

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Installation Energétiques Turbomachines

Par :

DERRADJI Miyada

GOUGAM Massinissa

Thème

**Etude analytique d'une sphère FGM
sous pression : Application en
biomédical**

Soutenu le 01 juillet 2024 devant le jury composé de :

M. ADNANI	Président
M. BENSLIMANE	Rapporteur
M. HAMDI	Examineur

Année Universitaire 2023-2024

Remerciements

A l'issus de ce mémoire, nous tenons à remercier en premier lieu ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la force et le courage de réaliser cet humble travail.

Nous tenons à exprimer notre respectueuse gratitude et nos sincères remerciements à notre promoteur **Mr. BENSLIMANE** pour avoir accepté de nous encadrer, nous avoir guidées tout le long de ce travail et de nous avoir accordé son précieux temps.

Nous remercions le président du jury **Mr. ADNANI** , ainsi que l'examineur **Mr. HAMDI** d'avoir accepté d'examiner et de corrigé notre travail.

Enfin, nous tenons à témoigner notre profonde gratitude à nos chères familles pour leur soutien, amour, sacrifices et encouragements, ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce projet.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

A ma très chère mère

Pour tout l'amour, le soutien, les sacrifices consentis et les précieux conseils, pour ton assistance et ta présence inébranlable dans ma vie, reçois à travers ce travail, aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

A mon très cher père

Puisses-tu être fier en voyant ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Que Dieu fasse en sorte que ce travail porte ses fruits. Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent que tu m'as offerts.

À mon frère et à mes sœurs

Merci pour votre amour, votre soutien indéfectible et les moments inoubliables que nous partageons. Vous avez toujours été là pour moi, et je suis profondément reconnaissante de vous avoir dans ma vie.

À mon fiancé

Merci infiniment pour tes encouragements constants et ton soutien inestimable tout au long de ce projet. Je te suis profondément reconnaissante pour ta patience, ta compréhension et ta foi en moi.

À mes amis

Merci à chacun d'entre vous pour votre présence, vos encouragements et les moments partagés qui m'ont aidé à avancer (Katia, Sabina, Micha, Nihad, Ferial,).

Enfin, je tiens à remercier mon binôme qui a contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Miyada

Dédicace

je dédie ce travail à :

À ma mère

Qui a de tout temps oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

À mon père

Qui, je l'espère sera fier de trouver ici, en quelques sortes, la concrétisation de toutes ces longues années de sacrifices et de privations qui ne répondaient qu'à une seule fin, m'aider à avancer dans la vie, la tête toujours haute. Puisse Dieu faire en sorte que cette oeuvre, la mienne te comblera. Mille fois merci, pour ton soutien sans failles et les valeurs que tu m'as transmises.

À mon frère et à ma sœur adorées

Je ne pourrais jamais exprimer pleinement l'attachement et l'affection que j'ai pour vous. Aucun mot ne pourrait rendre justice à la gratitude et à l'amour que je vous porte. Vous êtes une source constante de soutien, de joie et de réconfort dans ma vie Je suis infiniment reconnaissant de vous avoir à mes côtés.

À mes amis

Qu'ils soient près de moi ou avalés par l'exil, Nos éclats de rire et nos souvenirs partagés resteront gravés dans mon cœur, ils illuminent mes journées comme des étoiles dans le ciel nocturne. Que notre amitié soit toujours aussi forte, et que nos moments précieux continuent à briller comme des bijoux dans le jardin de nos souvenirs.

Les personnes que nous aimons quittent un jour nos yeux mais jamais notre cœur repose en paix grand mère.

Aux camarades du club Scientifique Génie Électrique et Energies Renouvelables, durant les deux années que nous avons eu à traverser main dans la main, tous unis contre l'adversité et les défis qui s'étaient fait la promesse de nous mettre à terre, nous avons su faire preuve de résilience, de solidarité et d'entraide afin de dépasser l'insurmontable avec dignité. Avec vous, j'ai gagné en maturité, j'ai appris l'esprit

de groupe, rien que pour cela, je vous suis infiniment reconnaissant.

À mes camarades de lutte, militant du RCD, que dire ? durant ces 3 dernières années, dans une situation de bouleversements profonds, nous avons su gardé le cap, en accord avec nos principes et l'éthique militante, nous avons résisté corps et âmes. À la nouvelle génération qui sera amené à reprendre le flambeau, courage car "Noblesse d'âme oblige".

En fin je remercie ma binôme qui a contribué a la réalisation de ce modeste travail .

Massinissa

Table des matières

Table des matières	I
Table des figures	IV
Liste des tableaux	VI
Liste des abréviations	VII
1 Généralités sur les matériaux FGM	2
1.1 Introduction	2
1.2 Définition des FGM	3
1.3 Concept des matériaux fonctionnellement gradués	4
1.4 Historique	6
1.5 Types de matériaux FGM	8
1.5.1 Matériaux à gradient de composition chimique	8
1.5.2 Matériaux à gradient de porosité	9
1.5.3 Matériaux à gradient microstructural	10
1.6 Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel	10
1.6.1 L'industrie aérospatiale	12
1.6.2 Domaine d'énergie	12
1.6.3 Domaine biomédical	13
1.6.4 Domaine militaire	14
1.6.5 Domaine maritime	14
1.6.6 Domaine sportif	14
1.6.7 Autres applications	14
1.7 Avantages et inconvénients des matériaux à gradient des propriétés	15
1.7.1 Avantages des FGM	15
1.7.2 Avantages supplémentaires des FGM	16
1.7.3 Inconvénients des FGM	16
1.7.3.1 Fabrication complexe et coûteuse	16

1.7.3.2	Modélisation et simulation difficiles	16
1.7.3.3	Normalisation et certification	17
1.7.3.4	Coût élevé	17
1.7.3.5	Disponibilité limitée	17
1.8	Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel	17
1.8.1	Les métaux	17
1.8.2	Les céramiques	18
1.9	Différences entre FGM et matériaux composites traditionnels	18
1.10	Conclusion	20
2	Calculs analytiques	21
2.1	Introduction	21
2.2	Partie analytique	21
2.2.1	loi exponentielle	21
2.2.2	Coordonnées spherique	22
2.2.3	Vecteur déplacement	22
2.2.4	Expressions du gradient Spherique	23
2.2.5	Tenseur de déformation	23
2.2.6	Equation de quantité de mouvement	23
2.3	Propriétés Mécaniques d'une Sphère Creuse en Matériau Fonctionnellement Gradient	29
2.4	Conclusion	30
3	Résultats et discussions	31
3.1	Introduction	31
3.2	Analyse des Variations de Pression Cas n°1	31
3.3	Analyse des Variations de Pression Cas n°2	34
3.4	Analyse des Variations de Pression Cas n°3	37
3.5	Analyse des Variations de Pression Cas n°4	39
3.6	Analyse des Variations de Pression Cas n°5	42
3.7	Analyse des Variations de Pression Cas n°6	45
3.8	Analyse des Variations de Pression Cas n°7	48
3.9	Analyse des Variations de Pression Cas n°8	51
3.10	Comparaison Détaillée	54
3.10.1	Précision et Adaptation	54
3.10.2	Applications Pratiques	54
3.10.3	Complexité de Calcul	55

3.11 Conclusion	55
Bibliographie	59
Résumé	59

Table des figures

1.1	Une vue de la microstructure des FGM.	3
1.2	La distribution composante des matériaux : à gauche, un matériau plan composé, au centre, un matériau relié, et à droite, un matériau à gradient de propriétés.	4
1.3	Schéma d'un système de matériau à gradient de propriété (FGM). . .	5
1.4	Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.	6
1.5	Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées.	8
1.6	À gauche le schéma d'un FGM à porosité graduée, à droite une image montrant la porosité graduelle d'un os.	9
1.7	Schéma d'une microstructure graduée.	10
1.8	Domaines d'application des trois types de matériaux à gradient fonctionnelle	11
1.9	Produits en matériaux FGM utilise dans aérospatiale.	12
1.10	Réacteur nucléaire.	13
1.11	Application du FGM dans la biomédicaux.	13
1.12	FGM "les fractions de volume graduées dans la direction verticale" . .	19
1.13	Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels	19
2.1	Configuration d'un Sphérique FGM sous pression.	22
2.2	Demi sphère creuse.	29
3.1	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	32
3.2	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	32
3.3	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	33
3.4	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de exponentielle).	34
3.5	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	35
3.6	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	35
3.7	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	36

3.8	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	36
3.9	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	37
3.10	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	38
3.11	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	38
3.12	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	39
3.13	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	40
3.14	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	40
3.15	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	41
3.16	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	42
3.17	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	43
3.18	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	43
3.19	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	44
3.20	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	45
3.21	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	46
3.22	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	46
3.23	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	47
3.24	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	48
3.25	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	49
3.26	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	49
3.27	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	50
3.28	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	51
3.29	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	52
3.30	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	52
3.31	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).	53
3.32	Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).	54

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	6
-----	---	---

NOMENCLATURE

FGM : Les matériaux à gradient fonctionnel.

r : Rayon.

R_i : Rayon intérieur (m).

R_e : Rayon extérieur(m).

E_{in} : Module de Young homogène (G Pa).

$E(r)$: Module de Young non homogène (G Pa).

P_{in} : Pression interne (M Pa).

P_{ex} : Pression externe (M Pa).

ν : Coefficient de Poisson.

σ_{rr} : Contrainte radiale (M Pa).

$\sigma_{\theta\theta}$: Contrainte circonférentielle (M Pa).

$\sigma_{\varphi\varphi}$: Contrainte axiale (M Pa).

$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}$: Contraintes de cisaillement (M Pa).

ε_{rr} : Déformation radiale.

$\varepsilon_{\theta\theta}$: Déformation circonférentielle.

$\varepsilon_{\varphi\varphi}$: Déformation axiale.

r_u : Déplacement radial(m).

$\xi \eta \psi$: Constantes de non homogénéité

A et B : Constante de calcul.

α : Constantes de calcul.

$\varepsilon_{\theta\varphi}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{r\theta}$:Déformation de cisaillement

Introduction générale

Dans le domaine du génie mécanique, les matériaux jouent un rôle crucial dans le développement et l'optimisation des dispositifs et structures. Parmi les matériaux innovants, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) se distinguent par leurs propriétés uniques et leur capacité à répondre aux exigences spécifiques des applications modernes. Ce mémoire se concentre sur l'étude analytique d'une sphère FGM sous pression, avec une application particulière dans le domaine biomédical.

Dans le premier chapitre, nous présentons une vue d'ensemble des matériaux à gradient fonctionnel. Nous commençons par définir les FGM et explorer leur concept, leur historique et les différents types existants. Ensuite, nous discutons des domaines d'application des FGM, y compris l'aérospatiale, l'énergie, le biomédical, le militaire, le maritime et le sportif. Nous abordons également les avantages et les inconvénients des FGM, ainsi que leurs propriétés effectives et les différences par rapport aux matériaux composites traditionnels.

Ce deuxième chapitre est dédié aux calculs analytiques nécessaires pour comprendre le comportement d'une sphère FGM sous pression. Nous décrivons les méthodes mathématiques et les équations utilisées pour modéliser les propriétés mécaniques et thermiques des FGM. Une attention particulière est accordée aux lois de distribution des matériaux et aux expressions des gradients, des tenseurs de déformation et des équations de mouvement.

Dans ce dernier chapitre, nous présentons et discutons les résultats obtenus à partir des calculs analytiques. Nous analysons plusieurs cas d'étude pour illustrer les variations de pression à travers la paroi de la sphère FGM. Nous comparons les résultats obtenus avec différentes lois de distribution des matériaux et discutons de leur précision, de leur adaptation et de leurs applications pratiques. Nous abordons également les complexités de calcul rencontrées et leurs implications pour la modélisation des FGM.

1

Généralités sur les matériaux FGM

1.1 Introduction

La capacité à comprendre et à manipuler les matériaux a été fondamentale pour notre développement technique au fil du temps. Aujourd'hui, les scientifiques et les ingénieurs reconnaissent l'importance d'une utilisation innovante des matériaux pour des raisons économiques et environnementales [27].

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sont des matériaux techniques avancés conçus pour une performance ou une fonction spécifique, dans lesquels une gradation spatiale de la structure et/ou de la composition permet d'obtenir des propriétés sur mesure. Cela se produit en fournissant des compositions, des microstructures et des propriétés graduées en profondeur [27].

Les FGM ne sont pas une nouveauté dans la nature. À l'instar de nombreux autres matériaux fabriqués par l'homme, les matériaux naturels à classement fonctionnel, tels que le bambou, sont utilisés depuis des milliers d'années dans la décoration et la construction. [5], ont étudié les implications théoriques des matériaux composites à structure graduelle en 1972. Cependant, en raison des procédés de fabrication limités disponibles à l'époque, le développement des matériaux à structure graduelle a été retardé. Dix ans plus tard, le terme scientifique "matériau à gradation fonctionnelle" a été introduit pour la première fois au Japon en 1984 pour le développement et l'implication des matériaux de barrière thermique. L'intérêt pour les MGF s'est récemment accru en raison de la capacité à produire des matériaux aux propriétés adaptées, qui conviennent à de nombreuses applications de haute technologie telles que l'aérospatiale, la bio-ingénierie et l'industrie nucléaire. Ainsi, le nombre de publications dans ce domaine de recherche a augmenté de façon exponentielle au cours des 20 dernières années .

Les FGM sont souvent fabriqués dans une distribution spatiale spécifique des phases constitutives telles que les métaux, les céramiques et les polymères sous une variation continue et subtile de la composition. L'obtention de morphologies et de

propriétés structurelles sur mesure, telles que le gradient physique et mécanique dans une direction spécifique, est le principal avantage des FGM par rapport aux autres composites.

1.2 Définition des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites qui ont des propriétés mécaniques variables suivant une fonction dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de la plaque. Leurs microstructures et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux [15].



FIGURE 1.1 – Une vue de la microstructure des FGM.

L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux. Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement sous diverses sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Etant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères. Les matériaux fonctionnellement gradués qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce

sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées autrement dit ils ont une variation continue des propriétés matériels d'une surface à une autre. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre, ils sont fabriqués en mélangeant les particules des phases de deux matières différentes, par exemple, métal et céramique.

1.3 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes spatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevée en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément. Les applications balistiques de cette classe des matériaux sont également très attrayantes [9].



FIGURE 1.2 – La distribution composante des matériaux : à gauche, un matériau plan composé, au centre, un matériau relié, et à droite, un matériau à gradient de propriétés.

