

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique
Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energétique (L2ME)

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT

Domaine : Sciences et Technologies Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Mécanique et Ingénierie

Présentée par
METHIA Mounir

Thème

Étude de la rupture des matériaux élastomères

Soutenue le : 10/02/2020

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
M. SEGHIR Abdelghani	MCA	Univ. de Bejaia	Président
M. BECHIR Hocine	Professeur	Univ. de Bejaia	Rapporteur
M. AÏT HOCINE Nourredine	Professeur	INSA (CVL) France	Co-Rapporteur
M. BENSLIMANE Abdelhakim	MCA	Univ. de Bejaia	Examineur
M. MAY Abdelghani	MCA	EMP de Bordj El Bahri	Examineur

Année Universitaire : 2020/2021

"There is no way to happiness,

happiness is the way"

Thich Nhat Hanh

Remerciements

« *Au nom du Dieu le clément et le miséricordieux* »

Mes premières pensées vont à mes directeurs de thèse. Je voudrais remercier Pr. *BECHIR Hocine* de m'avoir suivi au quotidien durant ces années. Il m'a transmis son goût pour la recherche qui demande à la fois rigueur et imagination. Je lui suis entièrement reconnaissant pour ses conseils et ses idées qui ont très largement contribué à la réussite de ce travail. De la même manière, je voudrais adresser toute ma profonde gratitude à Pr. *AÏT HOCINE Nourredine* de m'avoir accueilli dans son laboratoire durant mes stages. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec lui grâce à sa disponibilité, son implication dans ce travail, ses compétences techniques ainsi que sa bonne humeur.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance aux membres du jury : M. *SEGHIR Abdelghani* pour avoir accepté de présider le jury ; M. *BENSLIMANE Abdelhakim* et M. *MAY Abdelghani* pour avoir assumé la lourde tâche de relire et rapporter mon mémoire.

Durant ces années de thèse, j'ai eu la chance de partager le quotidien de plusieurs équipes de recherches dans différents laboratoires. Je veux saluer ici toute l'équipe du Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Energétique (L2ME), notamment M. *BELAMRI Abdelatif* pour ses précieux conseils et son soutien dans l'univers de l'enseignement, M^{me} *BOUZIDI Safia* pour les nombreuses conversations très constructives, M^{me} *BECHIR (ZEROUATI) Halima* pour son soutien et ses encouragements. Je veux également témoigner mon amitié envers M. *BENSLIMANE Abdelhakim* avec qui j'ai eu plaisir de collaborer. Ne pouvant nommer tout le monde et pour n'oublier personne, je remercie tous mes collègues avec lesquels j'ai passé des moments ahurissants. Merci à *Smail* pour son enthousiasme. Merci à *Riad* pour sa bonne humeur. Merci à *Moumouh* pour ses

conseils. Merci à *Nadjib* et *Tarik* pour la dépressurisation (afin d'éviter la dépression !). Merci à *Anis* qu'on voit rarement. Merci à *Aimad* et *Koceila* pour les débats passionnants, mais inutiles. Merci à *Ahmed* et *Idir* pour les voyages à une heure du matin pour la bourse PNE, et tout le reste...

Je veux également remercier toute l'équipe du Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé (LaMé), de l'INSA Centre Val de Loire, France, notamment M. *Arnaud FRACHON* qui m'a aidé à approfondir mes connaissances dans le domaine des éléments finis, et à prendre en main l'utilisation du logiciel « Abaqus ». Je voudrais également remercier les stagiaires, doctorants et post-doctorants de ce laboratoire, de différentes nationalités, avec qui j'ai pu tisser des liens particuliers, humainement et professionnellement. Merci à *Chérif* et *Mountacer* (Tunisie), *Sanousi* et *Friday* (Nigéria), *Xiaolin* et *Yuzhu* (Chine), *Anourag* (Inde), *Thin* (Vietnam), *Lucia* et *Catalina* (Argentine), *Julia* (Liban). Merci à tous pour votre accueil, vos conseils et votre aide lors de mes séjours scientifique au sein de LaMé.

Je veux dédier ce mémoire à ma famille, à mes *grands-parents*, à mes *parents* qui m'ont élevé et accompagné jusque-là, à mes frères (*Houhou* alias *Dada*, *Dady*, *Farid*) et mes petites sœurs jumelles (*Lynda* et *Houda*) qui m'ont soutenue jusqu'au bout, à mes tantes, oncles, cousins et amis au milieu de qui je me suis construit, particulièrement *Salem*, *Yougo*, *Yan* et *Massi*.

Enfin, je voudrais dédier ce mémoire à ma fiancée, *Imene* qui m'a supporté durant ces années de thèse, et sans qui rien ne serait possible...

Table de matière :

Remerciements	3
Table de matière :	5
Liste des figures	8
Liste des tableaux	12
Notations principales.....	13
Introduction générale.....	17
Chapitre I État de l'art : critères de rupture en petites et grandes déformations	20
Partie 1 : Concepts théoriques de la rupture en petites déformations.....	21
I.1. Introduction	21
I.2. Historique.....	23
I.3. Concepts généraux sur la mécanique de la rupture	25
I.3.1. Modes élémentaires de fissuration	25
I.3.2. Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure	26
I.3.3. Champs des contraintes et des déplacements.....	28
I.3.4. Mécanique configurationnelle.....	33
I.3.4.1. Caractéristiques du tenseur de contrainte d'Eshelby	34
I.3.5. Critères de rupture	38
I.3.5.1. Facteurs d'intensités de contrainte.....	39
I.3.5.2. Critère basé sur la contrainte tangentielle maximale.....	40
I.3.5.3. Critère basé sur le taux de restitution d'énergie G	41
I.3.5.4. Intégrale J	42
I.3.5.5. Critère basé sur la densité d'énergie de déformation.....	43
I.3.5.6. Critères basés sur le tenseur d'Eshelby	45
(1) Critères basé sur la contrainte principale et sur la contrainte équivalente de von Mises.....	45
(2) Critère basé sur la mécanique configurationnelle des matériaux.....	45
Partie 2 : Concepts théoriques de la rupture en grandes déformations.....	47
I.4. Introduction	47
I.5. Généralités sur les élastomères.....	47
I.5.1. Un réseau de chaînes.....	47
I.5.2. Réponse mécanique typique.....	49
I.5.3. Les champs asymptotiques	50
I.6. Mécanique des milieux continus non linéaire.....	50

I.6.1. Cinématique.....	50
I.6.2. Description du mouvement.....	51
I.6.3. Tenseur des déformations	53
I.6.4. Tenseurs des contraintes.....	53
I.6.4.1. Description eulérienne	54
I.6.4.2. Description mixte	54
I.6.4.3. Description lagrangienne	55
I.6.5. Lois de comportement hyperélastique isotrope.....	55
I.6.5.1. Hyperélasticité	56
I.6.5.2. Hyperélasticité incompressible.....	57
I.6.5.3. Modèles de comportement.....	57
(1) Modèle néo-Hookéen (1943)	58
(2) Modèle de Mooney-Rivlin (1940)	58
(3) Développement polynomial de Rivlin (1948)	59
(4) Modèles d'ordre supérieur à 1	59
(5) Modèle d'Ogden (1972)	59
(6) Modèle d'Arruda-Boyce (1993)	60
(7) Modèle de Gent (1996).....	60
(8) Modèle du tube étendu (1999)	60
I.6.5.4. Comparaison des modèles.....	61
I.7. Critère de rupture en grandes déformations	62
Partie 3 : Concepts de modélisation numérique de la rupture	66
I.8. Méthodes numériques outils de modélisation de la rupture des matériaux ...	66
I.8.1. Méthode des éléments finis.....	66
I.8.1.1. Méthode de remaillage.....	67
I.8.1.2. Méthode de sous-modélisation.....	68
I.8.2. Méthode des éléments finis étendus.....	69
I.8.3. Méthode des éléments de frontières.....	69
I.8.4. Méthode sans maillage.....	70
I.8.5. Méthode des éléments discrets.....	70
I.9. Bilan du chapitre I.....	71
Chapitre II Critères de rupture basés sur le tenseur d'Eshelby	72
II.1. Introduction.....	73
II.2. Position du problème.....	74
II.3. Formulation d'un nouveau critère de rupture	75
II.4. Critère de direction de propagation de fissure.....	78
II.4.1. Chargements en traction et compression uniaxiales.....	78

II.4.1.1. Chargement en traction uniaxiale	80
II.4.1.2. Chargement en compression uniaxiale	84
II.4.2. Chargement en cisaillement pur	86
II.5. Valeur critique comme critère d'initiation de fissure.....	89
II.6. Bilan du Chapitre II	91
Chapitre III Analyse asymptotique des champs élastostatiques en hyperélasticité	
isotrope	93
III.1. Introduction.....	94
III.2. Formulation du problème.....	95
III.2.1. Linéarisation de l'équation constitutive néo-Hookéenne	95
III.2.2. Equation d'équilibre.....	97
III.3. Problème de fissuration en mode I.....	101
III.3.1. Calcul du champ de déplacement au voisinage de la pointe de la fissure	
.....	102
III.3.2. Calcul du champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure	
.....	105
III.3.3. Formulation des conditions aux limites	106
III.4. Analyse par éléments finis.....	112
III.4.1. Modèle et conditions aux limites.....	112
III.4.2. Maillage.....	113
III.4.3. Zone cœur dans les matériaux en caoutchouc.....	114
III.4.4. Calcul de l'angle d'ouverture de la fissure	115
III.5. Vérification de la validité des champs de contraintes et de déplacements	
proposés.....	119
III.5.1. Comparaison entre l'approche proposée et la théorie de la MLER.....	119
III.5.1.1. Vérification numérique du modèle	120
III.5.2. Bilan du Chapitre III	126
Conclusion générale et perspectives	127
Annexe A	130
Annexe B	132
Annexe C	134
Références bibliographiques	135

Liste des figures

Fig. 1 Fissures générées dans des structures (a) Lors du processus de fabrication (b) Pendant la durée de vie.....	21
Fig. I-1 État final de différentes éprouvettes après un essai uniaxial (a) acier (b) composite (c) béton (tiré de [3]).	22
Fig. I-2 Réponses schématiques de différents matériaux pour un essai en traction uniaxiale.	22
Fig. I-3 Catastrophes liées au phénomène de rupture (a) fissure dans un pont (b) navire Liberty Ship.....	25
Fig. I-4 Modes élémentaires de fissuration.....	26
Fig. I-5 Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure soumise à une contrainte σ_0 et/ou un déplacement Δ , avec r est la distance radiale de la pointe de la fissure et θ un angle polaire.	27
Fig. I-6 Système de coordonnées en front de fissure.....	30
Fig. I-7 Champ de contrainte (a) dans le système de coordonnées cartésiennes (b) dans le système de coordonnées polaires.....	31
Fig. I-8 (a) Mécanique physique : particules m dans un champ de gravité g au-dessus d'un plan P à une distance x (b) mécanique configurationnelle : plaque élastique contenant un défaut A à une distance x du bord inférieur, soumise à une contrainte σ_0	34
Fig. I-9 Fissure sollicitée en mode mixte.	39
Fig. I-10 Calcul de G pour une avancée de δ et d'un angle θ	42
Fig. I-11 Contour d'intégration Γ	43
Fig. I-12 Représentation schématique de chaînes (a) élastomère non réticulé (b) élastomère réticulé.	48
Fig. I-13 Différents types de chaînes observables dans un élastomère réticulé.	49
Fig. I-14 Courbe classique de traction uniaxiale d'un élastomère : contrainte nominale en fonction de l'élongation λ	49
Fig. I-15 Configurations initial et déformée.....	52
Fig. I-16 Etat de contrainte dans les différentes configurations.....	54
Fig. I-17 Prédiction de la traction uniaxiale (a) par des modèles hyperélastiques polynomiaux (b) par quatre modèles dédiés aux grandes déformations [41].	62

Fig. I-18 Plaque carrée pré-fissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte [88].	67
Fig. I-19 Représentation schématique d'un remaillage [94].	68
Fig. I-20 Illustration de la technique de sous-modélisation.	68
Fig. II-1 Géométrie de la fissure.	75
Fig. II-2 Valeurs principales $(16\mu_0 r/\sigma_0^2 a)b'_I$ et $(16\mu_0 r/\sigma_0^2 a)b'_II$ en fonction de l'angle polaire θ , pour différentes valeurs du coefficient de Poisson, en mode I ($\beta = 90^\circ$).	76
Fig. II-3 Graphiques des fonctions adimensionnelles $\bar{S}^{(E)} = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)S^{(E)}$, $\bar{S}^{(E)'} = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)(\partial S^{(E)}/\partial\theta)$ et $\bar{S}^{(E)''} = (16\mu_0/\sigma_0^2 a)(\partial^2 S^{(E)}/\partial\theta^2)$ en fonction de l'angle θ , pour un coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$.	79
Fig. II-4 Fissure inclinée (a) en traction et (b) en compression uniaxiale.	80
Fig. II-5 Comparaison des prédictions des critères de rupture avec les données expérimentales, sous un chargement en traction uniaxiale (a) $\nu_0 = 1/3$ (b) $\nu_0 = 0.35$ (c) $\nu_0 = 0.38$.	83
Fig. II-6 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($-\theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en traction uniaxiale (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.	84
Fig. II-7 Comparaison entre les prédictions des critères de rupture, sous un chargement en compression uniaxiale (a) $\nu_0 = 0.2$ (b) $\nu_0 = 0.4$.	85
Fig. II-8 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($+\theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en compression uniaxiale (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.	85
Fig. II-9 Fissure inclinée soumise à un cisaillement pur (a) angle de rupture négatif (b) angle de rupture positif.	86
Fig. II-10 Comparaison des prédictions des critères théoriques de rupture avec les données expérimentales, sous un chargement en cisaillement pur, pour $\nu_0 = 1/3$.	87
Fig. II-11 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($-\theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en cisaillement pur (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.	88
Fig. II-12 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($+\theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en cisaillement pur (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.	89
Fig. II-13 Valeurs critiques $16\mu_0 S_{cr(\min)}^{(E)}$ en fonction de l'orientation initiale de la fissure β , pour un alliage d'aluminium en traction uniaxiale.	90
Fig. II-14 Valeurs critiques $16\mu_0 S_{cr(\max)}^{(E)}$ en fonction de l'orientation initiale de la fissure β , pour un alliage d'aluminium en traction uniaxiale.	90

Fig. III-1 Système de coordonnées cartésienne et polaire à la pointe de la fissure (a) dans la configuration de référence (b) dans la configuration déformée. Δ est le déplacement uniforme appliqué dans la direction x_2 .	102
Fig. III-2 Illustrations des conditions aux limites correspondant à la surface libre de la fissure (a) dans la configuration de référence (b) dans la configuration déformée. ρ est un rayon proche de la pointe de la fissure.	109
Fig. III-3 Plaque rectangulaire à fissure centrale en traction uniaxiale.	113
Fig. III-4 (a) Un quart de l'éprouvette avec un maillage grossier soumis à un déplacement vertical uniforme sur le bord supérieur, la zone du sous-modèle ($r = 0.4$ mm) est encadrée (b) sous-modèle EF semi-circulaire avec maillage fin. Les lignes en trait fort représentent les chemins suivant lesquels sont extraits les résultats numériques.	114
Fig. III-5 (a) Mise en évidence de la zone cœur dans le sous-modèle. (b) variation de la déformation principale maximale logarithmique dans le sous-modèle.	115
Fig. III-6 Profils de la fissure déformée et leurs ajustements paraboliques pour une contrainte $S_y = 0.5$ MPa appliquée et pour différents μ_0 et ν_0 .	117
Fig. III-7 Profils de la fissure déformée et leurs ajustements paraboliques pour des niveaux successifs de λ appliqués et pour différents μ_0 et ν_0 .	117
Fig. III-8 Paramètres (a) $\xi(\lambda)$ et (b) $\tilde{\theta}(\lambda)$ en fonction de λ .	119
Fig. III-9 (a) Déplacements normalisés U^ℓ/a en fonction des déplacements normalisés $U^{(0)}/a$ (b) contrainte de Von-Mises équivalente normalisée $\sigma_{(VM)}^\ell/\mu_0$ en fonction de la contrainte de Von-Mises équivalente normalisée $\sigma_{(VM)}^{(0)}/\mu_0$.	120
Fig. III-10 Comparaison entre les prédictions du déplacement vertical obtenues à partir des simulations EF, $u_y^{(FEM)}$, et les résultats analytiques, u_y , en fonction du rayon r , pour trois valeurs de μ_0 et à différents niveaux successifs de λ (a) $\theta = 45^\circ$ (b) $\theta = 60^\circ$.	121
Fig. III-11 Comparaison entre les prédictions de la contrainte normale obtenues à partir des simulations EF $\sigma_{22}^{(FEM)}$ et les résultats analytiques σ_{22}^ℓ , en fonction du rayon r , pour deux valeurs de μ_0 et à différents niveaux de chargements λ (a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 45^\circ$.	122
Fig. III-12 Comparaison entre les prédictions du déplacement vertical obtenues à partir des simulations EF, $u_y^{(FEM)}$, et les résultats analytiques, u_y , en fonction du rayon r , pour différentes valeurs du coefficient de Poisson ν_0 (a) $\theta = 45^\circ$ (b) $\theta = 60^\circ$.	123
Fig. III-13 Comparaison entre les prédictions de la contrainte normale obtenues à partir des simulations EF, $\sigma_{22}^{(FEM)}$, et les résultats analytiques, σ_{22}^ℓ , en fonction du rayon r , pour différentes valeur du coefficient de Poisson ν_0 (a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 45^\circ$.	124

-
- Fig. III-14** Comparaison entre les prédictions de la contrainte équivalente de Von-Mise obtenues à partir des simulations EF $\sigma_{(VM)}^{(FEM)}$ et les résultats analytiques $\sigma_{(VM)}^\ell$ en fonction du rayon r , pour différentes charges λ (a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 45^\circ$ 125
- Fig. III-15** Rapport des contraintes équivalentes de Von-Mises $\sigma_{(VM)}^\ell / \sigma_{(VM)}^{(FEM)}$ en fonction du rayon r , pour différentes valeurs de chargements λ (a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 45^\circ$ 126

Liste des tableaux

Tab. II.1 Divergence moyenne % sous un chargement en traction uniaxiale.....	83
Tab. II.2 Divergence moyenne en % sous un chargement en cisaillement pur, pour $45^\circ < \beta < 90^\circ$	88

Notations principales

a	demi-longueur de la fissure
\mathbf{B}	tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche
$b^{(E)}$	contrainte principale équivalente
$b'_{,II}$	valeurs principales du tenseur de contraintes d'Eshelby modifié
b_{ij}	tenseur de contraintes d'Eshelby
b'_{ij}	tenseur de contraintes d'Eshelby modifié
b_v	contrainte configurationnelle équivalente
\mathbf{C}	tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit
$C_{i=10\dots50}$	constantes d'intégration
E_0	module de Young
$\mathbf{E}_{i=1,2,3}$	vecteurs de la base du repère liée à la configuration de référence
$\mathbf{e}_{i=1,2,3}$	vecteurs de la base du repère liée à la configuration actuelle (déformée)
\mathbf{F}	tenseur opérateur gradient de la transformation
f_i	force du volume
$f_n(\theta)$	fonctions angulaires inconnues
\mathbf{I}	tenseur identité
I_1, I_2, I_3	invariants des tenseurs des dilatations
i, j	indices définissent un espace bidimensionnel, $=1,2$ en coordonnées cartésiennes ou $=r, \theta$, dans un système de coordonnées cylindriques
$g_n(\theta)$	fonctions angulaires inconnues
J	Jacobien
K_I, K_{II}	les facteurs d'intensité de contrainte des modes I et II
K_c	facteur d'intensité de contraintes critique

P	premier tenseur de Piola-Kirchhoff (PK1)
R	distance radiale de la pointe de la fissure dans la configuration de référence
r	distance radiale de la pointe de la fissure dans la configuration de déformée
r_c	rayon délimitant la zone cœur
r_{MCM}	limite élastique-plastique
\mathfrak{R}	référentiel
S	second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (PK2)
$S^{(E)}$	facteur de la densité d'énergie de déformation
$S_{cr}^{(E)}$	valeur critique du facteur de la densité d'énergie de déformation
$S_{cr(\max)}^{(E)}$	valeur critique maximale du facteur de la densité d'énergie de déformation
$S_{cr(\min)}^{(E)}$	valeur critique minimale du facteur de la densité d'énergie de déformation
$S_{\min}^{(E)}$	valeur minimale du facteur de la densité d'énergie de déformation
S_x, S_y	contraintes uniformes à l'infini dans la direction x_1 et la direction x_2
T	contrainte non singulière
u_i	composantes du premier ordre du vecteur déplacement
$u_i^{(0)}$	composantes du second ordre du vecteur déplacement
$u_i^{(1)}$	perturbation vecteur $u_i^{(0)}$
$u_{i,j} = H_{ij}$	tenseur du gradient de déplacement
W	fonction de la densité d'énergie de déformation
x, y	fonction de K_I, K_{II} et θ
x_{cr}, y_{cr}	valeurs critiques de x et y en cas de rupture
\mathbf{X}_i	systèmes de coordonnées dans la configuration de référence
\mathbf{x}_i	systèmes de coordonnées dans la configuration de déformée
β	angle d'inclinaison de la fissure
Γ	contour fermé

Γ_N	arcs réguliers dans les configurations références
$\tilde{\Gamma}_n$	arcs réguliers dans les configurations déformées
δ_{ij}	symbole de Kronecker
ε_{ij}	tenseur de déformation
Θ	angle polaire dans la configuration de référence
θ	angle polaire dans la configuration de déformée
θ_0	angle d'extension de la fissure
$\theta_{0,i}^{(exp)}$	angle d'extension de la fissure expérimentale
$\theta_{0,i}^{(th)}$	angle d'extension de la fissure théorique
$\tilde{\theta}$	angle polaire d'un élément matériel sur la parabole de la fissure
κ_0	$= 3 - 4\nu_0$ en déformations planes; $= (3 - \nu_0 / (1 + \nu_0))$ en contraintes planes
λ	élongation
λ_0	premier coefficient de Lamé
μ_0	module de cisaillement
ν_0	coefficient de Poisson
ξ	paramètre sous forme d'une fonction ajustable
ρ	rayon proche de la pointe de la fissure
σ_0	contrainte appliquée dans le cas d'un chargement uniaxial
σ_{ij}	composantes du tenseur de contraintes de Cauchy
$\sigma_{ij}^{(0)}$	composantes du second ordre du tenseur de contraintes de Cauchy
σ^ℓ	tenseur des contraintes de Cauchy décrivant la réponse élastique linéaire
σ^{nl}	tenseur des contraintes de Cauchy décrivant la réponse non-linéaire
$\sigma_{(VM)}$	contrainte de Von-Mises
τ_0	contrainte appliquée dans le cas d'un chargement en cisaillement pur
η	valeurs propres du tenseur de contrainte d'Eshelby modifié

ϵ_{3ki}	symbole d'antisymétrie de Levi-Cevita
Ω_0	domaine dans la configuration de référence
Ω_t	domaine dans la configuration de déformée
Δ	déplacement vertical uniforme appliqué
HPP	hypothèse de petites perturbations
MCM	mécanique configurationnelle des matériaux
MEF	méthode des éléments finis
MERR	taux maximal de libération d'énergie
MLER	mécanique linéaire élastique de la rupture
MSED	densité d'énergie de déformation maximale
MTS	contrainte tangentielle maximale
SED	densité d'énergie de déformation

Introduction générale

Cette thèse a été réalisée à l'Université de Bejaia, Laboratoire de Mécanique, Matériaux & Énergétique (L2ME), Algérie, en collaboration avec l'Institut National des Sciences Appliquées Centre Val de Loire (INSA CVL), Campus de Blois, Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé (LaMé), France.

Problématique

La conception des structures d'ingénieries consiste essentiellement à assurer un degré de sécurité acceptable permettant de réduire les risques relatifs aux défaillances. Cependant, la présence de discontinuités géométriques (fissure, cavité, etc) réduit considérablement leur capacité de charge. Les fissures, en tant que source commune de discontinuité dans un milieu, peuvent être générées dans des structures lors du processus de fabrication (Fig. 1a), ou en service sous diverses sollicitations mécaniques ou thermiques (Fig. 1b). Ces fissures sont le siège de fortes concentrations de contraintes qui rendent la structure potentielle à une rupture prématurée.

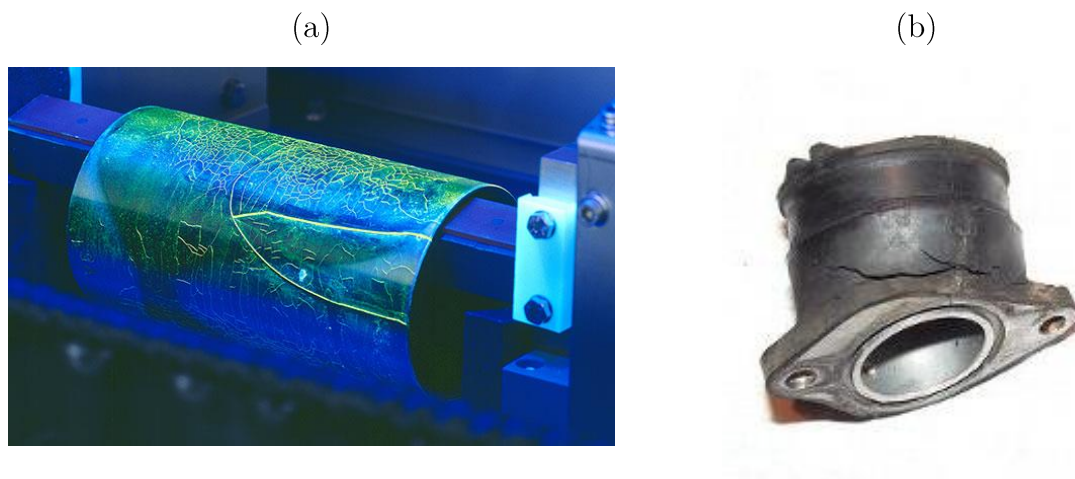


Fig. 1 Fissures générées dans des structures **(a)** lors du processus de fabrication [1] **(b)** en service [2].

La mécanique de la rupture a permis, jusqu'à aujourd'hui, de développer des outils analytiques pour étudier la rupture des matériaux et des structures, en se basant sur les concepts de la mécanique des milieux continus. Ainsi, bon nombre de théories ont été développées afin de prévoir l'initiation et/ou la propagation de fissures. Un grand nombre de travaux de la littérature ont traité ce sujet, dans le cadre des comportements élastiques isotropes et anisotropes, élastoplastiques, hyperélastiques, etc..., sous des sollicitations statiques, de fatigue ou en dynamique.

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique puissante qui permet de mettre en œuvre les outils de la mécanique de la rupture, d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions précises à des problèmes complexes. Cependant, les singularités nécessitent des traitements spécifiques, notamment un raffinement important du maillage en leur voisinage ou un remaillage progressif lors de l'avancement du front de fissure. De ce fait, le calcul numérique exige des capacités mémoires importantes et donc des coûts non négligeables.

Les développements technologiques dans les industries nucléaires, militaires, aéronautiques et spatiales, durant les trente dernières années, ont contribué considérablement à l'utilisation des concepts de la mécanique de la rupture. Cependant, plusieurs types de problèmes complexes de rupture restent, à ce jour, ouverts et d'actualité, par exemple : les problèmes de fissuration en modes mixtes et les problèmes induisant des non-linéarités matérielles et géométriques (matériaux caoutchoutiques ou les élastomères).

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de nouveaux modèles permettant d'évaluer la rupture par fissuration dans des structures en caoutchouc sous chargement statique.

Structure du manuscrit

Le présent manuscrit s'articule de la manière suivante :

- Dans une première étape, on présentera une étude bibliographique concise afin de mieux cerner le cadre de nos recherches. Le chapitre I du manuscrit porte sur l'état de l'art de la mécanique de la rupture linéaire et non-linéaire, ainsi que les méthodes numériques les plus utilisées. A notre connaissance il n'existe pas d'approche explicite permettant le calcul de manière relativement précise, les champs de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure, en grandes déformations. Cette étape constitue la base de notre recherche.
- Dans le deuxième chapitre, une formulation d'un nouveau critère de rupture est développée en se basant sur le tenseur des contraintes d'Eshelby. Ce critère permet de prédire l'initiation et la direction de propagation d'une fissure préexistante dans un matériau, dans le cadre de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MLER), sous chargement en mode mixte I/II. Ce modèle est basé sur un paramètre de densité d'énergie de déformation (en anglais, the Strain Energy Density (SED) parameter) exprimé en fonction des contraintes principales du tenseur d'Eshelby. Cette démarche peut être présentée comme une méthode alternative aux critères classiques existant dans la littérature.
- Le troisième chapitre expose une nouvelle approche permettant de déterminer les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements au voisinage d'une pointe de fissure, dans le cas de matériaux hyperélastiques. Les équations ainsi obtenues pourraient être exploitées pour développer un critère de rupture en grandes déformations, pour les matériaux caoutchoutiques.
- Les résultats principaux obtenus dans ce travail de thèse sont récapitulés dans une conclusion générale. Enfin, des perspectives visant à mieux comprendre les phénomènes de fissurations viennent clôturer le manuscrit.

Chapitre I État de l'art : critères de rupture en petites et grandes déformations

Ce premier chapitre présente un état de l'art sur la mécanique de la rupture d'un point de vue théorique et numérique. La première et la deuxième partie ont pour but de présenter les notions essentielles de la rupture en petites et grandes déformations, ainsi que les critères de rupture adaptés aux matériaux fragiles et hyperélastiques. Dans la troisième partie on discutera certains points relatifs aux méthodes numériques couramment utilisées dans l'analyse de la rupture des matériaux et structures.

Partie 1 : Concepts théoriques de la rupture en petites déformations

I.1. Introduction

La rupture des matériaux est un problème important en science des matériaux et en ingénierie. En effet, la présence de fissures préexistantes peut réduire la résistance à la rupture d'une structure et sa durée de vie [3,4]. Cette première partie est consacrée à la description des concepts de base, ainsi qu'aux principes généraux de la mécanique de la rupture qui permettent d'accéder aux différents critères de rupture en petites déformations.

Qu'est-ce que la rupture ?

Les mécanismes de rupture observés sont très variés et fortement dépendants du matériau et de l'essai comme on peut le voir sur la Fig. I-1. Par exemple lors d'un essai de traction sur un acier, on va d'abord observer un phénomène dit de striction qui se caractérise par un rétrécissement de la section de l'éprouvette. La rupture intervient ensuite par une séparation en deux de l'éprouvette dans le sens transversal. Pour un essai de compression d'un composite dans la direction des fibres, la rupture a pour origine une décohésion de celles-ci. Pour un béton en compression, la rupture se traduit par l'apparition d'un réseau de fissures longitudinales alors que dans un essai de traction elle consiste essentiellement en une fissure unique transversale.

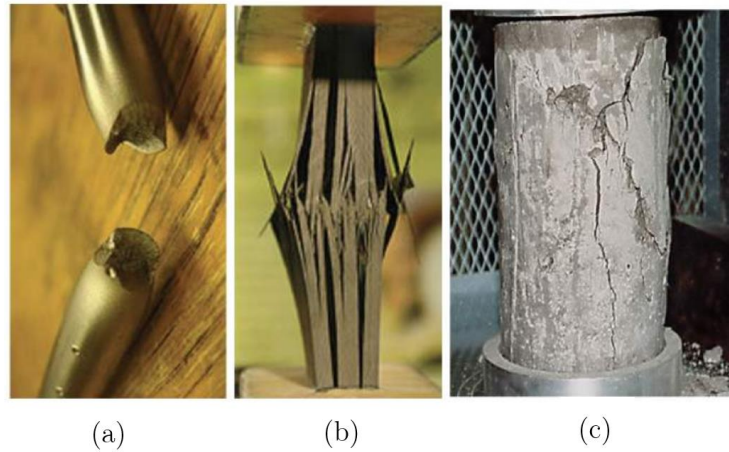


Fig. I-1 État final de différentes éprouvettes après un essai uniaxial **(a)** acier **(b)** composite **(c)** béton (tiré de [5]).

Une classification du comportement et de la rupture des matériaux en petites déformations peut être proposée à partir des différences observées dans des essais uniaxiaux. Lorsqu'un matériau comme le béton voit sa contrainte rapidement chuter vers 0 après la phase élastique, il est qualifié de fragile. Alors qu'un matériau comme l'acier à température ambiante peut supporter des déformations importantes avant de rompre, il est dit ductile et entre les deux, on trouve des matériaux dits quasi-fragiles, comme schématisé sur la Fig. I-2.

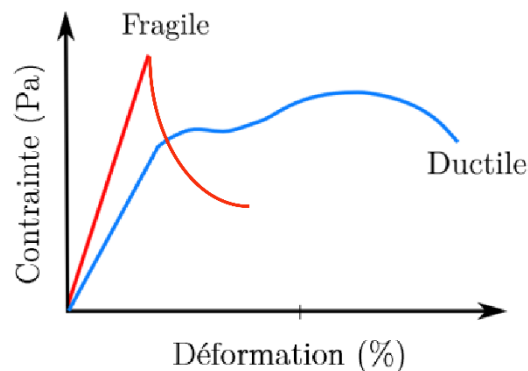


Fig. I-2 Réponses schématiques de différents matériaux pour un essai en traction uniaxiale.

I.2. Historique

Durant la seconde moitié du 19^{ème} siècle, l'usage de l'acier et d'autres alliages métalliques se développa considérablement. Avec cet essor se multiplièrent aussi les accidents dus à l'utilisation inadéquate de ces matériaux, à des faiblesses de conception et de dimensionnement. Par leur soudaineté, certains de ces accidents causes des dégâts humains et matériels.

L'un des premiers incidents enregistrés sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en mars 1830 en Grande-Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (1962) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande-Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents interviennent également sur les navires maritimes, l'exemple le plus célèbre, est la rupture de plus de 200 navires « Liberty Ship » assemblés entièrement par soudage par la marine américaine, durant la seconde guerre mondiale. Bien d'autres accidents intervinrent également sur des pipelines, ou encore sur des avions. En janvier 1919, un énorme réservoir de mélasse, de 27 mètres de diamètre et 15 mètres de hauteur se déchira soudainement, répandant 7,5 millions de litres de mélasse dans les rues de Boston (USA) [6]. Douze personnes trouvèrent la mort et une quarantaine furent blessées dans cet accident. De nombreux autres accidents ont été rapportés, ce ne fut qu'au cours de la seconde guerre mondiale que l'on commença à considérer sérieusement le phénomène de rupture.

L'étude de la rupture des matériaux fragiles remonte aux années 1920, avec les travaux précurseurs de Griffith [7] réalisées dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de

déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure ont été entrepris par Westergaard [8] vers 1940. Mais ces travaux sont tombés dans un oubli relatif avant d'être exhumés dans les années 1950–1960, lorsque l'extension de la discipline a été amorcée par Irwin [9]. Ces études ont donné la définition des facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple les travaux de Rice [10] et Bui [11] qui introduisent, respectivement, les notions de l'intégrale J et son expression duale J^* , indépendantes du contour d'intégration et dont les valeurs critiques correspondent à la ténacité d'un matériau. Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques à la pointe de fissure, permettant d'aider dans l'analyse et l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométrie simples, et peuvent être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.

