic soil–structure interaction”. In : *Journal of Engineering Mechanics* 128.1 (2002), p. 66-77.
- [36] GONG, Wei-Bo et HU, Jian-Qiang. “The MacLaurin series for the GI/G/1 queue”. In : *Journal of Applied Probability* 29.1 (1992), p. 176-184.

- [37] GRASSMANN, Winfried K. “Finding the right number of servers in real-world queuing systems”. In : *Interfaces* 18.2 (1988), p. 94-104.
- [38] HASSIN, Refael et HAVIV, Moshe. *To queue or not to queue : Equilibrium behavior in queueing systems*. T. 59. Springer Science & Business Media, 2003.
- [39] HEIDERGOTT, Bernd et HORDIJK, Arie. “Taylor series expansions for stationary Markov chains”. In : *Advances in Applied Probability* 35.4 (2003), p. 1046-1070.
- [40] HEIDERGOTT, Bernd, HORDIJK, Arie et VAN UITERT, Miranda. “Series expansions for finite-state Markov chains”. In : *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 21.3 (2007), p. 381-400.
- [41] HUANG, Shuping, MAHADEVAN, Sankaran et REBBA, Ramesh. “Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems”. In : *Probabilistic engineering mechanics* 22.2 (2007), p. 194-205.
- [42] IOOSS, Bertrand. “Revue sur l’analyse de sensibilité globale de modèles numériques”. In : *Journal de la Société Française de Statistique* 152.1 (2011), p. 3-25.
- [43] JACOD, Jean et SHIRYAEV, Albert. *Limit theorems for stochastic processes*. T. 288. Springer Science & Business Media, 2013.
- [44] KADI, Mokhtar et al. “Estimation et analyse d’un système de files d’attente avec dérobades”. Thèse de doct. 2017.
- [45] KEILSON, Julian. “Stochastic Monotonicity”. In : *Markov Chain Models—Rarity and Exponentiality* (1979), p. 164-175.
- [46] KEMENY, JG et SNELL, JL. “Finite Markov Chains, Van Nostrand”. In : *Princeton, New Jersey* (1960).
- [47] KEMENY, John G et SNELL, J Laurie. “Finite markov chains springer-verlag”. In : *New York Berlin Herdelberg Tokyo* (1976).
- [48] KENDALL, David G. “Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain”. In : *The Annals of Mathematical Statistics* (1953), p. 338-354.
- [49] KLEINROCK, Leonard. *Queueing systems : theory*. John Wiley, 1975.
- [50] KLENNROCK, L. “Queueing systems volume 1 : theory”. In : *New York* (1975).
- [51] KOTZUREK, Matthias et STOYAN, Dietrich. “A remark on the stability of the stationary distributions of Markov chains”. In : *Mathematische Nachrichten* 78.1 (1977), p. 7-12.
- [52] KULKARNI, Vidyadhar G. *Modeling and analysis of stochastic systems*. Chapman et Hall/CRC, 2016.
- [53] LE MAITRE, Olivier P et al. “A stochastic projection method for fluid flow : II. Random process”. In : *Journal of computational Physics* 181.1 (2002), p. 9-44.
- [54] LEVIN, David A et PERES, Yuval. *Markov chains and mixing times*. T. 107. American Mathematical Soc., 2017.
- [55] LI, Heng et ZHANG, Dongxiao. “Probabilistic collocation method for flow in porous media : Comparisons with other stochastic methods”. In : *Water Resources Research* 43.9 (2007).
- [56] LITTLE, John DC. “A proof for the queuing formula :  $L = \lambda W$ ”. In : *Operations research* 9.3 (1961), p. 383-387.