En général, les différentes combinaisons matérielles utilisées dans la fabrication des matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont des coefficients de dilatation thermique différents qui peuvent conduire à la génération des contraintes résiduelles

significatives chaque fois que la pièce est exposée à un cycle thermique (par exemple, pendant le traitement). Des contraintes résiduelles sont généralement considérées comme une nuisance ou même un danger potentiel pour l'intégrité de la pièce. Dans certains cas, toutefois, elles peuvent avoir un effet bénéfique sur les performances d'un composant. Un certain nombre de concepts bien définis sont disponibles qui permettent à l'ingénieur de parvenir à un tel état de contrainte résiduelle avantageux. Le concept de FGM offre une méthode alternative pour concevoir une pièce bien défini, construit en état de contrainte. En adaptant judicieusement la composition et la microstructure, les contraintes thermiques peuvent être dispersés ou réduits au minimum pendant le cycle de traitement et l'utilisation en service. Alternativement, ils peuvent même être utilisés pour augmenter les performances d'une pièce, par exemple, par la génération des contraintes compressives sur la surface [9].

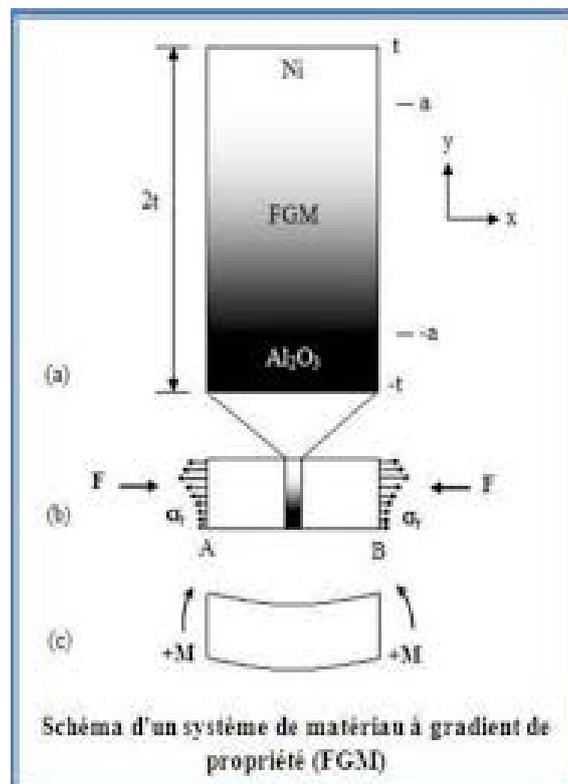


FIGURE 1.3 – Schéma d'un système de matériau à gradient de propriété (FGM).

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau 1.1.

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> — Bonne résistance thermique. — Bonne résistance à l'oxydation. — Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> — Élimination des problèmes de l'interface. — Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> — Bonne résistance mécanique. — Conductivité thermique élevée. — Très bonne ténacité.

TABLE 1.1 – Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

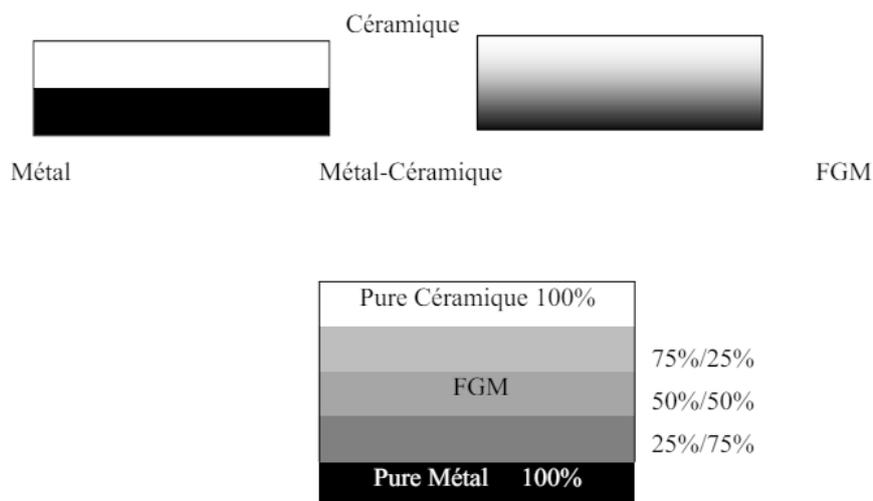


FIGURE 1.4 – Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

1.4 Historique

Le concept de matériaux gradués de manière fonctionnelle (FGM) a été proposé au Japon avant d'autres pays. Le concept est devenu un thème important du domaine de la recherche sur les matériaux depuis qu'une idée originale a été inventée par un groupe de recherche dans la banlieue de Sendai en 1984, et les activités de recherche se sont étendues non seulement au Japon, mais dans le monde entier. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de

développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [23]. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C . Avant cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau coté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température). À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur optique . En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques... etc. En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermo-nucléaire . A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique [18].

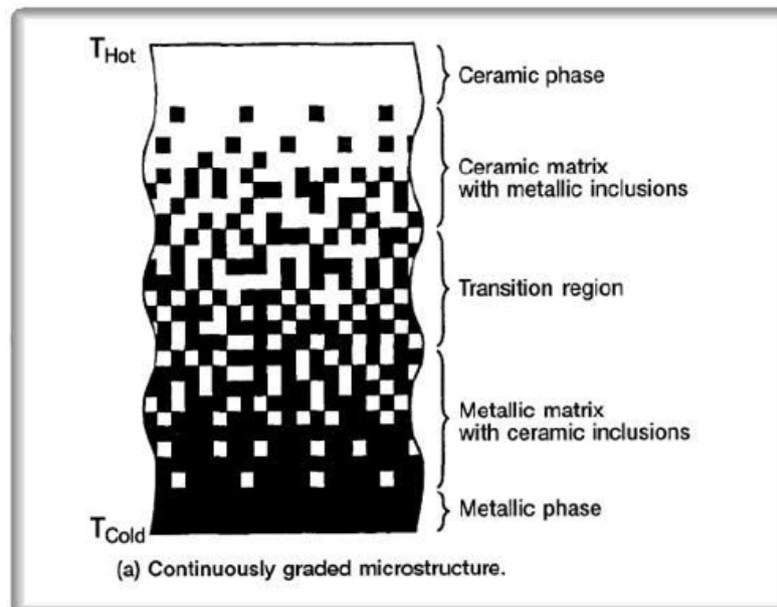


FIGURE 1.5 – Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées.

1.5 Types de matériaux FGM

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné le développement de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types de FGM qui sont actuellement produits comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM, et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté dans les sections suivantes.

1.5.1 Matériaux à gradient de composition chimique

Il s'agit du type de FGM qu'on va traiter en détail dans ce mémoire, où la composition chimique varie progressivement, en fonction du rayon dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multiphasé. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage. Le changement progressif de la distribution des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau à gradient fonctionnel. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté serait soluble dans une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé, mais avec une composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins commun. Les matériaux classés de façon fonctionnelle les

plus couramment utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multiphasique . Les phases et la composition chimique sont faites pour varier à travers le volume du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideraient à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçu. Les différentes phases qui sont produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions d'élaborations, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. En métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre couche par couche la composition de poudre requise, puis le compactage de la poudre et ensuite le frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieraient en fonction de la position dans le volume du matériau à gradient fonctionnel. Il en existe deux autres types qui seront cités ci-dessous[4].

1.5.2 Matériaux à gradient de porosité

Le matériau à gradient fonctionnel de gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer par rapport à une direction dans le matériau. La forme et la taille des pores sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnel. Ce type de matériau fonctionnel est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer consiste en une porosité graduelle fonctionnelle, et la porosité graduelle aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de cicatrisation de cet implant, et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée aide également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour qu'il corresponde à celui du tissu humain. La porosité graduée aide à réduire la densité du bio-implant. Ceci est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain figure 1.6 [16].

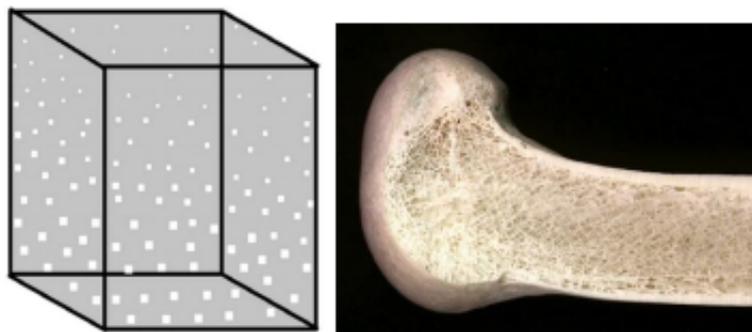


FIGURE 1.6 – À gauche le schéma d'un FGM à porosité graduée, à droite une image montrant la porosité graduelle d'un os.

1.5.3 Matériaux à gradient microstructural

Le matériau à gradient fonctionnel microstructural est un autre type de FGM, où la microstructure est adaptée de sorte que les différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer graduellement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue au cours du processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. On laisse refroidir lentement le noyau du même matériau, ce qui aiderait à produire différentes microstructures de celles situées. Un diagramme schématique d'une microstructure typiquement graduée est présenté à la Figure 1.7 [19].

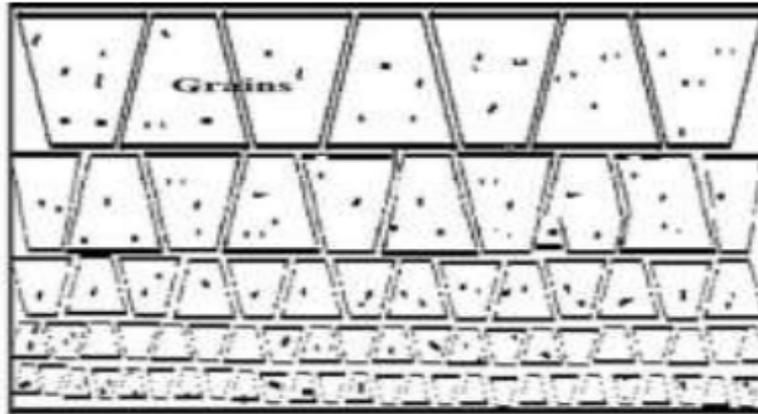


FIGURE 1.7 – Schéma d'une microstructure graduée.

La microstructure graduée entraînerait un changement progressif des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau.

Les FGM à gradient microstructural trouvent leur application dans des composants qui doivent avoir une surface très dure pour résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact élevé qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau fonctionnellement gradué comprend l'acier cémenté, les cames ou les couronnes, les paliers ou arbres et les applications de turbine. Les domaines d'application des différents types de FGM sont présentés dans la section suivante.

1.6 Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel

Les caractéristiques importantes des FGM les ont favorisées dans presque tous les domaines d'activité humaine. Des matériaux fonctionnellement calibrés sont actuellement utilisés dans un certain nombre d'industries, avec un potentiel énorme à utiliser dans d'autres applications à l'avenir. Les applications actuelles et l'application futuriste de la FGM sont présentées dans cette section. Les domaines d'application actuels sont l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense, l'électricité / électronique, l'énergie, la marine, l'optoélectronique et la thermoélectronique. La figure

montre les différents types de FGM et leurs domaines d'application. L'utilisation des FGMs est très prometteuse dans les applications où les conditions de fonctionnement sont difficiles, par exemple pour les revêtements résistants à l'usure utilisés dans l'industrie minière, les boucliers thermiques, les composants des moteurs thermiques, les échangeurs de chaleur, les revêtements de plasma pour les réacteurs de fusion dans les réacteurs nucléaires, et pour les générateurs thermoélectriques et dans les applications d'isolation électrique [3].

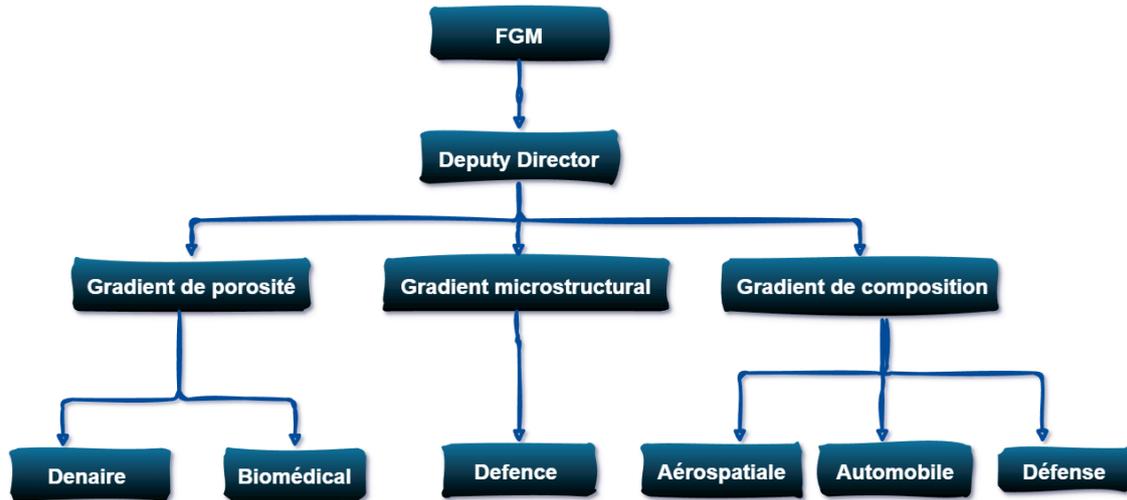


FIGURE 1.8 – Domaines d'application des trois types de matériaux à gradient fonctionnelle

Les matériaux à gradation fonctionnel sont également idéaux pour réduire le désaccord entre les propriétés thermomécaniques de la liaison métal-céramique qui aide à prévenir le décollement. Les demandes futures pour des matériaux fonctionnalisés sont dans de telles applications, où des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques extraordinaires sont requises, et qui doivent être capables de supporter des environnements de travail sévères.

Ces futurs domaines d'application potentiels comprennent des applications où les applications structurelles et d'ingénierie nécessitent une combinaison de fonctions incompatibles, telles que la dureté et la ténacité. Les futurs domaines d'application des matériaux fonctionnels seront également étendus, lorsque les coûts de production de ces matériaux d'ingénierie importants sont réduits. Bien que certaines applications soient plus intéressées par la fiabilité du FGM que par le coût de telles matières, ces industries comprennent l'aérospatiale et l'énergie nucléaire. D'autre part, le coût de production de qualité fonctionnelle les matériaux sont importants dans certaines applications telles que les outils de coupe, les pièces de machine et les composants du moteur.

L'utilisation de matériaux fonctionnels est maintenant considérée comme l'un des matériaux les plus importants, efficaces et efficients pour promouvoir le développement durable dans les industries. Certaines de ces applications, telles que l'aérospatiale l'automobile, le biomédical, la défense, l'énergie et l'industrie maritime, sont présentées et expliquées dans les sous-sections suivantes [2].