Le domaine d'application de la mécanique de rupture ne se limite pas aux structures métalliques. Elle s'applique également aux roches, aux bétons, aux céramiques et aux élastomères. Les échelles d'application sont également très diverses puisqu'elles vont des microsystemes à la géomécanique de la croûte terrestre (création et propagation de failles). La Fig. I-3 présente les phénomènes catastrophiques liés à la rupture des structures.



Fig. I-3 Catastrophes liées au phénomène de rupture **(a)** accident de l'avion American Airlines Airbus-A300 [12] **(b)** navire Liberty Ship [13].

I.3. Concepts généraux sur la mécanique de la rupture

Les objectifs de la mécanique de la rupture sont doubles, d'une part, ils concernent la description des champs mécaniques au voisinage de la pointe de la fissure et les énergies qui leur sont associées et d'autre part, ils traitent l'évaluation de la nocivité d'une fissure en termes de propagation de celle-ci. Cette partie présente les notions théoriques et les hypothèses de bases de la mécanique de la rupture, ainsi que les différentes approches permettant de traiter la propagation de fissure.

I.3.1. Modes élémentaires de fissuration

La théorie de la fissuration décrit le comportement des solides ou structures présentant des discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme bidimensionnels (plaques, coques), discontinuités surfaciques dans les milieux tridimensionnels et permet de prévoir leur évolutions jusqu'à la rupture complète de la structure.

D'un point de vue cinématique, on peut définir trois modes de rupture comme présentées sur la Fig. I-4 [14]:

- **Mode I** ou mode d'ouverture de la fissure : le déplacement est perpendiculaire au plan de la fissure. Ce mode est, souvent, le plus dangereux.

- **Mode II** ou mode de cisaillement plan : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et normal au front.

- **Mode III** ou mode de cisaillement antiplan : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et au front.

Bien souvent, la fissure se propage suivant une combinaison de ces modes. On parle alors de mode mixte.

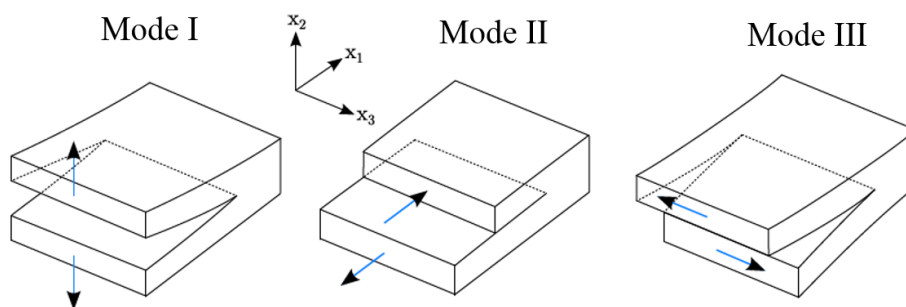


Fig. I-4 Modes élémentaires de fissuration.

I.3.2. Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure

La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. D'un point de vue mécanique, on peut distinguer schématiquement, dans un milieu fissuré, trois zones successives (Fig. I-5) [15,16] :

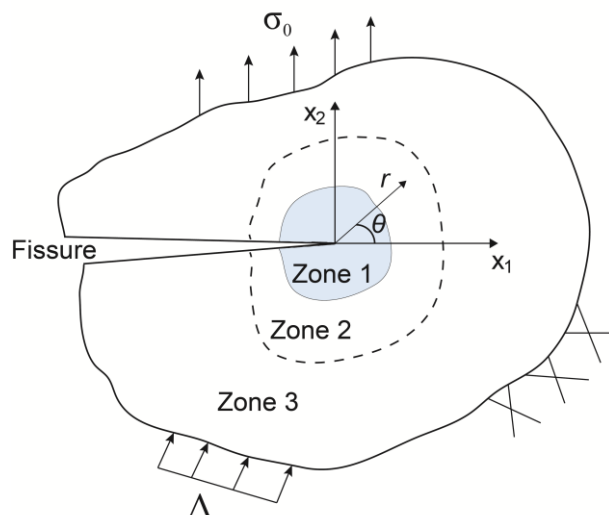


Fig. I-5 Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure soumise à une contrainte σ_0 et/ou un déplacement Δ , avec r est la distance radiale de la pointe de la fissure et θ un angle polaire.

- **La zone d'élaboration 1:** elle se trouve à la pointe de fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.
- **La zone singulière 2 :** les champs de déplacements (ou déformations) et contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. On démontre que dans cette zone, les composantes de champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$). Plus exactement, la singularité est en ($r^{-1/2}$) dans un milieu élastique linéaire. Le matériau ayant une limite élastique, il existe un rayon (r_p) autour de la pointe de fissure qui détermine la forme de la zone plastique. C'est en fonction de la taille de la zone plastique que l'on dira que la rupture est fragile ou ductile.

- **La zone extérieure 3** : comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charges et en déplacements. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu et peuvent être approchées par des polynômes communément utilisés dans les différentes méthodes de résolutions.

I.3.3. Champs des contraintes et des déplacements

La mécanique de la rupture consiste à caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide des paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment la contrainte appliquée, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Il s'agit alors d'établir une procédure qui relie le champ de contraintes et de déplacements au voisinage de la fissure à la contrainte nominale appliquée au loin, à la taille de la fissure et son orientation, et enfin aux caractéristiques mécaniques du matériau.

Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier les champs de déplacements/déformations et contraintes au voisinage d'une fissure. On peut regrouper l'ensemble de ces méthodes sous trois types d'approches :

- Approches directes (locales) : sont fondées sur l'utilisation des fonctions d'Airy ; ces approches résolvent des problèmes plans et font appel à la recherche de fonctions analytiques. Dans le cadre de ces approches, on énumère : la résolution de Westergaard [8], l'expansion de Williams [17] et l'analyse de Muskhelishvili [18].
- Approches énergétiques qui sont basées sur l'analyse énergétique du milieu continu contenant une fissure. Elles consistent à établir un bilan énergétique global. Dans le cadre de ces approches, on peut traiter des problèmes où le milieu n'est pas exclusivement élastique linéaire et homogène [19].

- Autres approches : plus récemment l'approche hamiltonienne à la rupture permet d'associer les deux types d'approches précédentes [20].

En considérant un repère local à la pointe de fissure, comme illustrée sur la Fig. I-6. En élasticité linéaire, l'analyse locale permet d'obtenir une solution asymptotique pour les champs de contrainte et de déplacements. Irwin [9] a alors proposé de définir des facteurs quantifiant l'intensité de la singularité des contraintes. Ainsi pour un chargement statique (ou quasi-statique) ces facteurs sont utilisés pour déterminer l'intensité de la singularité aussi bien en termes de contraintes que de déplacements. Ces facteurs sont appelés facteurs d'intensité des contraintes et sont définis pour chaque mode élémentaire de rupture [9] :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{\kappa_0 + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_y(\theta = \pi) \rrbracket \quad \text{en mode I} \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{\kappa_0 + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_x(\theta = \pi) \rrbracket \quad \text{en mode II} \\ K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \llbracket u_z(\theta = \pi) \rrbracket \quad \text{en mode III} \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

où σ_{ij} et u_i sont les composantes du tenseur de contrainte et du vecteur déplacement, respectivement. $\llbracket u_i(\theta = \pi) \rrbracket = u_i(\theta = \pi) - u_i(\theta = -\pi)$ sont les sauts de déplacements au passage de la discontinuité. $\mu_0 = E/2(1 + \nu_0)$ est le module de cisaillement, et la constante élastique de Kolosov κ_0 prend les formes suivantes :

$$\kappa_0 = \begin{cases} 3 - 4\nu_0 & \text{en déformations planes} \\ \frac{3 - \nu_0}{1 + \nu_0} & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

les indices (i, j) font référence aux coordonnées cartésiennes avec $(i, j = 1, 2, 3)$, ou en coordonnées polaires $(i, j = r, \theta, z)$.

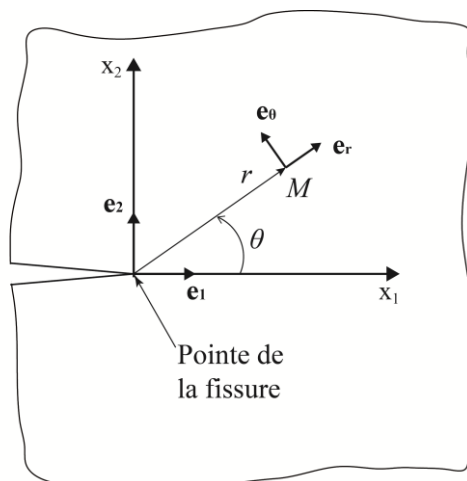


Fig. I-6 Système de coordonnées en front de fissure.

En élasticité plane, l'approche de Westergaard [8] reprise par Williams [17], permettent d'obtenir, à l'aide des fonctions d'Airy, les champs de déplacements et de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure en fonction des facteurs d'intensité de contraintes, pour un matériau à comportement linéaire élastique.

Les contraintes sont définies en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

avec

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0 & \text{en contraintes planes} \\ \nu_0 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Les termes dominants de l'Eq. (I.3) sont proportionnels à $1/\sqrt{r}$, de plus les contraintes sont théoriquement infinies à la pointe de la fissure c'est-à-dire lorsque $r \rightarrow 0$ [21]. Aussi, les facteurs d'intensité de contrainte, sont exprimés en fonctions à la fois du

chargement et de la géométrie, permettent de caractériser la sévérité des contraintes en pointe de fissure.

On peut utiliser le changement de base afin d'exprimer les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy $\{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}\}$ (voir Fig. I-7) [16]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \sigma_{11} + 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{12} + \sin^2 \theta \sigma_{22} \\ -\sin \theta \cos \theta \sigma_{11} + (2 \cos^2 \theta - 1) \sigma_{12} + \sin \theta \cos \theta \sigma_{22} \\ \sin^2 \theta \sigma_{11} - 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{12} + \cos^2 \theta \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

Compte tenu des Eq. (I.3) et (I.5), le champ de contraintes en coordonnées polaires peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \left[\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left[3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] - 3 K_{II} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.6})$$

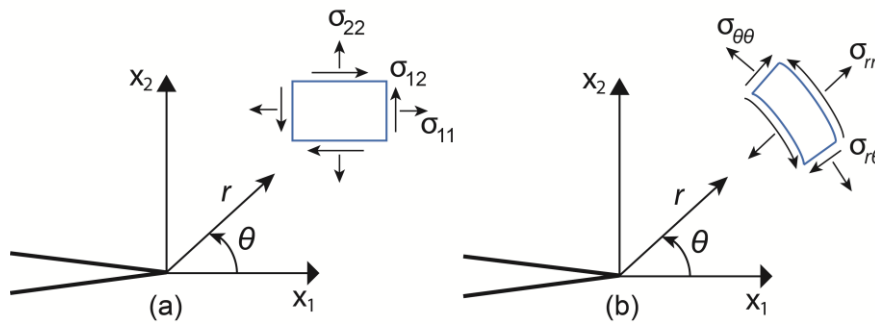


Fig. I-7 Champ de contrainte (a) dans le système de coordonnées cartésiennes (b) dans le système de coordonnées polaires.

En utilisant la loi de comportement élastique linéaire, les composantes du vecteur déplacement s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 - 1}{2} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 + 1}{2} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \\ \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 + 1}{2} - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - K_{II} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\kappa_0 - 3}{2} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.7})$$

La relation de $\{u_r, u_\theta\}$ avec $\{u_x, u_y\}$ s'écrit sous la forme suivante [16]:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta u_x + \sin\theta u_y \\ -\sin\theta u_x + \cos\theta u_y \end{pmatrix} \quad (\text{I.8})$$

Compte tenu des Eqs. (I.7) et (I.8), on peut écrire le champ de déplacements en coordonnées polaires de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \left[(2\kappa_0 - 1) \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[(2\kappa_0 - 1) \sin\frac{\theta}{2} - 3 \sin\frac{3\theta}{2} \right] \right\} \\ \frac{1}{4\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \left[-(2\kappa_0 + 1) \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \left[(2\kappa_0 + 1) \cos\frac{\theta}{2} - 3 \cos\frac{3\theta}{2} \right] \right\} \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas d'un chargement hors plan, la seule composante du déplacement est u_z . Les déplacements et les contraintes ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_z = \frac{2K_{III}}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{13} = -\frac{2K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{23} = -\frac{2K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Dans le système de coordonnées polaires, la matrice du gradient de déplacement peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_{r,r} & u_{r,\theta} \\ u_{\theta,r} & u_{\theta,\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les composantes de la matrice du tenseur du gradient de déplacement sont :

$$\begin{pmatrix} H_{11} = u_{1,1} \\ H_{12} = u_{1,2} \\ H_{21} = u_{2,1} \\ H_{22} = u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta H_{\theta\theta} + \cos^2 \theta H_{rr} - \sin \theta \cos \theta (H_{r\theta} + H_{\theta r}) \\ \cos^2 \theta H_{r\theta} - \sin^2 \theta H_{\theta r} + \sin \theta \cos \theta (H_{rr} - H_{\theta\theta}) \\ \cos^2 \theta H_{\theta r} - \sin^2 \theta H_{r\theta} + \sin \theta \cos \theta (H_{rr} - H_{\theta\theta}) \\ \sin^2 \theta H_{rr} + \cos^2 \theta H_{\theta\theta} + \sin \theta \cos \theta (H_{r\theta} + H_{\theta r}) \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

I.3.4. Mécanique configurationnelle

La Mécanique classique, c'est-à-dire la mécanique dans l'espace physique, s'intéresse aux forces, contraintes et déformations et tente de décrire le mouvement et/ou la déformation des solides ayant une masse (Fig. I-8a). Dans ce contexte, les notions de trajectoires, lois d'équilibre et de conservation, stabilité de l'équilibre, etc. ont été très développées au fil des siècles, grâce aux avancées ingénieuses de Galilée, Newton, Euler, Lagrange, Hamilton et d'autres.

Les progrès réalisés dans ce domaine ont naturellement conduit à la reconnaissance du fait que les matériaux, à une certaine échelle, ne peuvent être considérés comme parfaitement continue, mais qu'ils contiennent plutôt de nombreux défauts, tels que des microfissures, des inclusions, des vides, des dislocations, etc. Une caractéristique de ces défauts est qu'ils peuvent se déplacer dans le milieu suite à l'application d'une charge ou d'influences thermiques. Il est donc nécessaire de s'intéresser aux défauts qui peuvent avoir une masse (par exemple, des inclusions) ou ne pas en avoir (par exemple, des vides) et qui peuvent se déplacer dans le matériau dans lequel ils se trouvent.

Pour caractériser ces objets, le concept de "force" agissant sur un "défaut" est introduit par analogie au concept de force agissant sur un corps matériel dans l'espace physique (Fig. I-8b). Cette première étape peut conduire à la construction d'une nouvelle branche, qui peut être appelée mécanique dans l'espace matériel ou mécanique configurationnelle [22]. La mécanique dans l'espace matériel décrit le comportement des défauts lorsqu'ils se déplacent par rapport au matériau dans lequel ils se trouvent.

Concernant ce changement de configuration, des nouvelles notions ont été introduites, on peut citer en particulier la force matérielle, parfois appelée une force motrice, ou une force non newtonienne, et le tenseur d'élasticité de Maxwell (ou tenseur des contraintes d'Eshelby), qui ont été introduits par Eshelby (1951) dans sa contribution fondamentale [23].

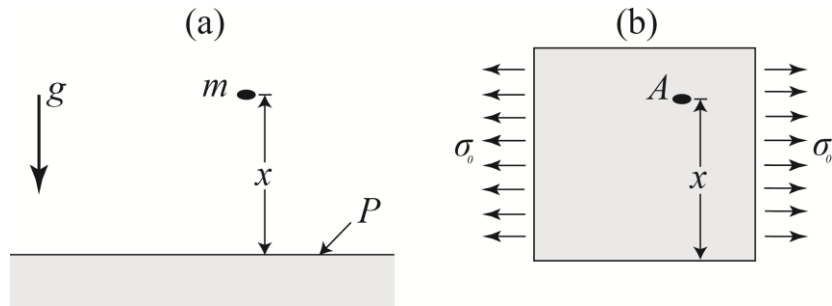


Fig. I-8 (a) Mécanique physique : particules m dans un champ de gravité g au-dessus d'un plan P à une distance x **(b)** mécanique configurationnelle : plaque élastique contenant un défaut A à une distance x du bord inférieur, soumise à une contrainte σ_0 .

I.3.4.1. Caractéristiques du tenseur de contrainte d'Eshelby

Pour introduire le tenseur d'Eshelby, nous commençons par rappeler brièvement les relations de base de la théorie d'élasticité linéaire que l'on peut trouver dans bon nombre d'ouvrages, par exemple [24,22].

La divergence du tenseur de contrainte de Cauchy (symétrique) σ_{ji} et la force du volume f_i sont reliées par l'équation d'équilibre linéaire

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (\text{I.13})$$

La partie symétrique du gradient de déplacement u_{ji} et la déformation ε_{ij} relié par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (\text{I.14})$$

La loi de Hooke généralisée s'exprime sous forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{I.15})$$

Pour les matériaux isotropes, cette relation se réduit à

$$\sigma_{ij} = \lambda_0 \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij} \quad (\text{I.16})$$

où λ_0 est le premier coefficient de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Une représentation équivalente de la loi des matériaux (Eq. (I.15) et (I.16)) est possible, en introduisant un potentiel élastique, la densité d'énergie de déformation W :

$$W = W(x_k, \varepsilon_{ij}(x_k)) \quad (\text{I.17})$$

Avec :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{I.18})$$

où x_k est un système de coordonnées (Fig. I-6).

En raison de la symétrie, le tenseur de contrainte peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial u_{ji}} \quad (\text{I.19})$$

Si les constantes matérielles sont des fonctions de x_k , W pourrait dépendre de x_k explicitement, comme indiqué, c'est-à-dire que λ_0 et μ_0 (ou κ_0) varient d'une position à l'autre (non-homogénéité matérielle). De même, un potentiel des forces (externes) V pourrait être introduit comme suite :

$$V = V(x_k, u_i(x_k)) \quad (\text{I.20})$$

Avec :

$$f_i = -\frac{\partial V}{\partial u_i} \quad (\text{I.21})$$

De plus, V pourrait être une fonction explicite de x_k si la force par unité de volume est une fonction de x_k , (non-homogénéité physique).

En l'absence de termes d'inertie, la fonction Lagrangienne L permettant de décrire les équations de mouvements des variables dynamique, dans ce cadre, est :

$$L = L(x_k, u_i, u_{i,j}) = -(W + V) \quad (\text{I.22})$$

Plusieurs possibilités existent pour dériver le tenseur d'Eshelby. L'approche la plus simple est de considérer le gradient de L sous la forme suivante [25] :

$$(W + V)_{,i} = \frac{\partial(W + V)}{\partial x_i} + \frac{\partial(W + V)}{\partial u_k} u_{k,i} + \frac{\partial(W + V)}{\partial u_{k,j}} u_{k,ji} \quad (\text{I.23})$$

L'abréviation j_i peut être introduite pour la dérivée explicite du potentiel

$$j_i = -\frac{\partial(W + V)}{\partial x_i} \quad (\text{I.24})$$

En utilisant les résultats des Eqs. (I.18) et (I.21), on obtient :

$$(W + V)_{,i} = -j_i - f_k u_{k,i} + \sigma_{jk} u_{k,ij} \quad (\text{I.25})$$

La quantité j_i est appelée le vecteur de non-homogénéité ou le gradient d'hétérogénéité. Dans un sens, elle représente aussi ce que l'on appelle communément un terme "source", ce qui rend l'équation différentielle non homogène.

À partir de l'Eq. (I.25), et en utilisant la condition d'équilibre Eq. (I.13), on peut écrire :

$$\left[(W + V) \delta_{ji} - \sigma_{jk} u_{k,i} \right]_{,j} + j_i = 0 \quad (\text{I.26})$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes (Fig. I-6), les composantes du tenseur d'Eshelby sont définies comme suit [26] :

$$b_{ji} = W\delta_{ji} - \sigma_{jk} u_{k,i} \quad (\text{I.27})$$

En élasticité linéaire la densité d'énergie de déformation W est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} \quad (\text{I.28})$$

L'Eq. (I.26) peut-être écrit comme suit :

$$b_{ji,j} + j_i = 0 \quad (\text{I.29})$$

Si le matériau est homogène et les forces du volume sont constantes (homogénéité matérielle et physique), le terme source disparaît, donnant naissance à des intégrales indépendantes du chemin d'intégration, largement utilisées en mécanique de la rupture. Dans la mécanique des défauts et de la rupture, les forces de volumes f_i sont généralement insignifiantes, et seront négligées dans le reste du travail.

Les Eqs. (I.13) et (I.29) se réduisent alors aux lois de conservation

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad (\text{I.30})$$

$$b_{ji,j} = 0 \quad (\text{I.31})$$

Le tenseur d'Eshelby est non-symétrique, c'est-à-dire :

$$b_{ij} \neq b_{ji} \quad (\text{I.32})$$

Par contraction de b_{jk} via le symbole d'antisymétrie ϵ_{3ki} , Eshelby [27] a introduit un tenseur modifié b'_{ij} qui s'écrit :

$$b'_{ij} = \epsilon_{3ki} b_{jk} = \begin{bmatrix} -b_{12} & +b_{11} \\ -b_{22} & +b_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

La symétrie du tenseur d'Eshelby permet d'obtenir des contraintes principales réelles.

Le tenseur d'Eshelby devient alors symétrique, et sa trace est une fonction harmonique [28] :

$$\begin{cases} b'_{ij} = b'_{ji} \\ b'_{ij,j} = 0 \\ b'_{ii,jj} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

Les valeurs principales du tenseur des contraintes d'Eshelby modifié sont calculées en résolvant l'équation caractéristique :

$$\text{Det}(b'_{ij} - \eta \delta_{ij}) = 0 \quad (\text{I.35})$$

où η représente les valeurs propres du tenseur des contraintes d'Eshelby modifié qui est symétrique.

En combinant les Eqs. (I.27) et (I.35), on obtient les expressions suivantes des valeurs principales du tenseur des contraintes d'Eshelby modifié :

$$\begin{aligned} b'_{I,II} &= \frac{1}{2}(b'_{11} + b'_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{b'_{11} - b'_{22}}{2}\right)^2 + b'^2_{12}} \\ &= \frac{1}{2}(b_{21} - b_{12}) \pm \sqrt{\left(\frac{b_{21} + b_{12}}{2}\right)^2 + b^2_{11}} \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

I.3.5. Critères de rupture

On présente ici quelques critères de rupture utilisés afin d'évaluer le niveau de sollicitation qui entraîne l'initiation de propagation d'une fissure, ainsi que sa direction de propagation. En effet, lorsqu'une structure possédant une fissure est soumise à une contrainte σ_0 ou un déplacement Δ , sous différents modes de chargement (Fig. I-9), on cherche à connaître l'intensité de la sollicitation à laquelle la rupture se produit, et la

direction suivant laquelle la fissure se propage. Pour cela, on utilise des critères de rupture.

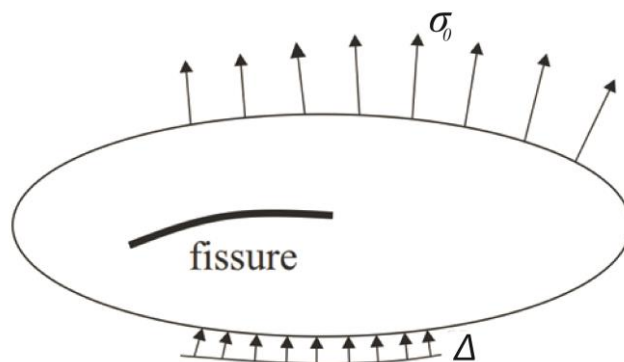


Fig. I-9 Fissure sollicitée en mode mixte.

I.3.5.1. Facteurs d'intensités de contrainte

Dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire, les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} caractérisent la singularité des contraintes qui apparaît à la pointe de la fissure pour chaque mode de chargement modes I, II et III, respectivement [29]. Les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes peuvent être calculées analytiquement ou par éléments finis pour différentes conditions aux limites, et géométries de pièces et de fissures.

Les valeurs critiques des facteurs d'intensité de contraintes critique K_c appelée ténacité, correspondent à la force maximale d'instabilité traduisant la ruine par fissuration [9]. Autrement dit, une fissure se propage dans le matériau lorsque K atteint une valeur critique K_c :

$$\begin{cases} K_I = K_{Ic} & \text{en mode I} \\ K_{II} = K_{IIc} & \text{en mode II} \\ K_{III} = K_{IIIc} & \text{en mode III} \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

K_c est considéré comme une propriété intrinsèque du matériau qui définit la résistance de celui-ci à la progression de la fissure. En d'autres termes, la ténacité est interprétée comme étant le seuil en dessous duquel l'énergie élastique n'est pas suffisante

pour propager la fissure car inférieure à celle nécessaire à l'extension des surfaces libres dans le matériau.

I.3.5.2. Critère basé sur la contrainte tangentielle maximale

Par analogie avec le critère de Irwin, Erdogan et Sih [30] ont proposé un critère appelé critère de la contrainte tangentielle maximale (en anglais, maximal tangential stress "MTS"). Ce critère indique que la direction d'initiation de la fissure θ_0 coïncide avec la direction de la contrainte tangentielle maximale, le long d'un rayon constant, autour de la pointe de la fissure. Ainsi, si on se place dans le repère local cylindrique (Fig. I-7b) et qu'on note $\sigma_{\theta\theta}$ la contrainte tangentielle, le critère MTS peut être énoncé comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial^2 \theta} < 0 \quad (\text{I.38})$$

La contrainte tangentielle, $\sigma_{\theta\theta}$, est principale lorsque la contrainte de cisaillement est nulle, soit $\sigma_{r\theta} = 0$, donc [30] :

$$K_I \sin(\theta) + K_{II} (3 \cos(\theta) - 1) = 0 \quad (\text{I.39})$$

dont la solution permet de calculer l'angle de la direction de propagation θ_0 de la fissure.

La formule prévoit pour le mode I pur ($K_{II} = 0$) $\theta_0 = 0^\circ$, tandis que pour le mode II pur ($K_I = 0$), $\theta_0 = 70,5^\circ$.

D'après [31], les contraintes sont réécrites sous les formes suivantes en utilisant l'Eq. (I.6) [6,32] :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_{\theta\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_{r\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

en définissant des facteurs d'intensité effectifs :

$$\begin{cases} K_{\theta\theta}(\theta) = K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{3}{4} K_{II} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ K_{r\theta}(\theta) = K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} K_{II} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

La fissure se propage donc selon la direction où la valeur $K_{r\theta}(\theta)$ est nulle, et lorsque $K_{\theta\theta}(\theta)$ atteint la valeur de la ténacité du matériau K_{Ic} , c.-à-d. $K_{r\theta}(\theta) = 0$ et $K_{\theta\theta}(\theta) = K_{Ic}$.

I.3.5.3. Critère basé sur le taux de restitution d'énergie G

C'est la divergence du champ contrainte en pointe de la fissure qui a motivé Griffith [7] à utiliser une approche énergétique pour établir un critère rupture des matériaux à comportement linéaires élastique. L'énergie ainsi dépensée pour faire progresser une longueur unitaire de la fissure est appelée taux de restitution de l'énergie et noté G . Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p du milieu fissuré pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a , à une configuration où la fissure se trouve augmentée d'une unité de longueur da :

$$G = - \frac{dW_p}{da} \quad (\text{I.42})$$

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, Irwin [9] a également trouvé un lien entre les facteurs d'intensité des contraintes et le taux de restitution de l'énergie de déformation :

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu_0} \quad (\text{I.43})$$

avec

$$E^* = \begin{cases} E & \text{en contrainte plane} \\ \frac{E}{1-\nu_0^2} & \text{en déformation plane} \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

Erdogan et Sih [30] ont étudié également la possibilité d'une propagation suivant la direction maximale du taux de restitution de l'énergie G . Hussain [33] met en équation le calcul de G pour une petite avancée de la fissure δ orientée d'un angle θ par rapport à la fissure existante (voir Fig. I-10). La relation obtenue est la suivante :

$$G(\theta) = \left[\frac{4}{E^* (3 + \cos^2 \theta)} \right]^2 \left(\frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{\frac{\theta}{\pi}} \right)^{\frac{\theta}{\pi}} \left[\begin{array}{l} (1 + 3 \cos^2 \theta) K_I^2 + 8 \sin \theta \cos \theta K_I K_{II} \\ + (9 - \cos^2 \theta) K_{II}^2 \end{array} \right] \quad (\text{I.45})$$

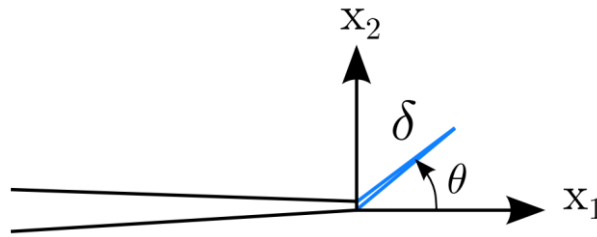


Fig. I-10 Calcul de G pour une avancée de δ et d'un angle θ .

La direction de la propagation de la fissure est formulée comme suit :

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\text{I.46})$$

La propagation de la fissure se produit lorsque G atteint une valeur critique G_c . Pour le mode I pur, ce critère prédit l'angle de direction de propagation de la fissure $\theta_0 = 0^\circ$, tandis que pour le mode II pur, $\theta_0 = 75,2^\circ$.

I.3.5.4. Intégrale J

L'intégrale J a été introduite dans la littérature pour la première fois dans un ouvrage d'Eshelby [23], mais sans rapport avec la mécanique de la rupture. Cependant, elle n'a pas pris son essor avant que Rice ne publie son célèbre article en 1968 [10]. L'intégrale J utilise un contour fermé Γ qui entoure la pointe de fissure, comme illustré dans la Fig. I-11. Cette intégrale est indépendante du contour Γ choisi, ce qui est un résultat

important pour les méthodes numériques. Cela permet d'évaluer J avec des informations situées loin de la pointe de fissure qui perturbe sensiblement la qualité des champs calculés dans son voisinage. L'intégrale J est définie comme suit :

$$J = \int_{\Gamma} \left[W dx_2 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] \quad (\text{I.47})$$

où \vec{n} est la normale extérieure au contour, σ_{ij} la contrainte appliquée sur le contour et u_i le déplacement correspondant.

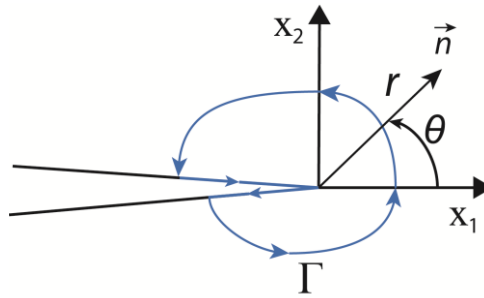


Fig. I-11 Contour d'intégration Γ .

La valeur critique J_c , correspondant au seuil de la valeur de J au-delà de laquelle une fissure existante commence à se propager, représente un critère de rupture.

Dans le cas d'un comportement linéaire élastique, J est équivalent à G :

$$J = G \quad (\text{I.48})$$

Soit donc :

$$J_c = G_c \quad (\text{I.49})$$

I.3.5.5. Critère basé sur la densité d'énergie de déformation

Sih [34] a proposé un critère de rupture basé sur le facteur de densité d'énergie de déformation minimale (en anglais, the strain energy density "SED") qui s'écrit sous la forme :

$$S = W r \quad (\text{I.50})$$

Rappelons que W est la densité d'énergie de déformation, et r la distance radiale de la pointe de la fissure.

En utilisant le champ des contraintes en fond de fissure et la loi de comportement élastique linéaire, S est exprimé sous la forme suivante :

$$S = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (\text{I.51})$$

où

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{16\mu_0} [(1 + \cos\theta)(\kappa_0 - \cos\theta)] \\ a_{12} = \frac{1}{16\mu_0} \sin\theta [2\cos\theta - (\kappa_0 - 1)] \\ a_{22} = \frac{1}{16\mu_0} [(\kappa_0 + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

L'angle de direction de propagation θ_0 de la fissure est déterminé à partir des conditions suivantes :

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad (\text{I.53})$$

La valeur critique de la densité d'énergie de déformation vaut à :

$$S_{cr} = \frac{(1 - 2\nu_0) K_{Ic}^2}{4\pi\mu_0} \quad (\text{I.54})$$

Ce critère prévoit pour le mode I pur $\theta_0 = 0^\circ$, tandis que pour le mode II pur, il prévoit $\theta_0 = 79,2^\circ$.

I.3.5.6. Critères basés sur le tenseur d'Eshelby

(1) Critères basé sur la contrainte principale et sur la contrainte équivalente de von Mises

Kienzler et Herrmann [28] ont introduit les critères basé sur la contrainte principale b_I' (Eq. (I.36)) et sur la contrainte équivalente de von Mises b_v' . La direction d'initiation de propagation de la fissure correspond à celles suivant lesquelles les valeurs de b_I' et b_v' sont maximales, à l'extrémité de la pointe la fissure, ce qui peut être exprimé mathématiquement comme suit :

$$\left. \frac{\partial b_I'}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial b_v'}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (\text{I.55})$$

avec $b_{I \max}' = b_I'(\theta = \theta_0)$ et $b_{v \max}' = b_v'(\theta = \theta_0)$.

La contrainte équivalente de von Mises à l'extrémité de la fissure est donnée par :

$$b_v' = \sqrt{b_{11}'^2 + b_{22}'^2 - b_{11}' b_{22}' + 3b_{12}'^2} \quad (\text{I.56})$$

Selon les Eqs. (I.36) et (I.56), la contrainte équivalente de von Mises peut s'écrire aussi comme suit

$$b_v' = \frac{(1 + \kappa_0)}{8\pi \mu_0 r} \sqrt{\frac{K_I^4 \sin^2 \theta + 4K_I^3 K_{II} \sin \theta \cos \theta + K_I^2 K_{II}^2 (\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta)}{+ 2K_I K_{II}^3 \sin \theta \cos \theta + K_{II}^4 (\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta)}} \quad (\text{I.57})$$

(2) Critère basé sur la mécanique configurationnelle des matériaux

Lv et al. [35] ont proposé un critère appelé critère de la mécanique configurationnelle des matériaux (en anglais, Material Configurational Mechanics "MCM"), formulé en terme de la contrainte configurationnelle équivalente, qui peut être calculée à partir des valeurs principales du tenseur des contraintes Eshelby, comme suit :

$$b_v = \sqrt{b_{12}^2 + b_{12} b_{21} + b_{21}^2 + 3b_{11}^2} \quad (\text{I.58})$$

Le critère MCM stipule que la propagation initiale de la fissure se produit le long de la direction suivant laquelle la distance entre la pointe de la fissure et la limite élastique-plastique prévue par le critère MCM présente une valeur minimale. L'angle d'initiation de la fissure peut être déterminé par :

$$\left. \frac{\partial r_{\text{MCM}}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 r_{\text{MCM}}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad (\text{I.59})$$

Selon le critère MCM, la limite élastique-plastique peut être définie par la distance r_{MCM} qui la sépare de la pointe de la fissure. En utilisant l'Eq. (I.27), l'Eq. (I.58) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$r_{\text{MCM}} = \frac{(1 + \kappa_0)}{8\pi \mu_0 b_s} \sqrt{K_I^4 \sin^2 \theta + 4K_I^3 K_{II} \sin \theta \cos \theta + K_I^2 K_{II}^2 (\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta) + 2K_I K_{II}^3 \sin \theta \cos \theta + K_{II}^4 (\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta)} \quad (\text{I.60})$$

où b_s est une constante du matériau appelé la limite élastique configurationnelle.