- [57] MATTHIES, Hermann G et KEESE, Andreas. “Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations”. In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194.12-16 (2005), p. 1295-1331.
- [58] MEDHI, Jyotiprasad. *Stochastic models in queueing theory*. Elsevier, 2002.
- [59] NORRIS, S. *JR ; Markov Chains, Cambridge Uni.* 1997.
- [60] OMAR, Belabbaci. “La Penalisation Des Trajectoires Du Mouvement Brownien”. Mém. de mast. Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen, 2011.
- [61] OUAZINE, Sofiane et ABBAS, Karim. “Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation”. In : *Applied Mathematical Modelling* 40.2 (2016), p. 1137-1156.
- [62] PUIG, Bénédicte, POIRION, Fabrice et ET, SOIZE. “C. Non-Gaussian simulation using hermite polynomial expansion”. In : *4th International Conference on Computational Stochastic Mechanics, Corfu.* 2002.
- [63] S.SMALE Walters, P. *THE MATHEMATICS OF TIME ESSAYS ON DYNAMICAL SYSTEMS, ECONOMIC PROCESSES AND RELATED TOPICS.* 1981.
- [64] SALTELLI, A, CHAN, K et SCOTT, EM. “Wiley series in probability and statistics”. In : *Sensitivity analysis* (2000).
- [65] SALTELLI, Andrea. “The critique of modelling and sensitivity analysis in the scientific discourse. An overview of good practices Transatlantic Uncertainty Colloquium (TAUC) Washington, October 10-11”. In : *(No Title)* (2006).
- [66] SALTELLI, Andrea et al. *Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models.* T. 1. Wiley Online Library, 2004.
- [67] SAUER, Charles H et CHANDY, K Mani. “Computer systems performance modeling”. In : *(No Title)* (1981).
- [68] SOBOŁ, IM. “Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models”. In : *Math. Model. Comput. Exp.* 1 (1993), p. 407.
- [69] SOFIANE, Ouazine. “Approche des Développements en Séries de Taylor pour l’Approximation Fonctionnelle des Systèmes de Files d’Attente”. In : *(No Title)* (2016).
- [70] SUDRET, Bruno. “Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions”. In : *Reliability engineering & system safety* 93.7 (2008), p. 964-979.
- [71] SUR, Frédéric. *Programmation dynamique, chaînes de Markov, files d’attente.* école des Mines de Nancy, 2013-2014.
- [72] SUSANTO, Tedi et SZE, Jason. “Smart Queuing : An Adaptive Approach”. In : (2002).
- [73] SZEG, Gabor. *Orthogonal polynomials.* T. 23. American Mathematical Soc., 1939.
- [74] TAKÁCS, Lajos. “Introduction to the Theory of Queues”. In : *(No Title)* (1962).
- [75] TATANG, Menner A et al. “An efficient method for parametric uncertainty analysis of numerical geophysical models”. In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 102.D18 (1997), p. 21925-21932.
- [76] TAYLOR, Brook. *Methodus incrementorum directa & inversa.* Inny, 1717.
- [77] TURÁNYI, Tamás. “Sensitivity analysis of complex kinetic systems. Tools and applications”. In : *Journal of mathematical chemistry* 5.3 (1990), p. 203-248.
- [78] WHITT, Ward. “The queueing network analyzer”. In : *The bell system technical journal* 62.9 (1983), p. 2779-2815.

- [79] WHITT, Ward. “Stochastic-process limits : an introduction to stochastic-process limits and their application to queues”. In : *Space* 500 (2002), p. 391-426.
- [80] WIENER, Norbert. “The homogeneous chaos”. In : *American Journal of Mathematics* 60.4 (1938), p. 897-936.
- [81] XIU, Dongbin et KARNIADAKIS, George Em. “The Wiener–Askey polynomial chaos for stochastic differential equations”. In : *SIAM journal on scientific computing* 24.2 (2002), p. 619-644.
- [82] XIU, Dongbin et KARNIADAKIS, George Em. “A new stochastic approach to transient heat conduction modeling with uncertainty”. In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46.24 (2003), p. 4681-4693.
- [83] XIU, Dongbin et KARNIADAKIS, George Em. “Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos”. In : *Journal of computational physics* 187.1 (2003), p. 137-167.
- [84] ZAZANIS, Michael A. “Analyticity of Poisson-driven stochastic systems”. In : *Advances in applied probability* 24.3 (1992), p. 532-541.
- [85] ZOLOTAREV, VM. “General problems of the stability of mathematical models”. In : *Bull. Int. Stat. Inst* 47.2 (1977), p. 382-401.

---

## Résumé

Ce mémoire aborde les défis de la modélisation et de l'évaluation des performances des systèmes de files d'attente, en se concentrant sur l'incertitude des paramètres. Deux approches principales sont explorées : l'analyse de sensibilité et d'incertitude. Les indices de Sobol, basés sur des simulations de Monte Carlo, sont utilisés pour identifier les paramètres les plus influents. La propagation de l'incertitude est réalisée à l'aide de développements en série de Taylor et de polynômes de chaos, validés par des simulations de Monte Carlo. Les résultats montrent comment optimiser les ressources et améliorer la satisfaction des clients en comprenant et en gérant mieux l'incertitude des systèmes de files d'attente.

**Mots-clés :** files d'attente, analyse de sensibilité, analyse d'incertitude, indices de Sobol, Monte Carlo, développement de Taylor, polynôme de chaos.

---

## Abstract

This document addresses the challenges of modeling and evaluating the performance of queuing systems, focusing on the uncertainty parameter. Two main approaches are explored : sensitivity analysis and uncertainty propagation. Sobol indices, based on Monte Carlo simulations, are used to identify the most influential parameters. Uncertainty propagation is conducted using Taylor series expansions and chaos polynomials, validated by Monte Carlo simulations. The results demonstrate how to optimize resources and improve customer satisfaction by better understanding and managing the uncertainty in queuing systems.

**Keywords :** Queuing systems, sensitivity analysis, uncertainty analysis, Sobol indices, Monte Carlo, Taylor expansion, chaos polynomial.

---