1.6.1 L'industrie aérospatiale

Le concept d'un matériau FGM fit son apparition dans ce domaine où le but était de concevoir un matériau apte à résister à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques (Muller, 2013). Par exemple, le centre de recherche de la NASA a conçu des supports de fixation en FGM pour des navettes spatiales permettant de relier le réservoir au fuselage (Figure 1.23a). Ils ont trouvé que pendant les phases de vol, la température du fuselage peut atteindre les 1000°C tandis que celle du réservoir est proche des 400°C. Donc, La création de ces supports de fixation en utilisant un gradient de matériau d'un alliage base Titane à un alliage base Nickel-Chrome, doit leur permettre de supporter ces contraintes thermiques en limitant les efforts de cisaillement et de flexion qui impactent leur durée de vie [9].

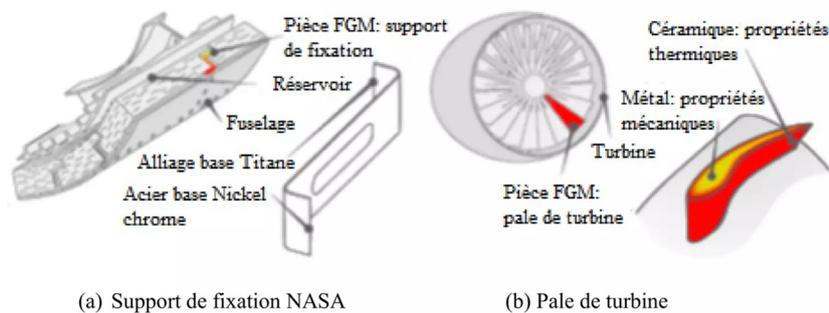


FIGURE 1.9 – Produits en matériaux FGM utilisés dans l'aérospatiale.

1.6.2 Domaine d'énergie

Les industries de l'énergie ont constamment besoin de différents types de matériaux fonctionnels, afin d'améliorer l'efficacité de certains de leurs équipements. Parmi les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie de l'énergie, citons la paroi interne des réacteurs nucléaires (Figure 1.10), le convertisseur thermo-électrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et récipients sous pression, l'électrode graduée pour la production de combustible à oxyde solide, les matériaux piézo-électriques à gradient fonctionnel pour le transducteur à ultrasons, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements de pale de turbine, et pour les revêtements à barrière thermique [27].

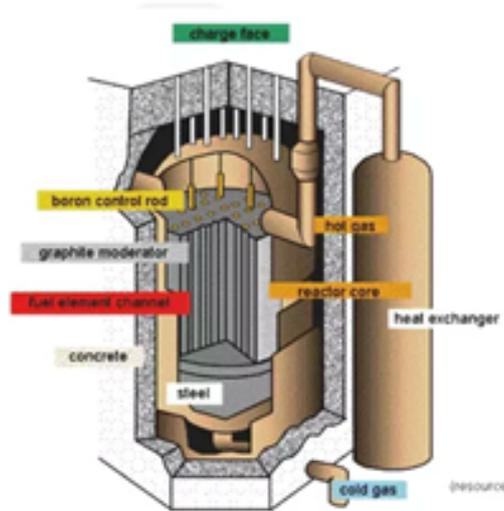


FIGURE 1.10 – Réacteur nucléaire.

1.6.3 Domaine biomédical

La technologie des FGM a été utilisée aussi dans le domaine biomédical où elle a trouvé un large éventail d'applications dans le domaine dentaire et orthopédique pour le remplacement des dents et des os comme les implants dentaires, les prothèses de hanche (Figure 1.11) et les os artificiels. De nombreux chercheurs ont rapporté que les FGM pouvaient donner aux implants une solidité suffisante pour supporter la charge physiologique, et que la structure à porosité graduée pouvait améliorer les propriétés mécaniques de l'implant pour optimiser la réponse du matériau à la charge externe [25]. Par exemple, pour les implants dentaires (Figure 1.24b) formé à partir d'un FGM en titane/hydroxyapatite (Ti/HAP) présentaient une bonne biocompatibilité et une bonne résistance mécanique [26]. Aucune inflammation n'a été observée dans les implants dentaires traditionnels en Ti pur et dans les implants améliorés en Ti/HAP MGF après huit semaines. Mais les implants Ti/HAP MGF ont montré une meilleure Biocompatibilité pour les os nouvellement formés [1].

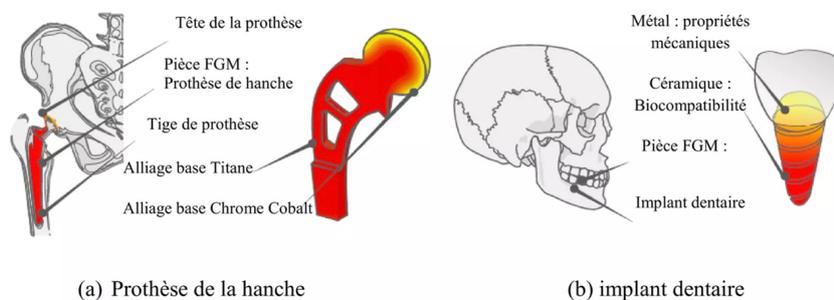


FIGURE 1.11 – Application du FGM dans la biomédicaux.

1.6.4 Domaine militaire

L'aptitude des matériaux FGM à fournir des propriétés de résistance à la pénétration en empêchant la propagation des fissures est une caractéristique attractive qui les rend très utiles dans l'industrie de la défense. Ils sont utilisés dans des applications telles que les gilets pare-balles, les plaques d'armure et récemment dans véhicules blindés [13].

1.6.5 Domaine maritime

Les matériaux fonctionnellement gradués trouvent également leur application dans l'industrie maritime. Ils ont été utilisés dans l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression [10] [6].

1.6.6 Domaine sportif

Les matériaux composites répondent bien aux exigences sportives, malgré un coût relativement élevé, divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de Baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques..etc. Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports ([14].

1.6.7 Autres applications

On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique [21], de la chimie, ou de la production d'outillage [28]. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive et on imagine qu'au fur et à mesure des avancées scientifiques .

L'appropriation de ce type de structure par les concepteurs permettra encore de l'élargir. Effectivement, les possibilités de combinaison sont en théorie quasiment illimitées et chaque combinaison forme une structure avec des propriétés spécifiques. On peut donc penser que les structures en matériaux FGM vont transformer en profondeur le monde de la conception en augmentant considérablement les possibilités dans l'étape stratégique du choix des matériaux [8]. Le domaine d'application des matériaux fonctionnellement gradués devrait [20] [12].

1.7 Avantages et inconvénients des matériaux à gradient des propriétés

1.7.1 Avantages des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) se démarquent par leur capacité à offrir des propriétés variables en différents points du matériau. Cette caractéristique unique leur confère de nombreux avantages par rapport aux matériaux homogènes traditionnels et aux simples revêtements :

Propriétés sur mesure

Contrairement aux matériaux homogènes, les FGM permettent d'ajuster progressivement la composition, la microstructure et les propriétés mécaniques à travers le matériau. Cela offre une flexibilité de conception inégalée, permettant de répondre à des exigences spécifiques et complexes en un seul composant [7] [24].

Performances améliorées

- Grâce à leur structure à gradient, les FGM surpassent souvent les performances des matériaux homogènes dans des applications critiques. Ils présentent une résistance accrue à la chaleur.
- Une meilleure résistance à l'usure
- Une résistance accrue à la fatigue
- Une meilleure résistance à la corrosion

Généralement, ces propriétés les rendent idéaux pour des environnements exigeants [7].

Optimisation du poids

Dans certains cas, les FGM peuvent conduire à des conceptions plus légères. La distribution optimisée des propriétés permet de cibler les zones de sollicitation mécanique élevée tout en réduisant le poids dans les zones moins critiques. Cela s'avère crucial dans des domaines comme l'aéronautique et le spatial, où chaque kilogramme compte [7].

Fonctionnalités accrues

Les FGM ne se limitent pas aux propriétés mécaniques classiques. Ils peuvent être conçus pour intégrer des fonctionnalités supplémentaires, telles que [7] :

- Conductivité thermique ou électrique spécifique
- Capacités de détection et d'actionnement
- Propriétés biocompatibles pour les applications médicales

Durabilité accrue

La résistance supérieure des FGM à l'usure, à la fatigue et à la corrosion se traduit par une durée de vie prolongée des composants et une réduction des besoins en maintenance. Cela représente des avantages économiques et environnementaux considérables [7].

1.7.2 Avantages supplémentaires des FGM

Outre leur fonction principale, les FGM présentent des avantages supplémentaires liés à l'absence d'interface nette entre les différents constituants :

- **Réduction des contraintes thermiques** causées par les différences de dilatation thermique des matériaux.
- **Meilleur contrôle des contraintes** grâce à la répartition continue des propriétés.
- **Cohésion interfaciale renforcée** entre les matériaux, évitant les décollements et les fissures.
- **Extension de la zone de déformation plastique** avant rupture, améliorant la résistance.

Malgré leurs nombreux avantages, il est important de noter que les FGM présentent également des défis en termes de fabrication, de modélisation et de coût. Cependant, les recherches et développements continus visent à surmonter ces obstacles et à faire des FGM des matériaux de choix pour l'avenir [7].

1.7.3 Inconvénients des FGM

Malgré leurs nombreux avantages, les matériaux à gradient de propriétés (FGM) présentent également certains inconvénients qu'il faut prendre en compte :

1.7.3.1 Fabrication complexe et coûteuse

- La fabrication de FGM est plus complexe et coûteuse que celle des matériaux homogènes traditionnels.
- Le contrôle précis du gradient de composition et de microstructure tout au long du matériau nécessite des techniques de fabrication avancées, telles que le dépôt physique en phase vapeur (PVD), le frittage spark plasma (SPS) et l'infiltration par fusion.
- Ces techniques peuvent être lentes, nécessiter des équipements spécialisés et des matériaux de départ onéreux [7].

1.7.3.2 Modélisation et simulation difficiles

- La modélisation et la simulation précises du comportement des FGM sont essentielles pour optimiser leur conception et leurs performances.

- La présence d'un gradient de propriétés rend difficile la prédiction du comportement mécanique et thermique du matériau, nécessitant des modèles et des outils de simulation sophistiqués [7].

1.7.3.3 Normalisation et certification

- L'absence de normes et de procédures de certification établies pour les FGM peut freiner leur adoption dans des applications critiques.
- Il est important de développer des normes et des procédures de test pour garantir la qualité, la fiabilité et la sécurité des FGM destinés à des applications exigeantes [7].

1.7.3.4 Coût élevé

- En raison de la fabrication complexe et des exigences de modélisation et de simulation, le coût final des FGM peut être plus élevé que celui des matériaux homogènes traditionnels.
- Ce coût élevé peut limiter leur adoption dans certaines applications où le facteur économique est primordial [7].

1.7.3.5 Disponibilité limitée

- Certains types de FGM peuvent encore être difficiles à trouver ou à produire en grandes quantités.
- La disponibilité limitée des FGM peut constituer un obstacle pour leur utilisation à grande échelle.

En résumé, les inconvénients des FGM se situent principalement au niveau de la fabrication, de la modélisation, de la normalisation, du coût et de la disponibilité. Cependant, les recherches et développements continus visent à surmonter ces défis et à rendre les FGM plus abordables et plus faciles à produire [11].

1.8 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Les FGM peuvent fusionner des caractéristiques incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux, sans subir de contraintes thermiques internes sévères. Elles sont souvent composées de céramiques et de métaux choisis en fonction des propriétés physiques de chaque matériau [7].

1.8.1 Les métaux

Lorsque la majorité des éléments chimiques du tableau de Mendeleïev sont des métaux, ils offrent plusieurs avantages :

- Excellente conductivité thermique
- Excellente conductivité électrique
- Généralement durs et rigides
- Capables de déformation plastique
- Nombreux ont une température de fusion élevée.

Parmi les métaux les plus couramment utilisés figurent le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium [7].

1.8.2 Les céramiques

Les céramiques sont en général, des matériaux très durs, résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) et non métalliques dont le plus courant est l'oxygène. Ils sont largement utilisés comme abrasifs et typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.), caractérisés par leurs comportements réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées. Alors qu'ils ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques importants. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit [17] :

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion.
- Haute température de fusion ou de décomposition.
- Haut module d'élasticité et haute dureté.
- Charge à la rupture élevée.
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.
- Conservation des propriétés à haute température.
- Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques).
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

1.9 Différences entre FGM et matériaux composites traditionnels

Les matériaux à gradient de propriétés attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble et la distribution composante est graduée sans interruption (voir figure). Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de céramique à la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures du côté céramique [7].

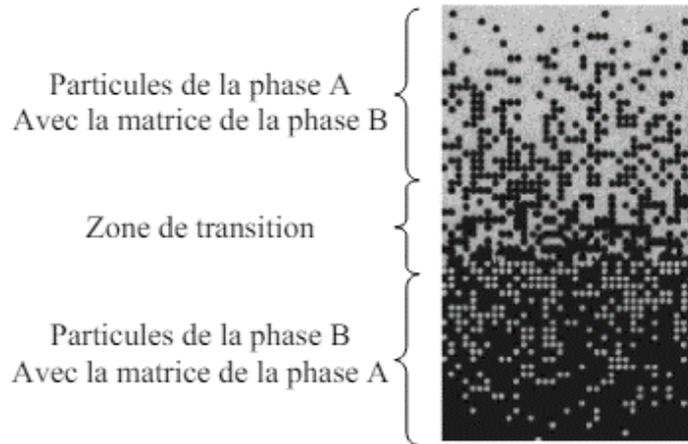


FIGURE 1.12 – FGM "les fractions de volume graduées dans la direction verticale"

Donc ces matériaux sont donc des matériaux composites avancés avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure 1.13.

Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	Éléments constitutifs: Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre ◆		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

FIGURE 1.13 – Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels .

1.10 Conclusion

Le chapitre sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM) commence par une définition des FGM et met en avant leur capacité unique à varier graduellement leurs propriétés d'un point à un autre. Il explore la diversité des FGM en termes de compositions et de variations de propriétés, soulignant leur capacité à combiner les avantages des matériaux composites tout en minimisant leurs inconvénients. Les applications des FGM, allant de l'aérospatiale à la biomédecine, sont également discutées en détail, mettant en lumière leur adaptabilité et leurs performances personnalisées. Le chapitre conclut par une comparaison avec les composites conventionnels, soulignant les avantages spécifiques des FGM en termes de performance et de polyvalence.[22].

2

Calculs analytiques

2.1 Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont des matériaux composites non homogènes dont les propriétés mécaniques varient de manière continue dans l'espace. Grâce à l'absence d'interfaces distinctes entre leurs constituants, ces matériaux présentent des avantages significatifs pour diverses applications. Les propriétés mécaniques des FGM sont obtenues en faisant varier de manière continue les fractions volumiques de leurs composants. Récemment, ces matériaux ont attiré beaucoup d'attention en raison de leurs bénéfices dans plusieurs secteurs industriels. Ils sont principalement utilisés pour améliorer la résistance à l'usure et à l'oxydation, créer des matériaux blindés légers avec une haute efficacité balistique (comme pour les navettes spatiales), et offrir une résistance élevée aux hautes températures (utilisés dans les turbomachines aéronautiques ou terrestres)[7].