Il convient de préciser que l'état de l'art présenté ici n'est pas exhaustif. En effet, il existe bien d'autres critères dans la littérature, on peut citer par exemple : la contrainte triaxiale maximale (critère- M) [36], le critère d'énergie de dilatation maximum (critère- T) [37], le critère de la contrainte tangentielle maximale modifié [38,39] etc.

Partie 2 : Concepts théoriques de la rupture en grandes déformations

I.4. Introduction

Les élastomères, souvent appelés caoutchoucs dans le langage commun, sont largement utilisés dans bon nombre d'applications : comme pièces antivibratoires, comme supports moteurs et d'échappement dans l'automobile, dans les collages souples dans les applications navales, ou encore dans les pneumatiques, l'étanchéité, etc. Ces matériaux sont caractérisés principalement par leur capacité à supporter de très grandes déformations réversibles.

Dans ce contexte, nous présentons les concepts de base de la théorie de l'hyperélasticité utiles à notre travail. Ainsi, les élastomères sont brièvement présentés en mettant en évidence leur comportement mécanique dans le cadre des grandes déformations.

I.5. Généralités sur les élastomères

Les élastomères présentent un comportement complexe et il serait ambitieux de vouloir le représenter dans sa totalité. Toutefois, nous tenterons de mettre en évidence, dans ce qui va suivre, cette complexité et les spécificités de ces matériaux.

I.5.1. Un réseau de chaînes

Un élastomère est un haut polymère constitué de macromolécules réticulées [40] lui conférant ainsi une grande déformabilité réversible. La réticulation est un procédé

aléatoire conduisant à la formation d'un réseau imparfait (non idéal) où coexistent des chaînes de différentes longueurs, de chaînes pendantes [41] (Fig. I-12) etc.

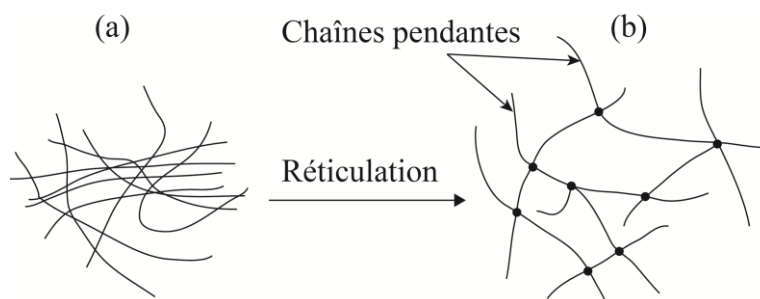


Fig. I-12 Représentation schématique de chaînes (a) élastomère non réticulé (b) élastomère réticulé.

Même avec un procédé optimisé, la réticulation d'un élastomère n'aboutit pas à la formation d'un réseau parfait (Fig. I-13a). Elle conduit en effet à la formation de différents types de chaînes qui ont des conséquences plus ou moins importantes sur les propriétés mécaniques du matériau. Par exemple, le type boucle fermée (Fig. I-13d) issu de la réticulation de deux points sur une même chaîne ne contribue pas à l'élasticité du réseau. Les bouts de chaînes (Fig. I-13e) correspondent à des chaînes reliées au réseau, mais par une seule extrémité et qui, selon Kluppel et al. [42], n'affectent pas le module élastique, mais réduisent la contrainte à rupture. Par ailleurs, bien que la résistance du réseau augmente d'abord avec la densité de réticulation, quand cette dernière est trop importante, la résistance atteint un maximum au-delà duquel le réseau adopte un comportement fragile puisque la déformation du réseau est limitée par l'extensibilité maximale des chaînes les plus courtes [43].

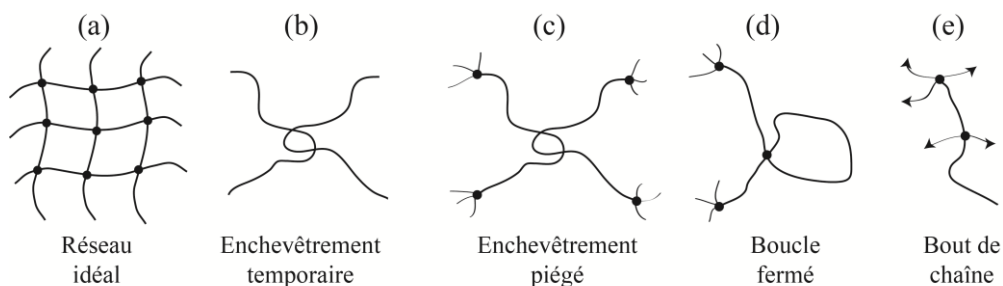


Fig. I-13 Différents types de chaînes observables dans un élastomère réticulé.

I.5.2. Réponse mécanique typique

La réponse mécanique classique d'un élastomère soumis à une sollicitation en traction uniaxiale est présentée sur la Fig. I-14. Cette courbe est parfois qualifiée de « courbe en S » dont l'allure est expliquée comme suit [44] :

- la première partie jusqu'à une élongation $\lambda = 1.5$, est due à l'orientation des chaînes dans la direction de traction,
- la deuxième partie de la courbe, plus faible (entre 1,5 et 4), traduit le dépliement des chaînes qui nécessite des efforts assez faibles,
- la dernière pente correspond au raidissement du réseau polymérique, les macromolécules s'approchent de leur extension maximale.

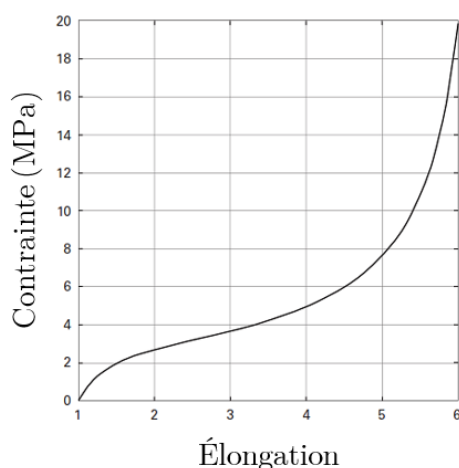


Fig. I-14 Courbe classique de traction uniaxiale d'un élastomère : contrainte nominale en fonction de l'élongation λ .

I.5.3. Les champs asymptotiques

Les champs de contrainte et de déformations à la pointe de la fissure ont été établis (cf. partie 1 du chapitre I) dans le cadre de l'élasticité linéaire homogène et isotrope. Cependant, la situation est différente pour les matériaux souples, tels que les élastomères en raison des non-linéarités matérielles et géométriques [45-47]. Pour ces matériaux, l'emploi du formalisme des déformations finies s'impose.

Plusieurs études analytiques ont été consacrées à l'analyse de champs asymptotiques. On peut distinguer deux catégories d'études : la première concerne le mode I [48-56], et la seconde se focalise sur le mode mixte [57-60]. Ces études mettent en évidence la complexité du formalisme des champs asymptotiques dans le cadre de l'hyperélasticité. Par ailleurs, les solutions qui ont été proposées sont fortement dépendantes du modèle hyperélastique utilisé.

I.6. Mécanique des milieux continus non linéaire

Le développement de modèles de comportement pour les élastomères s'inscrit dans le cadre de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. Dans ce cadre, il est important de définir avec précision les différents tenseurs des déformations et des contraintes afin d'exprimer les relations constitutives. A cet effet, il existe des définitions adéquates, et le lecteur peut se référer aux ouvrages suivants : Ogden [61], Holzapfel [62], Ciarlet [63].

I.6.1. Cinématique

En élasticité, un point matériel est repéré dans un milieu continu de la manière suivante :

- Description lagrangienne : la particule est repérée par sa position X , à l'instant t_0 , dans la configuration non déformée.

- Description eulérienne : la particule est repérée par sa position instantanée x , à l'instant t , dans la configuration déformée.

Ces deux configurations seront repérées dans deux systèmes de coordonnées que nous noterons :

- $P = (X_1, X_2, X_3)$ système de coordonnées matérielles dans la configuration initiale ou de référence (C_0) .
- $p = (x_1, x_2, x_3)$ système de coordonnées spatiales dans la configuration actuelle ou déformée (C_t) .

I.6.2. Description du mouvement

Soit un solide déformable S évoluant dans un référentiel \mathfrak{R} , occupant le domaine Ω_0 dans la configuration (C_0) . Soumis à des forces extérieures et/ou à des déplacements, le solide se déplace et se déforme de sorte qu'il occupe un nouveau domaine de \mathfrak{R} noté Ω_t dans la configuration (C_t) (Fig. I-15). La relation permettant de relier les deux configurations est définie par la transformation χ :

$$\chi : \begin{cases} (\Omega_0) \rightarrow (\Omega_t) \\ \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \end{cases} \quad (\text{I.61})$$

où χ est une fonction vectorielle différentiable et inversible.

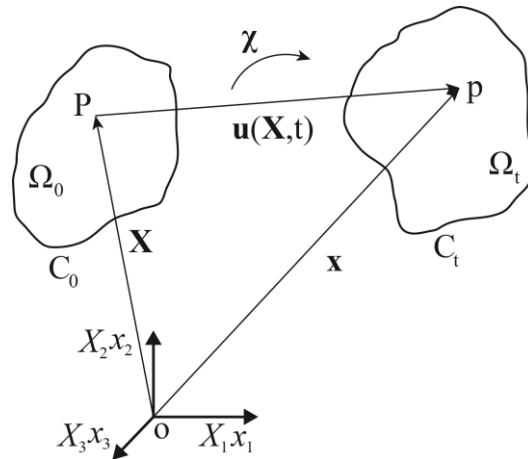


Fig. I-15 Configurations initial et déformée.

Le vecteur de déplacement est défini sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (\text{I.62})$$

On note que, dans le cadre de HPP, les configurations de référence et déformée sont confondues. En grandes déformations, ces configurations sont distinctes nécessitant ainsi des tenseurs pertinents pour pouvoir exprimer les équations locales de mouvement d'un point matériel.

La grandeur qui caractérise la transformation linéarisée au voisinage de la particule est définie par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (\text{I.63})$$

\mathbf{F} appelé tenseur gradient de la transformation, \mathbf{I} et $\nabla \mathbf{u}$ désignent respectivement, le tenseur identité qui définit un mouvement d'un solide rigide et l'opérateur gradient par rapport à la configuration initiale.

De même, on définit la variation de volume entre les configurations de référence et déformée par le Jacobien. Il est toujours positif en vertu du principe de non-interpénétration de la matière :

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (\text{I.64})$$

I.6.3. Tenseur des déformations

On introduit deux tenseurs des dilatations de Green-Cauchy \mathbf{C} et \mathbf{B} respectivement dans les configurations de référence et actuelle :

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F} \text{ et } \mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (\text{I.65})$$

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange \mathbf{E} est défini par

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}) \quad (\text{I.66})$$

On définit également le tenseur de déformation d'Euler-Almansi \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{I.67})$$

\mathbf{E} et \mathbf{A} sont des tenseurs du second ordre, symétriques et objectifs.

I.6.4. Tenseurs des contraintes

Les grandeurs mécaniques traduisant la notion d'efforts internes de cohésion peuvent être décrites de différentes manières. Trois descriptions peuvent être utilisées pour définir l'état de contraintes dans un solide, suivant que l'on considère (voir Fig. I-16) :

- Description eulérienne : les efforts intérieurs de cohésion dans la configuration actuelle (\mathbf{dt}) à travers un élément de surface déformé ($\mathbf{n}ds$),
- Description mixte : les mêmes efforts à travers un élément de surface non déformé ($\mathbf{N}dS$),
- Description lagrangienne : ou encore le transport des efforts de cohésion (\mathbf{dT}) à travers un élément de surface non déformé ($\mathbf{N}dS$).

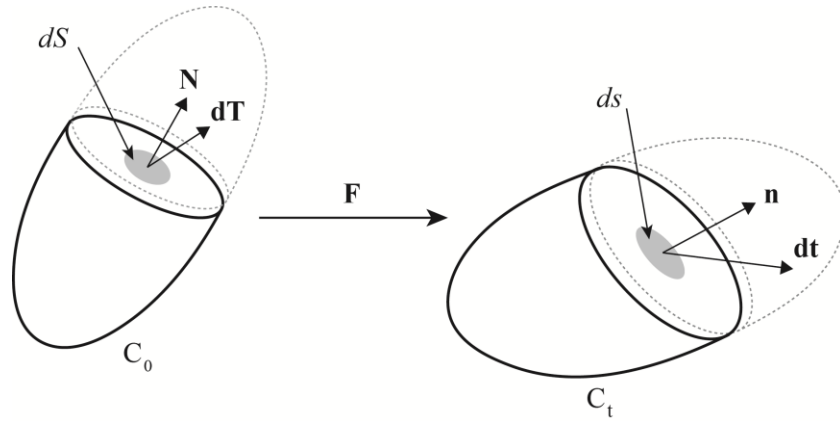


Fig. I-16 Etat de contrainte dans les différentes configurations.

I.6.4.1. Description Eulérienne

On considère les efforts intérieurs de cohésion exercés par une partie du solide sur l'autre, à travers un élément de surface $\mathbf{n}ds$. On définit $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy, de façon analogue aux petites déformations comme étant :

$$\mathbf{dt} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds \quad (\text{I.68})$$

$\boldsymbol{\sigma}$ représente donc les efforts de cohésion réellement exercés à travers un élément de surface déformée et par unité de surface déformée. Ce tenseur est symétrique et objectif.

I.6.4.2. Description mixte

Le transport de l'élément de surface $\mathbf{n}ds$ dans la configuration de référence par l'Eq. (I.64), permet d'obtenir :

$$\mathbf{dt} = \boldsymbol{\sigma} J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS \quad (\text{I.69})$$

On définit ainsi un nouveau tenseur de contrainte \mathbf{P} appelé le premier tenseur de Piola-Kirchhoff (PK1). Ce tenseur est qualifié de mixte, non-symétrique et objectif. Il peut être relié au tenseur des contraintes de Cauchy par :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbf{dt} = \mathbf{P} \mathbf{N} dS \end{cases} \quad (\text{I.70})$$

I.6.4.3. Description lagrangienne

L'obtention d'une description complètement lagrangienne de l'état de contrainte nécessite le transport de l'effort réel de cohésion \mathbf{dt} dans la configuration de référence :

$$\mathbf{dT} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{dt} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{PN} dS \quad (\text{I.71})$$

On peut également définir le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} (PK2) tel que :

$$J \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{FSF}^{-1} \quad (\text{I.72})$$

\mathbf{S} est un tenseur du second ordre symétrique, objectif et lagrangien. Ce tenseur est une grandeur mathématique, donc sans signification physique mais très utile pour la méthode des éléments finis.

I.6.5. Lois de comportement hyperélastique isotrope

Une fois les tenseurs des déformations et des contraintes définis, il est nécessaire de proposer les relations régissant la réponse mécanique du matériau, c.-à.-d. exprimant les contraintes en fonction des déformations. Ce type d'équations est appelé loi de comportement, et doit obéir aux critères suivants :

- La polyconvexité qui assure la stabilité du potentiel élastique quel que soit le mode de déformation [61,63]. Ces conditions sont mathématiquement complexes ; toutefois, pour certains modèles, elles fournissent des restrictions sur les valeurs des paramètres matériels (inégalités de Baker-Ericksson, Truesdell...),
- Le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle qu'on peut résumer comme l'indépendance de la réponse du matériau à l'observateur. Ainsi, la loi de comportement doit être indépendante des mouvements de solide rigide.

I.6.5.1. Hyperélasticité

Les lois de comportement hyperélastiques dérivent d'un potentiel élastique dit densité d'énergie de déformation, souvent notée W dans la littérature. Ainsi, ce type de loi constitutive peut être exprimée en configuration Eulérienne, lagrangienne et mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \\ \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \\ \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \end{array} \right. \quad (\text{I.73})$$

Lorsque le matériau possède des propriétés d'isotropie, la densité d'énergie de déformation s'écrit en fonction des invariants des tenseurs de Cauchy-Green \mathbf{C} ou \mathbf{B} , notés I_i ($i = 1, 2, 3$), soit :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (\text{I.74})$$

Sachant que \mathbf{C} et \mathbf{B} ayant les mêmes valeurs propres, ces invariants s'expriment de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{array} \right. \quad (\text{I.75})$$

où λ_1 , λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de \mathbf{C} et \mathbf{B} .

La relation contrainte déformation est alors obtenue en dérivant ces invariants par rapport aux tenseurs \mathbf{C} et \mathbf{B} . On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \end{cases} \quad (\text{I.76})$$

I.6.5.2. Hyperélasticité incompressible

Les élastomères sont généralement considérés incompressibles, sous sollicitations mécaniques, leur volume ne varie pas. Plus précisément, les efforts ou l'énergie nécessaire à un changement de volume sont supérieurs de plusieurs ordres de grandeur à ceux nécessaires à une déformation isochore. Cette hypothèse n'est plus valable lorsque les élastomères subissent de fortes pressions hydrostatiques.

D'un point de vue théorique, l'hypothèse d'incompressibilité est une liaison interne qui limite le mouvement de la matière [64,65]. Cette liaison doit être respectée par le champ de déplacement. L'hypothèse d'incompressibilité s'écrit :

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \text{ ou encore } I_3 = 1 \quad (\text{I.77})$$

Le troisième invariant principal I_3 étant à présent connu, la densité d'énergie de déformation ne dépend plus que des deux premiers invariants $W = W(I_1, I_2)$.

I.6.5.3. Modèles de comportement

De nombreuses formes de l'énergie volumique de déformation ont été proposées dans la littérature. Il existe essentiellement deux approches : la première approche est micromécanique se basant sur la mécanique statistique des chaînes de réseaux polymériques [66]. La deuxième est phénoménologique postulant la forme de l'énergie volumique de déformation [67]. Ces modèles phénoménologiques sont pertinents, offrant un bon compromis entre la complexité du modèle, l'identification paramétrique (nombre de paramètres soit le plus réduit possible) et « robustesse » théorique (en termes de

stabilité du modèle, i.e. on impose un Hessian positif). C'est pourquoi, bon nombre de ces modèles sont implémentés dans des codes de calculs par élément finis.

(1) Modèle néo-Hookéen (1943)

Le modèle hyperélastique isotrope et incompressible le plus simple est le modèle néo-Hookéen, qui peut être obtenu via le modèle statistique gaussien des chaîne [68]. Ce modèle s'écrit :

$$W^{NH} = C_{10}(I_1 - 3) \quad (\text{I.78})$$

où C_{10} est un paramètre matériau, qui doit être strictement positif pour assurer la polyconvexité du modèle. En pratique, son domaine de validité est restreint : en traction uniaxiale, on l'estime pour des valeurs de $\lambda < 1.5$.

Ogden [61] a proposé une extension du modèle néo-Hookéen aux matériaux compressibles et isotropes, dont la densité d'énergie de déformation est donnée par :

$$W^{NH} = C_{10}(I_1 - 3) - \mu_0 \ln J + C_{01}(J - 1)^2 \quad (\text{I.79})$$

où C_{10} et C_{01} sont deux paramètres matériaux nécessairement positifs afin de satisfaire la condition de polyconvexité du potentiel élastique W .

(2) Modèle de Mooney-Rivlin (1940)

Après avoir étudié les réponses en traction et en cisaillement des élastomères, Mooney proposent la forme phénoménologique suivante pour la densité d'énergie de déformation [69] :

$$W^{MR} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{I.80})$$

Ce modèle admet donc deux paramètres matériaux, qui doivent vérifier $C_{10} > 0$ et $C_{01} \geq 0$ pour assurer la polyconvexité de W , et son domaine de validité est plus large que celui du modèle néo-Hookéen, de l'ordre de $\lambda \in [1, 2.5]$.

(3) Développement polynomial de Rivlin (1948)

Rivlin [67] a proposé une généralisation des approches de Treolar [68] et Mooney [69] afin de formuler une énergie volumique de déformation sous une forme polynomiale, pour les élastomères incompressibles :

$$W^R = W^{MR} + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + \dots \quad (\text{I.81})$$

où C_{ij} sont des constantes matériaux ($C_{00} = 0$).

(4) Modèles d'ordre supérieur à 1

Les termes du second ordre de (I.81) visent à reproduire les grandes déformations, au-dessus de $\lambda = 2.5$ [44]. En effet, de nombreux modèles ont été proposés [70-74]. Nous ne les détaillons pas puisque leurs formulations découlent immédiatement du développement polynomial (I.81).

(5) Modèle de Biderman (1958)

Biderman [71] a proposé une forme tronquée à l'ordre 3 du développement de Rivlin [67] (Eq. (I.81)), pour laquelle il ne conserve que les termes à l'ordre 1 pour $(I_2 - 3)$ et il néglige les termes croisés :

$$W^B = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{I.82})$$

(6) Modèle d'Ogden (1972)

Un des modèles le plus utilisés pour les très grandes déformations est celui d'Ogden [75]. Sa formulation consiste à remplacer les exposants entiers du développement de Rivlin par une série de puissances réelles, le modèle s'écrit donc sous la forme :

$$W^{Ogd} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (\text{I.83})$$

où $(\mu_i, \alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ sont les paramètres matériaux qui doivent assurer la polyconvexité.

(7) Modèle d'Arruda-Boyce (1993)

Arruda et Boyce [76] proposent d'assembler huit chaînes polymères. Cet assemblage permet de concilier la physique des réseaux polymères et les approches plus mécaniques, puisque l'extension des chaînes est entièrement définie par le premier invariant de déformation I_1 . Ce modèle, appelé aussi modèle 8-chaînes, admet la forme suivante de la densité d'énergie de déformation :

$$W^{AB} = CN \left[\sqrt{\frac{I_1}{3N}} \beta_a + \ln \left(\frac{\beta_a}{\sinh \beta_a} \right) \right] \quad (\text{I.84})$$

où $\beta_a = L^{-1}(x)$ fonction inverse de Langevin [77]. Les paramètres matériaux sont C qui est lié à la densité de chaînes comme pour le modèle néo-Hookéen, et $N_8 \in \mathbb{N}$ qui est lié à l'extension maximale des chaînes polymériques.

(8) Modèle de Gent (1996)

Gent propose un modèle phénoménologique à deux paramètres, E_m et I_m , le premier traduisant la raideur et le second permettant de définir une asymptote pour les grandes déformations [78] :

$$W^{Gent} = -\frac{E_m}{6} (I_m - 3) \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3} \right) \quad (\text{I.85})$$

On précise qu'il existe une corrélation entre les modèles à huit sous-chaînes d'Arruda-Boyce et de Gent.

(9) Modèle du tube étendu (1999)

Le dernier modèle que l'on présente ici est celui proposé par Kaliske et Heinrich [79]. Sa formulation repose sur la physique des réseaux polymères, et notamment sur les modèles dits « tube ». Ce modèle permet de décrire le mouvement des chaînes polymères dans un réseau réticulé. Comme pour le modèle d'Arruda et Boyce, le modèle du « tube étendu »

intègre assez simplement des résultats issus de la physique des polymères dans le cadre hyperélastique. Ainsi, les auteurs proposent une densité d'énergie de déformation, alliant une fonction du premier invariant I_1 et une fonction de type Ogden, qui entre parfaitement dans le cadre mécanique tridimensionnel :

$$W^{Tube} = \frac{G_c}{2} \left[\frac{(1-\delta_c^2)(I_1-3)}{1-\delta_c^2(I_1-3)} + \ln[1-\delta_c^2(I_1-3)] \right] + 2 \frac{G_e}{\beta_c^2} (\lambda_1^{-\beta_c} + \lambda_2^{-\beta_c} + \lambda_3^{-\beta_c} - 3) \quad (I.86)$$

Ce modèle, admettant seulement quatre paramètres matériaux G_c , δ_c , G_e et β_c , s'avère très performant puisque sa base physique assure une bonne capacité au changement de modes de déformation [80].

I.6.5.4. Comparaison des modèles

Afin d'évaluer les performances des modèles précédents et de définir leurs domaines de validité, le plus simple est de comparer leur réponse sous un chargement de traction uniaxiale, c'est-à-dire pour un « essai de traction ». Cette comparaison est issue du classement d'une vingtaine de modèles proposés par [80]. Les capacités prédictives des modèles polynomiaux sont illustrées à la Fig. I-17a, qui montre la comparaison des prédictions de modèles néo-Hookéen, de Mooney-Rivlin et de Biderman (1958). Les résultats obtenus sont représentatifs des performances des modèles mentionnées précédemment. Le modèle néo-Hookéen est adapté aux problèmes où les extensions n'excèdent pas $\lambda = 1.5$ et possédant un seul paramètre, i.e. C_{10} qui est facile à déterminer. Le modèle de Mooney-Rivlin est fiable jusqu'à $\lambda = 2.5$ mettant en jeu deux paramètres i.e. C_{10}, C_{01} , il est utilisé en ingénierie. Les modèles d'ordres supérieurs visent essentiellement à prédire la réponse des élastomères aux très grandes déformations, c'est-à-dire, l'amélioration de la courbe contrainte-déformation. La Fig. I-17b présente les réponses des quatre modèles dévolus aux grandes déformations. Les quatre modèles s'avèrent aptes à prédire le comportement aux grandes déformations. Le nombre de

paramètres matériaux de chaque modèle est indiqué dans la légende entre parenthèses. On note que l'identification paramétrique nécessite des résultats d'essais de la traction équi-bi-axial afin de reproduire le comportement « multiaxial » des élastomères.

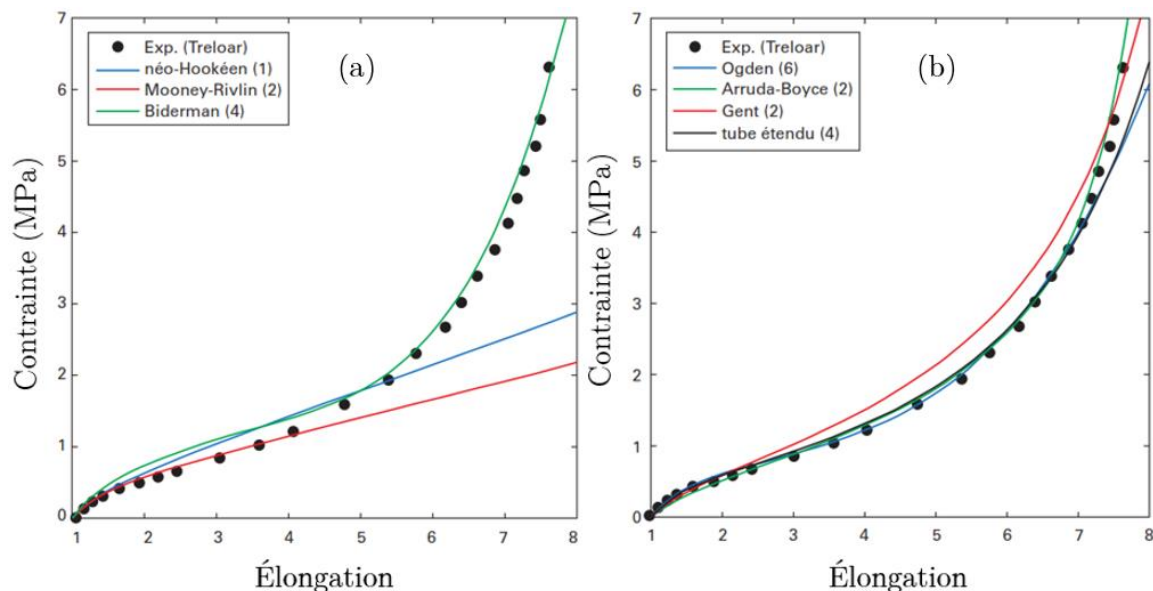


Fig. I-17 Prédiction de la traction uniaxiale (a) par des modèles hyperélastiques polynomiaux (b) par quatre modèles dédiés aux grandes déformations [44].

I.7. Critère de rupture en grandes déformations

Plusieurs critères de rupture ont été développés et appliqués pour l'évaluation de la rupture des matériaux caoutchoutiques. Ces critères peuvent être classés en deux catégories :

- les critères énergétiques basés sur l'utilisation des concepts d'énergie pour caractériser le comportement de la croissance des fissures [81],
- les critères non énergétiques basés sur la contrainte, la déformation ou l'étirement.

Le premier critère énergétique proposé pour l'étude de la croissance des fissures dans les matériaux caoutchoutiques est une extension de l'approche de Griffith [7] qui est appelée énergie de déchirement suggérée par Rivlin et Thomas [82]. Selon ce critère,

l'énergie critique nécessaire à la propagation des fissures (T_{cr}) est une constante du matériau qui est indépendante de la géométrie et des dimensions de l'éprouvette.

L'intégrale J telle que formulée par Rice [10], est un autre critère basé sur l'énergie qui a été largement utilisée pour l'évaluation des fissures dans les matériaux élastiques linéaires. En outre, pour les matériaux hyperélastiques, ce concept a également été appliqué avec succès par Aït Hocine et al. [83,84] ainsi que par Hamdi et al. [85]. Ils ont montré que cette intégrale peut prédire avec une précision raisonnable la charge de rupture dans les matériaux caoutchoutiques.

Le critère de la densité d'énergie de déformation (SED), introduit par Sih [34], a également été étendu au cas des matériaux élastomères. En effet, Aït Hocine et al. [84] ont utilisé la méthode des éléments finis (MEF) pour obtenir la distribution de la densité d'énergie de déformation autour de la pointe de la fissure pour les caoutchoucs. En utilisant cette distribution, ils ont démontré que la propagation de la fissure en mode I peut être prédite avec précision par le critère SED. Par ailleurs, Hamdi et al. [85] ont également utilisé avec succès ce critère pour l'évaluation de la rupture des élastomères dans des conditions de chargements en mode mixte (I/II). Très récemment, Berto [86] a proposé un critère de rupture pour les caoutchoucs contenant des entailles de forme en V. Il a prédit avec succès la charge maximale correspondant au début de la croissance des fissures. Mzabi et al. [87] ont récemment appliqué un autre critère basé sur l'énergie pour les matériaux de type caoutchouc, appelé le critère du taux de libération d'énergie locale. Les résultats obtenus montrent que la croissance des fissures dans les élastomères est contrôlée par l'énergie de déformation locale stockée dans une zone fortement déformée près de la pointe de fissure et qui est indépendante de l'énergie de déformation totale de l'échantillon.

Enfin, Verron et al. [88] ont établi un critère de rupture basé sur la mécanique configurationnelle dans le cas de l'hyperélasticité, en supposant que l'évolution des

défauts microscopiques contenus dans le matériau peut être prédite à l'échelle macroscopique, en utilisant les composantes du tenseur de contrainte d'Eshelby. Ainsi, ils ont établi un nouveau tenseur appelé "tenseur de contrainte matérielle pure", qui peut être considéré comme une mesure des dommages microstructuraux et de la direction des défauts. Plus précisément, Il a montré que la direction de la quantité maximale d'énergie qui peut être libérée par l'évolution des défauts est perpendiculaire à la direction d'initiation de de propagation la fissure.

D'autre part, dans la catégorie des critères non énergétiques, Hamdi et al. [85] ont proposé d'évaluer les valeurs maximales de l'étirement principal et de contrainte comme critère de rupture pour les matériaux élastomères, sous chargements multiaxiaux. Il a été démontré que le critère basé sur la contrainte ne peut pas être un bon candidat pour décrire la croissance des fissures. En outre, il a été conclu que l'étirement principal maximal est un bon indicateur pour l'évaluation de la charge d'initiation d'une fissure ainsi que de la direction de sa propagation. Cependant, un examen approfondi de ce critère basé sur l'étirement révèle une difficulté dans sa mise en œuvre. En fait, puisque l'étirement principal maximal est calculé en fond de fissure, sa valeur dépend de manière significative de la taille du maillage utilisé dans le modèle d'éléments finis. Cela implique que la valeur critique de l'étirement principal maximal augmente lorsque le maillage à la pointe de la fissure est affiné pour une charge appliquée constante. Par conséquent, ce paramètre ne peut pas être considéré comme une propriété du matériau, car sa dépendance au maillage en fait un paramètre de contrôle de la rupture inapproprié [89].

Récemment, Ayatollahi et al. [89] ont suggéré un nouveau critère basé sur l'étirement pour évaluer la rupture en mode I des matériaux élastomère contenant une fissure, appelé critère d'étirement effectif (en anglais, effective strain "ES"). Ce critère est formulé en utilisant le modèle à huit chaînes qui repose sur l'approche mécanique

statistique de l'élasticité du caoutchouc. Par la suite, ses mêmes auteurs [90] l'ont étendu pour inclure également les conditions de chargement en mode mixte (I / II).

Partie 3 : Concepts de modélisation numérique de la rupture

I.8. Méthodes numériques outils de modélisation de la rupture des matériaux

Dans cette section, on présente quelques méthodes numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture en discutant brièvement de leurs avantages et inconvénients.

I.8.1. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode largement utilisée dans le calcul des structures en mécanique. Elle a donc été naturellement adaptée pour résoudre des problèmes de fissuration et de rupture. Parmi les références récentes, on peut citer les travaux [91-93], qui étudient la propagation de fissures en 2D et en 3D [94,95].

La modélisation des discontinuités représente toujours un défi d'un point de vue numérique. Si on veut modéliser les fissures par la méthode des éléments finis classique (MEF), le maillage EF doit se conformer avec la géométrie de la fissure, comme illustré sur la Fig. I-18.

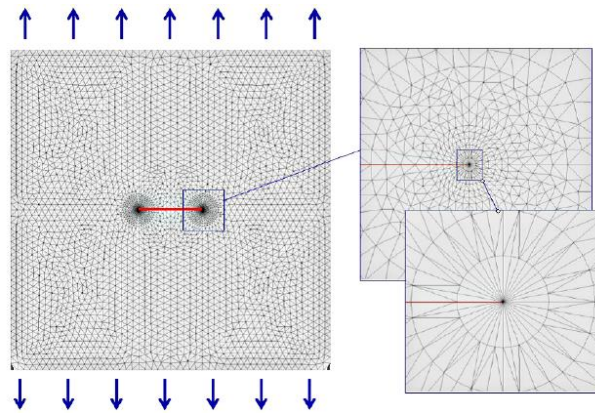


Fig. I-18 Plaque carrée préfissurée et le maillage associé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte [91].