2.2 Partie analytique

Le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique du matériau FGM ont été définis pour obéir à une loi de puissance comme suit :

$$E(r) = E_{in} \cdot \left(\frac{r}{R_i} \right)^\alpha . \quad (2.1)$$

2.2.1 loi exponentielle

$$E(r) = E_{in} \cdot \exp \left(1 - \left(\frac{r}{R_i} \right)^\alpha \right) \quad (2.2)$$

2.2.2 Coordonnées sphérique

Une sphère est constituée d'un matériau à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM) avec un rayon intérieur Ri et un rayon extérieur Re .

Elle est soumise à une pression intérieure Pin et une pression extérieure Pe . On suppose que le coefficient de Poisson ν est constant.

Repère local : $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$

$$U = \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_\phi \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

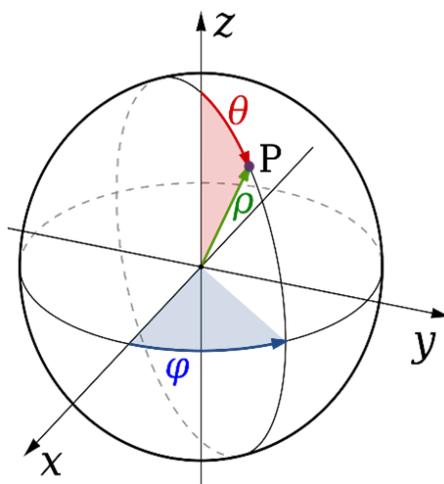


FIGURE 2.1 – Configuration d'un Sphérique FGM sous pression.

2.2.3 Vecteur déplacement

Équations de Lamé dans un solide à gradient de propriétés soit \vec{U} le vecteur des déplacements en coordonnées sphérique (r, θ, ϕ)

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

- ϵ le tenseur des déformations, Il représente toutes les déformations homogènes.
- λ et μ sont les paramètres de Lamé et ν le coefficient de poisson, avec :

$$\mu(r) = \frac{E(r)}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda(r) = \frac{E(r) \cdot \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (2.5)$$

2.2.4 Expressions du gradient Spherique

$$\overline{\text{grad}} \vec{u} = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right) \quad (2.6)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\overline{\text{grad}} \vec{u}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \phi} & \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} & \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.2.5 Tenseur de déformation

— ϵ le tenseur des déformations, Il représente toutes les déformations homogènes. Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{r\phi} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta\phi} \\ \epsilon_{\phi r} & \epsilon_{\phi\theta} & \epsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

— Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{u} + \overline{\text{grad}} \vec{u}^T). \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial \phi} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} & 2 \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

2.2.6 Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \epsilon_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\epsilon_{rr} - \epsilon_{\theta\theta}}{r} = 0.$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \epsilon_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\epsilon_{\theta r}}{r} = 0. \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \epsilon_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\epsilon_{\phi r}}{r} = 0.$$

Le déplacement dans la direction r est noté. Deux composants de la déformation peuvent être exprimés :

$$\begin{cases} \epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{r\phi} = \epsilon_{\theta\phi} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Où ϵ_r et ϵ_θ sont des déformations radiales et circonférentielles

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

La symétrie du problème nous impose d'utiliser le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . L'équation d'équilibre s'écrit en l'absence des forces de volume de la manière suivante :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0. \quad (2.15)$$

Où σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont les composantes radiale et circonférentielle du tenseur des contraintes de Cauchy.

Élasticité linéaire : les effets non-linéaires ne sont pas pris en compte. Le comportement du matériau est alors représenté par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{ll}\delta_{ij}. \quad (2.16)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0.$$

$$\epsilon_{ll} = \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi}.$$

Les composantes du tenseur des contraintes sont les suivantes :

$$\sigma_{rr} = 2\mu\epsilon_{rr} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi}).$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu\frac{\partial u_{rr}}{\partial r} + \lambda\left(\frac{\partial u_{rr}}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_r}{r}\right). \quad (2.18)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u_{rr}}{\partial r}(2\mu + \lambda) + 2\lambda\frac{u_r}{r}.$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\epsilon_{\theta\theta} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi}).$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_{rr}}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_r}{r} \right). \quad (2.19)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} (2\mu + 2\lambda) + \lambda \frac{\partial u_{rr}}{\partial r}.$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 2\mu \epsilon_{\phi\phi} + \lambda (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{\phi\phi}).$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_{rr}}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_r}{r} \right). \quad (2.20)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} (2\mu + 2\lambda) + \lambda \frac{\partial u_{rr}}{\partial r}.$$

Les composantes du tenseur de contraintes deviennent :

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u_{rr}}{\partial r} (2\mu + \lambda) + 2\lambda \frac{u_r}{r}.$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} (2\mu + 2\lambda) + \lambda \frac{\partial u_{rr}}{\partial r}. \quad (2.21)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} (2\mu + 2\lambda) + \lambda \frac{\partial u_{rr}}{\partial r}.$$

On pose :

$$\lambda(r) = \eta(\nu) \cdot E(r), \quad 2\mu(r) + \lambda(r) = \xi(\nu) \cdot E(r). \quad (2.22)$$

On a :

$$\lambda(r) = \frac{\nu \cdot E(r)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu(r) = \frac{E(r)}{2(1 + \nu)}. \quad (2.23)$$

Sont des constantes de Lamé et le coefficient de poisson.

Avec :

$$\psi(\nu) = \frac{1}{1 + \nu}, \quad \eta(\nu) = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \xi(\nu) = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (2.24)$$

Résoudre l'équation d'équilibre :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0.$$

On a :

$$\sigma_{rr} = (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\partial(2\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2 \left(\frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \frac{\partial \left(\frac{u_r}{r}\right)}{\partial r} \lambda(r) \right).$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\partial(2\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2 \left(\frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \lambda(r) \right)$$

On a :

$$\sigma_{rr} = (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (2\mu(r) + 2\lambda(r)) \frac{u_r}{r} + \lambda(r) \frac{\partial u_{rr}}{\partial r} \quad (2.26)$$

$$\frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \frac{2}{r} \left[(2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right) - (2\mu(r) + 2\lambda(r)) \frac{u_r}{r} + \lambda(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right]$$

$$\frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \frac{2}{r} \left(2\mu(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2\mu(r) \frac{u_r}{r} \right) \quad (2.27)$$

$$\frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 4\mu(r) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - 4\mu(r) \cdot \frac{u_r}{r^2}$$

En remplaçant (2.26), (2.27) et les constantes de Lamé dans l'équation (2.24) on obtient :

$$\left[\frac{\partial(2\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2 \left(\frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \lambda(r) \right) + 4\mu(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - 4\mu(r) \frac{u_r}{r^2} \right] = 0.$$

$$r \frac{\partial(2\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{1}{r} + (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r^2} + 2\lambda(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{1}{r} - 2\lambda(r) \frac{u_r}{r^2} + 4\mu(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - 4\mu(r) \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} & (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(r \frac{\partial(2\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} + \lambda(r) + 4\mu(r) \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{1}{r} \\ & + \left(2r \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} - 2\lambda(r) - 4\mu(r) \right) \frac{u_r}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

On remplace (2.26) dans (2.28) on obtiendra les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left(\frac{r}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} + \frac{2\eta}{\psi + \eta} + \frac{2\psi}{\psi + \eta} \right) r \frac{du_r}{dr} \\
+ \left(\frac{2\eta r}{(\psi + \eta)E(r)} \frac{dE(r)}{dr} - \frac{2\eta}{\psi + \eta} - \frac{2\psi}{\psi + \eta} \right) u(r) = 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

On dérive (2.1) on obtient :

$$\frac{dE(r)}{dr} = \frac{\alpha E(r)}{R_i} \left(\frac{1}{R_i} \right)^{\alpha-1}. \tag{2.30}$$

Ce qui nous permet d'obtenir les calculs suivant :

$$\frac{1}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} = \frac{a}{r}. \tag{2.31}$$

En substituant les équations (2.13) - (2.24) dans (2.15) nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r(\alpha + 2) \frac{du_r}{dr} + \frac{2(\nu\alpha + \nu - 1)}{1 - \nu} u_r = 0. \tag{2.32}$$

La solution de l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_r(r) = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2}$$

A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites ; λ_1 et λ_2 sont les paramètres de l'équation caractéristique :

On a extrait delta de l'équation (2.32).

$$\Delta = (\alpha + 2)^2 - 4 \left(\frac{2(\nu\alpha + \nu - 1)}{1 - \nu} \right)$$

L'équation (2.32) admet deux solution :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\alpha+2}{2} + \frac{1}{2} \left((\alpha + 2)^2 - 4 \left(\frac{2(\nu\alpha + \nu - 1)}{1 - \nu} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_2 = -\frac{\alpha+2}{2} - \frac{1}{2} \left((\alpha + 2)^2 - 4 \left(\frac{2(\nu\alpha + \nu - 1)}{1 - \nu} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

En remplaçant les solutions obtenues dans (2.21), on obtient :

On a :

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u_{rr}}{\partial r} (2\mu(r) + \lambda(r)) + \frac{2\lambda(r)u_r}{r}. \tag{2.33}$$

La dérivée u_r :

$$\frac{du_r}{dr} = \lambda_1 Ar^{\lambda_1-1} + \lambda_2 Br^{\lambda_2-1}. \tag{2.34}$$

$$\sigma_{rr} = \left(\xi(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \right) (\lambda_1 Ar^{\lambda_1-1} + \lambda_2 Br^{\lambda_2-1}) + 2 \left(\eta(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \right) \left(\frac{Ar^{\lambda_1-1} + Br^{\lambda_2-1}}{r} \right). \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left(\xi(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \right) (\lambda_1 Ar^{\lambda_1-1} + \lambda_2 Br^{\lambda_2-1}) \\ &+ 2 \left(\eta(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \right) (Ar^{\lambda_1-1} + Br^{\lambda_2-1}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \xi(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \cdot (\lambda_1 Ar^{\lambda_1-1}) + \xi(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \cdot (\lambda_2 Br^{\lambda_2-1}) \\ &+ 2\eta(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \cdot (Ar^{\lambda_1-1}) + 2\eta(\nu) \cdot \text{Ein} \cdot \left(\frac{r}{R_1} \right)^\alpha \cdot (Br^{\lambda_2-1}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\sigma_{rr} = \left(\frac{E_{in}}{R_1^\alpha} \right) Ar^{\alpha+\lambda_1-1} (\lambda_1 \xi(\nu) + 2\eta(\nu)) + \left(\frac{E_{in}}{R_1^\alpha} \right) Ar^{\alpha+\lambda_2-1} (\lambda_2 \xi(\nu) + 2\eta(\nu)). \quad (2.38)$$

On a :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} (2\mu(r) + 2\lambda(r)) + \lambda(r) \frac{\partial u_{rr}}{\partial r}.$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (Ar^{\lambda_1-1} + Br^{\lambda_2-1}) (\xi(\nu) + \eta(\nu)) E(r) + (\lambda_1 Ar^{\lambda_1-1} + \lambda_2 Br^{\lambda_2-1}) \eta(\nu) E(r).$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_{in}}{R_1^\alpha} Ar^{\alpha+\lambda_1-1} (\xi(\nu) + \eta(\nu)) (\lambda_1 + 1) + \frac{E_{in}}{R_1^\alpha} Br^{\alpha+\lambda_2-1} (\xi(\nu) + \eta(\nu)) (\lambda_2 + 1). \quad (2.39)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \left(\frac{E_{in}}{R_1^\alpha} \right) Ar^{\alpha+\lambda_1-1} (\xi(\nu) + \eta(\nu)) (\lambda_1 + 1) + \frac{E_{in}}{R_1^\alpha} Br^{\alpha+\lambda_2-1} (\xi(\nu) + 2\eta(\nu)) (\lambda_2 + 1).$$

Dans le cas d'une sphère soumise à des pressions interne et externe, les constantes A et B peuvent être déterminées en utilisant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_r = Ri &= pin, \\ \sigma_{rr}|_r = Re &= pex. \end{aligned}$$

L'équation (2.13) conduit à un système linéaire de deux équations à deux inconnues A et B suivant :

$$\left(\frac{E_{in}}{R_1^\alpha} \right) Ar^{\alpha+\lambda_1-1} (\lambda_1 \xi(\nu) + 2\eta(\nu)) + \left(\frac{E_{in}}{R_1^\alpha} \right) Ar^{\alpha+\lambda_2-1} (\lambda_2 \xi(\nu) + 2\eta(\nu)) = -pin.$$

$$\left(\frac{Ein}{Ri^\alpha}\right) Ar^{\alpha+\lambda_1-1}(\lambda_1\xi(\nu) + 2\eta(\nu)) + \left(\frac{Ein}{Ri^\alpha}\right) Ar^{\alpha+\lambda_2-1}(\lambda_2\xi(\nu) + 2\eta(\nu)) = -pex.$$

$$A = \left[\left((\lambda_1\xi(\nu) + 2\eta(\nu)) \frac{Ein}{R_1^\alpha} (R_1^{\alpha+\lambda_1-1} - R_2^{\alpha+\lambda_2-1}) \right)^{-1} \right] \\ * \left[Pe - Pi - (\lambda_1\xi(\nu) + 2\eta(\nu)) \frac{Ein}{R_1^\alpha} B (R_1^{\alpha+\lambda_1-1} - R_2^{\alpha+\lambda_2-1}) \right] \quad (2.40)$$

$$B = \left(\frac{(Pex - Pin)R_i^{\alpha+\lambda_1-1}}{(R_i^{\alpha+\lambda_1-1} - R_e^{\alpha+\lambda_2-1})} - Pin \right) \\ * \left[\frac{(\lambda_1\xi(\nu) + 2\eta(\nu)) \frac{Ein}{R_i^\alpha} R_i^{\alpha+\lambda_1-1} - (\lambda_1\xi(\nu) + 2\eta(\nu)) \frac{Ein}{R_i^\alpha} (R_i^{\alpha+\lambda_1-1} - R_e^{\alpha+\lambda_2-1}) R_i^{\alpha+\lambda_1-1}}{R_i^{\alpha+\lambda_1-1} - R_e^{\alpha+\lambda_2-1}} \right]. \quad (2.41)$$

2.3 Propriétés Mécaniques d'une Sphère Creuse en Matériau Fonctionnellement Gradient

Simuler le comportement mécanique et la distribution des contraintes d'une sphère FGM soumise à des pressions internes et externes, permettant ainsi d'obtenir des résultats analytiques. La modélisation représente une demi-sphère creuse en raison des symétries de la géométrie.

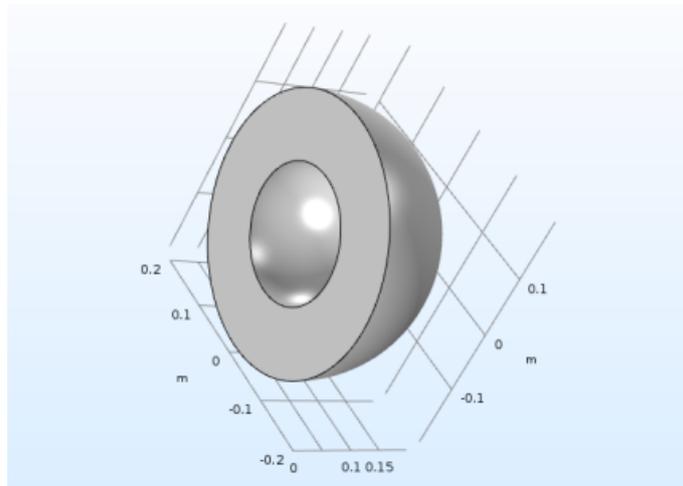


FIGURE 2.2 – Demi sphère creuse.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé une méthode de résolution basée sur l'analyse mathématique pour simuler le comportement mécanique d'une sphère en matériau fonctionnellement gradé (FGM), soumise à des pressions internes et externes. Nous avons exploré deux approches de résolution : une basée sur une loi de puissance et une autre sur une loi exponentielle. Ces méthodes nous ont permis d'évaluer les réponses mécaniques de la sphère, démontrant ainsi la capacité des modèles choisis à représenter fidèlement les variations du matériau FGM sous les conditions de pression étudiées.

3

Résultats et discussions

3.1 Introduction

Dans cette étude, nous analysons les contraintes et les déplacements dans une sphère creuse à gradient de propriétés fonctionnelles (FGM) avec un rayon intérieur de $R_i = 0,1$ m et un rayon extérieur de $R_e = 0,2$ m. Le module d'élasticité à la paroi interne est $E = 200$ GPa et le coefficient de Poisson est constant à $\nu = 0,3$. Les pressions appliquées à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère sont respectivement de 250 MPa , 100 MPa et 50 MPa. Nous avons développé une solution analytique et un modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis (FEM) pour évaluer les distributions de contraintes et de déplacements. Cette étude vise à valider le modèle numérique et à démontrer l'impact de la non-homogénéité des matériaux FGM sur les performances structurelles, fournissant ainsi une base pour optimiser la conception de ces composants.

3.2 Analyse des Variations de Pression Cas n°1

Les pressions internes et externes appliquées sont de 50 MPA et 0 MPA respectivement.

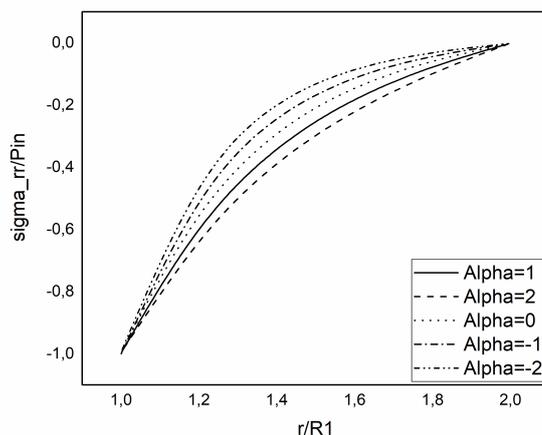


FIGURE 3.1 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

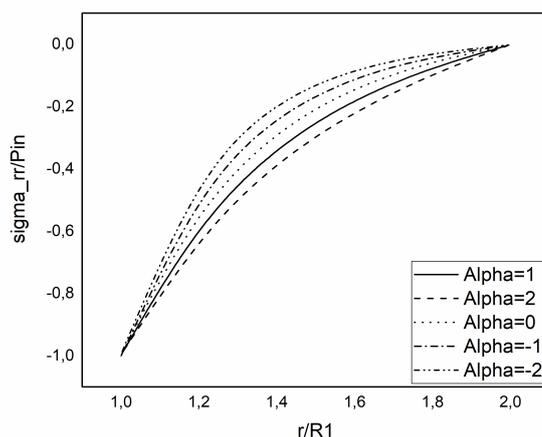


FIGURE 3.2 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

ces deux figure 3.1,figure 3.2 représentent les deux loi de puissance et la exponentielle, illustre comment la contrainte radiale σ_{rr} est répartie en fonction du rayon à La paroi d'une sphère peut être traversée pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$. La contrainte radiale est plus élevée pour des valeurs négatives de α , tandis que pour des valeurs positives de α , la contrainte est plus élevée.

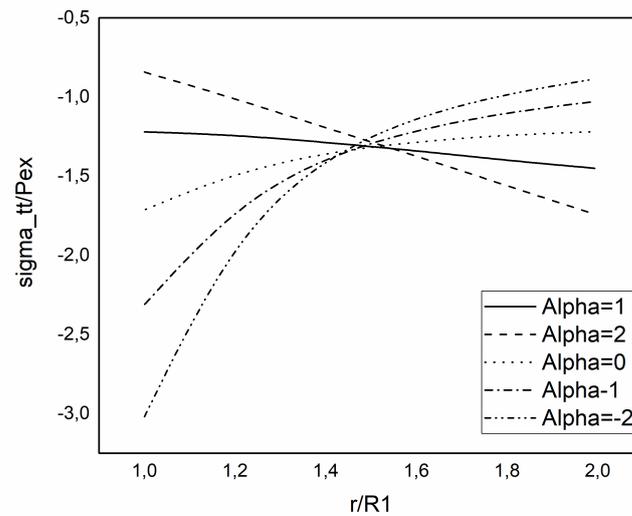


FIGURE 3.3 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

Les résultats montrent que la variation du paramètre α a un impact significatif sur la distribution des contraintes tangentielle, en revanche, décrit une répartition de la contrainte radiale selon une relation non linéaire, souvent de la forme . Les caractéristiques de cette loi incluent : représente la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle pour une pression interne et externe 50 Mpa et 0 Mpa respectivement. Lorsque les valeurs de α sont négatives, la contrainte circonférentielle présente des valeurs inférieures. La paroi intérieure de la sphère présente des éléments importants, puis elle évolue de manière décroissante en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En présence de valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle présente des valeurs plus élevées sur la paroi interne de la sphère, puis augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

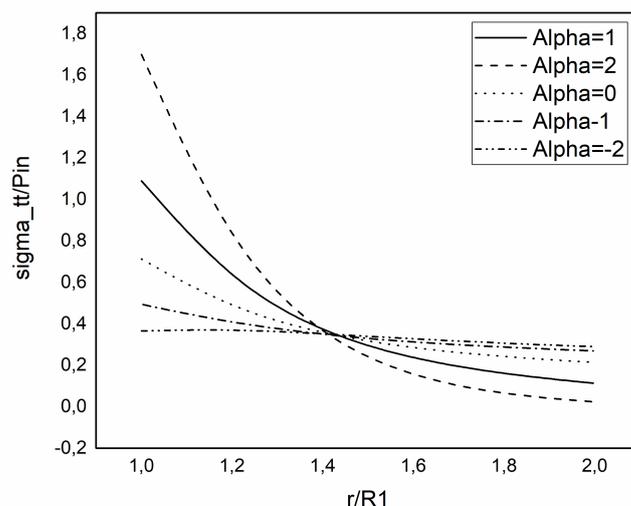


FIGURE 3.4 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de exponentielle).

La figure ci-dessus illustre la variation de la contrainte tangentielle normalisée, décrit la répartition de la contrainte radiale selon une relation non linéaire, souvent de la forme exponentielle. Les caractéristiques de cette loi incluent :

La répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle pour une pression interne de 50 MPa et une pression externe de 0 MPa. Lorsque les valeurs de α sont négatives, la contrainte circonférentielle présente des valeurs inférieures. La paroi intérieure de la sphère présente des contraintes importantes, puis celles-ci diminuent de manière décroissante en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En présence de valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle présente des valeurs plus élevées sur la paroi interne de la sphère, puis augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

3.3 Analyse des Variations de Pression Cas n°2

Les pressions internes et externes appliquées sont de 100 MPa et 0 MPa respectivement.

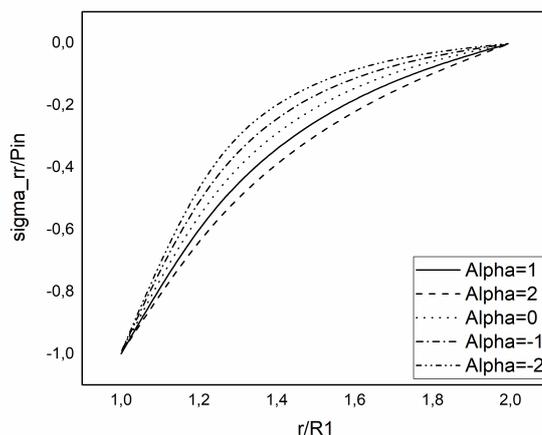


FIGURE 3.5 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.5 montre comment la contrainte radiale σ_{rr} varie dans une sphère selon la loi puissance. décrit la répartition de σ_{rr} en fonction du rayon et du paramètre de non homogénéité, qui prend des valeurs de $(-2, -1, 0, 1, 2)$. La contrainte radiale est plus élevée pour des valeurs négatives de α et augmente également pour des valeurs positives, indiquant que α influence fortement la réponse mécanique d'une sphère.

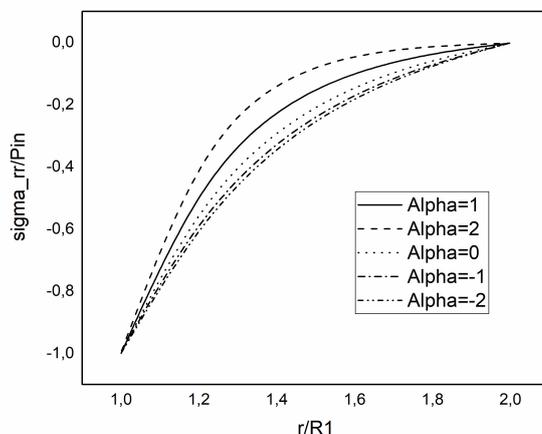


FIGURE 3.6 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.6 représente la loi exponentielle, en revanche, décrit une répartition de la contrainte radiale selon une relation non linéaire, souvent de la forme $\sigma_{rr} = A e^{-\alpha r/R_1}$. Les caractéristiques de cette loi incluent : illustre comment la contrainte radiale σ_{rr} est répartie en fonction du rayon r . La paroi du sphere peut être traversée pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$. La contrainte radiale est plus élevée pour des valeurs négatives de α , tandis que pour des valeurs positives de α , la contrainte est plus élevée.

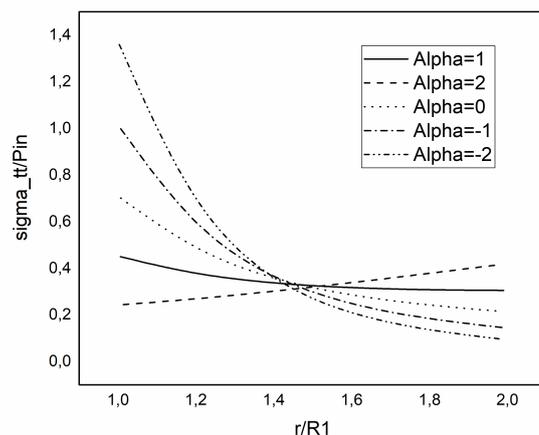


FIGURE 3.7 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.7 illustre la répartition de la contrainte radiale selon une loi de puissance non exponentielle. Cette loi, souvent représentée sous une forme spécifique, décrit la contrainte radiale en fonction de la pression interne et externe de 100 MPa et 0 MPa respectivement. On observe que la contrainte radiale adimensionnelle est plus élevée pour les valeurs négatives de α , tandis qu'elle est plus faible pour les valeurs positives de α . De la paroi interne à la paroi externe de la sphère, la contrainte radiale diminue progressivement.

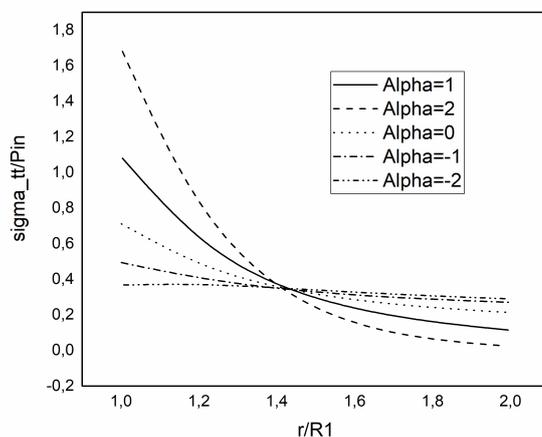


FIGURE 3.8 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

Dans la figure 3.8, les courbes montrent que pour α , représentant une sphère homogène, souvent de la forme. Les caractéristiques de cette loi incluent :représente la répartition de la contrainte radiale pour une pression interne et externe 100 Mpa et 0 Mpa respectivement. On remarque que la contrainte radiale adimensionnelle est plus élevée pour les valeurs négatives de α , tandis que pour les valeurs positives de α , la contrainte est plus faible. De la paroi interne à la paroi externe de la sphère,

la contrainte radiale diminue.

3.4 Analyse des Variations de Pression Cas n°3

Les pressions internes et externes appliquées sont de 250 MPA et 0 MPA respectivement.

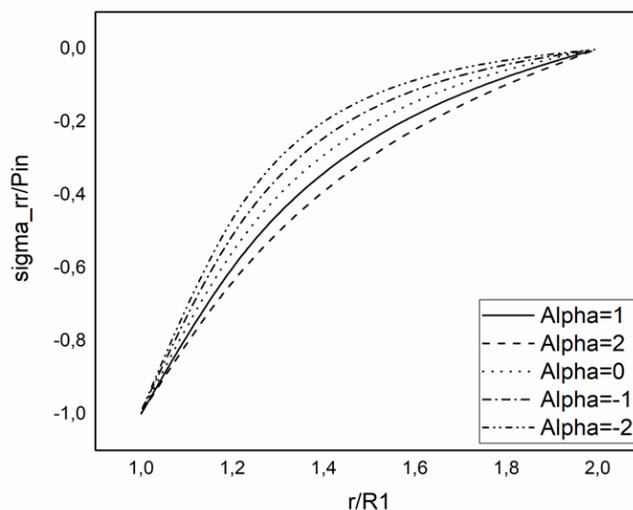


FIGURE 3.9 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure présente la variation de la contrainte radiale normalisée σ_{rr} En fonction du rayon à travers la paroi de la sphère, varie en fonction de différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha \in [-2, 2]$. Les solutions analytiques sont symbolisées par des lignes solides, tandis que les solutions du modèle numérique sont symbolisées par des symboles creux. La distribution de la contrainte radiale adimensionnelle dans le cas de la sphère homogène $\alpha = 0$ est illustrée dans la même figure pour une comparaison. La contrainte radiale adimensionnelle est plus élevée pour des valeurs négatives de α , tandis que pour des valeurs positives de α , le déplacement est plus faible. On constate que les solutions analytiques correspondent parfaitement aux solutions du modèle numérique élaboré.