Dans les simulations par la MEF en grandes déformations, certains éléments du maillage peuvent être fortement déformés. Cela affecte négativement la précision de la simulation et peut empêcher son achèvement. Afin de surmonter ce problème, et de déterminer avec précision le champ de contrainte et de déformation autour de la pointe de la fissure, on a besoin de raffiner le maillage dans cette zone. De nombreuses méthodes ont été proposées et développées dans ce sens.

I.8.1.1. Méthode de remaillage

Le remaillage est une solution pour contrôler la distorsion des éléments. L'idée est simple, si le maillage est fortement déformé pendant la simulation, il faut alors générer un nouveau maillage basé sur la géométrie déformée de la pièce. Un processus connu sous le nom de la cartographie « mapping » qui transférera les solutions du maillage légèrement déformé au nouveau maillage en se basant sur leur position relative dans l'espace. Des interpolations ont généralement lieu pendant ce processus, car les nœuds de l'ancien maillage et ceux du nouveau maillage ne coïncident généralement pas. Une fois que les solutions (champs de contraintes et déformations, température, etc.) sont mises en correspondance avec le nouveau maillage, la simulation peut se poursuivre avec des éléments rafraîchis et moins déformés [96]. De ce fait, l'interpolation sera largement

utilisée au cours du processus de cartographie et la précision de la solution se détériorera, ainsi des erreurs peuvent s'accumuler après des remaillages répétitifs. La Fig. I-19 résume les étapes de la méthode de remaillage.

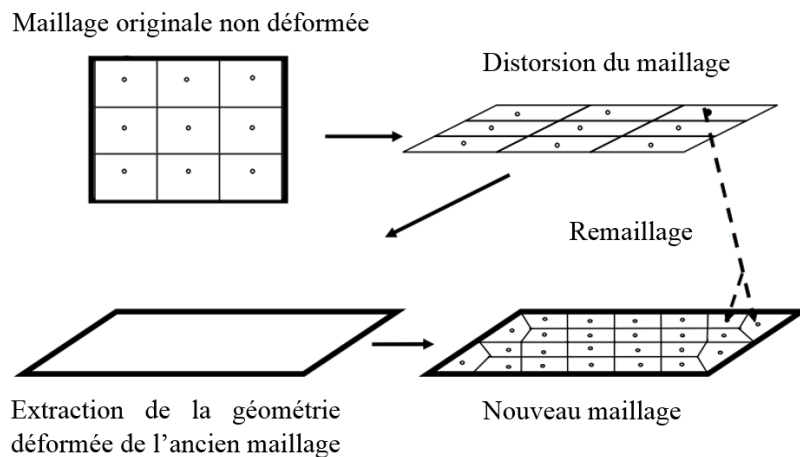


Fig. I-19 Représentation schématique d'un remaillage [97].

I.8.1.2. Méthode de sous-modélisation

La sous-modélisation est une technique utilisée pour étudier une partie locale d'un modèle avec un maillage raffiné, pour une plus haute-fidélité. Cette méthode est particulièrement utile lorsqu'il est nécessaire d'obtenir une solution précise et détaillée dans une ou plusieurs régions locales, alors que l'analyse de la structure globale est trop coûteuse ou ne vaut pas la peine. Le concept de base du sous-modèle est illustré dans la Fig. I-20.

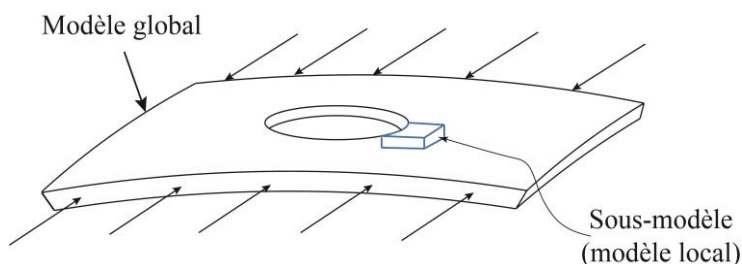


Fig. I-20 Illustration de la technique de sous-modélisation.

En résumé, une première analyse globale d'une structure identifie généralement les zones où la réponse à la charge est jugée cruciale. La modélisation secondaire permet

ensuite d'améliorer facilement le modèle de ces zones sans avoir à recourir à un remaillage et à une nouvelle analyse de l'ensemble du modèle.

Les détails concernant les méthodes de remaillage et sous-modélisation peuvent être trouvés dans le manuel d'analyse des utilisateurs d'Abaqus [98].

I.8.2. Méthode des éléments finis étendus

Plus connue sous le sigle XFEM (en anglais, Extended Finite Element Method), cette méthode consiste à enrichir une approximation classique par la MEF avec différentes fonctions qui représentent bien la discontinuité et la singularité d'une fissure dans un milieu matériel [99]. Le grand avantage de ce principe est l'absence de procédures de remaillage pour la description de la propagation des fissures [100-103].

Pourtant, les fonctions utilisées (non-polynomiales) entraînent certaines difficultés dans l'intégration élémentaire et dans l'adaptation des critères de rupture, ainsi que la présence d'une zone de transition qui limite le taux de convergence en maillage. La mise à jour de la géométrie de la fissure peut aussi être difficile lors de brusques changements topologiques.

I.8.3. Méthode des éléments de frontières

On trouve dans la littérature de nombreux développements de méthodes par éléments de frontière en mécanique de la rupture [104-106]. L'avantage immédiat est la simplicité de la description de la fissure et la gestion de son évolution. L'intégration en espace et en temps des solutions fondamentales doit être effectuée à chaque pas de temps et des problèmes numériques de conditionnement de matrices et de stockage de données sont les principales difficultés rencontrées lors de l'utilisation de ce type de méthode.

I.8.4. Méthode sans maillage

Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1994, cette méthode est plus proche de la MEF que la méthode des éléments de frontières. Elle se base sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin (comme pour la MEF). Par contre, l'approximation du champ de déplacement qui est construite pour être introduite dans la forme faible ne nécessite pas de maillage. Seul un ensemble de nœuds est réparti dans le domaine et l'approximation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point par rapport aux nœuds qui l'entourent, et non de l'appartenance à un certain élément fini. En mécanique de la rupture, la fissure se propage parmi cet ensemble de nœuds et la présence d'une fissure est simplement prise en compte en diminuant le poids que possède un nœud sur l'approximation du déplacement en un certain point, si la ligne joignant ce nœud et ce point est coupée par la fissure. Les principaux développements ont été exposés dans [107,108]. Les problèmes de ces techniques sont la lourdeur du calcul et le traitement des conditions aux limites cinématiques. Une vision simplifiée de ces méthodes a été récemment présentée dans [109].

I.8.5. Méthode des éléments discrets

La méthode des éléments discrets (MED) à l'origine développée par Cundall et Strack [110], est une méthode très utile pour la modélisation numérique du comportement des systèmes granulaires et des particules [111-113]. Dans cette approche, la fissuration est étudiée par l'analyse des forces de liaison entre des particules en contact. Donc, le problème de singularité de contraintes n'existe pas.

I.9. Bilan du chapitre I

Cette étude bibliographique permet de fixer le cadre dans lequel s'inscrit notre sujet de recherche. En effet, ce chapitre a été consacré à la description générale des concepts de base de la mécanique de la rupture en petites et en grandes déformations, ainsi que les méthodes numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture.

Dans la première partie, nous avons passé en revue les aspects fondamentaux de la mécanique de la rupture sous l'hypothèse des petites perturbations, qui est bien adaptée pour l'analyse de structures préfissurées en petites déformations. On observe que, lorsque des défauts ne sont pas identifiables visuellement, on dispose de divers critères capables de prévoir à la fois, l'initiation et direction de propagation des fissures.

La deuxième partie a été consacrée aux comportements mécaniques des matériaux élastomères qui présentent une haute élasticité réversible, appelée aussi « hyperélasticité ». En effet, nous avons pu nous rendre compte que pour ces matériaux, la formulation des champs asymptotiques à la pointe de la fissure est complexe à cause des non-linéarités géométriques et matérielles. La modélisation de ce type de comportement s'effectue, généralement, à l'aide de la densité d'énergie de déformation W exprimée en fonction des invariants. Différentes formes d'approximation de W ont été présentées dans ce chapitre. Enfin, plusieurs critères de rupture appliqués pour l'évaluation de la rupture des matériaux de type caoutchouc ont été brièvement résumés.

La dernière partie avait pour but l'identification d'une série d'avantages et d'inconvénients liés à la modélisation de la rupture par les méthodes numériques.

Chapitre II Critères de rupture basés sur le tenseur d'Eshelby

Dans ce chapitre, un nouveau critère de rupture est proposé afin de prédire l'initiation et la direction de propagation de la fissure dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture, sous un chargement en mode mixte I/II. Ce modèle est basé sur le paramètre de la densité d'énergie de déformation (SED), qui est exprimé en fonction des contraintes principales du tenseur d'Eshelby. Une des principales caractéristiques du modèle proposé est la prise en compte l'effet du coefficient de Poisson. Des investigations théoriques ont été menées pour étudier l'influence du coefficient de Poisson sur la direction de propagation des fissures. Les prédictions du modèle sont comparées aux données théoriques et expérimentales, en termes de direction de propagation de fissure et dans différentes conditions de chargements, et les résultats sont en bon accord. Enfin, la pertinence de la valeur critique du paramètre SED en tant que paramètre de résistance à la rupture est évaluée.

II.1. Introduction

Le problème de la propagation des fissures dans les matériaux d'ingénierie fait toujours l'objet de recherches actuellement. Comme mentionné dans le premier chapitre, divers critères ont été proposés dans la littérature pour prédire la direction d'initiation des fissures et la résistance à la rupture, tels que le critère de la contrainte maximale (MTS) [30] et ses versions améliorées [38,114,115], le critère de la densité d'énergie de déformation maximale (MSED) [34], le critère du taux maximal de libération d'énergie (MERR) [33], le critère T [37], le critère R [116] et sa version améliorée [117], le critère proposé par Marciniak et Kuczynski (MK) [118]. Ioakimidis [119] a présenté une étude intéressante sur les approches modernes des critères de rupture.

Récemment, le concept de contrainte configurationnelle du matériau, qui est basé sur le tenseur de contrainte d'Eshelby, s'est révélé être un outil puissant pour formuler des critères de croissance des défauts dans les solides [120], ainsi, il peut être perçu comme résultat additionnel à ceux de l'intégrale J de Rice (l'intégrale J ne prédit pas la direction de croissance de la fissure). Dans la mécanique de la rupture, les forces configurationnelles [121] apparaissent comme des forces motrices agissant sur l'extrémité de la fissure, généralisant ainsi le concept bien connu de taux de libération d'énergie [122,123], tel que défini par l'intégrale- J [10]. Des invariants du tenseur de contrainte d'Eshelby ont été appliqués pour prédire la direction de propagation des fissures [124], et ses contraintes principales et la contrainte équivalente de von Mises ont été utilisées comme critères de rupture locaux [28,35]. Cependant, aucun critère de rupture développé précédemment se basant sur le tenseur de contrainte d'Eshelby, ne prend en compte l'effet du coefficient de Poisson pour prévoir l'angle de propagation de la fissure. En effet, il a été démontré que ce paramètre influence à la fois l'angle d'initiation et la résistance à la rupture en mode mixte I/II [125,126].

Dans ce chapitre, un nouveau modèle visant à prédire l'initiation et la direction de propagation de la fissure est proposé, dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER), sous chargement en mode mixte (I+II). Ce modèle est basé sur un paramètre de densité d'énergie de déformation (SED) qui est exprimé en fonction des contraintes principales du tenseur de contrainte d'Eshelby. Sa principale caractéristique est la prise en compte de l'effet du coefficient de Poisson pour prédire avec succès l'angle de propagation des fissures. La direction d'initiation des fissures est rigoureusement analysée sous différentes conditions de chargements, et la validité des résultats est vérifiée par comparaison avec les données théoriques et expérimentales extraites de la littérature, pour plusieurs valeurs du coefficient de Poisson. De plus, la capacité du paramètre SED à représenter un critère d'initiation de fissure, c'est-à-dire la résistance à la rupture du matériau, est évaluée.

II.2. Position du problème

Considérons une plaque infinie avec une fissure inclinée de longueur $2a$, soumise à une contrainte uniforme à l'infini, égale à σ_0 dans le cas d'un chargement uniaxial, et à τ_0 dans le cas d'un chargement en cisaillement pur (voir Fig. II-1). Les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} sont donnés par les équations suivantes :

- dans le cas d'un chargement uniaxial [34] :

$$\begin{cases} K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta \\ K_{II} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

- dans le cas d'un chargement en cisaillement pur [38] :

$$\begin{cases} K_I = -\tau_0 \sqrt{\pi a} \sin 2\beta \\ K_{II} = -\tau_0 \sqrt{\pi a} \cos 2\beta \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

où $\beta \in]0, \pi/2]$ est l'angle d'inclinaison de la fissure.

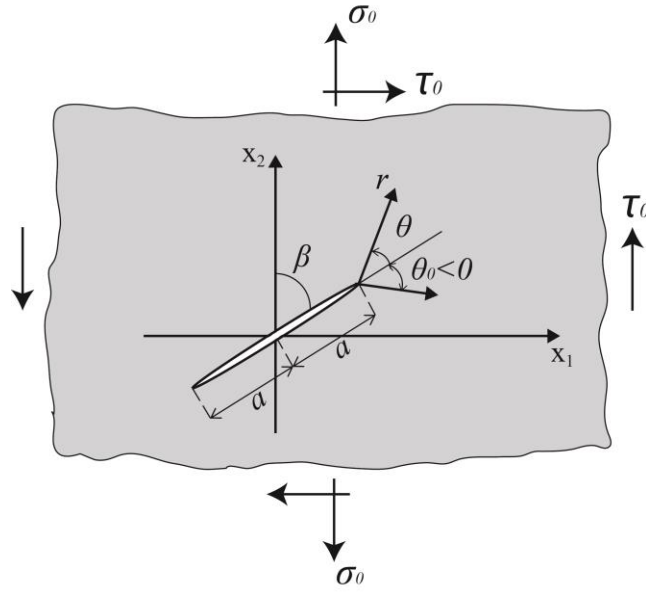


Fig. II-1 Géométrie de la fissure.

En substituant les Eqs. (I.3), (I.7), (I.11) et (I.28) dans l'Eq. (I.27), et en utilisant l'Eq. (I.35), on obtient les expressions des valeurs principales du tenseur des contraintes d'Eshelby modifié, b'_I et b'_{II} , en fonction des facteurs d'intensité de contraintes :

$$b'_I = \frac{(1 + \kappa_0)(x + y)}{16\pi\mu_0 r} \quad (\text{II.3})$$

$$b'_{II} = \frac{(1 + \kappa_0)(x - y)}{16\pi\mu_0 r} \quad (\text{II.4})$$

où

$$\begin{cases} x = (K_I^2 - K_{II}^2)\sin\theta + 2K_I K_{II} \cos\theta \\ y = \sqrt{[(K_I^2 + K_{II}^2)\sin\theta + 2K_I K_{II} \cos\theta]^2 + (2K_{II}^2 \cos\theta)^2} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

II.3. Formulation d'un nouveau critère de rupture

L'objectif de cette étude est de développer un nouveau critère basé sur le concept de contrainte configurationnelle des matériaux, en tenant compte du coefficient de Poisson

pour prédire l'initiation et la direction de propagation des fissures. Ainsi, les valeurs principales paramétrées du tenseur des contraintes d'Eshelby, $\frac{16r\mu_0}{a\sigma_0^2}b'_I$ et $\frac{16r\mu_0}{a\sigma_0^2}b'_{II}$, issues respectivement des Eqs. (II.3) et (II.4), sont rapportées sur la Fig. II-2 en fonction de $\theta \in [-\pi, 0]$ pour différentes valeurs du coefficient de Poisson ν_0 et pour un angle d'inclinaison de la fissure $\beta = 90^\circ$ (mode I). On voit clairement que le paramètre $\frac{16r\mu_0}{a\sigma_0^2}b'_I$ est égal à zéro pour $\theta \in [-\pi, 0]$, alors que le paramètre $\frac{16r\mu_0}{a\sigma_0^2}b'_{II}$ est négatif dans le même intervalle de θ . Inversement, quand $\theta \in [0, \pi]$, $\frac{16r\mu_0}{a\sigma_0^2}b'_I$ est positif, alors que $\frac{16r\mu_0}{a\sigma_0^2}b'_{II}$ est égal à zéro. On peut constater aussi que le coefficient de Poisson agit uniquement comme un paramètre d'échelle. De ce fait, il apparaît clairement que les critères basés uniquement sur b'_I ou sur b'_{II} , comme le critère proposé par Kienzler et Hermann [28], ne dépendent pas du coefficient de Poisson, c'est-à-dire qu'ils ne prennent pas rigoureusement en compte tous les aspects du comportement du matériau.

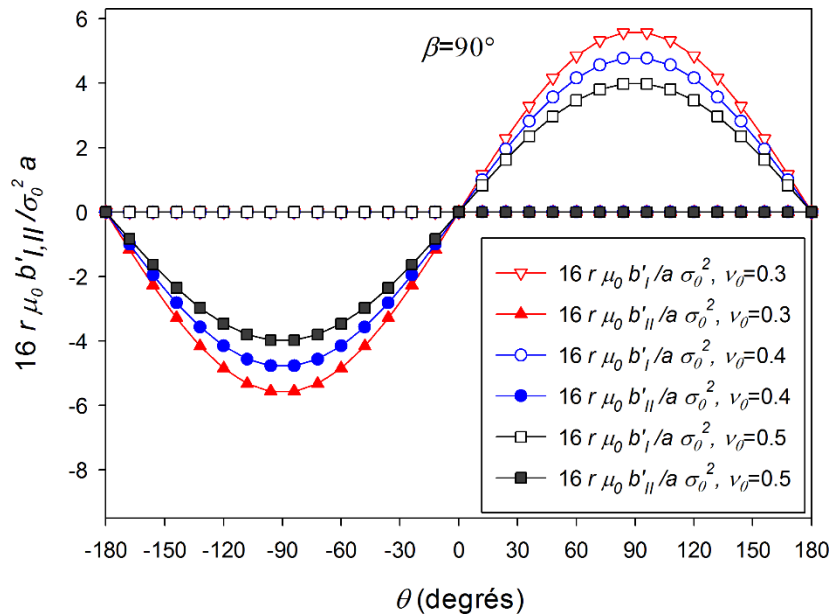


Fig. II-2 Valeurs principales $(16\mu_0 r/\sigma_0^2 a)b'_I$ et $(16\mu_0 r/\sigma_0^2 a)b'_{II}$ en fonction de l'angle polaire θ , pour différentes valeurs du coefficient de Poisson, en mode I ($\beta = 90^\circ$).

Afin de prendre en considération l'effet du coefficient de Poisson ν_0 , dans l'intervalle $\theta \in [-\pi, \pi]$, un critère de rupture pertinent basé sur les contraintes principales du tenseur d'Eshelby devrait intégrer à la fois b'_I et b'_{II} . Dans ce sens, nous proposons de définir une contrainte principale équivalente, appelée $b^{(E)}$, comme une fonction linéaire de b'_I et b'_{II} :

$$b^{(E)} = \nu_0 b'_I + (1 - \nu_0) |b'_{II}| \quad (\text{II.6})$$

On note que l'Eq. (II.6) découle d'un raisonnement intuitif compte tenu des observations qui sont mises en évidence sur la Fig. II-2.

En substituant b'_I (Eq. (II.3)) et b'_{II} (Eq. (II.4)) dans l'Eq. (II.6), on obtient :

$$b^{(E)} = \frac{(1 + \kappa_0)}{16\pi\mu_0} \left[\frac{(2\nu_0 - 1)x + y}{r} \right] \quad (\text{II.7})$$

Il faut noter que $b^{(E)}$ est toujours positif pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\beta \in [0, \pi/2]$, et présente une singularité lorsque $r \rightarrow 0$. Afin de supprimer cette singularité, en suivant l'approche rapportée dans [34,127], nous définissons un facteur de densité d'énergie de déformation, $\mathcal{S}^{(E)}$, comme suit :

$$\mathcal{S}^{(E)} = r b^{(E)} = \frac{(1 + \kappa_0)}{16\pi\mu_0} \left[(2\nu_0 - 1)x + y \right] \quad (\text{II.8})$$

De plus, comme il a déjà été supposé par [34,127], nous faisons les hypothèses suivantes sur l'initiation des fissures dans un champ de contraintes bidimensionnelles :

(1) La propagation initiale de la fissure s'effectue dans le sens où le facteur de la densité d'énergie de déformation a une valeur stationnaire (minimale), c'est-à-dire $\mathcal{S}_{\min}^{(E)}$:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{S}^{(E)}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \text{ avec } \left. \frac{\partial^2 \mathcal{S}^{(E)}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad (\text{II.9})$$

avec θ_0 , compris entre $-\pi$ et π , indique la direction d'extension de la fissure.

(2) L'amorçage d'une fissure se produit lorsque le facteur $S^{(E)}$ atteint une valeur critique $S_{cr}^{(E)}$, c'est-à-dire

$$S_{cr}^{(E)} = \frac{(1 + \kappa_0)}{16\pi\mu_0} [(2\nu_0 - 1)x_{cr} + y_{cr}] \quad (\text{II.10})$$

où x_{cr} et y_{cr} correspondent respectivement aux valeurs de x et y à la rupture, pour chaque configuration d'éprouvette, c'est-à-dire chaque inclinaison de la fissure β , longueur de la fissure et dimension d'éprouvette. La valeur critique $S_{cr}^{(E)}$ servira à mesurer la résistance à la rupture d'un matériau en mode mixte (I+II), si elle s'avère constante pour ce matériau, c.-à-d. indépendante de la géométrie et du type de chargement.

II.4. Critère de direction de propagation de fissure

Dans cette section, on propose d'évaluer la capacité du nouveau critère (Eq. (II.8)) à prédire les directions de propagation des fissures pré-existantes. Pour ce faire, les prédictions du critère proposé sont comparées aux résultats des critères discutés dans le chapitre I [30,34,28,35] ainsi qu'aux données expérimentales de la littérature, sous différentes sollicitations : traction/compression uniaxiale, et cisaillement pur.

II.4.1. Chargements en traction et compression uniaxiales

Pour obtenir les valeurs stationnaires de $S^{(E)}$, l'Eq. (II.8) a été développée en utilisant les Eqs. (II.1) et (II.9), ce qui conduit à :

$$(2\nu_0 - 1)Y_1\sqrt{Y_2} + Y_3 = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{cases} Y_1 = \sin^2 \beta \left[(1 - 2 \cos^2 \beta) \cos \theta - 2 \sin \beta \cos \beta \sin \theta \right] \\ Y_2 = (4 \sin \beta \cos \beta \cos \theta \sin \theta + 4 \cos^2 \beta \cos^2 \theta - \cos^2 \theta + 1) \sin^4 \beta \\ Y_3 = [4 \sin \beta \cos \beta \cos^2 \theta - 4 \cos^2 \beta \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \beta \cos \beta + \cos \theta \sin \theta] \sin^4 \beta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

L'Eq. (II.11) permet le calcul de l'angle de rupture θ_0 , pour un coefficient de Poisson ν_0 et une inclinaison initiale de la fissure β donnés. Quatre solutions découlent de la résolution numérique de cette équation à l'aide du logiciel Maple. Comme l'illustre la Fig. II-3, avec un exemple pour $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$, seules deux solutions correspondent aux valeurs minimales $S_{\min}^{(E)}$ de $S^{(E)}$, c'est-à-dire les solutions remplissant la condition

$$\left. \frac{\partial^2 S^{(E)}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0; \text{ les deux autres solutions correspondent aux valeurs maximales de } S^{(E)}.$$

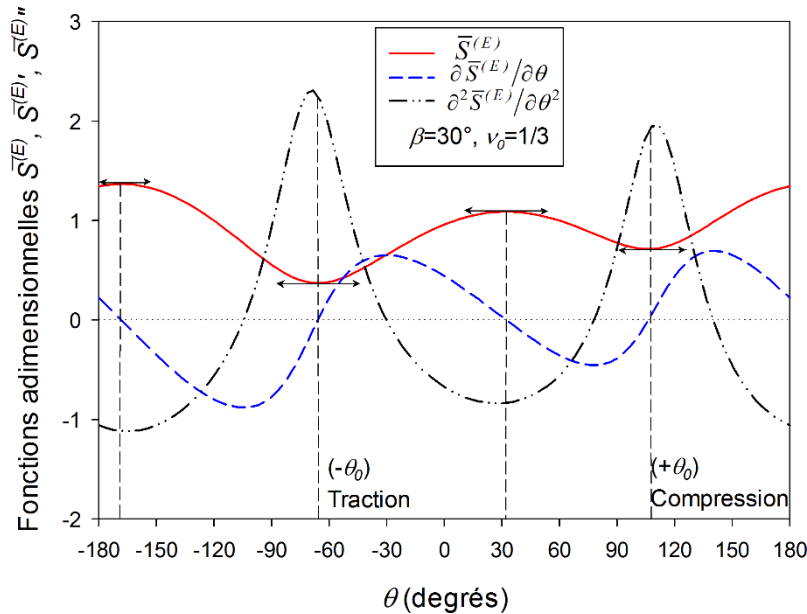


Fig. II-3 Graphiques des fonctions adimensionnelles $\bar{S}^{(E)} = (16 \mu_0 / \sigma_0^2 a) S^{(E)}$,

$\bar{S}^{(E)'} = (16 \mu_0 / \sigma_0^2 a) (\partial S^{(E)} / \partial \theta)$ et $\bar{S}^{(E)''} = (16 \mu_0 / \sigma_0^2 a) (\partial^2 S^{(E)} / \partial \theta^2)$ en fonction de l'angle

θ , pour un coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$ et $\beta = 30^\circ$.

Une solution qui remplit les conditions données par l'Eq. (II.9) correspond au cas de la traction uniaxiale, dans laquelle la fissure se propagera dans la direction θ_0 négative

(Fig. II-4a) ; et l'autre solution correspond au cas d'une compression uniaxiale, dans laquelle la fissure se développera dans la direction θ_0 positive (Fig. II-4b). Ces hypothèses sont en accord avec ce qui a été supposé par [34,127].

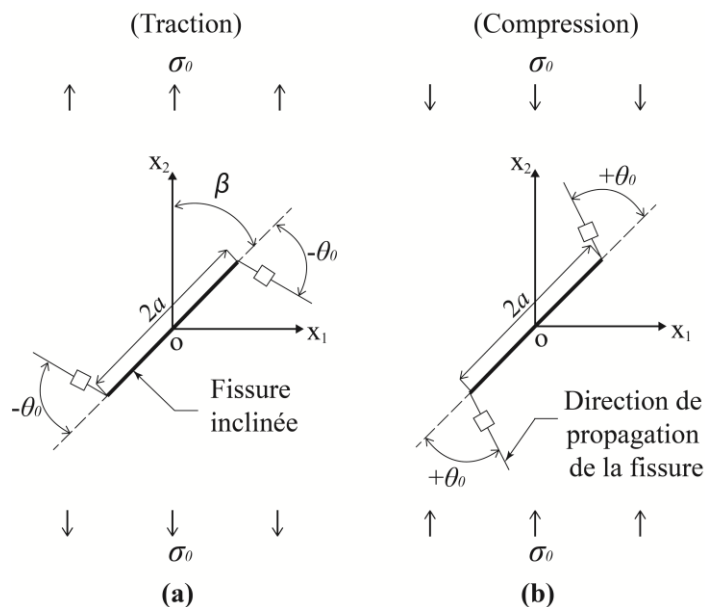


Fig. II-4 Fissure inclinée (a) en traction et (b) en compression uniaxiale.

II.4.1.1. Chargement en traction uniaxiale

Pour vérifier la validité de notre proposition, les prédictions du critère proposé sont comparées dans la Fig. II-5 avec celles de différents critères [30,34,28,35], et quatre ensembles de données expérimentales recueillies de la littérature pour des échantillons testés en traction uniaxiale [30,128,36,129]. Erdogan et Sih [30] ont effectué des essais sur des feuilles de plexiglas rectangulaires d'environ 460 x 230 x 5 (mm³), pour lesquelles le coefficient de Poisson est $\nu_0 = 1/3$, avec une fissure centrale d'une longueur d'environ 50 mm, inclinée à des angles β de 30° à 80° par pas de 10°. Pook [128] a obtenu des résultats expérimentaux pour un alliage d'aluminium, avec un coefficient de Poisson $\nu_0 = 0.33$. Il a réalisé des essais de rupture sur des éprouvettes préfissurées, avec des angles d'inclinaison initiale $\beta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ et 90° . Kong et al [36] ont effectué des expériences sur des échantillons d'acier à basse température (-140°C), avec une vitesse

de chargement égale à 50 mm/s. Le coefficient de Poisson pour les aciers est généralement de $\nu_0 = 0.35$. Theocaris et al [129] ont effectué des expériences sur des échantillons de polycarbonate (PCBA), pour différents angles d'inclinaison initiale de la fissure. Le coefficient de Poisson pour le PCBA est $\nu_0 = 0.38$.

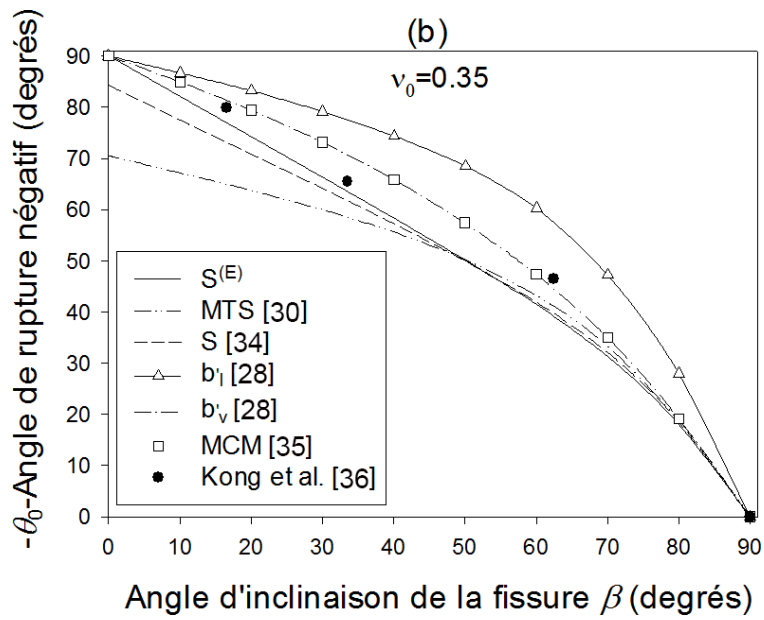
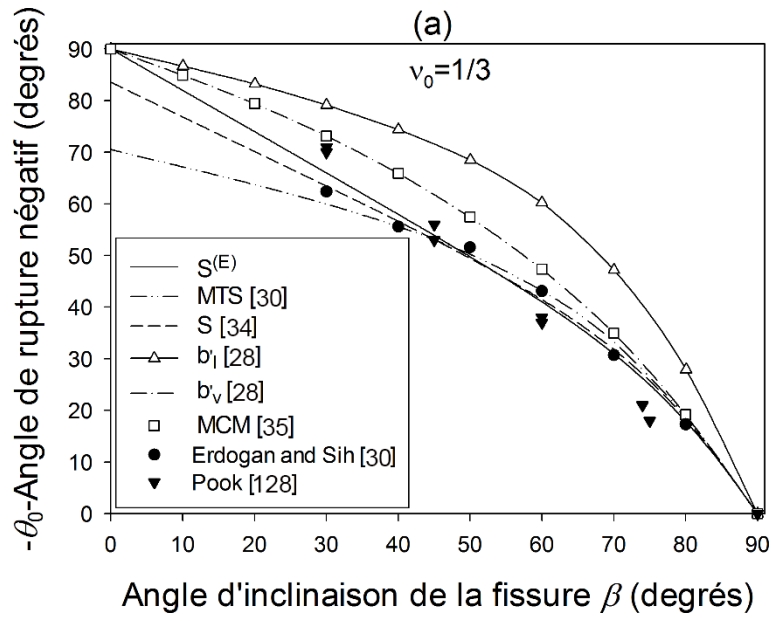
La divergence moyenne a été calculée pour chaque critère théorique par rapport aux données expérimentales, en utilisant l'équation suivante :

$$\text{Div. (\%)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\theta_{0,i}^{(th)} - \theta_{0,i}^{(exp)}|}{\theta_{0,i}^{(exp)}} \quad (\text{II.13})$$

où $\theta_{0,i}^{(th)}$ est l'angle de rupture théorique, et $\theta_{0,i}^{(exp)}$ est l'angle de rupture expérimentale.

Les résultats sont présentés dans le Tab. II.1.

La Fig. II-5 et Tab. II.1 montrent que notre critère fournit la prédiction la plus proche des données expérimentales comparativement aux autres critères, ce qui renforce la validité du modèle proposé. Il faut noter que les critères choisis pour la comparaison sont largement représentatifs. Il convient aussi de souligner que les prévisions des critères MTS [30] et Griffith [7] quant à la direction de propagation de fissure, ne diffèrent pas substantiellement [6].



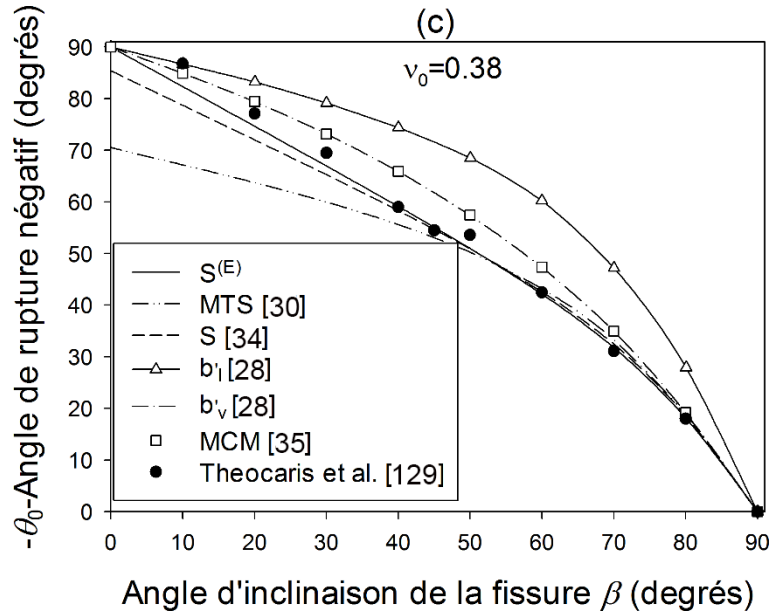


Fig. II-5 Comparaison des prédictions des critères de rupture avec les données expérimentales, sous un chargement en traction uniaxiale (a) $\nu_0 = 1/3$ (b) $\nu_0 = 0.35$ (c) $\nu_0 = 0.38$.

Criteria	Div. (%) (Eq. (29))					
	$S^{(E)}$	MTS [30]	S [34]	b'_l [28]	b'_v [28]	MCM [35]
Plexiglas [30]	3.81	4.08	3.65	41.40	13.62	13.61
Aluminum alloy [128]	8.98	13.96	11.04	40.29	16.97	16.98
Acier [36]	6.00	13.25	8.35	10.61	3.97	3.97
Polycarbonate [129]	2.54	9.66	4.25	23.59	7.03	7.03

Tab. II.1 Divergence moyenne % sous un chargement en traction uniaxiale.

Bien que le critère de Sih [34] semble moins précis que notre critère, il est en accord raisonnable avec les données expérimentales (Fig. II-5 et Tab. II.1). Ainsi, pour vérifier la validité de la théorie proposée, les valeurs négatives de θ_0 , correspondant à la sollicitation en traction uniaxiale, issues de notre théorie sont comparées avec les données obtenues par [34], pour différentes valeurs du coefficient de Poisson. Les résultats sont

rapportés reportés sur les Fig. II-6, en fonction de l'angle initial de la fissure β compris entre 0 et 90°. On observe que les résultats concordent bien, surtout en ce qui concerne $\nu_0 \geq 0.2$. En effet, la divergence maximale obtenue est de 10 %, alors qu'elle est de 17,3 % pour $\nu_0 < 0.2$.

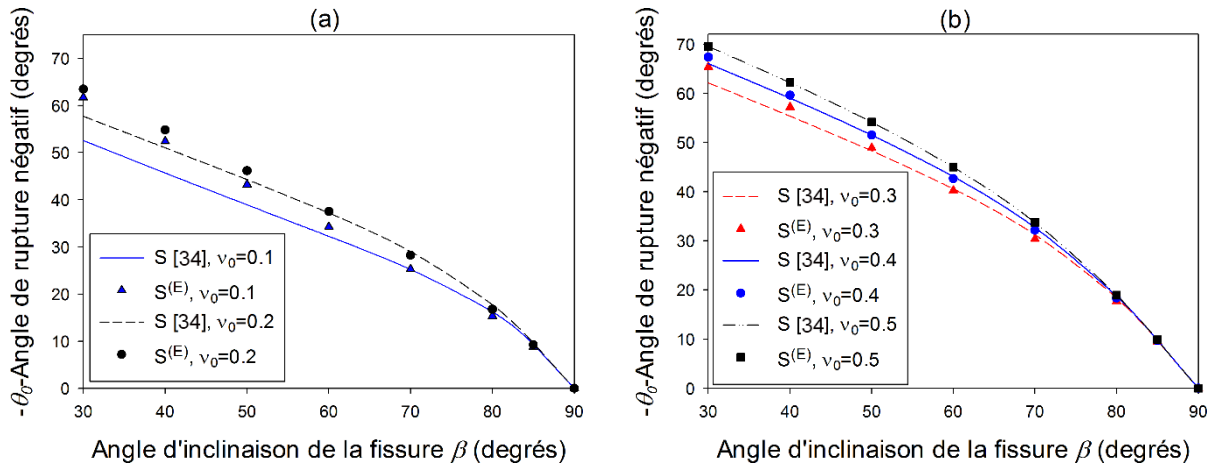


Fig. II-6 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($-\theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en traction uniaxiale (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.

II.4.1.2. Chargement en compression uniaxiale

Notre analyse en compression uniaxiale se concentre seulement sur les angles initiaux d'extension de la fissure. De ce fait, les effets du contact entre les faces de la fissure sont négligés. Afin de vérifier la validité de notre modèle, la même analyse que celle présentée précédemment dans le cas de la traction, a été réalisée. Il s'agit de comparer les prédictions du critère proposé avec celles de différents critères de la littérature [30,34,28,35]. L'évolution des angles d'initiation de la fissure en fonction des angles d'inclinaison β est illustrée, pour deux valeurs de ν_0 sur la Fig. II-7. Il faut noter, qu'en raison de l'absence de résultats précis et fiables dans la littérature, aucune comparaison expérimentale n'a été effectuée dans le cas la compression uniaxiale.

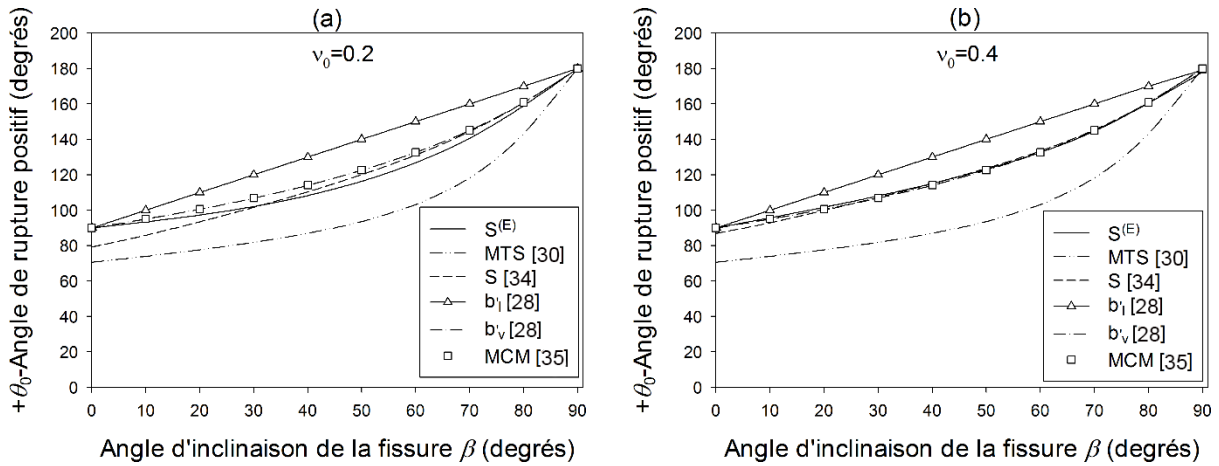


Fig. II-7 Comparaison entre les prédictions des critères de rupture, sous un chargement en compression uniaxiale (a) $\nu_0 = 0.2$ (b) $\nu_0 = 0.4$.

Pour vérifier davantage la validité de notre critère dans le cas des sollicitations en compression uniaxiale, les valeurs positive de θ_0 sont comparés avec les données obtenues par Sih [34] dont le critère qui, contrairement aux autres critères, prend en compte l'effet du coefficient de Poisson. Les résultats sont rapportés en fonction de l'angle initial de la fissure β sur la Fig. II-8. On constate que les résultats sont en bon accord. En effet, la divergence maximale obtenue pour $\nu_0 \geq 0.2$ est de 3,3 % et elle est de 6,4 % pour $\nu_0 < 0.2$.

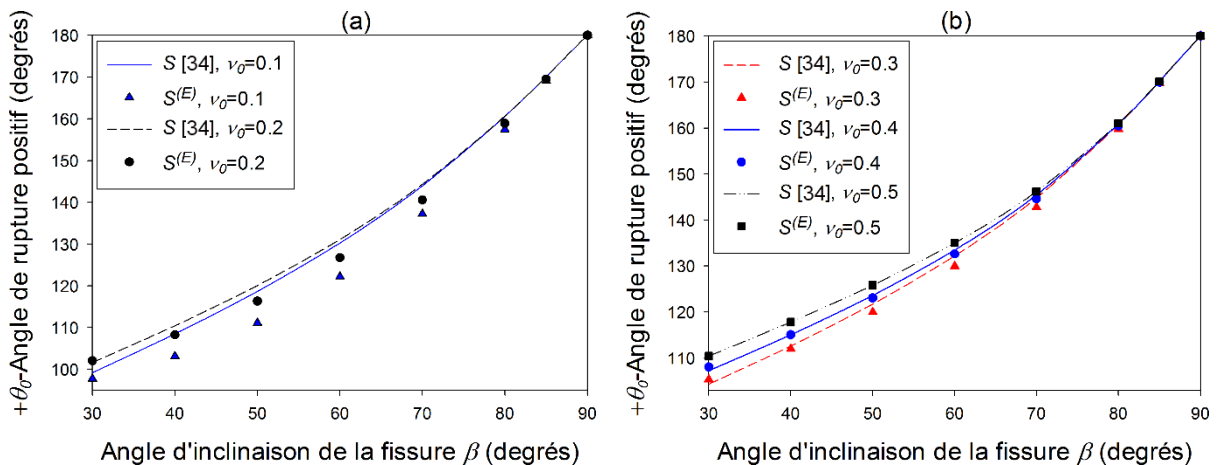


Fig. II-8 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($+ \theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en compression uniaxiale (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.

II.4.2. Chargement en cisaillement pur

L'angle initial de la croissance de la fissure en cisaillement pur est déterminé à partir de l'équation suivante, obtenue en combinant les Eqs. (II.2), (II.8) et (II.9):

$$(2\nu_0 - 1)\cos(4\beta - \theta)\sqrt{4\cos(4\beta - 2\theta) + 2\cos 2\theta + 4\cos 4\beta + 6} + \sin 2\theta - \sin(4\beta - 2\theta) = 0 \quad (\text{II.14})$$

Quatre solutions découlent de la résolution numérique de l'Eq. (II.14) à l'aide du logiciel Maple. Comme dans le cas des chargements en traction et en compression uniaxiales illustrées sur la Fig. II-3 (section II.4.1.), seules deux solutions correspondent aux valeurs

minimales $S_{\min}^{(E)}$ de $S^{(E)}$, c'est-à-dire les solutions remplissant la condition $\left. \frac{\partial^2 S^{(E)}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0$

indiquée dans l'Eq. (II.9). Parmi les solutions qui remplissent cette condition, la valeur négative de θ_0 qui correspond au cas du chargement en cisaillement pur indiquée sur la Fig. II-9a, et la valeur positive de θ_0 correspond au cas du chargement en cisaillement pur indiquée sur la Fig. II-9b [38].

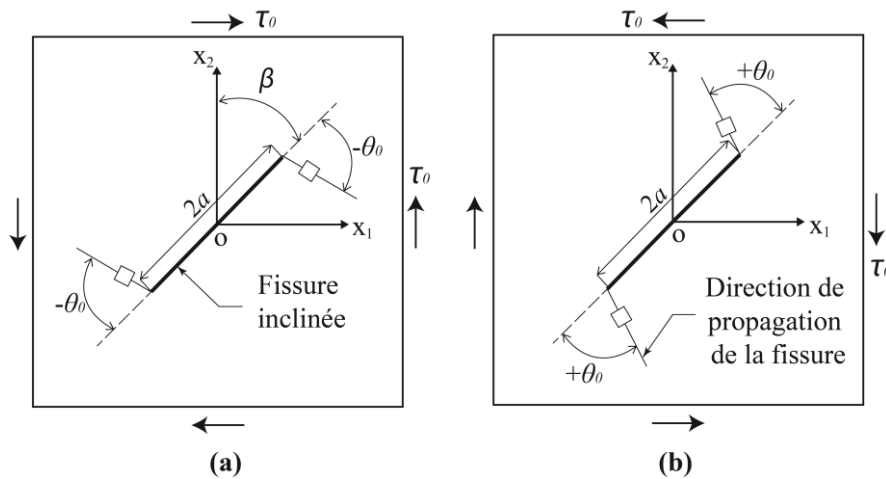


Fig. II-9 Fissure inclinée soumise à un cisaillement pur (a) angle de rupture négatif
(b) angle de rupture positif.

Afin d'évaluer la pertinence de notre critère sous chargement en cisaillement pur, une comparaison avec les différents critères théoriques et les résultats expérimentaux rapportés par [130] est illustrée sur la Fig. II-10, en terme de l'angle de direction de propagation de la fissure θ_0 en fonction de β . Les données expérimentales utilisées comme références sont celles obtenues par Ewing et Williams [130] qui ont fait des essais de cisaillement en utilisant des échantillons de polyméthylméthacrylate (PMMA), dans la configuration illustrée sur la Fig. II-9a. Le coefficient de Poisson du matériau testé est de $1/3$. Il est à noter que les points expérimentaux affichent une très grande dispersion et aucun modèle ne décrit rigoureusement bien leur allure pour $0^\circ < \beta < 45^\circ$. Cependant, pour $45^\circ < \beta < 90^\circ$ ces points sont mieux décrits par le critère $S^{(E)}$, avec une divergence moyenne de 7,44% (Eq. (II.13)), comme indiqué à la Fig. II-10 et Tab. II.2, ce qui renforce la validité du modèle proposé. Il faut noter qu'il est très difficile de respecter expérimentalement les conditions aux limites de cisaillement pur, d'où les grandes dispersions observées sur les résultats expérimentaux de Ewing et Williams [130].

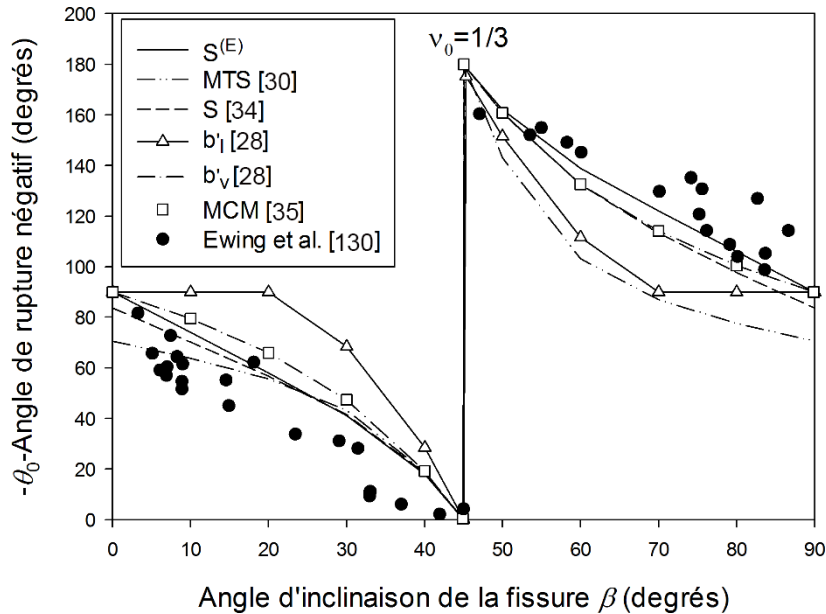


Fig. II-10 Comparaison des prédictions des critères théoriques de rupture avec les données expérimentales, sous un chargement en cisaillement pur, pour $\nu_0 = 1/3$.

Div. (%) (Eq. (29))						
Criteria	$S^{(E)}$	MTS [30]	S [34]	b'_I [28]	b'_V [28]	MCM [35]
PMMA [130]	7.44	28.95	12.71	20.13	10.82	10.82

Tab. II.2 Divergence moyenne en % sous un chargement en cisaillement pur, pour $45^\circ < \beta < 90^\circ$.

Les valeurs négatives et positives des angles de rupture initiaux θ_0 résultant de l'Eq. (II.14) sont tracées en fonction de l'angle d'inclinaison β , sur les Fig. II-11 et Fig. II-12, pour plusieurs valeurs du coefficient de Poisson ν_0 . Les prédictions fournies par le critère SED développé par Sih [34] sont également présentées sur ces figures à des fins de comparaison. Comme pour le cas de chargement en traction uniaxiale (Fig. II-8), les résultats concordent bien, en particulier en ce qui concerne $\nu_0 > 0.2$. En effet, la divergence maximale obtenue pour $\nu_0 > 0.2$ est de 10,1% pour les valeurs négatives, et de 23,2% pour les valeurs positives. Il convient également de noter que les angles de croissance des fissures à $\beta = 0^\circ$ et à 90° sont similaires, ce qui renforce à nouveau la validité du critère proposé [38].

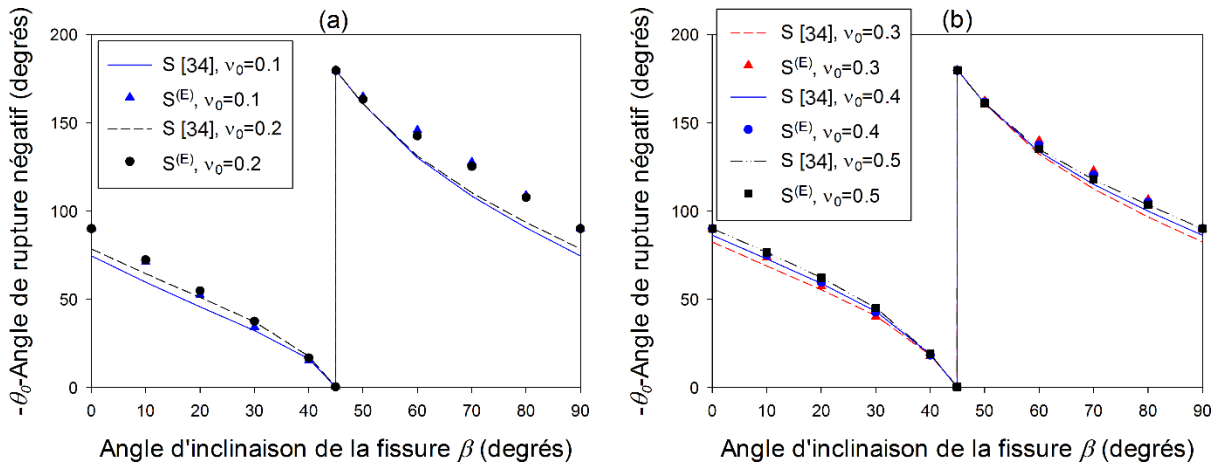


Fig. II-11 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($-\theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en cisaillement pur (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.

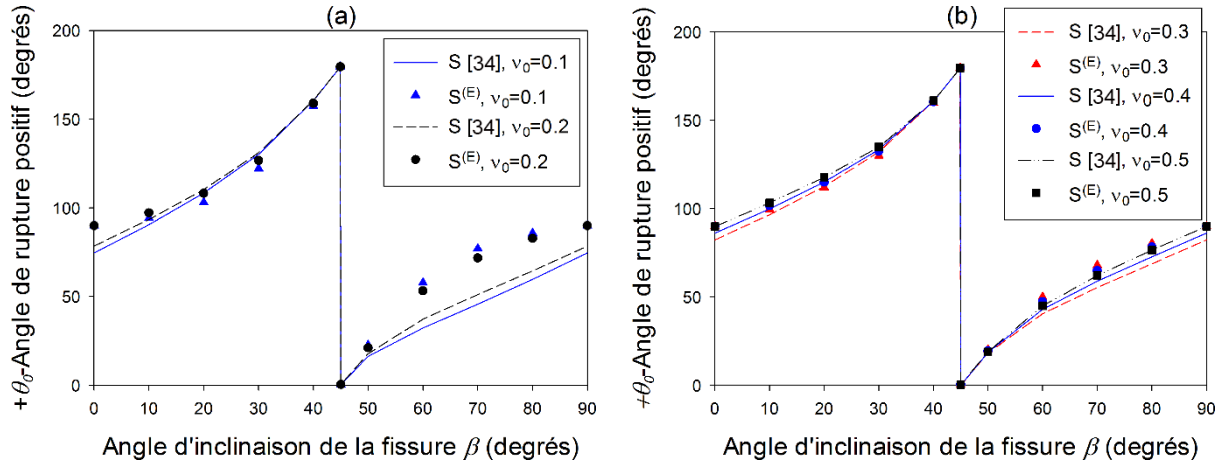


Fig. II-12 Variation de l'angle d'extension de la fissure ($+\theta_0$) en fonction de l'angle β , sous un chargement en cisaillement pur (a) $0.1 \leq \nu_0 \leq 0.2$ (b) $0.3 \leq \nu_0 \leq 0.5$.

II.5. Valeur critique comme critère d'initiation de fissure

La valeur critique de $S^{(E)}$ pourrait représenter une propriété intrinsèque du matériau, c'est-à-dire qu'elle ne pourrait dépendre que du comportement du matériau. Si elle est vérifiée expérimentalement, cette valeur pourrait être utilisée comme un critère d'initiation des fissures, c'est-à-dire la résistance à la rupture du matériau. Dans le but de vérifier cette hypothèse, les valeurs critiques $S_{cr(\min)}^{(E)}$ et $S_{cr(\max)}^{(E)}$ de $S_{cr}^{(E)}$ (Eq. (II.10)) qui correspondent aux différentes charges de rupture résultant des essais de traction uniaxiale réalisés sur l'alliage d'aluminium [128], sont rapportées en fonction de β sur les Fig. II-13 et Fig. II-14, respectivement. Les écart-types représentés par des barres d'erreurs sur ces figures, ont été évalués à partir de deux essais minimum pour chaque orientation initiale des fissures. La ligne horizontale en pointillés correspond à la valeur critique moyenne. On peut observer que l'écart des valeurs de $S_{cr(\max)}^{(E)}$ par rapport à la valeur critique moyenne est faible, en comparaison à son homologue $S_{cr(\min)}^{(E)}$. Comme le montre Fig. II-14, les valeurs de $S_{cr(\max)}^{(E)}$ pourrait être considérées comme demeurant essentiellement constantes. Ces résultats suggèrent que $S_{cr(\max)}^{(E)}$ est plus pertinent que

$S_{cr(\min)}^{(E)}$ à représenter un critère d'initiation de fissure, c'est-à-dire un paramètre représentatif de la résistance à la rupture du matériau.

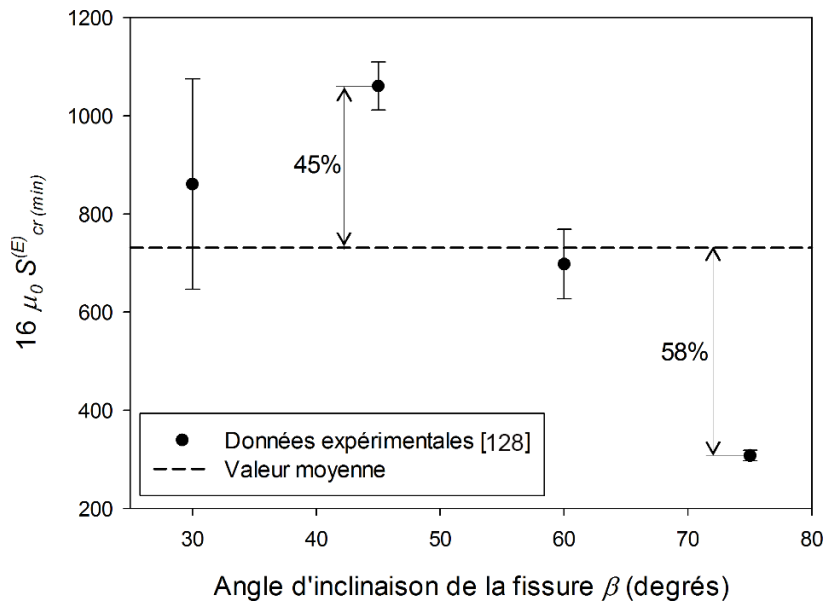


Fig. II-13 Valeurs critiques $16 \mu_0 S_{cr(\min)}^{(E)}$ en fonction de l'orientation initiale de la fissure β , pour un alliage d'aluminium en traction uniaxiale.

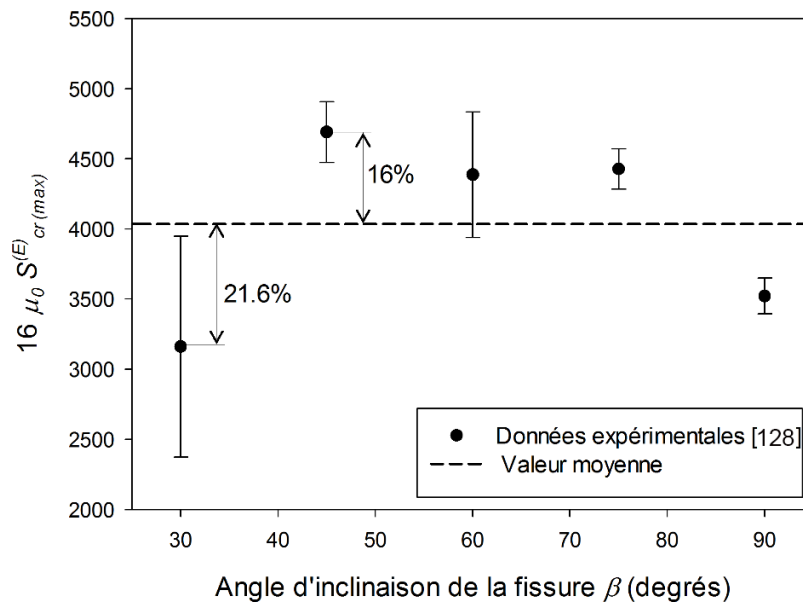


Fig. II-14 Valeurs critiques $16 \mu_0 S_{cr(\max)}^{(E)}$ en fonction de l'orientation initiale de la fissure β , pour un alliage d'aluminium en traction uniaxiale.

II.6. Bilan du Chapitre II

À travers cette étude, un nouveau modèle a été proposé pour prédire l'initiation et la direction de propagation de la fissure. Sa capacité prédictive est évaluée par comparaison avec des données expérimentales issues de la littérature. Le modèle est développé dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) et sous un chargement en mode mixte (I/II). Il est basé sur un paramètre de la densité d'énergie de déformation (SED), exprimé en fonction des contraintes principales du tenseur de contrainte d'Eshelby, b'_I et b'_{II} . Une des caractéristiques principale de ce paramètre est la prise en compte de l'effet du coefficient de Poisson du matériau.

On a constaté que la direction dans laquelle le paramètre SED atteint son minimum $S_{\min}^{(E)}$ coïncide globalement avec la direction de propagation de la fissure. Les résultats ont été comparés avec des prédictions théoriques et des données expérimentales extraites de la littérature, pour plusieurs valeurs du coefficient de Poisson et dans différentes conditions de chargement. Les résultats démontrent que, comparé aux modèles de la littérature, notre modèle fournit des prévisions proches des données expérimentales, ce qui indique que le critère proposé est le plus approprié pour prédire la direction de propagation des fissures. De plus, il a été montré que la valeur critique maximale $S_{cr(\max)}^{(E)}$ du paramètre SED semble adéquate pour représenter un critère d'initiation de fissure, c'est-à-dire un paramètre représentatif de la résistance à la rupture du matériau.

En perspective, le modèle proposé pourra être étendu pour le cas des matériaux élastomères, en utilisant une densité d'énergie de déformation et des champs élastostatiques (contraintes et déplacements/déformation), qui reproduisent le comportement mécanique en grandes déformations. Dans le prochain chapitre, nous présentons une nouvelle approche qui permet de déterminer les champs asymptotiques

de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe des fissures, pour des matériaux à comportement hyperélastiques.

Chapitre III Analyse asymptotique des champs élastostatiques en hyperélasticité isotrope

Dans cette partie du travail, des expressions des champs de contraintes et de déplacements au voisinage du fond de fissure ont été développées, dans le cas d'un matériau néo-Hookéen quasi-incompressible et isotrope. En effet, l'équation constitutive a été linéarisée, de sorte que le tenseur des contraintes de Cauchy puisse être écrit comme la somme de deux composantes : la réponse linéaire, représentée par la loi de Hooke, et la réponse non linéaire. Sur la base de cette décomposition, une analyse asymptotique a été menée, conduisant à des équations de champs de contraintes et de déplacements, dont les termes d'ordre zéro correspondent à ceux de la MLER. La validité de la théorie proposée a été vérifiée numériquement dans le cas d'un problème de fissuration en mode I, en utilisant la méthode des éléments finis (MEF).

III.1. Introduction

La rupture dans un solide par fissuration est régie par les champs de contraintes et de déplacements (déformations) au voisinage de la pointe de la fissure, et par des paramètres qui décrivent la résistance du matériau à la croissance de la fissure. Par conséquent, les champs asymptotiques jouent un rôle central dans le développement de critères efficaces et la modélisation des processus de rupture des matériaux et des structures.

L'étude de la rupture des élastomères est un domaine en pleine expansion. En effet, les phénomènes mis en jeu font apparaître de multiples difficultés liées, d'une part, à la fissuration (discontinuité du déplacement, singularité des champs de déformations et de contraintes en pointe de fissure, difficulté de maillage, solutions analytiques très limitées, etc), et, d'autre part, au comportement du matériau (grandes transformations, non-linéarités matérielles et géométriques, incompressibilité, etc).

Pour les matériaux élastomères présentant un comportement hyperélastique, la plupart des solutions analytiques décrivant le champ élastostatique existant dans la littérature sont formulées dans la configuration de référence. En effet, les conditions aux limites sont introduites sur le premier tenseur de Piola-Kirchhoff (PK1), ce qui ne reflète pas la réalité d'une structure déformée. Bien que les conditions aux limites en charge relative à la surface libre des lèvres de la fissure ont été bien établies dans la théorie MLER, où il n'est pas nécessaire de distinguer les configurations de référence et déformée, en raison des petites déformations. Cependant, dans le cas des grandes déformations, les conditions aux limites liées à la configuration déformée doivent être adaptées en permanence pour chaque déplacement/contrainte imposé.

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle approche permettant de déterminer les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe de la fissure, dans la configuration déformée, pour des matériaux hyperélastiques néo-

Hookéen, quasi-incompressibles et isotropes. Nous avons utilisé une équation constitutive adaptée aux caoutchoucs, basée sur le modèle compressible d'Ogden. La nouveauté de cette méthode réside, dans la formulation des conditions aux limites dans la configuration déformée, contrairement aux méthodes reportées dans la littérature qui utilisent des conditions aux limites dans la configuration de référence. De plus, l'un des principaux avantages que procure la théorie proposée est qu'il suffit de connaître le module de Young et le coefficient de Poisson pour calculer les champs de contraintes et de déplacements à proximité d'une pointe de fissure. Enfin, les résultats de cette approche pourraient être utilisés pour l'élaboration d'un critère de rupture précis, et pour une vérification rapide de la validité des calculs complexes par éléments finis.

III.2. Formulation du problème

III.2.1. Linéarisation de l'équation constitutive néo-Hookéenne

Dans cette étude, on s'intéresse au champ de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe de fissure en grandes déformations, dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes.

On considère un solide néo-Hookéen compressible et isotrope dont le comportement est décrit par la loi de Ogden [61] :

$$W^{NH} = \frac{\mu_0}{2}(I_1 - 3) - \mu_0 \ln J + \frac{\lambda_0}{2}(J - 1)^2 \quad (\text{III.1})$$

où $\mu_0 > 0$ et $\lambda_0 > 0$ sont les constantes de Lamé, $J = \det \mathbf{F}$ est le Jacobien, I_1 est le premier invariant principal du tenseur des dilatations de Green-Cauchy $\mathbf{C} (= \mathbf{F}^T \mathbf{F})$, et \mathbf{F} est le tenseur du gradient de déformation.

En utilisant l'Eq. (I.63), le tenseur du gradient de déformation peut être exprimé en termes de vecteur de déplacement, $\mathbf{u}(\mathbf{X})$, comme suit :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \mathbf{H} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (\text{III.2})$$

\mathbf{H} désigne le tenseur du gradient de déplacement, avec $\|\mathbf{H}\| \ll 1$ en élasticité linéaire, et \mathbf{I} le tenseur identité.

À partir de l'Eq. (I.14), le tenseur de déformation infinitésimal peut être exprimé comme suite :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (\text{III.3})$$

La contrainte nominale ou le premier tenseur PK1 (Eq. (I.70)) est lié à la densité d'énergie de déformation (Eq. (III.1)) par :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W^{NH}}{\partial \mathbf{F}^T} = \mu_0 \mathbf{F}^T + [\lambda_0 (J - 1) J - \mu_0] \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{III.4})$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P} = \frac{\mu_0}{J} (\mathbf{B} - \mathbf{I}) + \lambda_0 (J - 1) \mathbf{I} \quad (\text{III.5})$$

On rappelle aussi que, \mathbf{B} est le tenseur des dilatations Cauchy-Green gauche (cf. l'Eq. (I.65)).

Le Jacobien J peut être écrit en termes du tenseur \mathbf{H} comme suit (voir l'annexe A) :

$$J = 1 + \text{tr} \mathbf{H} + \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{H})^2 - \text{tr}(\mathbf{H}^2)] + \det \mathbf{H} \quad (\text{III.6})$$

En outre, le tenseur des dilatations Cauchy-Green gauche peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \quad (\text{III.7})$$

Nous supposons que le milieu est quasi-incompressible. La linéarisation de l'Eq. (III.6) conduit donc à :

$$J \approx 1 + \text{tr} \mathbf{H} + o(\text{tr} \mathbf{H}) \quad (\text{III.8})$$

où $\text{tr} \mathbf{H} \ll 1$.

En substituant les Eqs. (III.7) et (III.8) dans Eq. (III.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \lambda_0 \text{tr}(\mathbf{H}) \mathbf{I} - \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T) \text{tr}(\mathbf{H}) + \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}^T \\ &= \boldsymbol{\sigma}^\ell - \boldsymbol{\sigma}^{n\ell}, \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

où le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \lambda_0 \text{tr}(\mathbf{H}) \mathbf{I}$ représente le tenseur des contraintes de Cauchy décrivant la réponse élastique linéaire du matériau (loi de Hooke). Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^{n\ell} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T) \text{tr}(\mathbf{H}) - \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ correspond à la partie non-linéaire de la réponse mécanique du matériau. Il convient de noter que le terme $\boldsymbol{\sigma}^{n\ell}$ ne dépend pas de la compressibilité du matériau, c.-à-d. de λ_0 .

III.2.2. Equation d'équilibre

La définition de l'équation d'équilibre dans la configuration de référence est une approche standard. Cependant, dans la pratique, la distribution du champ contrainte-déplacement/déformation dans la configuration déformée est plus pertinente pour analyser des comportements en grande déformation et de croissance des fissures [131]. Il est à noter que l'équation d'équilibre peut être développée soit dans la configuration de référence via le tenseur des contraintes nominales c.-à-d. PK1 [132], soit dans la configuration déformée en utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy [52]. Afin de

prendre en compte plus facilement la quasi-incompressibilité, nous avons résolu les équations d'équilibre dans la configuration déformée comme dans [52]. Notez que la détermination du champ de déplacement reste un sujet complexe, puisque le problème est hautement non linéaire, et la propriété de la compressibilité rend plus difficile la résolution des équations d'équilibres. Dans ce cas, l'utilisation d'outils numériques devient indispensable [56].

En l'absence de forces du volume, l'équation d'équilibre est donnée dans la configuration déformée par [52]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (\text{III.10})$$

La substitution de l'Eq. (III.9) dans l'Eq. (III.10) conduit à :

$$\mu_0 \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda_0 + \mu_0) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{nl} \quad (\text{III.11})$$

Lorsque le membre droit de l'Eq. (III.11) est nul, on retrouve l'équation standard de Lamé, qui est l'équation de base de l'élasticité linéaire.

L'expansion asymptotique du vecteur de déplacement peut être donnée sous la forme [132]:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} \quad (\text{III.12})$$

où $\mathbf{u}^{(0)}$ correspond au terme de l'expansion asymptotique qui est défini par la théorie MLER, développé au second ordre [17], et le vecteur $\mathbf{u}^{(1)}$ est une perturbation du vecteur $\mathbf{u}^{(0)}$.

Dans un premier temps, l'Eq. (III.11) peut être résolu en supposant que :

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)} \quad (\text{III.13})$$

En d'autres termes, le tenseur couplé du second ordre $\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)}$ est négligé. $\mathbf{H}^{(0)}$ est lié au vecteur de déplacement qui est fourni par la théorie MLER ; $\mathbf{H}^{(1)}$ est lié au vecteur de

déplacement $\mathbf{u}^{(1)}$ qui peut être déterminé en résolvant l'Eq. (III.11) dans le cadre des conditions aux limites en traction.