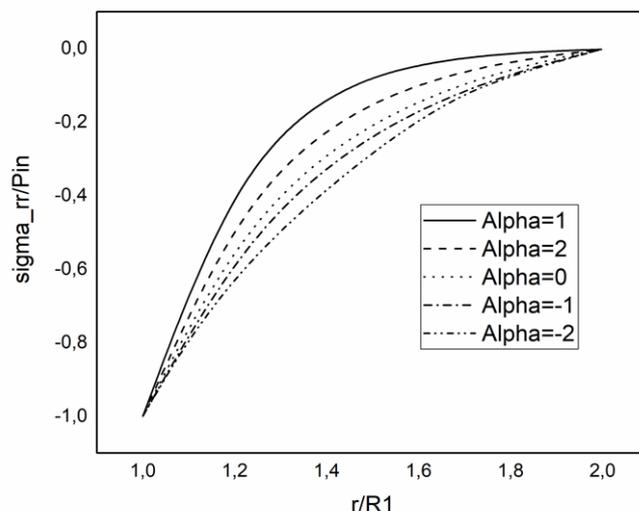


FIGURE 3.10 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.10 présente la répartition de la contrainte radiale adimensionnelle σ_{rr} en fonction du rayon à travers la paroi de la sphère, varie en fonction de différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\alpha \in [-2, 2]$. Les solutions analytiques sont symbolisées par des lignes solides, tandis que les solutions du modèle numérique sont symbolisées par des symboles creux. La distribution de la contrainte radiale adimensionnelle dans le cas de la sphère homogène $\alpha = 0$ est illustrée dans la même figure pour une comparaison. La contrainte radiale adimensionnelle est plus élevée pour des valeurs négatives de α , tandis que pour des valeurs positives de α , le déplacement est plus faible. On constate que les solutions analytiques correspondent parfaitement aux solutions du modèle numérique élaboré.

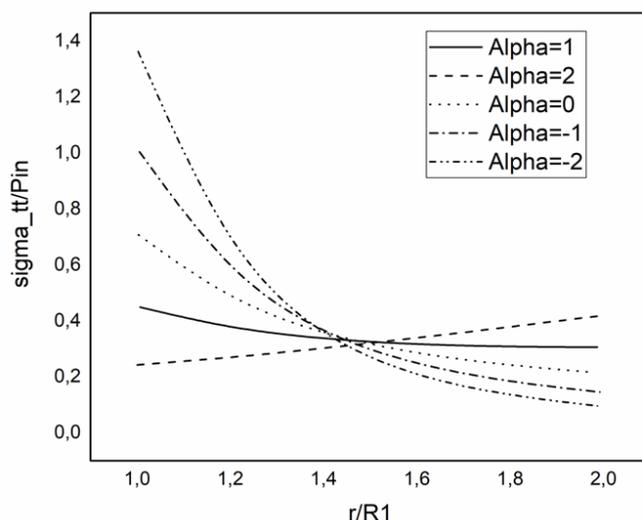


FIGURE 3.11 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.11 illustre la variation de la contrainte radiale normalisée σ_{rr} en fonction du rayon à travers la paroi de la sphère. La loi exponentielle, en revanche, décrit

une répartition de la contrainte radiale selon une relation non exponentielle. Les caractéristiques de cette loi incluent la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle pour une pression interne de 250 MPa et une pression externe de 0 MPa. Lorsque les valeurs de α sont négatives, la contrainte circonférentielle présente des valeurs inférieures. La paroi intérieure de la sphère subit des contraintes importantes, qui diminuent progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En revanche, pour des valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle est plus élevée sur la paroi interne de la sphère et augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

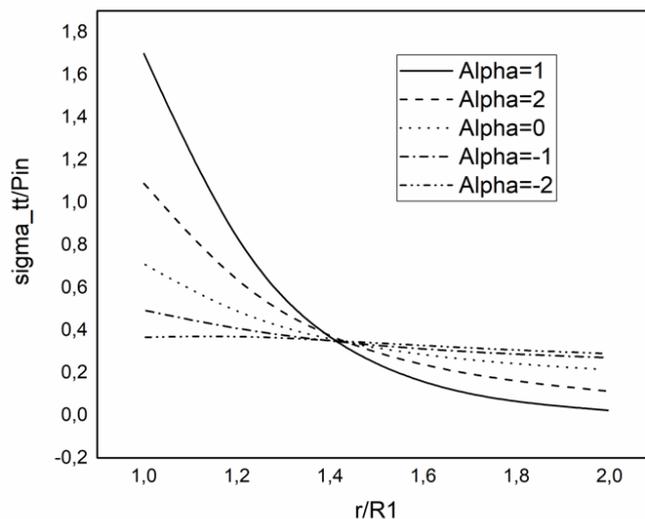


FIGURE 3.12 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

Cette figure présente la répartition de la contrainte radiale pour une pression interne et externe de on note que les valeurs négatives de α sont à noter. La distribution de la contrainte radiale adimensionnelle dans une sphère dépend du signe du paramètre α . Pour α négatif, la contrainte est la plus faible sur la paroi interne et augmente continuellement en se rapprochant de la paroi externe. À l'inverse, pour α positif, la contrainte est la plus élevée sur la paroi interne et diminue continuellement en se rapprochant de la paroi externe. Dans tous les cas, la contrainte radiale augmente toujours de l'extérieur vers l'intérieur de la sphère.

3.5 Analyse des Variations de Pression Cas n°4

Les pressions internes et externes appliquées sont de 0 MPA et 10 MPA respectivement.

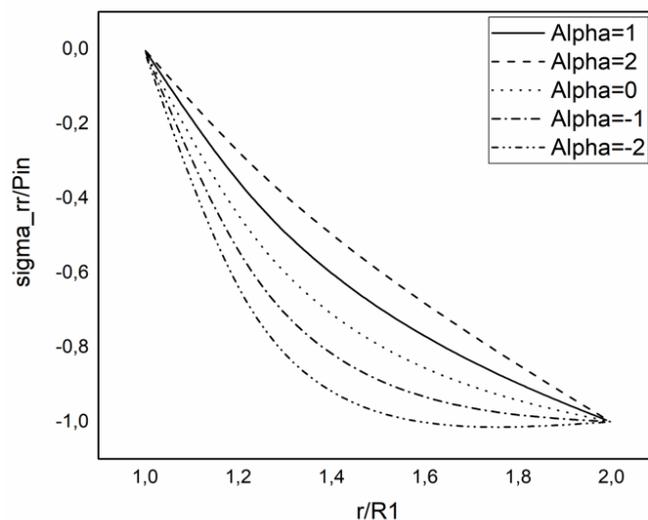


FIGURE 3.13 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.13 présente la répartition de la contrainte radiale selon la loi de puissance pour une pression interne de 0 MPa et une pression externe de 10 MPa. L'intensité de la contrainte radiale adimensionnelle sur la paroi interne d'une sphère est influencée par le signe du paramètre α . Pour α positif, la contrainte est plus élevée, tandis que pour α négatif, elle est plus faible. Dans les deux cas, la contrainte diminue progressivement en se déplaçant de la paroi interne vers la paroi externe de la sphère. Ce phénomène est lié à la répartition des forces internes dans la sphère, qui est modifiée par la valeur de α .

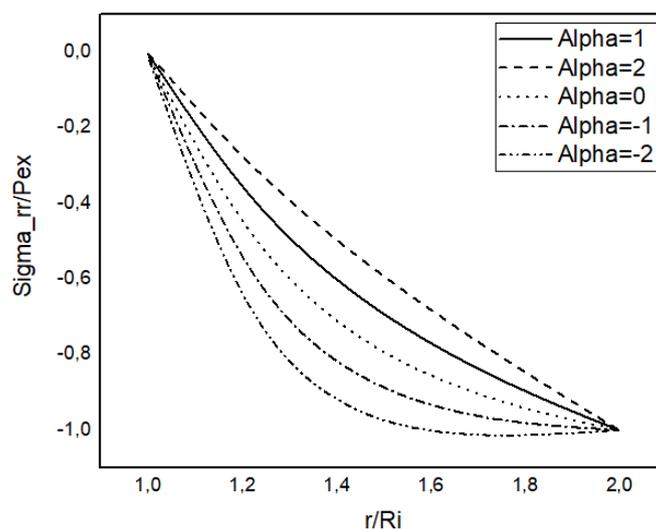


FIGURE 3.14 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure La figure présente la variation de la contrainte radiale normalisée pour une pression interne et externe 0 Mpa et 10 Mpa respectivement. L'intensité de la contrainte radiale adimensionnelle sur la paroi interne d'une sphère est influencée

par le signe du paramètre α . Pour α positif, la contrainte est plus importante, tandis que pour α négatif, elle est plus faible. Dans les deux cas, la contrainte diminue progressivement en se déplaçant de la paroi interne vers la paroi externe de la sphère. Ce phénomène est lié à la répartition des forces internes dans la sphère, qui est modifiée par la valeur de α .

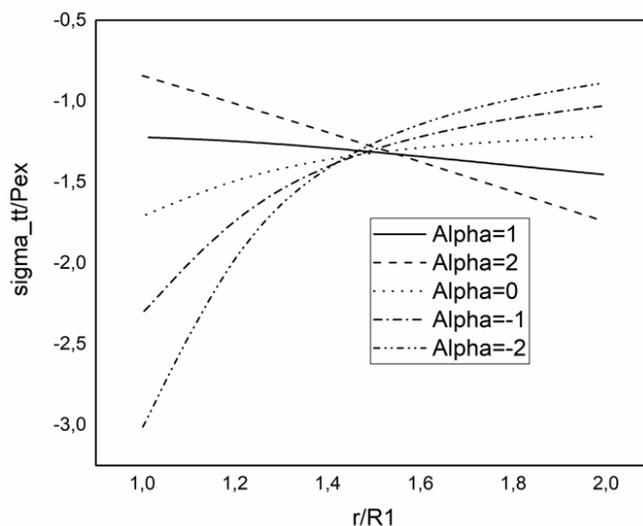


FIGURE 3.15 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

Dans la figure 3.15, représente la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle pour une pression interne et externe 0 Mpa et 10 Mpa respectivement. Lorsque les valeurs de α sont négatives, la contrainte circonférentielle présente des valeurs inférieures. La paroi intérieure de la sphère présente des éléments importants, puis elle évolue de manière décroissante en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En présence de valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle présente des valeurs plus élevées sur la paroi interne de la sphère, puis augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

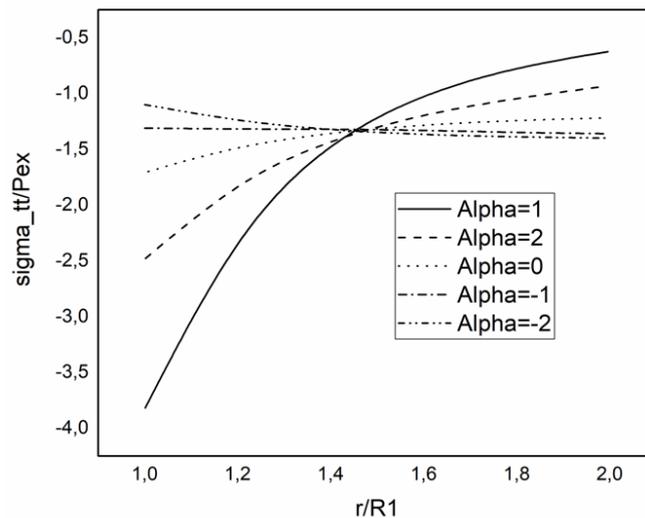


FIGURE 3.16 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure ci-dessus illustre la variation de la contrainte tangentielle normalisée, décrit la répartition de la contrainte radiale selon une relation non linéaire, pour une pression interne et externe 0 Mpa et 10 Mpa respectivement. Lorsque les valeurs de α sont négatives, la contrainte circonférentielle présente des valeurs inférieures. La paroi intérieure de la sphère présente des éléments importants, puis elle évolue de manière décroissante en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En présence de valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle présente des valeurs plus élevées sur la paroi interne de la sphère, puis augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

3.6 Analyse des Variations de Pression Cas n°5

Les pressions internes et externes appliquées sont de 0 MPA et 50 MPA respectivement .

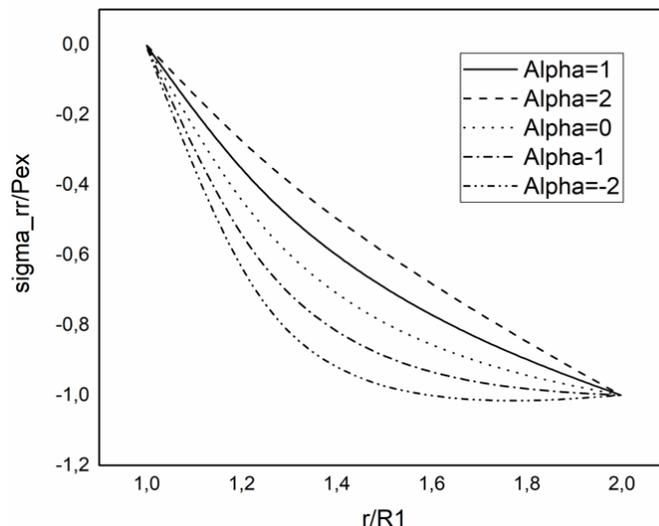


FIGURE 3.17 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.17 représente la répartition de la contrainte radiale pour une pression interne et externe 0 Mpa et 50 Mpa respectivement. La distribution de la contrainte radiale adimensionnelle dans une sphère dépend du signe du paramètre α . Pour α négatives, la contrainte est la plus élevée sur la paroi interne et diminue continuellement en se rapprochant de la paroi externe. À l'inverse, pour α positives, la contrainte est la plus faible sur la paroi interne et augmente continuellement en se rapprochant de la paroi externe. Dans tous les cas, la contrainte radiale diminue toujours de l'extérieur vers l'intérieur de la sphère.