En substituant l'Eq. (III.13) dans l'Eq. (III.9), le tenseur de contrainte élastique linéaire peut s'écrire comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^{(0)\ell} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)\ell} \quad (\text{III.14})$$

où $\boldsymbol{\sigma}^{(0)\ell} = \mu_0 (\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(0)T}) + \lambda_0 \text{tr}(\mathbf{H}^{(0)}) \mathbf{I}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(1)\ell} = \mu_0 (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(1)T}) + \lambda_0 \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)}) \mathbf{I}$ sont des tenseurs linéaires en termes de $\mathbf{H}^{(0)}$ et $\mathbf{H}^{(1)}$, respectivement.

L'expansion du tenseur $\boldsymbol{\sigma}^{n\ell}$ en termes de $\mathbf{H}^{(0)}$ et $\mathbf{H}^{(1)}$ en utilisant l'approximation de l'Eq. (III.13), conduit à (voir l'annexe B):

$$\boldsymbol{\sigma}^{n\ell} \approx \boldsymbol{\Sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \quad (\text{III.15})$$

Les tenseurs $\boldsymbol{\Sigma}^{(0)}$ et $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$ sont liés aux non-linéarités des états $^{(0)}$ et $^{(1)}$, respectivement. L'interaction entre ces deux états est représentée par le tenseur $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}$.

En substituant les Eqs. (III.12) et (III.15) dans l'Eq (III.11), on obtient :

$$\mu_0 \nabla \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda_0 + \mu_0) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \approx \nabla \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(2)}) \quad (\text{III.16})$$

En déformations planes, l'Eq. (III.15) pourrait être écrite en coordonnées polaires (r, θ, z) , comme suit :

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{n\ell} \right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{rr}^{(i)} & \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{r\theta}^{(i)} & 0 \\ \text{sym} & \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{\theta\theta}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{zz}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (\text{III.17})$$

où $\theta \in]-\pi, \pi[$, $r \in]0, \infty[$ et $z \in]0, h[$ avec h est l'épaisseur de la plaque.

Le vecteur de déplacement inconnu $\mathbf{u}^{(1)}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}^{(1)} = u_r^{(1)}(r, \theta) \mathbf{e}_r + u_\theta^{(1)}(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (\text{III.18})$$

La substitution des Eqs. (III.17) et (III.18) dans l'Eq. (III.16) conduit aux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (2\mu_0 + \lambda_0) \left(\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(1)}}{r^2} \right) + \mu_0 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{r^2 \partial \theta^2} + (\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{r \partial r \partial \theta} - (3\mu_0 + \lambda_0) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} \\ = \frac{\partial \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{r\theta}^{(i)}}{r \partial \theta} + \frac{\sum_{i=0}^{i=2} (\Sigma_{rr}^{(i)} - \Sigma_{\theta\theta}^{(i)})}{r}, \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r^2} \right) + (2\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{r^2 \partial \theta^2} + (\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{r \partial r \partial \theta} + (3\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_r^{(1)}}{r^2 \partial \theta} \\ = \frac{\partial \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r \partial \theta} + \frac{2}{r} \sum_{i=0}^{i=2} \Sigma_{r\theta}^{(i)}. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Sur la base de l'approximation du premier ordre du champ de déplacement, les deuxièmes membres des Eqs. (III.19) et (III.20) peuvent être négligés, de sorte que l'on obtienne le système suivant :

$$(2\mu_0 + \lambda_0) L u_r^{(1)} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{r^2 \partial \theta^2} + (\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{r \partial r \partial \theta} - (3\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{r^2 \partial \theta} \approx 0 \quad (\text{III.21})$$

$$\mu_0 L u_\theta^{(1)} + (2\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{r^2 \partial \theta^2} + (\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{r \partial r \partial \theta} + (3\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_r^{(1)}}{r^2 \partial \theta} \approx 0 \quad (\text{III.22})$$

où $L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$ est un opérateur différentiel linéaire.

D'autres versions du système d'équations différentielles analogues aux Eqs. (III.21) et (III.22) ont été obtenus dans la littérature, par exemple [133]. En effet, les Eqs. (III.21) et (III.22) sont similaires à celles rapportées dans [133] où les expressions générales ont été obtenues en utilisant les transformée de Hankel et de Fourier sur les équations de Navier. Les coefficients des séries de Fourier ont été déduits à partir des conditions aux

limites appropriées. Il est intéressant de noter que, les fonctions de Bessel [133] ne semblent pas être des solutions élémentaires des Eqs. (III.21) et (III.22). Par conséquent, l'utilisation de la transformée de Hankel pour ces équations ne permet aucune simplification. Nous proposons une solution simplifiée qui a une signification physique (voir Section III.3.).

III.3. Problème de fissuration en mode I

Les Eqs. (III.21) et (III.22) seront résolues dans le cadre du problème des fissures en mode I. Dans ce cas, les charges appliquées sont symétriques par rapport au plan de fissuration, et les surfaces de la fissure sont sans traction (libre). Nous considérons une éprouvette de matériau hyperélastique, contenant une fissure centrale et soumise à un déplacement uniforme Δ , à l'infini. Nous considérerons également les conditions aux limites de ce problème asymptotique dans la configuration déformée. Pour des raisons de clarté, nous utilisons les notations standards de la théorie de l'hyperélasticité, comme le montre la Fig. III-1. Le vecteur de position dans la configuration de référence est désigné par $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3$, où $\mathbf{E}_i (i=1,2,3)$ un ensemble de vecteurs unitaires orthogonaux qui sont associés aux trois coordonnées \mathbf{X}_i (Fig. III-1a). Le vecteur de position dans la configuration déformée est indiqué par $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$, où $\mathbf{e}_i (i=1,2,3)$ un ensemble de vecteurs unitaires orthogonaux qui sont associés aux trois coordonnées \mathbf{x}_i (Fig. III-1b). (R, Θ, Z) et (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques d'une particule respectivement dans la position de référence et la position déformée. Dans cette étude, les champs de contraintes et de déplacements sont donnés en coordonnées polaires r , θ et z . Dans les ouvrages publiés, les transformations géométriques $r = q(R, \Theta, Z)$, $\theta = h(R, \Theta, Z)$ et $z = p(R, \Theta, Z)$ ne sont pas données de manière explicite [134,132], sauf dans [52] où un modèle hyperélastique non standard a été utilisé.

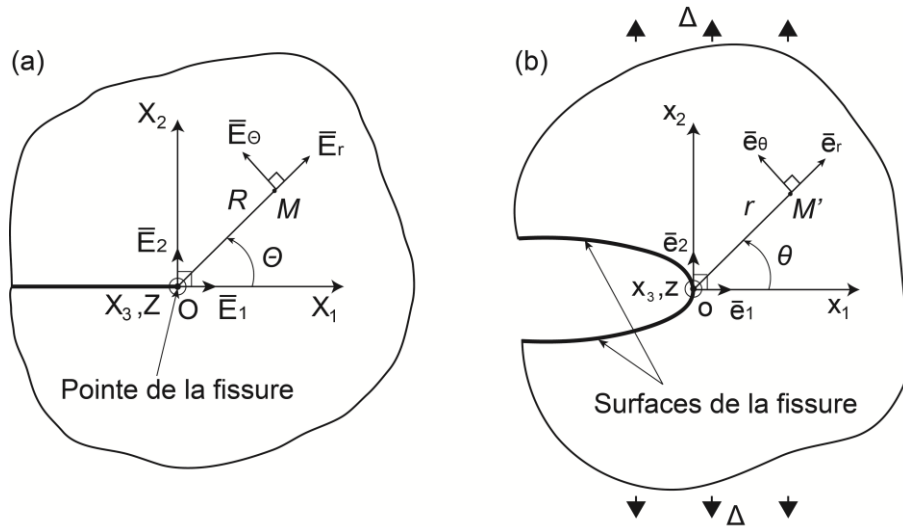


Fig. III-1 Système de coordonnée cartésienne et polaire à la pointe de la fissure (a) dans la configuration de référence (b) dans la configuration déformée. Δ est le déplacement uniforme appliqué dans la direction x_2 .

III.3.1. Calcul du champ de déplacement au voisinage de la pointe de la fissure

En utilisant l'Eq. (I.11), le gradient de déformation peut s'écrire en coordonnées polaires (r, θ) sous la forme suivante :

$$\left(\mathbf{H}^{(0)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(0)} \right) & 0 \\ \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(u_r^{(0)} + \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

où les composantes du vecteur de déplacement $\mathbf{u}^{(0)}$ sont fournies par la théorie de la MLER.

Les composantes approximatives du second ordre du vecteur de déplacement dans le système de coordonnées cartésiennes sont données par [135] :

$$\begin{pmatrix} u_x^{(0)} \\ u_y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos(\theta/2) [(\kappa_0 - 1)/2 + \sin^2(\theta/2)] \\ + \frac{T}{8\mu_0} (\kappa_0 - 1) r \cos \theta + O(r^{3/2}) \\ \frac{K_I}{\mu_0} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) [(\kappa_0 + 1)/2 - \cos^2(\theta/2)] \\ - \frac{T}{8\mu_0} (3 - \kappa_0) r \sin \theta + O(r^{3/2}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.24})$$

où T est un terme de contrainte non singulière qui est constant et indépendant de la distance à la pointe de fissure, habituellement appelée la contrainte T . Les composantes $\{u_r^{(0)}, u_\theta^{(0)}\}$ peuvent être déduites par un simple changement de base, en substituant l'Eq. (III.24) dans (I.8).

En mode I, le facteur d'intensité de contrainte K_I et la contrainte T sont donnés par :

$$K_I = S_y \sqrt{\pi a} \quad \text{et} \quad T = S_x - S_y \quad (\text{III.25})$$

où a est la demi-longueur de la fissure, S_x et S_y sont des contraintes uniformes l'infini, appliquées dans la direction x_1 et la direction x_2 , respectivement. Sous un chargement uniaxial, nous avons ($S_x = 0, T = -S_y$).

Nous supposons que le champ des déplacements peut être exprimé par une expansion asymptotique, comme dans le cas linéaire, de sorte que, les composants $u_r^{(1)}(r, \theta)$ et $u_\theta^{(1)}(r, \theta)$ soient présentés comme suit :

$$u_r^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{n=N} a \left(\frac{r}{a}\right)^n f_n(\theta), \quad u_\theta^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{n=N} a \left(\frac{r}{a}\right)^n g_n(\theta) \quad (\text{III.26})$$

où $f_n(\theta)$ et $g_n(\theta)$ sont des fonctions angulaires inconnues à déterminer. On note que $u_z^{(1)} = 0$ en déformations planes.

Afin de caractériser la singularité générée par la présence de la fissure, nous supposons que le développement du premier ordre du champ de déplacement admet la forme suivante :

$$u_r(r,\theta) \approx u_r^{(0)}(r,\theta) + a f_0(\theta), \quad u_\theta(r,\theta) \approx u_\theta^{(0)}(r,\theta) + a g_0(\theta) \quad (\text{III.27})$$

En substituant l'Eq. (III.27) dans les Eqs. (III.21) et (III.22), on obtient les équations différentielles suivantes :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 f_0(\theta)}{\partial \theta^2} - (3\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial g_0(\theta)}{\partial \theta} - (2\mu_0 + \lambda_0) f_0(\theta) = 0 \quad (\text{III.28})$$

$$(2\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 g_0(\theta)}{\partial \theta^2} + (3\mu_0 + \lambda_0) \frac{\partial f_0(\theta)}{\partial \theta} - \mu_0 g_0(\theta) = 0 \quad (\text{III.29})$$

La combinaison des Eqs. (III.28) et (III.29) conduit à :

$$\frac{\partial^4 f_0(\theta)}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 f_0(\theta)}{\partial \theta^2} + f_0(\theta) = 0 \quad (\text{III.30})$$

La solution de l'équation différentielle (III.30) peut être exprimée comme suit :

$$f_0(\theta) = (C_{10} + C_{30} \theta) \sin \theta + (C_{20} + C_{40} \theta) \cos \theta \quad (\text{III.31})$$

où $C_{i=10..40}$ sont les constantes d'intégration qui seront déterminées en utilisant les conditions aux limites (voir Section III.4.3.).

En substituant l'Eq. (III.31) dans l'Eq. (III.28), la fonction $g_0(\theta)$ peut être exprimée comme suit :

$$g_0(\theta) = \left(C_{10} + \theta C_{30} - \frac{\mu_0 + \lambda_0}{3\mu_0 + \lambda_0} C_{40} \right) \cos \theta - \left(C_{20} + \theta C_{40} + \frac{\mu_0 + \lambda_0}{3\mu_0 + \lambda_0} C_{30} \right) \sin \theta + C_{50} \quad (\text{III.32})$$

où la constante d'intégration $C_{50} = 0$ pour satisfaire les équations différentielles (III.28) et (III.29).

III.3.2. Calcul du champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure

En MLER les composantes approximatives du deuxième ordre du tenseur de contraintes sont données, dans le système de coordonnées cartésiennes par [135]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(0)\ell} \\ \sigma_{12}^{(0)\ell} \\ \sigma_{22}^{(0)\ell} \\ \sigma_{33}^{(0)\ell} \\ \nu_0 (\sigma_{11}^{(0)\ell} + \sigma_{22}^{(0)\ell}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + T \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ \nu_0 (\sigma_{11}^{(0)\ell} + \sigma_{22}^{(0)\ell}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.33})$$

on déduit les composantes $\{\sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{r\theta}^{(0)}, \sigma_{\theta\theta}^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)}\}$ en substituant l'Eq. (III.33) dans (I.5).

En utilisant l'Eq. (III.14), les composantes du tenseur de contrainte σ^ℓ s'écrivent comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^\ell \\ \sigma_{r\theta}^\ell \\ \sigma_{\theta\theta}^\ell \\ \sigma_{zz}^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(0)\ell} + \sigma_{rr}^{(1)\ell} \\ \sigma_{r\theta}^{(0)\ell} + \sigma_{r\theta}^{(1)\ell} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)\ell} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)\ell} \\ \sigma_{zz}^{(0)\ell} + \sigma_{zz}^{(1)\ell} \end{pmatrix} \quad (\text{III.34})$$

où les composantes du tenseur de contrainte $\sigma^{(1)\ell}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)\ell} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)\ell} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)\ell} \\ \sigma_{zz}^{(1)\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu_0 H_{rr}^{(1)} + \lambda_0 (H_{rr}^{(1)} + H_{\theta\theta}^{(1)}) \\ \mu_0 (H_{r\theta}^{(1)} + H_{\theta r}^{(1)}) \\ 2\mu_0 H_{\theta\theta}^{(1)} + \lambda_0 (H_{rr}^{(1)} + H_{\theta\theta}^{(1)}) \\ \lambda_0 (H_{rr}^{(1)} + H_{\theta\theta}^{(1)}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.35})$$

Les composantes du gradient de déformation $\mathbf{H}^{(1)}$ en coordonnées polaires, sont données par :

$$\left(\mathbf{H}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(1)} \right) & 0 \\ \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(u_r^{(1)} + \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

En substituant les Eqs. (III.26) et (III.36) dans l'Eq. (III.35), nous calculons les composantes du tenseur de contrainte comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)\ell} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)\ell} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)\ell} \\ \sigma_{zz}^{(1)\ell} \end{pmatrix} = \frac{2a\mu_0}{(3\mu_0 + \lambda_0)r} \begin{pmatrix} \lambda_0(C_{30} \cos \theta - C_{40} \sin \theta) \\ (2\mu_0 + \lambda_0)(C_{30} \sin \theta + C_{40} \cos \theta) \\ (2\mu_0 + \lambda_0)(C_{30} \cos \theta - C_{40} \sin \theta) \\ -\lambda_0(C_{40} \sin \theta - C_{30} \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Selon la théorie MLER, les contraintes de Cauchy sont proportionnelles à $r^{-1/2}$. Pour le modèle néo-Hookéen compressible, le champ asymptotique de la contrainte de Cauchy sous une charge en mode mixte, est caractérisé par l'apparition de deux termes singuliers R^{-1} et $R^{-1/2}$ [136]. Ces résultats sont cohérents avec les solutions proposées par [50,52,134,137]. Dans le présent travail, le champ asymptotique de Cauchy semble être caractérisé par deux singularités : la première, en $r^{-1/2}$, est en lien avec la théorie de la MLER, et la seconde, en r^{-1} , est induite par la non-linéarité de comportement.

III.3.3. Formulation des conditions aux limites

Les champs élastostatiques ont été bien établis dans la théorie de la MLER. Nous rappelons qu'il n'est pas nécessaire de distinguer la configuration de référence de celle déformée, en raison des petites déformations. Par conséquent, les contraintes doivent satisfaire les conditions aux limites le long des surfaces libres de la fissure [16] :

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \sigma_{r\theta}(r, \theta) = 0 \text{ où } \theta = \pm\pi \text{ en MLER} \quad (\text{III.38})$$

Cependant, dans le cas des grandes déformations, les conditions aux limites de la configuration déformée doivent être actualisées pour un déplacement imposé, c.-à-d. Δ . C'est pourquoi, nous recherchons une relation entre la normale unitaire \mathbf{n} d'un élément matériel dans la configuration déformée, et sa normale unitaire correspondante \mathbf{N} dans la configuration de référence (non déformée) sur les surfaces libres de la fissure. Afin d'établir cette relation, nous utilisons la formule de Nanson [61], sous la forme suivante (voir Eq. (I.69)) :

$$\mathbf{n} ds = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS \quad (\text{III.39})$$

on rappelle que ds et dS sont respectivement, les surfaces dans la configuration déformée et non déformée.

On peut déduire de l'Eq. (III.39) la relation suivante :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{N}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}}} \quad (\text{III.40})$$

Pour satisfaire les conditions aux limites (Eq. (III.38)) sur les surfaces libres de la fissure (Fig. III-2), nous pouvons utiliser les conditions suivantes sur les tenseurs des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \tilde{\Gamma}_n \Leftrightarrow \mathbf{P} \mathbf{N} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_N \quad (\text{III.41})$$

où $\tilde{\Gamma}_n$ et Γ_N sont des arcs réguliers sur la surface libre de la fissure, respectivement, dans les configurations déformée et de référence.

Ce résultat fondamental indique que des conditions aux limites peuvent être appliquées de manière équivalente sur la géométrie non déformée sans connaissance a priori de la déformation [57].

Dans ce travail, nous considérons les conditions aux limites en utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy, de sorte que le gradient de déformation de l'Eq. (III.40) devrait être évalué localement à l'aide d'essais expérimentaux. Une tâche ardue, compte tenu du caractère fortement hétérogène des déformations proches de la pointe de la fissure. Pour nous s'affranchir de cette difficulté, nous utilisons un résultat établi récemment par [138], à l'infini, les conditions aux limites prescrites sur la transformation devrait être compatibles avec les conditions cinématiques (Eq. (I.61) voir chapitre I, sections I.6.1. et I.6.2.) de charge (charge générale en mode mixte) comme suit :

$$\mathbf{x} \approx \overset{\infty}{\mathbf{F}} \mathbf{X} \text{ comme } \|\mathbf{X}\| \rightarrow \infty \quad (\text{III.42})$$

où $\overset{\infty}{\mathbf{F}}$ désigne un tenseur gradient de déformation constant connu qui peut être caractérisé par une combinaison de conditions de charges des modes I et II.

Nous supposons que le gradient de déformation en traction uniaxiale pour un problème de déformations planes est le suivant :

$$\overset{\infty}{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.43})$$

où λ et λ sont les élongations principales macroscopique d'une éprouvette non fissurée, en traction uniaxiale.

Nous considérons une surface de matériau dans un système de coordonnées cartésiennes, où l'hypothèse des déformations planes est prise en compte, comme indiqué sur la Fig. III-2. Des récentes études montrent que la surface de courbure de la fissure dans la configuration déformée est parabolique [97,139]. En nous basant sur ce résultat, nous considérons une surface de matériau au voisinage de la pointe de la fissure, de sorte que les vecteurs unitaires normaux dans la configuration de référence et déformée peuvent être évalués respectivement, comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{N} = (\sin \Theta, \cos \Theta)^T \text{ avec } \Theta \in]-\pi, \pi[\\ \mathbf{n} = (\sin(\tilde{\theta} + \phi), \cos(\tilde{\theta} + \phi))^T \text{ avec } \tilde{\theta} \in]-\pi, \pi[\end{cases} \quad (\text{III.44})$$

L'angle ϕ est introduit dans le but de reproduire le profil parabolique lors de l'ouverture de la fissure, et $\tilde{\theta}$ correspond à la coordonnée polaire de l'élément matériel sur la parabole.

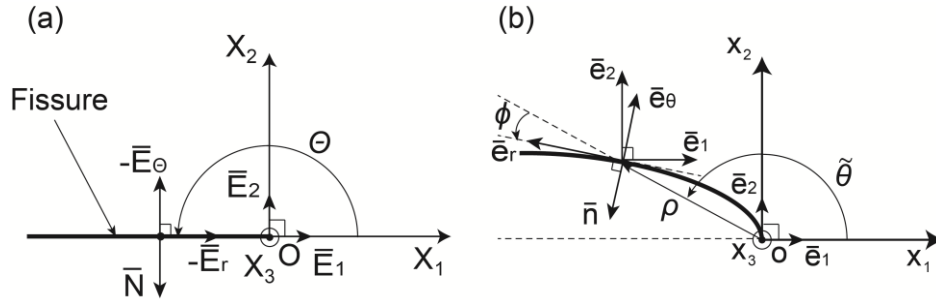


Fig. III-2 Illustrations des conditions aux limites correspondant à la surface libre de la fissure (a) dans la configuration de référence (b) dans la configuration déformée. ρ est un rayon proche de la pointe de la fissure.

En substituant les Eqs. (III.43) et (III.44) dans l'Eq. (III.40) on obtient :

$$\tilde{\theta} + \phi = \text{tg}^{-1}(\lambda \text{tg} \Theta / \Lambda) \quad (\text{III.45})$$

Afin de relier le rétrécissement latéral, c.à.d. Λ à l'étirement λ dans le cadre d'un milieu compressible, on utilise une relation empirique qui a été validée expérimentalement en traction uniaxiale [140] qui s'exprime de la manière suivante :

$$\nu_0 = -\frac{\varepsilon_T = \ln \Lambda}{\varepsilon_\ell = \ln \lambda} \quad (\text{III.46})$$

où ν_0 est le coefficient de Poisson de l'élasticité linéaire, ε_T et ε_ℓ sont respectivement les déformations de Hencky transversale et longitudinale.

Il s'en suit alors

$$\mathcal{A} = \lambda^{-\nu_0} \quad (\text{III.47})$$

Nous précisons que l'Eq. (III.46) semble ne pas être transposable pour des chargements multiaxiaux (traction équi ou biaxiale). En fait, on introduit une fonction de Poisson au lieu du coefficient de Poisson. Par ailleurs, si le milieu est incompressible, c.à.d. $\nu_0 = 0.5$ alors on a $\mathcal{A} = 1/\sqrt{\lambda}$. Contenance du comportement quasi-incompressible du matériau étudié dans ce travail, ν_0 ne doit pas être égal à 0,5.

Pour une valeur donnée de Θ , on peut évaluer $\tilde{\theta}$ en supposant que l'angle ϕ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi = \xi \sqrt{\tilde{\theta}} \quad (\text{III.48})$$

où ξ est un paramètre sous forme d'une fonction ajustable.

Il faut noter que, nous avons considéré l'angle initial d'ouverture de fissure égal à 2 degrés (1 degré entre chaque surface de fissure par rapport l'axe horizontal), c.-à-d. $\Theta = 179$ deg. (Fig. III-2), correspondant approximativement à l'épaisseur d'une lame de rasoir permettant de créer la fissure initiale dans l'éprouvette [85,89].

L'angle $\tilde{\theta}$ peut être déduit en remplaçant les Eqs. (III.47) et (III.48) dans l'Eq. (III.45), et supposant que $m = -\nu_0$:

$$(\tilde{\theta})_1 = \left[\frac{1}{2} \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 4 \operatorname{tg}^{-1}(\lambda^{1-m} \operatorname{tg} \Theta)} \right) \right]^2, (\tilde{\theta})_2 = \left[\frac{1}{2} \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 4 \operatorname{tg}^{-1}(\lambda^{1-m} \operatorname{tg} \Theta)} \right) \right]^2 \quad (\text{III.49})$$

La fonction ξ peut être déduite de l'Eq. (III.49) comme suit :

$$(\xi)_1 = + \frac{-\tilde{\theta} + \operatorname{tg}^{-1}(\lambda^{1-m} \operatorname{tg} \Theta)}{\sqrt{\tilde{\theta}}}, (\xi)_2 = - \frac{-\tilde{\theta} + \operatorname{tg}^{-1}(\lambda^{1-m} \operatorname{tg} \Theta)}{\sqrt{\tilde{\theta}}} \quad (\text{III.50})$$

Deux racines sont obtenues pour $(\tilde{\theta}, \xi)$, puisque les Eqs. (III.45) et (III.49) sont du second degré. Les racines sont évaluées, et la solution est choisie de manière à satisfaire la condition suivante :

$$\tilde{\theta} \geq 1 \text{ deg.}, \text{ pour } \lambda \geq 1 \quad (\text{III.51})$$

Nous trouvons donc deux ensembles de solutions : $(\tilde{\theta}, \xi)_1$ and $(\tilde{\theta}, \xi)_2$.

Il est à noter que des résultats similaires ont été obtenus pour les deux ensembles de solutions, dans cette étude les calculs ont été développés en utilisant la solution $(\tilde{\theta}, \xi)_2$. De plus, la détermination de ξ nécessite l'utilisation d'une analyse par la MEF qui sera présentée dans la prochaine Section.

Une fois l'angle $\tilde{\theta}$ évalué sous des conditions de charge en mode I, on peut appliquer les conditions aux limites du problème asymptotique comme suit :

$$u_\theta(r = \rho, \tilde{\theta} = 0) = 0 \quad (\text{III.52})$$

$$\sigma_{r\theta}(r = \rho, \tilde{\theta}(\Theta, \lambda, m)) = \sigma_{\theta\theta}(r = \rho, \tilde{\theta}(\Theta, \lambda, m)) = 0 \text{ quand } r \rightarrow \rho \quad (\text{III.53})$$

Nous calculons les constantes d'intégration $C_{i=10..40}$ des Eqs. (III.31) et (III.32) en utilisant les Eqs. (III.52) et (III.53) résultant des conditions aux limites. Nous supposons que la constante C_{20} est égale à zéro, ce qui conduit à :

$$\begin{pmatrix} C_{10} \\ C_{30} \\ C_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 + \lambda_0}{3\mu_0 + \lambda_0} C_{40} \\ -\frac{3\sqrt{2}\rho(3\mu_0 + \lambda_0)K_I}{16a\sqrt{\pi}\mu_0(2\mu_0 + \lambda_0)} \left(\cos \frac{\tilde{\theta}}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\tilde{\theta}}{2} \right) \\ \frac{\sqrt{\rho}(3\mu_0 + \lambda_0)}{2a\sqrt{\pi}\mu_0(2\mu_0 + \lambda_0)} \left[T\sqrt{\pi\rho} \sin \tilde{\theta} + \frac{\sqrt{2}K_I}{8} \left(\sin \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin \frac{3\tilde{\theta}}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (\text{III.54})$$

III.4. Analyse par éléments finis

Pour calculer la fonction ξ pour différents déplacements imposés au bord d'une éprouvette, nous avons utilisé la MEF via le logiciel commercial ABAQUS [98]. Cette méthode a également été utilisée pour vérifier la validité des champs élastostatiques proposés dans le présent travail.

III.4.1. Modèle et conditions aux limites

En nous inspirant du travail publié dans [139], nous avons choisi l'échantillon présenté sur Fig. III-3 pour simuler une fissure finie dans un solide infini, sous un chargement uniforme à l'infini, en traction uniaxiale et en déformations planes.

Dans les simulations, les dimensions ont été normalisées par rapport à la longueur de la fissure a , de sorte que $a = 1$ mm ; la largeur et la hauteur sont $w = 10$ mm et $h = 20$ mm, respectivement. En raison de la symétrie de la géométrie et les conditions de charges, seulement un quart de l'échantillon a été modélisé. Un déplacement vertical uniforme $u_2 = \pm\Delta$ a été appliqué sur les faces supérieure et inférieure, ce qui a permis d'obtenir un rapport d'étirement uniforme $\lambda \approx 1 + \Delta/h$ à des distances très proche de l'extrémité de la fissure. Nous notons que les contraintes uniformes sont déduites des résultats numériques.

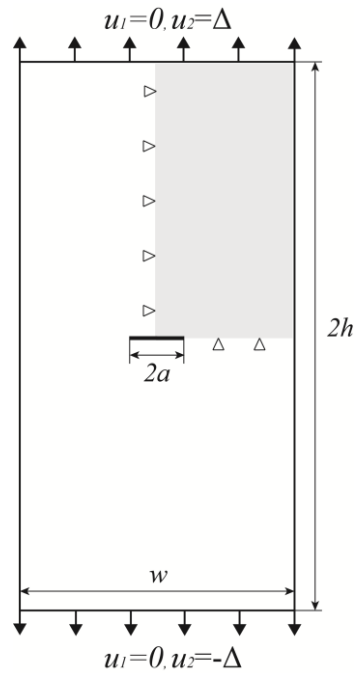


Fig. III-3 Plaque rectangulaire à fissure centrale en traction uniaxiale.

III.4.2. Maillage

Contrairement aux grandes déformations, en petites déformations, seule une région restreinte très proche du fond de fissure est affectée par la singularité de la fissure. Dans tous les cas, un maillage très fin près de la pointe de la fissure est nécessaire. Cependant, l'application des charges importantes génère une déformation excessive des éléments situés au voisinage du fond de fissure. Pour parer ce problème de distorsion des éléments, le maillage a été optimisé en utilisant la procédure dite de sous-modélisation [97]. Nous avons ainsi effectué d'abord une analyse avec un maillage grossier sur la géométrie complète du modèle (Fig. III-4a), puis nous avons réutilisé les résultats du modèle grossier comme conditions aux limites pour un sous-modèle avec un maillage plus fin (voir partie 3, chapitres I). Le maillage raffiné du modèle à la pointe de la fissure est illustré à la Fig. III-4b. La taille de l'élément (e) près de l'extrémité de la fissure est d'environ $e \approx 10^{-2}$ mm.

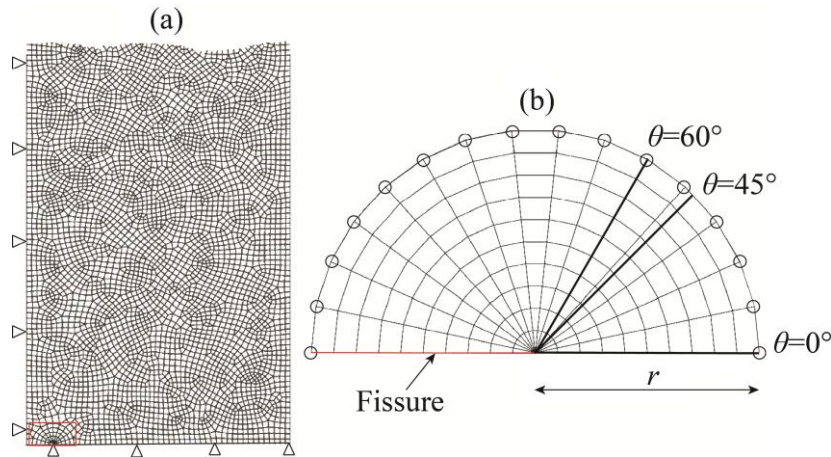


Fig. III-4 (a) Un quart de l'éprouvette avec un maillage grossier soumis à un déplacement vertical uniforme sur le bord supérieur, la zone du sous-modèle ($r = 0.4$ mm) est encadrée **(b)** sous-modèle EF semi-circulaire avec maillage fin. Les lignes en trait fort représentent les chemins suivant lesquels sont extraits les résultats numériques.

Nous avons également utilisé une autre méthode basée sur le remaillage des zones déformées pour surmonter le phénomène de distorsions des éléments au voisinage du fond de fissure. Cependant, contrairement à la méthode de sous-modélisation, la méthode de remaillage rencontre des problèmes de divergence lorsqu'on impose des chargements $\lambda > 1.15$.

III.4.3. Zone cœur dans les matériaux en caoutchouc

Il est maintenant bien reconnu en mécanique de la rupture que les contraintes et les déformations qui deviennent localement très élevées à la pointe de la fissure donneraient lieu à une zone de dommage, appelée zone cœur. En petites déformations, cette zone est très limitée, ce qui permet de supposer qu'elle peut être réduite à un point pour les problèmes plans. L'existence d'une zone cœur à la pointe de la fissure dans les matériaux de type caoutchouc a également été évoquée dans la littérature [85,89]. Nous soulignons qu'une zone cœur délimitée par un cercle de rayon r_c qui est approximativement de

l'ordre de 10^{-2} , a été mise en évidence dans le présent travail, comme illustré sur la Fig. III-5a. En effet, dans cette région entourant la pointe de la fissure soumise à une déformation complexe, la déformation est significativement différente de celles à l'extérieur Fig. III-5b. Par conséquent, les champs de contraintes et de déplacement en fond de fissure dans le modèle numérique, sont évalués en dehors de la zone cœur c.-à-d. pour $r > r_c$.

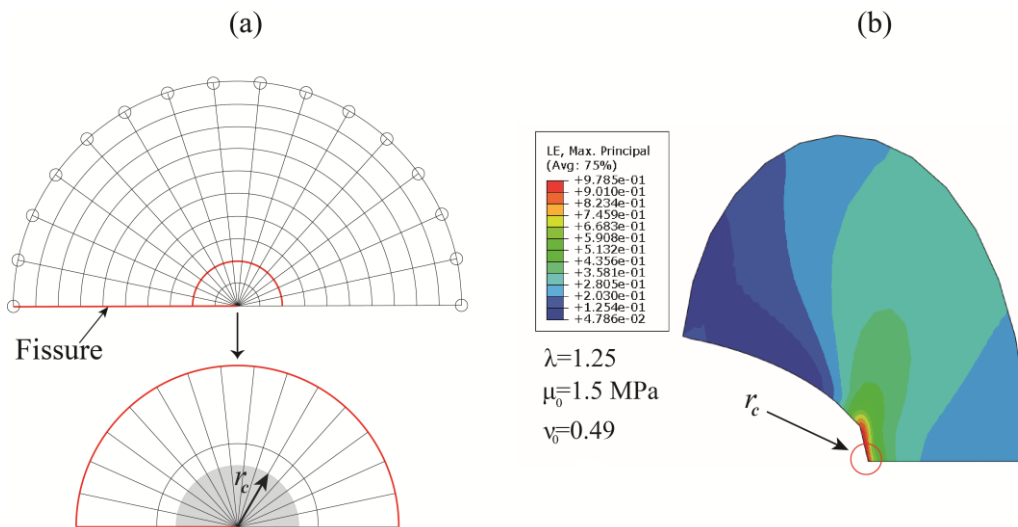


Fig. III-5 (a) Mise en évidence de la zone cœur dans le sous-modèle. (b) variation de la déformation principale maximale logarithmique dans le sous-modèle.

III.4.4. Calcul de l'angle d'ouverture de la fissure

Les élastomères présentent une élasticité réversible non linéaire pour des déformations modérées. Le coefficient de Poisson de ces matériaux est proche de 0,5, mais il n'est jamais égal à 0,5 [141]. En effet, les matériaux élastomères sont des matériaux dits quasi-incompressibles. Typiquement, les valeurs du coefficient de Poisson se situent entre 0,45 et 0,49995 [142].

Dans cette étude, les simulations par éléments finis ont été réalisées sur la base d'un matériau néo-Hookéen quasi-incompressible dont les propriétés sont les suivantes :

$\mu_0 = 1.5, 3, 5$ (MPa) et $\nu_0 = 0.45, 0.49$. Les résultats numériques nous permettent d'évaluer les profils déformés de la fissure (voir Fig. III-6 et Fig. III-7), pour les conditions de charge en mode I, avec $\Theta = 179$ deg. Notez que l'analyse par la MEF a été effectuée pour une extension maximale $\lambda \approx 1.25$.

Pour vérifier l'influence du type de chargement sur le profil déformé de la fissure, une analyse EF a été effectuée en appliquant sur l'échantillon un déplacement $\mathbf{u}_2 = \pm \Delta$ ou une contrainte S_y . Les évolutions des profils obtenus sont rapportées sur les Fig. III-6 et Fig. III-7, respectivement. Les résultats numériques suggèrent que lorsqu'on impose une contrainte S_y , le profil de l'ouverture de la fissure dépend fortement des propriétés du matériau (Fig. III-6). De plus, l'angle d'ouverture de la fissure a tendance à être plus grand pour les matériaux plus mous c.-à-d. $\mu_0 = 1.5$ (MPa) et $\nu_0 = 0.45$. Il faut noter que des résultats similaires ont été obtenus pour d'autres contraintes imposées. Cependant, la situation est différente dans le cas d'un déplacement imposé $\mathbf{u}_2 = \pm \Delta$. En effet, il a été constaté que le profil d'ouverture de la fissure est indépendant des propriétés du matériau (Fig. III-7), quelle que soit la valeur d'étirement appliquée. Ce résultat signifie que les dernières conditions aux limites peuvent être généralisées pour plusieurs types de matériaux élastomériques.

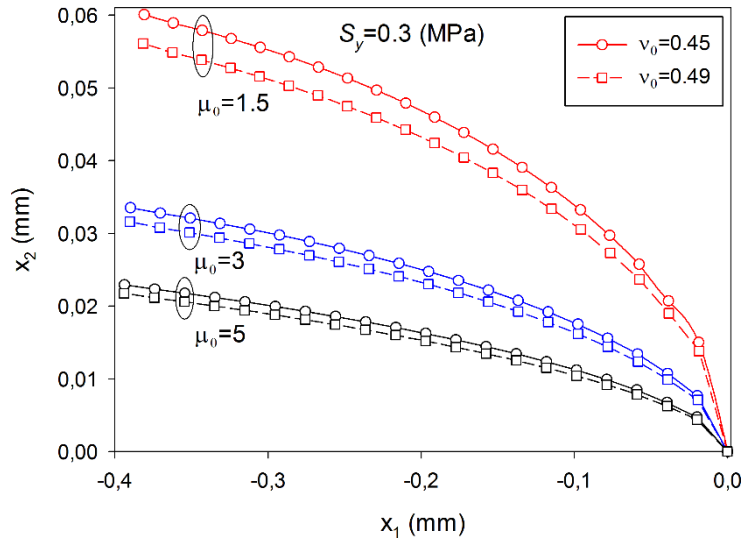


Fig. III-6 Profils de la fissure déformée et leurs ajustements paraboliques pour une contrainte $S_y = 0.5 \text{ MPa}$ appliquée et pour différents μ_0 et ν_0 .

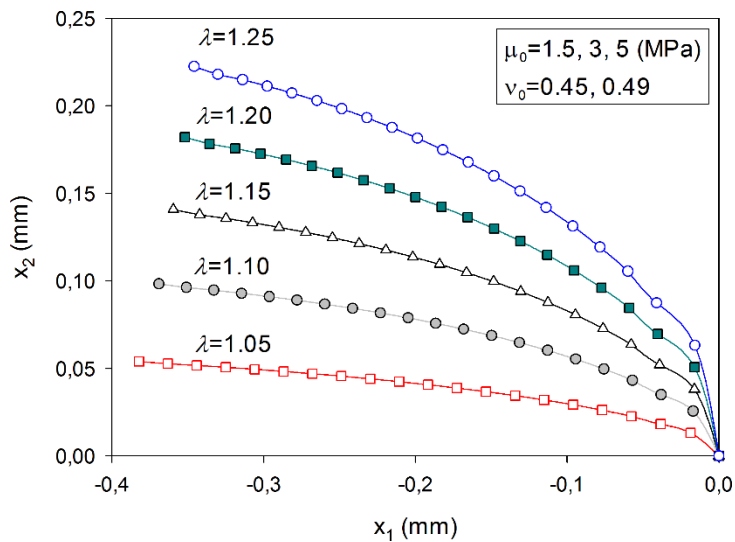


Fig. III-7 Profils de la fissure déformée et leurs ajustements paraboliques pour des niveaux successifs de λ appliqués et pour différents μ_0 et ν_0 .

Sur la base de ces résultats, la fonction ξ a été estimée en déterminant l'angle d'ouverture numérique de la fissure, c.-à-d. $\tilde{\theta}$ pour chaque niveau elongation λ près de la pointe de la fissure. En fait, pour pouvoir s'approcher de l'extrémité de la fissure, le paramètre ρ a été optimisé. En effet, pour un $\rho < 0.02$ mm (très près de l'extrémité de

la fissure), nous avons constaté qu'il existe une divergence entre les résultats de l'EF et ceux prédits analytiquement. De ce fait, le rayon $\rho_c = 0.02$ mm semble représenter une valeur critique pour les conditions aux limites. Par conséquent, l'Eq. (III.50) ne serait valable qu'à l'extérieur de la zone de rayon ρ_c autour de la pointe de la fissure.

Tout d'abord, l'angle d'ouverture de la fissure $\tilde{\theta}$ a été déterminé par la méthode des éléments finis, pour $\rho = 0.02$, $m = -0.49$ et pour cinq valeurs d'étirement λ . Ensuite, le paramètre ξ a été calculé à l'aide de l'Eq. (III.50), pour différentes valeurs de λ , ainsi les points obtenus (ξ, λ) ont été ajustés par la fonction polynomiale suivante, comme le montre la Fig. III-8a :

$$\begin{aligned} \xi(\lambda) = & -5370.582044\lambda^6 + 37312.76212\lambda^5 - 107864.3286\lambda^4 + 166041.7152\lambda^3 \\ & - 143517.7463\lambda^2 + 66023.74481\lambda - 12623.78769 \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

L'équation analytique de $\tilde{\theta}$ peut être déduite en substituant l'Eq. (III.55) dans l'Eq. (III.49), de sorte que les constantes $C_{i=10..40}$ de l'Eq. (III.54) peuvent être déterminées pour différentes charges λ . Enfin, les valeurs numériques de $\tilde{\theta}$ provenant de l'Eq. (III.49) ont été rapportées à Fig. III-8b, en fonction de λ . Cette figure montre que la courbe analytique (Eq. (III.49)) correspond très bien aux points numériques, ce qui renforce la validité de la fonction polynomiale choisie $\xi(\lambda)$ donnée à l'Eq. (III.55).

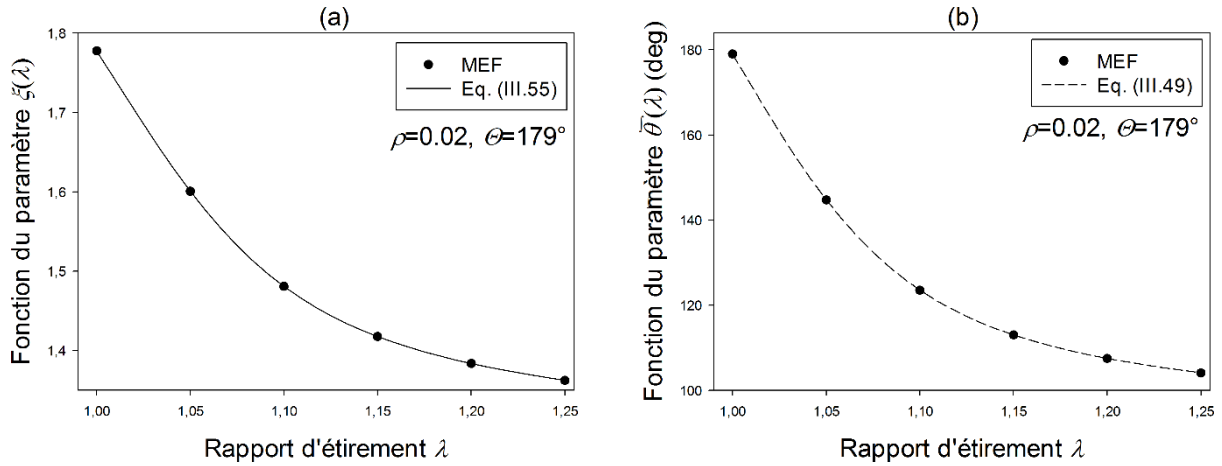


Fig. III-8 Paramètres (a) $\xi(\lambda)$ et (b) $\tilde{\theta}(\lambda)$ en fonction de λ .

III.5. Vérification de la validité des champs de contraintes et de déplacements proposés

Dans cette section, deux aspects ont été mis en évidence. Le premier est la nette différence des champs de contraintes et de déplacements, au voisinage du fond de fissure, issus de la théorie développée dans ce travail et ceux calculés dans le cadre de la MLER. Le second est le bon accord entre les résultats de l'approche proposée et ceux issus des simulations par la MEF.

III.5.1. Comparaison entre l'approche proposée et la théorie de la MLER

Le déplacement normalisé, $U/a = \sqrt{u_r^2 + u_\theta^2}/a$, et la contrainte de Von-Mises normalisée $\sigma_{(VM)}/\mu_0$ (voir annexe C), obtenus avec l'approche proposée dans le présent travail sont reportés, en fonction des résultats issus de la théorie MLER, sur les Fig. III-9a et Fig. III-9b, respectivement, pour $\lambda=1.15$, $\nu_0=0.49$ et $\theta=[0,\pi]$. Ces graphiques montrent qu'il existe une différence majeure entre les deux théories. Cette différence est probablement liée, d'une part, à la non-linéarité du comportement pris en compte dans

le modèle proposé, et, d'autre part, à la limite de validité de la théorie de la MLER pour l'extension $\lambda = 1.15$.

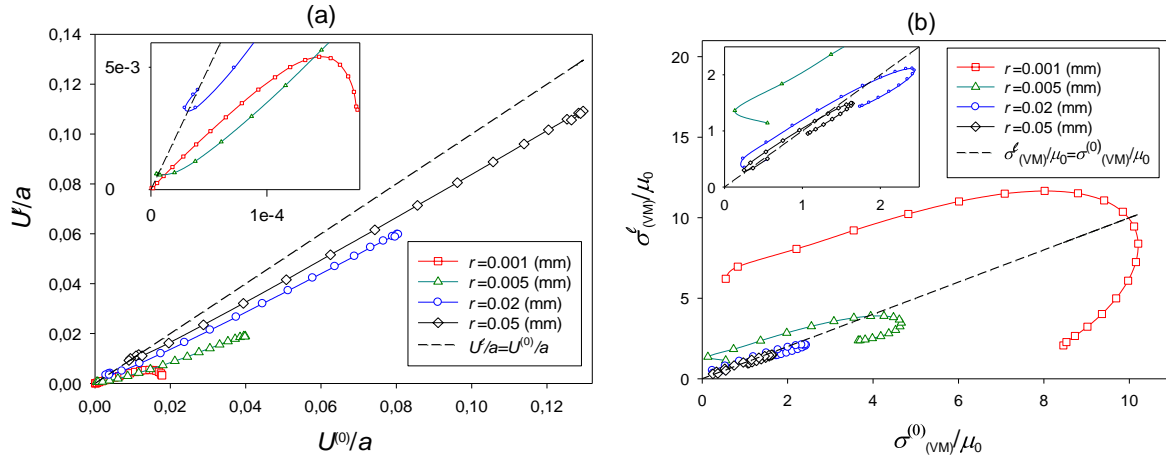


Fig. III-9 (a) Déplacements normalisés U^ℓ/a en fonction des déplacements normalisés $U^{(0)}/a$ (b) contrainte de Von-Mises équivalente normalisée $\sigma_{(VM)}^\ell/\mu_0$ en fonction de la contrainte de Von-Mises équivalent normalisé $\sigma_{(VM)}^{(0)}/\mu_0$.

III.5.1.1. Vérification numérique du modèle

Dans cette partie, les prévisions analytiques issues de ce travail et les résultats de la MEF, en termes de champ de contraintes et de déplacements, sont examinés et comparés. Dans le cadre de la théorie de la MLER, un état de contrainte triaxiale se produit près de l'extrémité de la fissure [89]. Cependant, les résultats théoriques [48,54,143] et expérimentaux [45] ont montré que, pour les matériaux caoutchouteux, les champs de contraintes (ou de déformations) près de l'extrémité des fissures sont presque uniaxiaux. En effet, pour un matériau incompressible néo-Hookéen, Stephenson [60] a montré que la singularité dominante correspond à σ_{22} à l'extrémité de la pointe de la fissure. Par conséquent, cette étude se concentrera sur l'état dominant des contraintes et des déplacements à l'extrémité de la fissure.

Les équations (III.27) et (III.34) ont été utilisées pour calculer le déplacement vertical u_y (suivant la direction du chargement), et la contrainte de Cauchy, σ_{22}^ℓ , pour différentes propriétés du matériau. Les résultats obtenus sont reportés, respectivement, sur les Fig. III-10 et Fig. III-11 et ils sont comparés à ceux issues des simulations numériques. Ces figures montrent un bon accord, avec des écarts raisonnables, entre les prédictions analytiques et les résultats numériques. Les écarts observés sont de plus en plus grand, à mesure que l'on s'éloigne du fond de fissure. Ils atteignent un maximum de 24.1 % pour les déplacements, à un rayon $r = 0.25$ mm. Une influence significative du module de cisaillement μ_0 peut être observée sur la contrainte normale, contrairement au déplacement vertical qui s'avère indépendant de μ_0 . Bien que, les résultats ne sont montrés que pour le cas où le coefficient de Poisson $\nu_0 = 0.49$ et les orientations $\theta = 0, 45, 60^\circ$, les mêmes tendances ont été observées pour un $\nu_0 = 0.45$ et différentes valeurs de θ . Rappelons que pour $\theta = 0$ le déplacement normal est nul, c.-à-d. $u_y(r, \theta = 0) = 0$.

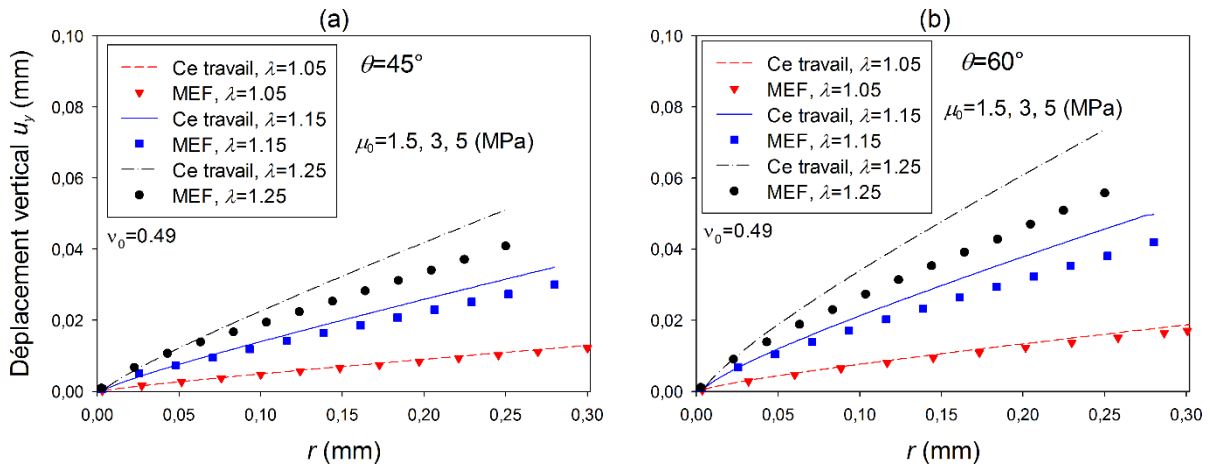


Fig. III-10 Comparaison entre les prédictions du déplacement vertical obtenues à partir des simulations EF, $u_y^{(FEM)}$, et les résultats analytiques, u_y , en fonction du rayon r , pour trois valeurs de μ_0 et à différents niveaux successifs de λ (a) $\theta = 45^\circ$ (b) $\theta = 60^\circ$.

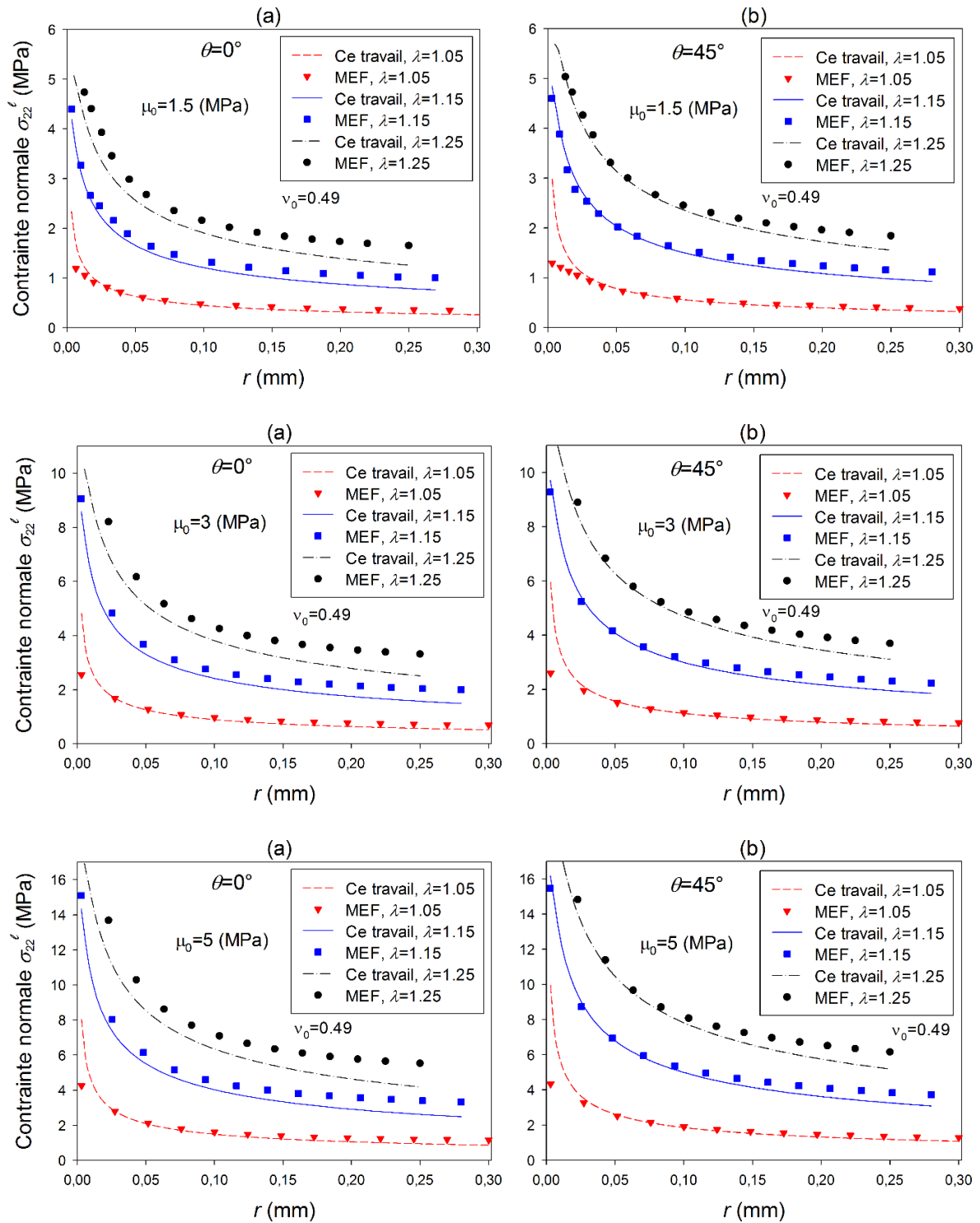


Fig. III-11 Comparaison entre les prédictions de la contrainte normale obtenues à partir des simulations EF $\sigma_{22}^{(FEM)}$ et les résultats analytiques σ_{22}^{ℓ} , en fonction du rayon r , pour trois valeurs de μ_0 et à différents niveaux de chargements λ (a) $\theta=0^\circ$ (b) $\theta=45^\circ$.

La même analyse a été réalisée en examinant l'influence du coefficient de Poisson sur le déplacement et la contrainte suivant la direction de chargement, pour $\lambda=1.15$, comme illustré sur les figures Fig. III-12 et Fig. III-13, respectivement. Il semble que l'influence du coefficient de Poisson sur les champs élastostatiques est relativement faible à la pointe de la fissure. Il faut noter que des résultats similaires ont été obtenus pour tous les niveaux de charge, ainsi que pour d'autres valeurs de μ_0 et de θ .

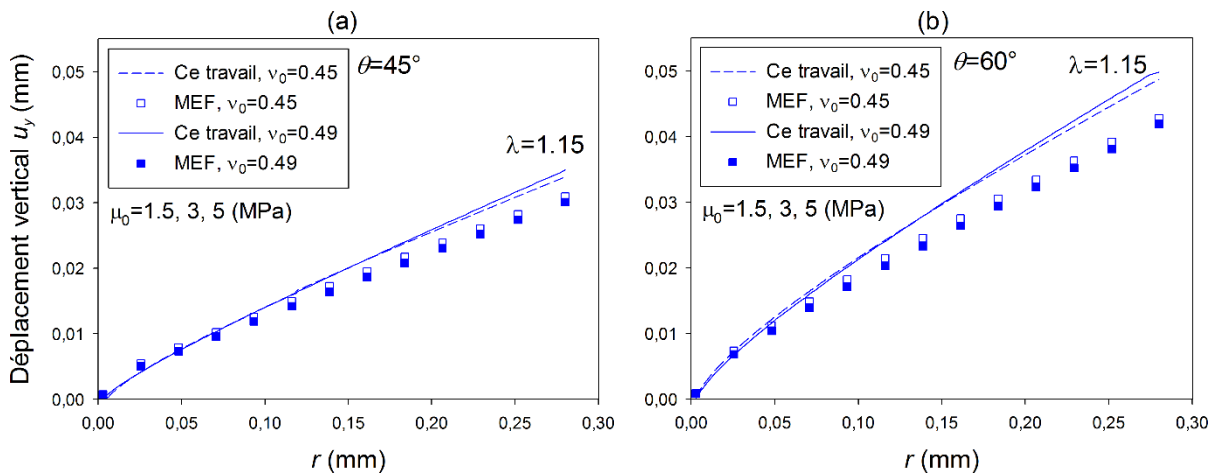


Fig. III-12 Comparaison entre les prédictions du déplacement vertical obtenues à partir des simulations EF, $u_y^{(FEM)}$, et les résultats analytiques, u_y , en fonction du rayon r , pour différentes valeurs du coefficient de Poisson ν_0 (a) $\theta=45^\circ$ (b) $\theta=60^\circ$.

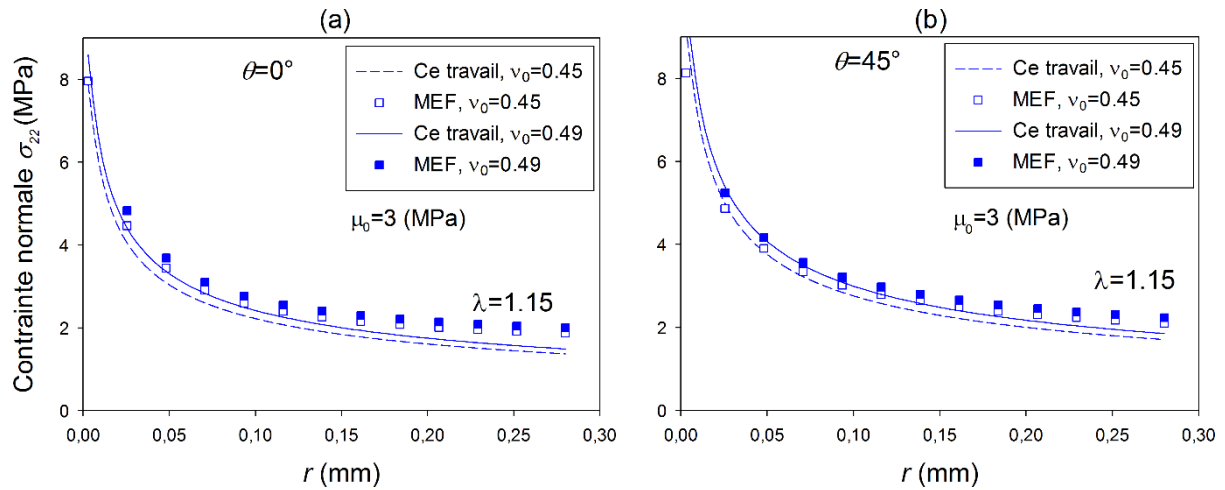


Fig. III-13 Comparaison entre les prédictions de la contrainte normale obtenues à partir des simulations EF, $\sigma_{22}^{(FEM)}$, et les résultats analytiques, σ_{22}^ℓ , en fonction du rayon r , pour différentes valeur du coefficient de Poisson ν_0 (a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 45^\circ$.

Les valeurs correspondant aux contraintes équivalentes de Von-Mises ont été également calculées, et les résultats sont reportés sur la Fig. III-14 en fonction du rayon r . Ce graphique montre clairement une bonne concordance entre les résultats numériques et les prévisions analytiques de la théorie proposée dans ce travail. Nous avons noté aussi que l'influence des propriétés du matériau (μ_0, ν_0) sur les contraintes équivalentes de Von-Mises est similaire à celle observée pour la contrainte normale.

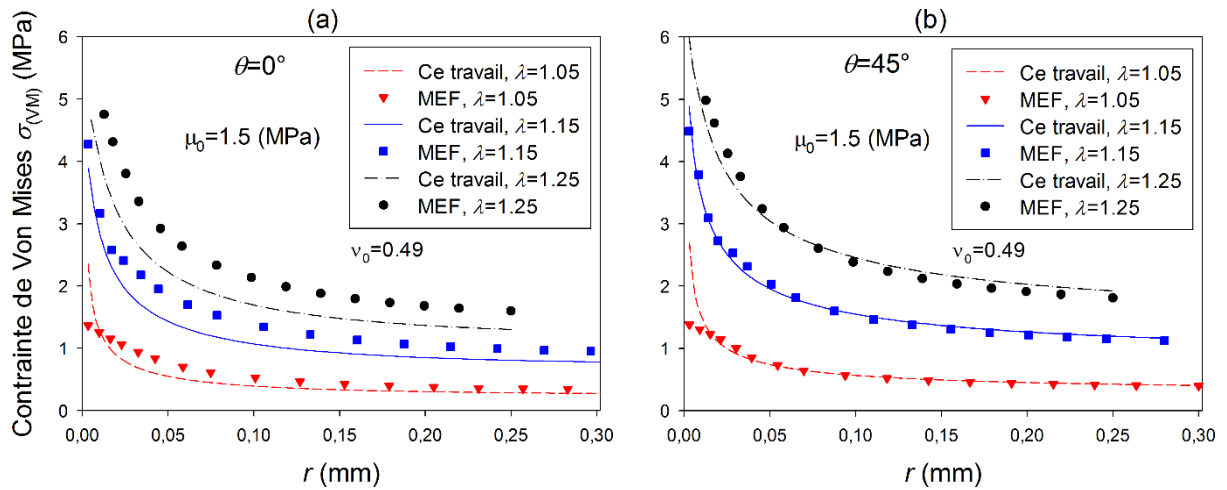


Fig. III-14 Comparaison entre les prédictions de la contrainte équivalente de Von-Mise obtenues à partir des simulations EF $\sigma_{(VM)}^{(FEM)}$ et les résultats analytiques $\sigma_{(VM)}^\ell$ en fonction du rayon r , pour différentes charges λ (a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 45^\circ$.

Pour évaluer la précision de notre modèle, nous avons calculé le rapport $\sigma_{(VM)}^\ell / \sigma_{(VM)}^{(FEM)}$ et nous avons reporté les résultats sur la Fig. III-15 pour différentes charges λ . Nous pouvons observer une bonne cohérence entre les résultats numériques et analytique, sauf très proche de la pointe de fissure, c.-à-d. $r \rightarrow 0$.

Tous les résultats présentés ci-dessus confirment la validité du modèle dans le cas des matériaux néo-Hookéen quasi-incompressibles, sous un chargement en mode I.

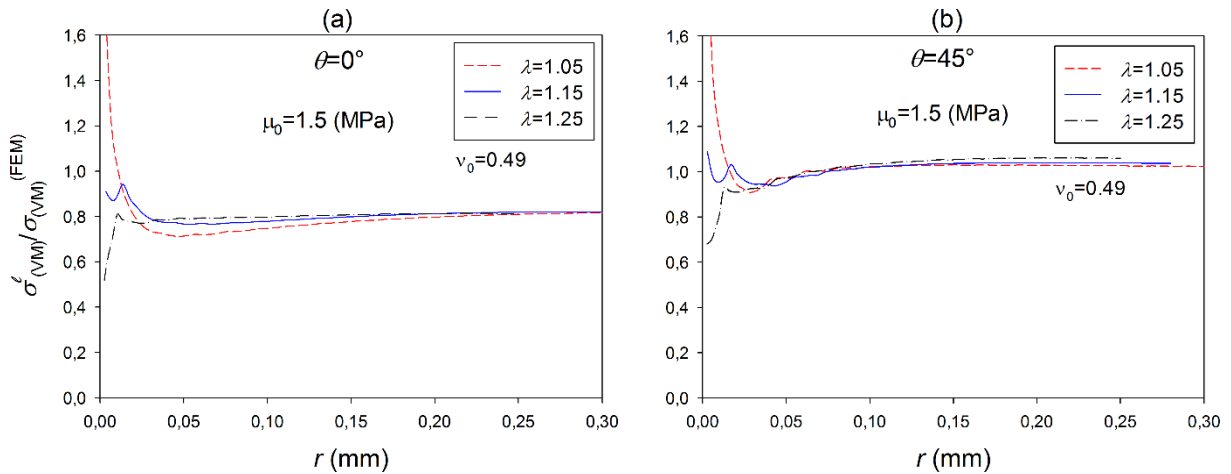


Fig. III-15 Rapport des contraintes équivalentes de Von-Mises $\sigma_{(VM)}^l / \sigma_{(VM)}^{(FEM)}$ en fonction du rayon r , pour différentes valeurs de chargements λ (a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 45^\circ$.

III.5.2. Bilan du Chapitre III

Dans ce chapitre, une théorie a été développée, conduisant à établir des équations des champs de contraintes et de déplacements à proximité de la pointe d'une fissure, pour des matériaux néo-Hookéen quasi-incompressibles et isotropes, en mode I. Cette théorie est basée sur la linéarisation de l'équation constitutive, de sorte qu'elle puisse être considérée comme une extension de la théorie MLER. Il a été montré que les champs calculés à partir de la théorie proposée sont qualitativement en accord avec les résultats obtenus par les simulations numériques par la MEF, et significativement différent de ceux prévus par la théorie MLER, ce qui suggère la validité de l'approche développée dans ce travail. Par conséquent, les résultats analytiques peuvent contribuer, par exemple, à vérifier rapidement la validité des schémas numériques complexes.

Conclusion générale et perspectives

La maîtrise de l'élaboration et la conception des pièces, passe par une connaissance précise de leur comportement sous diverses sollicitations, pour limiter les risques relatifs aux défaillances. De nombreuses fissurations interviennent sur des éléments de structure n'entraînant pas de dégâts majeurs ou les procédures de contrôles et de réparations, bien que coûteuses, permettent d'en réduire l'importance. Ce travail de recherche avait pour objectifs de mieux comprendre et d'analyser le comportement mécanique des matériaux en petites et en grandes déformations, afin d'améliorer la description des mécanismes de fissuration, et la possibilité de formuler des critères de rupture efficace capables de prédire l'initiation et la direction de propagation des fissures.

Une étude préliminaire élaborée dans le chapitre I a permis de fixer le cadre de travail de cette thèse en présentant les techniques analytiques et numériques développées en mécanique de la rupture, pour appréhender les phénomènes de rupture des matériaux fragiles et hyperélastiques. De ce bilan, nous retiendrons deux résultats importants. En premier lieu, le concept de la mécanique configurationnelle basé sur le tenseur de contrainte d'Eshelby, peut être un outil puissant pour formuler des critères de rupture. En second lieu, la complexité du comportement à la rupture des matériaux hyperélastiques, comme les caoutchoucs, qui est principalement dus aux non-linéarités géométriques et matérielles, rend relativement difficile la formulation des champs de contraintes et de déplacements en fond de fissure, ainsi que l'élaboration des critères de rupture.

Après les rappels théoriques sur la mécanique configurationnelle, il a été démontré que les critères basés uniquement sur les valeurs principales et sur la contrainte de von-Mises existant dans la littérature, ne prennent pas rigoureusement en compte tous les

aspects du comportement du matériau. Dans ce contexte, la deuxième partie de ce mémoire a été dédiée à la construction d'une nouvelle grandeur prédictive d'initiation et de direction de propagation d'une fissure, dans le cadre de la mécanique configurationnelle linéaire. Ainsi, nous avons donc exploité les propriétés du tenseur des contraintes d'Eshelby pour exprimer un nouveau critère, en utilisant la densité d'énergie de déformation (SED). Les résultats obtenus suggèrent que notre modèle fournit des prévisions plus précises que les autres modèles conventionnels présentés dans la littérature. Finalement, la capacité de la valeur critique maximale du paramètre SED à représenter un critère d'initiation de fissure a été évaluée avec succès, en utilisant des données expérimentales.

La dernière partie de l'étude a été consacrée à l'analyse de l'influence d'une discontinuité géométrique sur les champs mécaniques, dans le cas des matériaux élastomères. En effet, une nouvelle approche permettant de déterminer les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe de la fissure dans la configuration déformée a été développée, pour des matériaux hyperélastiques néo-Hookéen, quasi-incompressibles et isotropes. L'originalité de cette théorie réside dans la formulation de nouvelles conditions aux limites dans la configuration déformée, reflétant ainsi la réalité d'une structure déformée. Ensuite, la pertinence de ce modèle a été prouvée à l'aide de la méthode des éléments finis, en utilisant le logiciel commercial Abaqus. L'approche actuelle a permis d'obtenir des résultats qualitativement en accord avec les résultats issus des simulations numériques par la MEF, et significativement différent de ceux prévus par la théorie MLER. Un des avantages majeurs de cette théorie est le calcul du champ de contraintes et de déplacements au voisinage du fond fissure, avec uniquement la connaissance du module rigidité et du coefficient de Poisson.