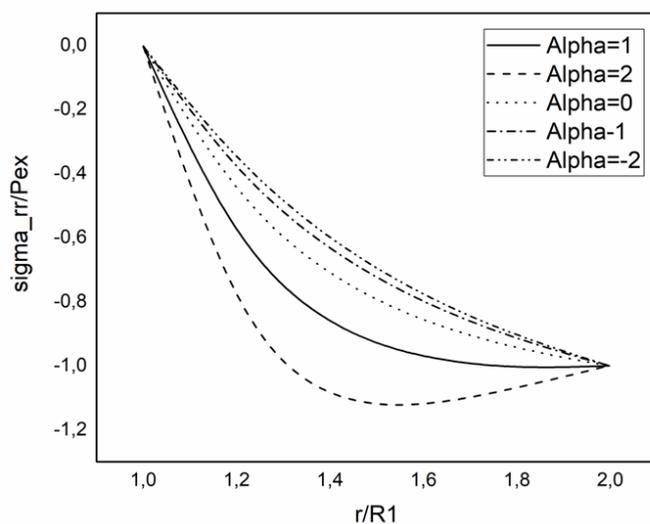


FIGURE 3.18 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure ci-dessus illustre la variation de la contrainte tangentielle normalisée, décrit la répartition de la contrainte radiale selon une relation non linéaire, pour une pression interne et externe 0 Mpa et 50 Mpa respectivement. La distribution de

la contrainte radiale adimensionnelle dans une sphère dépend du signe du paramètre α . Pour α négatives, la contrainte est la plus élevée sur la paroi interne et diminue continuellement en se rapprochant de la paroi externe. À l'inverse, pour α positives, la contrainte est la plus faible sur la paroi interne et augmente continuellement en se rapprochant de la paroi externe. Dans tous les cas, la contrainte radiale diminue toujours de l'extérieur vers l'intérieur de la sphère.

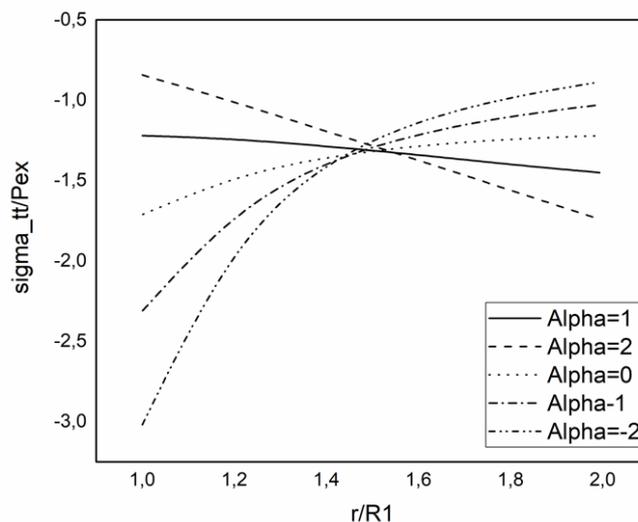


FIGURE 3.19 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.19 montre l'évolution de la contrainte circonférentielle normalisée pour différentes valeurs du paramètre α , pour une valeur positive de α , la contrainte circonférentielle est plus importante sur la paroi intérieure de la sphère, puis augmente progressivement. Lorsque les valeurs de α sont négatives, la contrainte circonférentielle présente des valeurs inférieures. La paroi intérieure de la sphère présente des éléments importants, puis elle évolue de manière décroissante en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En présence de valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle présente des valeurs plus élevées sur la paroi interne de la sphère, puis augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

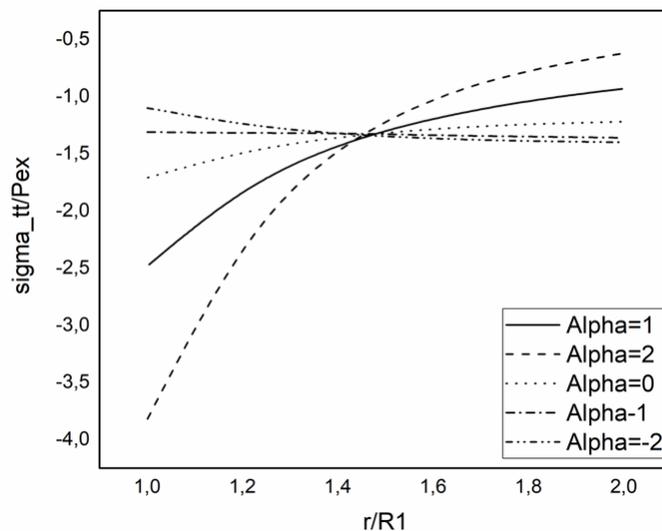


FIGURE 3.20 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

Ce dussi illustre l'importance du paramètre α , pour une valeur positive de α , la contrainte circonférentielle est plus importante sur la paroi intérieure de la sphère, puis augment progressivement. Lorsque les valeurs de α sont négatives, la contrainte circonférentielle présente des valeurs inférieures. La paroi intérieure de la sphère présente des éléments importants, puis elle évolue de manière décroissante en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En présence de valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle présente des valeurs plus élevées sur la paroi interne de la sphère, puis augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

3.7 Analyse des Variations de Pression Cas n°6

Les pressions internes et externes appliquées sont de 0 MPA et 100 MPA respectivement.

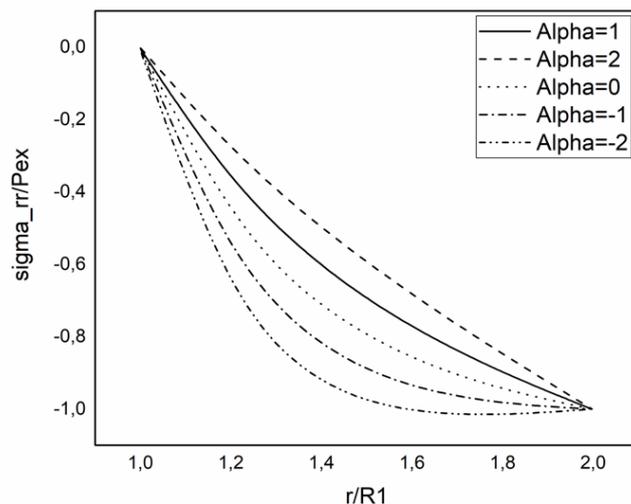


FIGURE 3.21 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.21 présente la distribution de la contrainte radiale selon la loi de puissance, sous des conditions de pression interne et externe de 0 MPa et 100 MPa respectivement. L'étude de la contrainte radiale dans une sphère révèle sa dépendance au paramètre α . Pour des valeurs positives de α , la contrainte est maximale à l'intérieur de la sphère et diminue progressivement vers l'extérieur, suggérant une configuration compressive. En revanche, pour des valeurs négatives de α , la contrainte est minimale à l'intérieur et augmente vers l'extérieur, indiquant une tendance extensible. Ces observations sont cruciales pour concevoir des structures sphériques résistantes aux forces radiales.

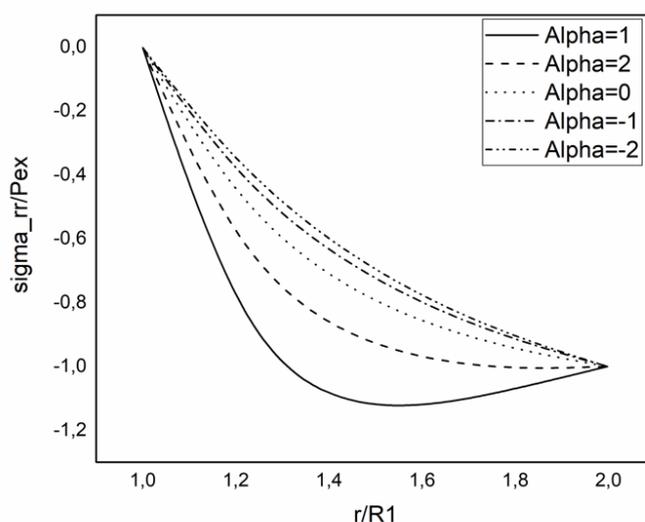


FIGURE 3.22 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.22 présente la répartition de la contrainte radiale selon la loi exponentielle, sous des conditions de pression interne et externe de 0 MPa et 100 MPa

respectivement. L'analyse de la contrainte radiale dans une sphère révèle une dépendance significative vis-à-vis du paramètre α : pour α positifs, la contrainte est maximale à l'intérieur de la sphère et décroît progressivement vers l'extérieur, simulant une configuration compressive. À l'inverse, pour α négatifs, la contrainte est minimale à l'intérieur et croît vers l'extérieur, évoquant une situation extensible. Cette observation revêt une importance capitale pour la conception de structures sphériques capables de résister efficacement aux contraintes radiales.

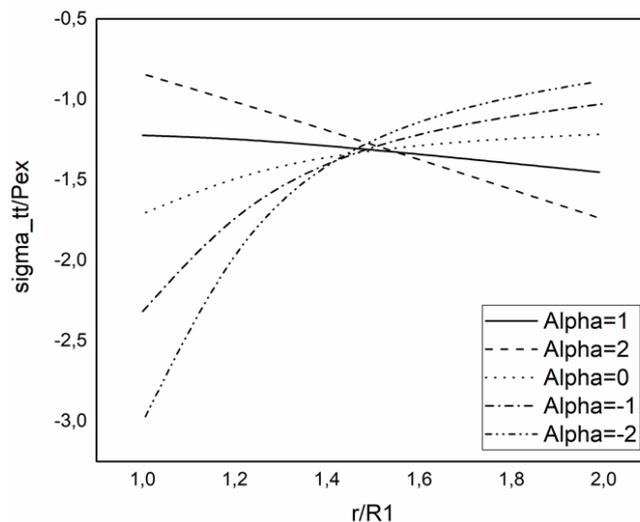


FIGURE 3.23 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.23 présente la distribution de la contrainte radiale selon la loi de puissance, pour une pression interne de 0 MPa et une pression externe de 100 MPa, en fonction du paramètre α . Lorsque α est négatif, la contrainte radiale est minimale à la paroi interne de la sphère et diminue progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. En revanche, pour des valeurs positives de α , la contrainte radiale est maximale à la paroi interne et croît graduellement en fonction du rayon jusqu'à atteindre la paroi externe.

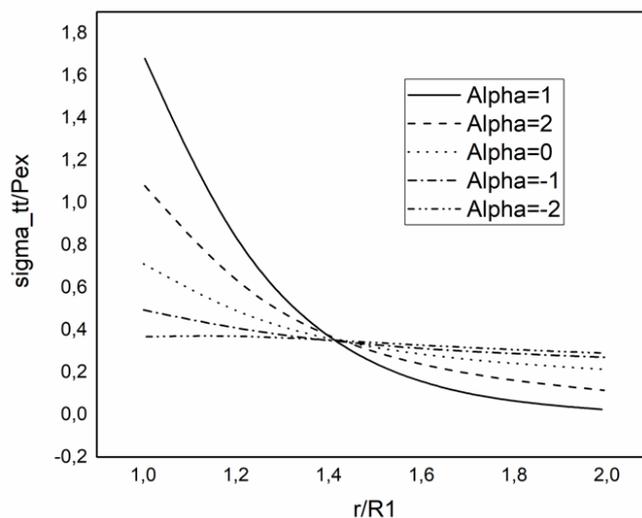


FIGURE 3.24 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.24 montre la répartition de la contrainte circonférentielle à travers l'épaisseur de la paroi d'une sphère, selon une loi exponentielle. Cette répartition est examinée pour divers coefficients de non-homogénéité $\alpha = [-2, -1, 0, 1, 2]$. Lorsque α est négatif, la contrainte circonférentielle est initialement plus faible à la paroi intérieure de la sphère et augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à atteindre la paroi externe. En revanche, pour les valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle est plus élevée à la paroi intérieure et diminue progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe. Notamment, dans l'intervalle spécifié $[1, 2; 1, 5]$, les courbes des contraintes pour chaque valeur de α montrent des points d'intersection.

3.8 Analyse des Variations de Pression Cas n°7

Les pressions internes et externes appliquées sont de 10 MPA et 10 MPA respectivement.

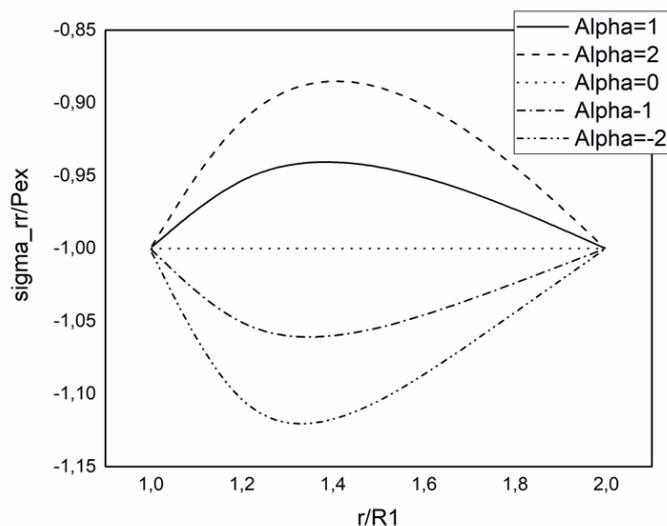


FIGURE 3.25 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.25 représentant la répartition de la contrainte radiale selon la loi de puissance, montre la distribution de cette contrainte dans une sphère soumise à des pressions interne et externe de 10 Mpa et 10 Mpa respectivement. La distribution de la contrainte radiale dans une sphère dépend du signe du paramètre α . Pour α négatif, la contrainte est la plus faible sur la paroi interne et diminue continuellement en se rapprochant d'un minimum à $r = [1.2, 1.4]$, puis augmente continuellement jusqu'à la paroi externe. À l'inverse, pour α positif, la contrainte est la plus élevée sur la paroi interne et augmente continuellement en se rapprochant d'un maximum à $r = [1.2, 1.4]$, puis diminue continuellement jusqu'à la paroi externe. Dans les trois figures, le déplacement dans le cas d'une sphère homogène $\alpha = 0$ est présenté à titre de comparaison.

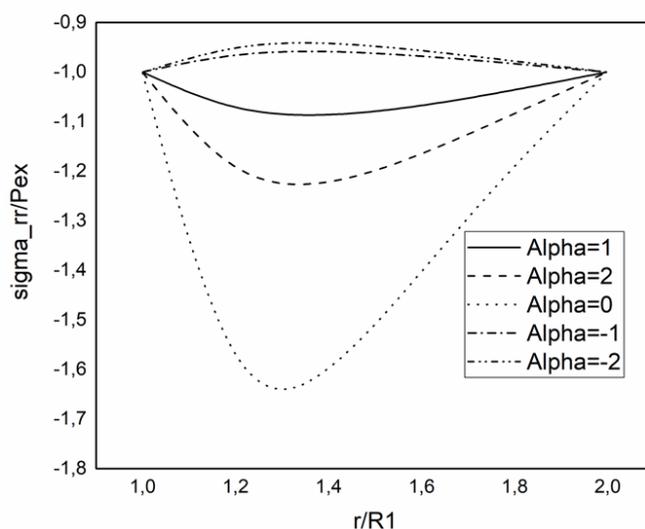


FIGURE 3.26 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.26 montre comment la répartition de la contrainte radiale dans une sphère, soumise à une pression interne et externe de 10 MPa, varie selon la loi exponentielle et le paramètre α . Pour α négatif, la contrainte est minimale sur la paroi interne et diminue progressivement jusqu'à atteindre un minimum autour de $r = [1.2, 1.4]$, puis elle augmente de manière continue jusqu'à la paroi externe. En revanche, avec α positif, la contrainte est maximale sur la paroi interne, augmente progressivement jusqu'à un maximum vers $r = [1.2, 1.4]$, puis diminue de manière continue vers la paroi externe.