Quelques perspectives intéressantes s'ouvrent à l'issue du travail présenté dans ce manuscrit.

- Vérifier la validité du critère de rupture en utilisant la méthode des éléments finis.
- Étendre l'idée de ce critère au cas des matériaux élastomères qui ont un comportement hyperélastique.

Concernant l'étude des champs asymptotiques hyperélastiques, elle pourra se poursuivre suivant de nombreux axes, comme :

- Améliorer la précision des champs de contraintes et des déplacements de notre modèle, en développant les équations jusqu'au deuxième ordre, afin de prendre en compte les non-linéarités géométriques.
- Étendre la théorie proposée au mode mixte (I + II).
- Exploiter les équations analytiques proposées pour étendre le critère de Sih (1974) aux cas de sollicitations en grande déformation.
- Développer les équations de la théorie proposée en contraintes planes.
- Étendre cette étude à d'autres types d'élastomères, avec des lois de comportement plus complexes (Mooney-Rivlin, Ogden...).

Annexe A

En coordonnées cartésiennes, le déterminant du tenseur du gradient de déformation est défini comme suit :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} F_{ip} F_{jq} F_{kr}, \quad (\text{A.1})$$

où ϵ_{uvw} est le symbole de permutation Levi-Civita.

Les composantes du tenseur de gradient de déformation sont définies comme suit :

$$F_{rs} = \delta_{rs} + H_{rs}, \quad (\text{A.2})$$

où δ_{rs} est le symbole de Kronecker et H_{rs} désigne les composantes du tenseur de gradient de déplacement.

La substitution de (A.1) dans (A.2) aboutit à :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} (\delta_{ip} + H_{ip})(\delta_{jq} + H_{jq})(\delta_{kr} + H_{kr}). \quad (\text{A.3})$$

L'équation (A.3) peut être développée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & 1 + \frac{1}{6} (\epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} H_{ip} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{iqk} H_{jq} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijr} H_{kr}) \\ & + \frac{1}{6} (\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} H_{ip} H_{jq} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{pjr} H_{ip} H_{kr} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{iqr} H_{jq} H_{kr}) + \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} H_{ip} H_{jq} H_{kr}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où

$$\frac{1}{6} (\epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} H_{ip} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{iqk} H_{jq} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijr} H_{kr}) = H_{11} + H_{22} + H_{33} = \text{tr } \mathbf{H}, \quad (\text{A.5})$$

et

$$\frac{1}{6} \left(\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} H_{ip} H_{jq} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{pjr} H_{ip} H_{kr} + \epsilon_{ijk} \epsilon_{iqr} H_{jq} H_{kr} \right) = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{H})^2 - \text{tr}(\mathbf{H}^2) \right]. \quad (\text{A.6})$$

La combinaison de (A.4)-(A.6) permet de réécrire le tenseur de gradient de déformation \mathbf{J} comme suit :

$$\mathbf{J} = 1 + \text{tr } \mathbf{H} + \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{H})^2 - \text{tr}(\mathbf{H}^2) \right] + \det \mathbf{H}. \quad (\text{A.7})$$

Il convient de mentionner que $(\text{tr } \mathbf{H})^2$ et $\text{tr}(\mathbf{H}^2)$ sont respectivement des termes quadratiques et de troisième ordre par rapport à \mathbf{H} .

Nous supposons que J est linéaire dans \mathbf{H} , qui est donné par :

$$\mathbf{J} \approx 1 + \text{tr } \mathbf{H} + o(\text{tr } \mathbf{H}). \quad (\text{A.8})$$

Annexe B

La substitution de l'Eq. (III.13), c.-à-d. $\mathbf{H} \approx \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}$, dans l'Eq. (III.15) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma^{n\ell} / \mu_0 = & \left((\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}) + (\mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)T}) + (\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)})(\mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)T}) \right) \text{tr}(\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}) \\ & - (\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)})(\mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)T}) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

L'équation (B.1) peut être développée comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma^{n\ell} / \mu_0 = & \left(\begin{array}{l} \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T} + \\ \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T} \end{array} \right) \text{tr}(\mathbf{H}^{(0)}) \\ & + \left(\begin{array}{l} \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T} + \\ \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T} \end{array} \right) \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)}) \\ & - (\mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \sigma^{n\ell} / \mu_0 = & (\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(0)}) - (\mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T}) \\ & + (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(0)}) \\ & + (\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)}) \\ & - (\mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T}) + (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)}) - (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En utilisant les Eqs. (III.15) et (B.3), nous pouvons écrire :

$$\sigma^{n\ell} / \mu_0 \approx \Sigma^{(0)} / \mu_0 + \Sigma^{(1)} / \mu_0 + \Sigma^{(2)} / \mu_0. \quad (\text{B.4})$$

$$\text{where } \Sigma^{(0)} / \mu_0 = (\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(0)}) - (\mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T})$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)} / \mu_0 = & (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(0)}) \\ & + (\mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T} + \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)}) - (\mathbf{H}^{(0)} \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(0)T}) \end{aligned}$$

and $\Sigma^{(2)}/\mu_0 = (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(1)T} + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T}) \text{tr}(\mathbf{H}^{(1)}) - (\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)T})$.

Annexe C

Nous avons calculé la norme de déplacement normalisé de la théorie MLER, à partir des Eqs. (I.8) et (III.24), comme suit :

$$U^{(0)}/a = \sqrt{[u_r^{(0)}]^2 + [u_\theta^{(0)}]^2} / a \quad (\text{C.1})$$

A partir des Eqs. (III.27), (III.31) et (III.32), la norme de déplacement normalisé de la présente théorie peut s'écrire sous la forme :

$$U^{(l)}/a = \sqrt{u_r^2 + u_\theta^2} / a \quad (\text{C.2})$$

A partir des Eqs. (I.5) et (III.33), la contrainte équivalente de Von-Mises normalisée de la théorie MLER est donnée par :

$$\sigma_{(VM)}^{(0)}/\mu_0 = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)})^2 + (\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \sigma_{zz}^{(0)})^2 + (\sigma_{zz}^{(0)} - \sigma_{rr}^{(0)})^2 + 6\sigma_{r\theta}^{(0)}} \quad (\text{C.3})$$

Nous avons calculé la contrainte équivalente de Von-Mises normalisée de la théorie actuelle en utilisant les résultats de l'Eq. (III.34) comme suite :

$$\sigma_{(VM)}^\ell/\mu_0 = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr}^\ell - \sigma_{\theta\theta}^\ell)^2 + (\sigma_{\theta\theta}^\ell - \sigma_{zz}^\ell)^2 + (\sigma_{zz}^\ell - \sigma_{rr}^\ell)^2 + 6\sigma_{r\theta}^\ell} \quad (\text{C.4})$$

Références bibliographiques

1. HimmelFreundPointner: Maschinen- und Fertigungstechnik GmbH , (2020).
(<https://www.himmelfreundpointner.com/index.php/fr/praezisionstechnik-fr/risse-pr%C3%BCfen-fr.html>).
2. Spazdav: Le site du premier maxiscooter forum, (2011).
(<http://hondaspazio.fr/forum/topic.php?id=136>).
3. Haeri, H., Shahriar, K., Marji, M.F., Moarefvand, P.: Experimental and numerical study of crack propagation and coalescence in pre-cracked rock-like disks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* **67**, 20-28 (2014).
4. Kato, T., Nishioka, T.: Analysis of micro-macro material properties and mechanical effects of damaged material containing periodically distributed elliptical microcracks. *International Journal of Fracture* **131**(3), 247-266 (2005).
5. Marigo, J.-J.: Plasticité et rupture. (2016).
6. Le, B.D.: Modélisation discrète en mécanique de la rupture des matériaux fragiles. Université de Strasbourg, France (2013)
7. Griffith, A.: The phenomena of flow and rupture in solids: *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A* **221**, 163-198 (1920).
8. Westergaard, H.M.: Bearing pressures and cracks. *Trans AIME, J. Appl. Mech.* **6**, 49-53 (1939).
9. Irwin, G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.* **24**, 361-364 (1957).
10. Rice, J.R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics* **35**(2), 379-386 (1968).
11. Bui, H.: Dual path independent integrals in the boundary-value problems of cracks. *Engineering Fracture Mechanics* **6**(2), 287-296 (1974).

12. Editor: American Airlines – Airbus – A300-605R (N14053) flight AA587. Aviation accidents, (2001) (<https://www.aviation-accidents.net/american-airlines-airbus-a300-605r-n14053-flight-aa587/>).
13. Proudhon, H., Cailletaud, G.: Mécanique de la rupture, MINES ParisTech, Centre des matériaux, CNRS UMR 7633. (2011).
14. Ma, S.: Propagation de fissure en mode mixte dans un milieu élasto-plastique avec prise en compte des contraintes résiduelles. Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand II, France (2005)
15. Bui, H.: Introduction à la mécanique de la rupture. Rupture Contrôle Sûreté, Conseil National de Recherches Canada, Institut de Génie des Matériaux, 3-5 (1980).
16. Naman, R.: Mécanique de la rupture par fissuration. Lavoisier, (2012)
17. Williams, M.: On the stress distribution at the base of a stationary crack J. of Appl. Mech. Vol, 109-11104 (1957).
18. Muskhelishvili, N.I.: Certain Fundamental Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Izd-vo Nauka, Moscow (1966).
19. Knott, J.F.: Fundamentals of fracture mechanics. Gruppo Italiano Frattura, (1973)
20. Bui, H.D.: Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux. In. Eyrolles, (1993)
21. Fiordalisi, S.: Modélisation tridimensionnelle de la fermeture induite par plasticité lors de la propagation d'une fissure de fatigue dans l'acier 304L. Chasseneuil-du-Poitou, Ecole nationale supérieure de mécanique et d ... (2014)
22. Kienzler, R., Herrmann, G.: Mechanics in material space: with applications to defect and fracture mechanics. Springer Science & Business Media, (2012)
23. Eshelby, J.D.: The force on an elastic singularity. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **244**(877), 87-112 (1951).

24. Barber, J.: Elasticity(Book). Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers(Solid Mechanics and Its Applications. **12** (1992).
25. Eischen, J., Herrmann, G.: Energy release rates and related balance laws in linear elastic defect mechanics. *Journal of Applied Mechanics* **54**(2), 388-392 (1987).
26. Kienzler, R., Herrmann, G.: On the properties of the Eshelby tensor. *Acta Mechanica* **125**(1-4), 73-91 (1997).
27. Eshelby, J.: The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity* **5**(3-4), 321-335 (1975).
28. Kienzler, R., Herrmann, G.: Fracture criteria based on local properties of the Eshelby tensor. *Mechanics Research Communications* **29**(6), 521-527 (2002).
29. Meite, M.: Caractérisation des paramètres de fissuration par un couplage corrélation d'images et éléments finis. Limoges (2012)
30. Erdogan, F., Sih, G.: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of basic engineering* **85**(4), 519-525 (1963).
31. Bui, H.D., Bui, H.: Mécanique de la rupture fragile, vol. 109. Masson Paris, (1978)
32. Massamba, F.I.: Modélisation de la rupture par forces cohésives: formulations et exemples d'applications. Paris 6 (2016)
33. Hussain, M., Pu, S., Underwood, J.: Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. In: *Fracture analysis: Proceedings of the 1973 national symposium on fracture mechanics, part II 1974*. ASTM International
34. Sih, G.C.: Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture* **10**(3), 305-321 (1974).
35. Lv, J., Li, Q.: Equivalent configurational stress to predict material yielding and crack propagation. *Acta Mechanica* **227**(10), 3055-3065 (2016).
36. Kong, X., Schlüter, N., Dahl, W.: Effect of triaxial stress on mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics* **52**(2), 379-388 (1995).

37. Theocaris, P., Andrianopoulos, N.: The T-criterion applied to ductile fracture. *International Journal of Fracture* **20**(4), R125-R130 (1982).
38. Khan, S.M., Khraisheh, M.K.: Analysis of mixed mode crack initiation angles under various loading conditions. *Engineering Fracture Mechanics* **67**(5), 397-419 (2000).
39. Ayatollahi, M., Aliha, M.: On the use of Brazilian disc specimen for calculating mixed mode I–II fracture toughness of rock materials. *Engineering Fracture Mechanics* **75**(16), 4631-4641 (2008).
40. Bispo, M., Donnio, B., Guillon, D.: Les élastomères Cristaux Liquides. *Ciência & Tecnologia dos Materiais* **19**(1-2), 34-40 (2007).
41. Kartout, C.: Vieillissement thermo-oxydant et rupture d'un EPDM. Paris 6 (2016)
42. Klüppel, M., Schuster, R.H., Heinrich, G.: Structure and properties of reinforcing fractal filler networks in elastomers. *Rubber chemistry and technology* **70**(2), 243-255 (1997).
43. Mark, J.E.: *Physical properties of polymers handbook*, vol. 1076. Springer, (2007)
44. VERRON, E.: *Modèles hyperélastiques pour le comportement mécanique des élastomères*. Techniques de l'ingénieur (2018).
45. Li, X.L., Li, X.J., Sang, J.B., Qie, Y.H., Tu, Y.P., Zhang, C.B.: Experimental analysis of the damage zone around crack tip for rubberlike materials under mode-I fracture condition. In: *Key Engineering Materials 2013*, pp. 119-124. Trans Tech Publ
46. Trapper, P., Volokh, K.: Cracks in rubber. *International Journal of Solids and Structures* **45**(24), 6034-6044 (2008).
47. Xiao, X., Song, H.-P., Kang, Y.-L., Li, X.-L., Tan, X.-H., Tan, H.-Y.: Experimental analysis of crack tip fields in rubber materials under large deformation. *Acta Mechanica Sinica* **28**(2), 432-437 (2012).

48. Long, R., Krishnan, V.R., Hui, C.-Y.: Finite strain analysis of crack tip fields in incompressible hyperelastic solids loaded in plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **59**(3), 672-695 (2011).
49. Wong, F.S., Shield, R.T.: Large plane deformations of thin elastic sheets of neo-Hookean material. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* **20**(2), 176-199 (1969).
50. Knowles, J.K., Sternberg, E.: An asymptotic finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack. *Journal of Elasticity* **3**(2), 67-107 (1973).
51. Knowles, J.K., Sternberg, E.: Finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack: reconsideration and higher-order results. *Journal of Elasticity* **4**(3), 201-233 (1974).
52. Gao, Y.: Elastostatic crack tip behavior for a rubber-like material. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **14**(3), 219-231 (1990).
53. Le, K.C., Stumpf, H.: The singular elastostatic field due to a crack in rubberlike materials. *Journal of Elasticity* **32**(3), 183-222 (1993).
54. Gao, Y.: Large deformation field near a crack tip in rubber-like material. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **26**(3), 155-162 (1997).
55. Wang, Z.Y.: Finite strain analysis of crack tip fields in Yeoh-model-based rubber-like materials which are loaded in plane stress. In: *Applied Mechanics and Materials* 2012, pp. 477-483. Trans Tech Publ
56. Kroon, M.: Asymptotic mechanical fields at the tip of a mode I crack in rubber-like solids. *International Journal of Solids and Structures* **51**(10), 1923-1930 (2014).
57. Geubelle, P.H., Knauss, W.G.: Finite strains at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: I. Homogeneous case. *Journal of Elasticity* **35**(1-3), 61-98 (1994).

-
58. Tarantino, A.M.: Thin hyperelastic sheets of compressible material: field equations, Airy stress function and an application in fracture mechanics. *Journal of Elasticity* **44**(1), 37-59 (1996).
59. Knowles, J.K.: A nonlinear effect in mode II crack problems. *Engineering Fracture Mechanics* **15**(3-4), 469-476 (1981).
60. Stephenson, R.A.: The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic materials. *Journal of Elasticity* **12**(1), 65-99 (1982).
61. Ogden, R.W.: *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation, (1997)
62. Holzapfel, A.G.: *Nonlinear solid mechanics II*. (2000).
63. Ciarlet, P.G.: *Elasticité tridimensionnelle*, vol. 1. Masson, (1986)
64. Truesdell, C., Noll, W.: The non-linear field theories of mechanics. In: *The non-linear field theories of mechanics*. pp. 1-579. Springer, (2004)
65. Stolz, C.: *Milieux continus en transformations finies: hyperélasticité, rupture, élastoplasticité*. Editions Ecole Polytechnique, (2009)
66. Heinrich, G., Straube, E., Helmis, G.: Rubber elasticity of polymer networks: Theories. In: *Polymer physics*. pp. 33-87. Springer, (1988)
67. Rivlin, R.: Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **241**(835), 379-397 (1948).
68. Treloar, L.: The elasticity of a network of long-chain molecules. I. *Transactions of the Faraday Society* **39**, 36-41 (1943).
69. Mooney, M.: A theory of large elastic deformation. *Journal of applied physics* **11**(9), 582-592 (1940).
70. Isihara, A., Hashitsume, N., Tatibana, M.: Statistical Theory of Rubber-Like Elasticity. IV.(Two-Dimensional Stretching). *The Journal of Chemical Physics* **19**(12), 1508-1512 (1951).
71. Biderman, V.: Calculation of rubber parts. *Rascheti na prochnost* **40** (1958).
-

72. James, A., Green, A., Simpson, G.: Strain energy functions of rubber. I. Characterization of gum vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science* **19**(7), 2033-2058 (1975).
73. Yeoh, O.H.: Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber chemistry and technology* **66**(5), 754-771 (1993).
74. Yaya, K., Bechir, H.: A new hyper-elastic model for predicting multi-axial behaviour of rubber-like materials: formulation and computational aspects. *Mechanics of Time-Dependent Materials* **22**(2), 167-186 (2018).
75. Ogden, R.W.: Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **326**(1567), 565-584 (1972).
76. Arruda, E.M., Boyce, M.C.: A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. (1993).
77. Rubinstein, M., Colby, R.H.: *Polymer physics*, vol. 23. Oxford university press New York, (2003)
78. Gent, A.: A new constitutive relation for rubber. *Rubber chemistry and technology* **69**(1), 59-61 (1996).
79. Kaliske, M., Heinrich, G.: An extended tube-model for rubber elasticity: statistical-mechanical theory and finite element implementation. *Rubber chemistry and technology* **72**(4), 602-632 (1999).
80. Marckmann, G., Verron, E.: Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber chemistry and technology* **79**(5), 835-858 (2006).
81. Lake, G.: Fatigue and fracture of elastomers. *Rubber chemistry and technology* **68**(3), 435-460 (1995).
82. Rivlin, R., Thomas, A.G.: Rupture of rubber. I. Characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science Part A: Polymer Chemistry* **10**(3), 291-318 (1953).

83. Ait Hocine, N., Abdelaziz, M.N., Mesmacque, G.: Experimental and numerical investigation on single specimen methods of determination of J in rubber materials. *International Journal of Fracture* **94**(4), 321-338 (1998).
84. Ait Hocine, N., Abdelaziz, M.N., Imad, A.: Fracture problems of rubbers: J-integral estimation based upon η factors and an investigation on the strain energy density distribution as a local criterion. *International Journal of Fracture* **117**(1), 1-23 (2002).
85. Hamdi, A., Ait Hocine, N., Abdelaziz, M.N., Benseddiq, N.: Fracture of elastomers under static mixed mode: the strain-energy-density factor. *International Journal of Fracture* **144**(2), 65-75 (2007).
86. Berto, F.: A criterion based on the local strain energy density for the fracture assessment of cracked and V-notched components made of incompressible hyperelastic materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **76**, 17-26 (2015).
87. Mzabi, S., Berghezan, D., Roux, S., Hild, F., Creton, C.: A critical local energy release rate criterion for fatigue fracture of elastomers. *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics* **49**(21), 1518-1524 (2011).
88. Verron, E., Ait-Bachir, M., Castaing, P.: Some new properties of the Eshelby stress tensor. In: *IUTAM Symposium on Progress in the Theory and Numerics of Configurational Mechanics 2009*, pp. 27-35. Springer
89. Ayatollahi, M.R., Heydari-Meybodi, M., Dehghany, M., Berto, F.: A new criterion for rupture assessment of rubber-like materials under mode-I crack loading: the effective stretch criterion. *Advanced Engineering Materials* **18**(8), 1364-1370 (2016).
90. Heydari-Meybodi, M., Ayatollahi, M., Dehghany, M., Berto, F.: Mixed-mode (I/II) failure assessment of rubber materials using the effective stretch criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **91**, 126-133 (2017).

91. Bonnet, d.M., Frangi, A.: Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* **16**(5), 667-668 (2007).
92. Bouchard, P.-O., Bay, F., Chastel, Y., Tovenà, I.: Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **189**(3), 723-742 (2000).
93. Givoli, D., Zusman, R.: An adaptive finite element framework for fatigue crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **54**(1), 111-135 (2002).
94. Dhondt, G.: Automatic 3-D mode I crack propagation calculations with finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **41**(4), 739-757 (1998).
95. Schöllmann, M., Fulland, M., Richard, H.: Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures. *Engineering Fracture Mechanics* **70**(2), 249-268 (2003).
96. Prabel, B.: Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP. INSA de Lyon, France (2007)
97. Krishnan, V.R., Hui, C.Y., Long, R.: Finite strain crack tip fields in soft incompressible elastic solids. *Langmuir* **24**(24), 14245-14253 (2008).
98. Abaqus/cae: Usel's Guide, Modeling and Visualization. (2016).
99. Babuška, I., Melenk, J.M.: The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**(4), 727-758 (1997).
100. Ballage, M.: Algorithmes de résolution rapide de problèmes mécaniques sur GPU. (2017)

101. Gravouil, A., Moës, N., Belytschko, T.: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(11), 2569-2586 (2002).
102. Moës, N., Gravouil, A., Belytschko, T.: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(11), 2549-2568 (2002).
103. Stolarska, M., Chopp, D.L., Moës, N., Belytschko, T.: Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **51**(8), 943-960 (2001).
104. Chirino, F., Gallego, R., Sáez, A., Domínguez, J.: A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **13**(1), 11-19 (1994).
105. Albuquerque, E., Sollero, P., Aliabadi, M.: Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **59**(9), 1187-1205 (2004).
106. Seelig, T., Gross, D., Pothmann, K.: Numerical simulation of a mixed-mode dynamic fracture experiment. *International Journal of Fracture* **99**(4), 325-338 (1999).
107. Organ, D.J.: Numerical solutions to dynamic fracture problems using the element-free Galerkin method. Northwestern University (1996)
108. Krysl, P., Belytschko, T.: The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **44**(6), 767-800 (1999).
109. Rabczuk, T., Belytschko, T.: Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **61**(13), 2316-2343 (2004).
110. Cundall, P.A., Strack, O.D.: A discrete numerical model for granular assemblies. *geotechnique* **29**(1), 47-65 (1979).

111. Calvetti, F., Viggiani, G., Tamagnini, C.: A numerical investigation of the incremental behavior of granular soils. (2003).
112. Koval, G., Roux, J.-N., Corfdir, A., Chevoir, F.: Annular shear of cohesionless granular materials: From the inertial to quasistatic regime. *Physical Review E* **79**(2), 021306 (2009).
113. Sibille, L., Nicot, F., Donze, F., Darve, F.: Material instability in granular assemblies from fundamentally different models. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* **31**(3), 457-481 (2007).
114. Seweryn, A.: A non-local stress and strain energy release rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria. *Engineering Fracture Mechanics* **59**(6), 737-760 (1998).
115. Smith, D., Ayatollahi, M., Pavier, M.: The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* **24**(2), 137-150 (2001).
116. Khan, S.M., Khraisheh, M.K.: A new criterion for mixed mode fracture initiation based on the crack tip plastic core region. *International Journal of Plasticity* **20**(1), 55-84 (2004).
117. Ren, L., Zhu, Z., Wang, M., Zheng, T., Ai, T.: Mixed-mode elastic-plastic fractures: improved R-criterion. *Journal of Engineering Mechanics* **140**(6), 04014033 (2013).
118. Mróz, K., Mróz, Z.: On crack path evolution rules. *Engineering Fracture Mechanics* **77**(11), 1781-1807 (2010).
119. Ioakimidis, N.I.: Application of quantifier elimination to mixed-mode fracture criteria in crack problems. *Archive of Applied Mechanics* **87**(10), 1567-1604 (2017).
120. Maugin, G.A., Trimarco, C.: Elements of field theory in inhomogeneous and defective materials. In: *Configurational Mechanics of Materials*. pp. 55-128. Springer, (2001)

121. Steinmann, P.: Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. I. Continuum mechanical setting. *International Journal of Solids and Structures* **37**(48-50), 7371-7391 (2000).
122. Maugin, G.A.: Material forces: concepts and applications. *Applied Mechanics Reviews* **48**(5), 213-245 (1995).
123. Aït-Bachir, M., Mars, W., Verron, E.: Energy release rate of small cracks in hyperelastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **47**(4), 22-29 (2012).
124. Atkinson, C., Aparicio, N.: Fracture detection problems:: applications and limitations of the energy momentum tensor and related invariants. *International Journal of Solids and Structures* **36**(31-32), 4889-4899 (1999).
125. Mirsayar, M.: Mixed mode fracture analysis using extended maximum tangential strain criterion. *Materials & Design* **86**, 941-947 (2015).
126. Mirsayar, M., Razmi, A., Berto, F.: Tangential strain-based criteria for mixed-mode I/II fracture toughness of cement concrete. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* **41**(1), 129-137 (2018).
127. Sih, G.: A special theory of crack propagation. In: *Mechanics of fracture initiation and propagation*. pp. 1-22. Springer, (1991)
128. Pook, L.: The effect of crack angle on fracture toughness. *Engineering Fracture Mechanics* **3**(3), 205-218 (1971).
129. Theocaris, P., Kardomateas, G., Andrianopoulos, N.: Experimental study of the T-criterion in ductile fractures. *Engineering Fracture Mechanics* **17**(5), 439-447 (1983).
130. Ewing, P., Williams, J.: The fracture of spherical shells under pressure and circular tubes with angled cracks in torsion. *International Journal of Fracture* **10**(4), 537-544 (1974).

131. Long, R., Hui, C.-Y.: Crack tip fields in soft elastic solids subjected to large quasi-static deformation—a review. *Extreme Mechanics Letters* **4**, 131-155 (2015).
132. Bouchbinder, E., Livne, A., Fineberg, J.: The $1/r$ singularity in weakly nonlinear fracture mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **57**(9), 1568-1577 (2009).
133. Monfared, M., Pourseifi, M., Bagheri, R.: Computation of mixed mode stress intensity factors for multiple axisymmetric cracks in an FGM medium under transient loading. *International Journal of Solids and Structures* **158**, 220-231 (2019).
134. Begley, M.R., Creton, C., McMeeking, R.M.: The elastostatic plane strain mode I crack tip stress and displacement fields in a generalized linear neo-Hookean elastomer. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **84**, 21-38 (2015).
135. Hamam, R., Pommier, S., Bumbieler, F.: Mode I fatigue crack growth under biaxial loading. *International journal of fatigue* **27**(10-12), 1342-1346 (2005).
136. Chang, J., Li, J.: Evaluation of asymptotic stress field around a crack tip for Neo-Hookean hyperelastic materials. *International journal of engineering science* **42**(15-16), 1675-1692 (2004).
137. Rice, J., Rosengren, G.F.: Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. In. BROWN UNIV PROVIDENCE RI DIV OF ENGINEERING, (1967)
138. Mansouri, K., Arfaoui, M., Trifa, M., Hassis, H., Renard, Y.: Singular elastostatic fields near the notch vertex of a Mooney–Rivlin hyperelastic body. *International Journal of Solids and Structures* **80**, 532-544 (2016).
139. Krishnan, V., Hui, C.-Y.: Finite strain stress fields near the tip of an interface crack between a soft incompressible elastic material and a rigid substrate. *The European Physical Journal E* **29**(1), 61-72 (2009).

140. Bechir, H., Chevalier, L., Chaouche, M., Boufala, K.: Hyperelastic constitutive model for rubber-like materials based on the first Seth strain measures invariant. *European Journal of Mechanics-A/Solids* **25**(1), 110-124 (2006).
141. Mott, P., Dorgan, J., Roland, C.: The bulk modulus and Poisson's ratio of “incompressible” materials. *Journal of Sound and Vibration* **312**(4-5), 572-575 (2008).
142. Habbitt, S.: Karlsson. ABAQUS Documentation, Dassault Systèmes, RI, USA (2013).
143. Gao, Y., Durban, D.: The crack tip field in a rubber sheet. *European journal of mechanics. A. Solids* **14**(5), 665-677 (1995).

Articles publiés

- Methia, M., Bechir, H., Frachon, A., Ait Hocine, N. (2020). An asymptotic finite plane deformation analysis of the elastostatic fields at a crack tip in the framework of hyperelastic, isotropic, and nearly incompressible neo-Hookean materials under mode-I loading. *Acta Mechanica*, 231(3), 929-946. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02577-7>
- Benslimane, A, Benchallal, R., Mammeri S., Methia, M. & Khadimallah, M. A., (2020) Investigation of displacements and stresses in thick-walled FGM cylinder subjected to thermo-mechanical loadings, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. <https://doi.org/10.1080/15502287.2020.1853853>
- Benslimane, A., Medjdoub, C., Methia, M., Khadimallah, M. A., & Hammiche, D. (2020). Investigation of displacement and stress fields in pressurized thick-walled FGM cylinder under uniform magnetic field. *Materials Today: Proceedings*. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.05.462>
- Benslimane, A., Bouzidi, S., Methia, M. (2018). Displacements and stresses in pressurized thick-walled FGM cylinders : Exact and numerical solutions. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 168, 219-224. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2018.10.019>

Manifestations scientifiques

- M. Methia, S. Bouzidi, A. Benslimane, H. Bechir. Computation of stresses in a thick-walled hollow isotropic and hyperelastic cylinder subjected to internal pressure. 6ème Congrès Algérien de Mécanique, Constantine du 26 au 30 novembre 2017.
- M. Methia, A. Benslimane, H. Bechir. Etude de la distribution des contraintes dans une paroi d'un cylindre FGM sous pressions. 11èmes Journées de Mécanique de l'EMP (JM'11-EMP). 10 et 11 Avril 2018.
- M. Methia, A. Benslimane, S. Bouzidi, H. Bechir, S. Ameriou Z. Ourabah, L. Djoumer. Analyse des contraintes et des déplacements dans une sphère FGM sous

pressions. International Conference on Advanced Mechanics and Renewable Energies ICAMRE2018 November 28 & 29, 2018.

- S. Bouzidi, H. Bechir, A. Benslimane, M. MethiA, I. Bouklouche & L. Trai. Analysis of stress of a hyperelastic material under equibiaxial tension test. International Conference on Advanced Mechanics and Renewable Energies ICAMRE2018 November 28 & 29, 2018.
- S. Bouzidi, H. Bechir, K. Yaya, A. Benslimane, M. Methia, & H. Salah. On the torsion of a hyperelastic circular cylinder. International Conference on Advanced Mechanics and Renewable Energies ICAMRE2018 November 28 & 29, 2018.

Résumé

L'utilisation croissante de matériaux caoutchoutiques nécessite le développement de divers moyens de calcul robustes pour prédire la rupture de ces matériaux. L'objectif principal de la thèse est la contribution à l'analyse de la fissuration de ce type de matériau, dans le cadre d'un régime quasi-statique. Deux études ont été développées à cet effet. La première concerne la formulation d'un nouveau critère de rupture en élasticité linéaire isotrope, qui est basé sur le tenseur de contraintes d'Eshelby. Ce critère est capable de prédire à la fois l'initiation et la direction de propagation d'une fissure, sous un chargement en mode mixte I/II. Les résultats obtenus sont comparés aux données théoriques et expérimentales disponibles dans la littérature et un bon accord a été observé, ce qui a confirmé la validité du critère proposé. La deuxième partie de la thèse a été consacrée à l'analyse asymptotique des champs de contraintes et de déplacements à la pointe de la fissure, dans le cas d'un matériau hyperélastique néo-Hookeen, quasi-incompressible et isotrope, sous un chargement en mode I. La validité des équations développées a été vérifiée à l'aide des simulations par la méthode des éléments finis, en s'appuyant sur les résultats de la théorie, déjà éprouvée, de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MLER).

Mots clés : Critère de rupture ; Mécanique configurationnelle ; Tenseur de contraintes d'Eshelby ; Champs élastostatiques ; Matériaux néo-Hookeen ; Analyse asymptotique ; Méthode des éléments finis.

Abstract

The increasing use of rubber materials requires the development of several robust computational means to predict the failure of these materials. The main objective of the thesis is a contribution to analyze cracking of this type of material under a quasi-static regime. Two studies have been developed for this purpose. The first concerns the formulation of a new isotropic linear elasticity failure criterion, which is based on Eshelby's stress tensor. This criterion is able to predict both crack initiation and direction of propagation under mixed mode I/II loading. The results obtained were compared with theoretical and experimental data available in the literature and good agreement was observed, confirming the validity of the proposed criterion. The second part of the thesis was devoted to the asymptotic analysis of the stress and displacement fields at the crack tip, in the case of a neo-Hookean hyperelastic, quasi-incompressible and isotropic material under mode I loading. The validity of the developed equations was verified by means of finite element simulations, based on the results of the proven Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) theory.

Keywords: Failure criterion; Configurational mechanics; Eshelby stress tensor; Elastostatic- fields; neo-Hookean materials; Asymptotic analysis; Finite element method.

ملخص

يستلزم الاستخدام المتزايد للمواد المطاطية تطوير العديد من الوسائل الحسابية القوية للتنبؤ بفشل هذه المواد. الهدف الرئيسي للأطروحة هو المساهمة في تحليل تكسير هذا النوع من المواد، في إطار نظام شبه ثابت. تم تطوير دراستين لهذا الغرض. يتعلق الأول بصياغة معيار كسر جديد في المرونة الخطية المتناحرة، والتي تعتمد على موتر إجهاد إيشيلبي. هذا المعيار قادر على التنبؤ بكل من بدء واتجاه انتشار الكسر، تحت تحميل في الوضع المختلط I/II. تم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع البيانات النظرية والتجريبية المتوفرة في الأدبيات ولوحظ توافق جيد مما أكد صحة المعيار المقترح. تم تخصيص الجزء الثاني من الأطروحة للتحليل المقارب لمجالات الإجهاد والتجهير عند طرف الكسر، في حالة مادة مرنة وشبه غير قابلة للضغط، تحت تحميل في الوضع الأول I. تم التحقق من صحة المعادلات المطورة باستخدام عمليات المحاكاة بطريقة العناصر المحدودة، من خلال الاعتماد على نتائج النظرية المثبتة بالفعل لميكانيكا الخطية المرنة للكسر (ك م خ م).

الكلمات المفتاحية: معيار التمزق ; ميكانيكا التكوين ; موتر إجهاد إيشيلبي ; الحقول المرنة ; مواد نيو هوكين ; تحليل مقارب ; طريقة العناصر المحدودة.