Pour illustrer cette variation, les trois figures comparent également le déplacement dans le cas d'une sphère homogène avec $\alpha = 0$.

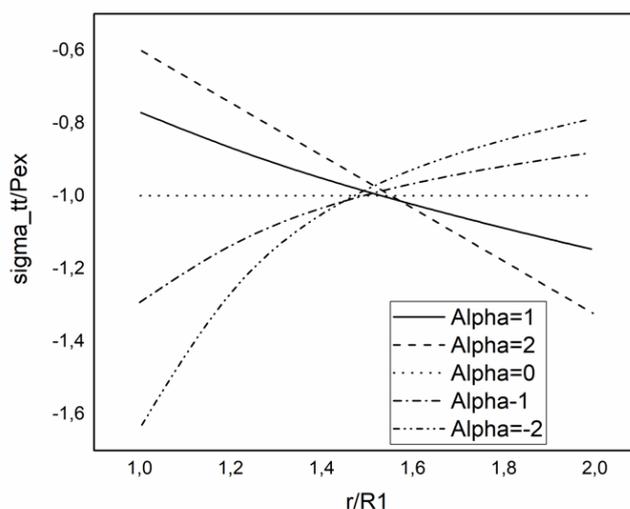


FIGURE 3.27 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

La figure 3.27 basée sur la loi de puissance, illustre la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle dans une sphère soumise à des pressions interne et externe de 10 MPa. Pour des valeurs négatives du paramètre α , la contrainte circonférentielle est minimale sur la paroi interne de la sphère et diminue progressivement en s'éloignant du centre, atteignant sa valeur la plus faible sur la paroi externe. À l'inverse, pour des valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle est maximale sur la paroi interne et augmente continuellement vers l'extérieur.

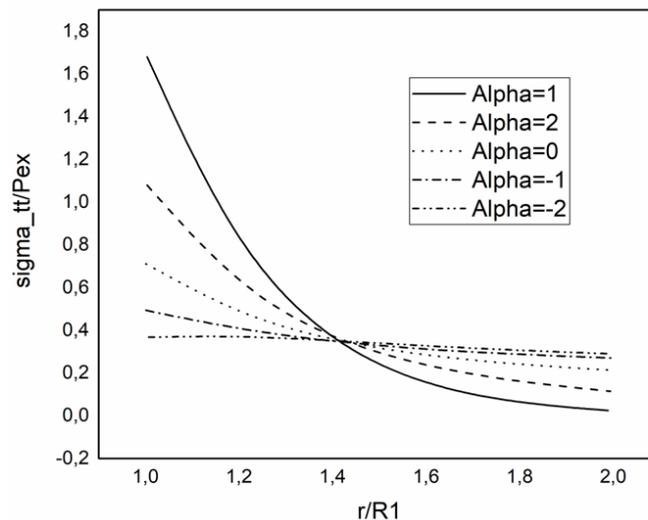


FIGURE 3.28 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.28 suivant la loi exponentielle, montre la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle dans une sphère soumise à des pressions interne et externe de 10 MPa chacune. Cette répartition dépend du paramètre α . Pour α négatif, la contrainte circonférentielle est minimale sur la paroi interne de la sphère et diminue progressivement en fonction du rayon jusqu'à atteindre son minimum à la paroi externe. En revanche, pour des valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle est maximale sur la paroi interne et augmente progressivement en fonction du rayon jusqu'à la paroi externe.

3.9 Analyse des Variations de Pression Cas n°8

Les pressions internes et externes appliquées sont de 50 MPA et 50 MPA respectivement.

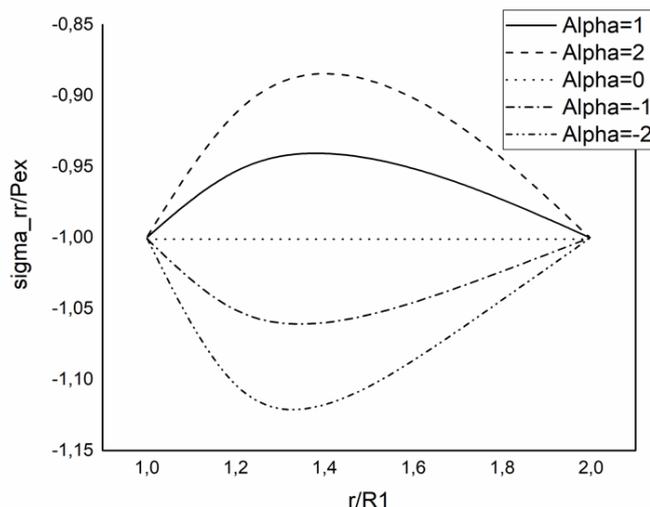


FIGURE 3.29 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

la figure 3.29 illustrant la loi de puissance, montre la répartition de la contrainte radiale dans une sphère soumise à des pressions interne et externe de 50 MPa. L'intensité de la contrainte radiale sur la paroi interne de la sphère dépend du signe du paramètre α : pour α négatif, la contrainte est plus faible, tandis que pour α positif, elle est plus élevée. Dans les deux cas, la contrainte évolue de manière non monotone en se déplaçant de la paroi interne vers la paroi externe, atteignant un minimum ou un maximum autour de $r = [1.2, 1.4]$. Cette répartition particulière de la contrainte est due à la distribution des forces internes dans la sphère, influencée par la valeur de α . Les trois figures montrent cette évolution pour différentes valeurs de α et permettent de comparer ces résultats avec ceux d'une sphère homogène $\alpha = 0$.

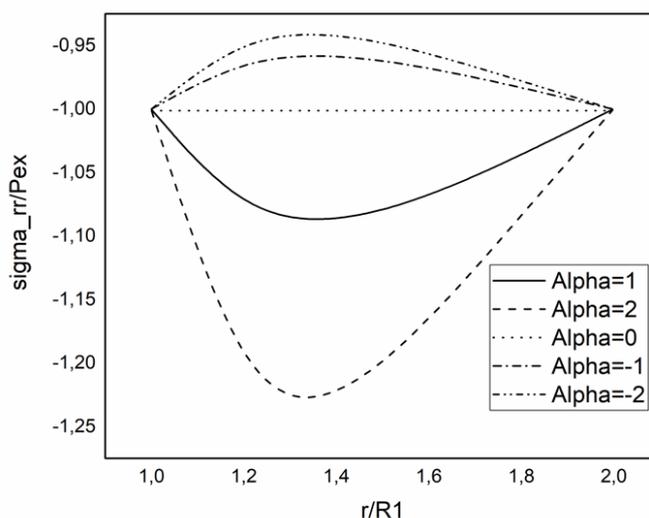


FIGURE 3.30 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.30 présentée montre la répartition de la contrainte radiale normalisée

,Pour une pression interne et externe de 50 MPa 50 MPa chacune, la répartition de la contrainte radiale dans une sphère est influencée par le paramètre α . Lorsque α est négatif, la contrainte est moins élevée, tandis que pour α positif, elle est plus élevée. Dans les deux cas, la contrainte varie de manière non monotone en se déplaçant de la paroi interne vers la paroi externe de la sphère, atteignant un minimum ou un maximum autour de $r = [1.2, 1.4]$. Cette répartition spécifique de la contrainte est due à la distribution des forces internes dans la sphère, modifiée par la valeur de α . Les trois figures présentées permettent de comparer cette évolution pour différentes valeurs de α avec le cas d'une sphère homogène où $\alpha = 0$.

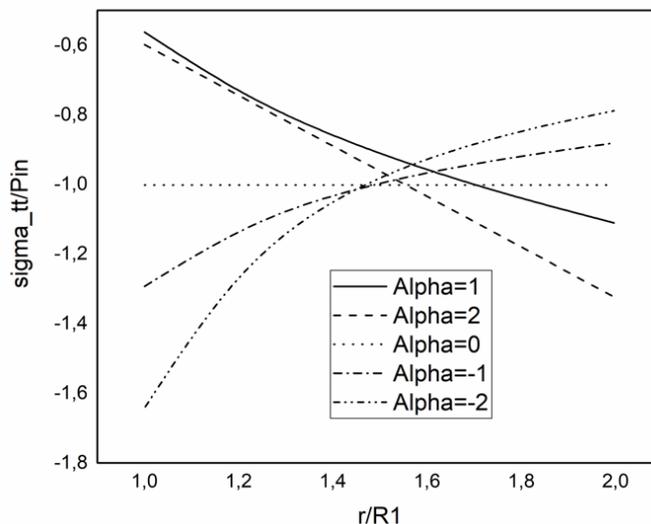


FIGURE 3.31 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi de puissance).

la figure 3.31 représentant la répartition de la contrainte radiale selon la loi de puissance ,Pour une pression interne et externe de 50 MPa 50 MPa chacune, la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle varie selon le paramètre α . Lorsque α est négatif, la contrainte circonférentielle atteint son minimum sur la paroi interne de la sphère et diminue progressivement en s'éloignant du centre, jusqu'à atteindre sa valeur la plus faible sur la paroi externe. En revanche, avec des valeurs positives de α , la contrainte circonférentielle est maximale sur la paroi interne et augmente continuellement en fonction du rayon de la sphère.

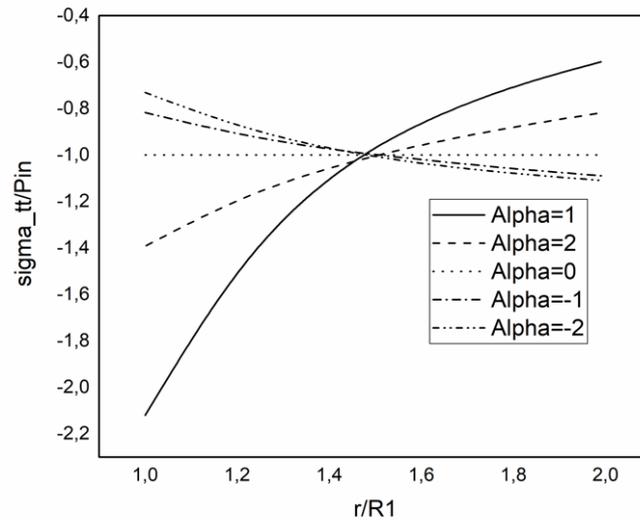


FIGURE 3.32 – Variation de la pression à travers la paroi de la sphère (loi exponentielle).

La figure 3.32 illustre la loi exponentielle. Selon le paramètre α , la répartition de la contrainte adimensionnelle circonférentielle varie en fonction de la pression interne et externe de 50 MPa, 50 MPa chacune. Quand le coefficient α est négatif, la contrainte circonférentielle est minimale sur la paroi interne de la sphère et réduit.

En s'éloignant progressivement du centre, elle atteint sa valeur la plus basse sur la paroi externe. D'autre part, α positif entraîne une contrainte circonférentielle maximale sur la paroi interne et une augmentation graduelle en s'éloignant du centre de la sphère.

3.10 Comparaison Détaillée

3.10.1 Précision et Adaptation

Loi exponentielle : la simplicité de cette loi en fait une option viable pour les cas où les contraintes varient de manière prévisible et uniforme. Cela est particulièrement utile dans les situations où une analyse rapide et une modélisation facile sont nécessaires.

Loi de Puissance : offre une représentation plus précise des contraintes dans des systèmes où les variations sont non exponentielle. Cela est crucial pour des applications spécifiques nécessitant une réponse précise, comme dans les structures aéronautiques ou les composants de haute performance.

3.10.2 Applications Pratiques

Loi exponentielle : convient pour des applications plus simples, comme les structures uniformes où les variations de contraintes sont modestes et peuvent être approximées par une relation exponentielle.

Loi de Puissance : idéale pour modéliser des matériaux et des structures soumis à des charges complexes, où les réponses non exponentielle sont attendues. Cela inclut les matériaux composites, les composants soumis à des gradients de température ou de charge importants.

3.10.3 Complexité de Calcul

Loi exponentielle : plus simple à mettre en œuvre et à calculer, ce qui peut être avantageux en termes de temps et de ressources, surtout dans les premières étapes de conception ou pour des structures simples.

Loi de Puissance : peut nécessiter des calculs plus complexes et des ressources de modélisation plus avancées, mais fournit une meilleure précision dans des contextes non exponentielle.

Les deux graphes montrent des distributions de contraintes adaptées à différents contextes d'application. Le choix entre une loi exponentielle et une loi de puissance dépend des exigences spécifiques du projet, de la complexité des conditions de charge et de la précision requise. Pour des systèmes complexes avec des réponses non exponentielles, la loi de puissance est préférable. Pour des structures plus simples et des calculs rapides, la loi exponentielle est souvent suffisante.

3.11 Conclusion

Une méthode analytique a été développée pour étudier les contraintes dans une sphère à gradient de propriétés fonctionnelles et à parois épaisses, sous l'effet de pressions internes et externes uniformes. Les résultats montrent comment les contraintes varient en fonction du rayon, mettant en évidence l'impact de la non homogénéité du matériau sur leur distribution. En parallèle, une approche basée sur une loi de puissance a été utilisée pour évaluer la distribution des déplacements et des contraintes à travers l'épaisseur de la paroi, en comparaison avec une approche basée sur une loi exponentielle. Les résultats indiquent une bonne correspondance entre les solutions obtenues par les deux approches.

Conclusion générale

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) ont révolutionné le domaine biomédical en intégrant des variations continues de composition et de microstructure. Cela leur permet de fournir des propriétés biomécaniques et biocompatibles sur mesure, essentielles pour les dispositifs médicaux et les implants. Par exemple, les implants osseux en FGM peuvent être conçus avec une structure et des propriétés mécaniques graduellement modifiées, améliorant leur intégration avec les tissus biologiques et réduisant les risques de rejet et d'inflammation. Ces matériaux répondent aux exigences rigoureuses des applications médicales modernes et suscitent un intérêt croissant grâce à des recherches et innovations continues. En conclusion, les FGM représentent une avancée prometteuse pour le développement futur des matériaux biomédicaux, offrant une adaptabilité exceptionnelle pour repousser les limites des dispositifs médicaux et répondre aux défis de la médecine moderne.

Bibliographie

- [1] Futoshi ARAKANE et al. « Phosphorylation of steroidogenic acute regulatory protein (StAR) modulates its steroidogenic activity ». In : *Journal of Biological Chemistry* 272.51 (1997), p. 32656-32662.
- [2] Amit BANDYOPADHYAY et Susmita BOSE. *Characterization of biomaterials*. Newnes, 2013.
- [3] Zakaria BELABED et al. « Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes ». Thèse de doct. 2015.
- [4] Isha BHARTI, Nishu GUPTA et KM GUPTA. « Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelectric materials ». In : *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing* 1.3 (2013), p. 221-224.
- [5] Valmik BHAVAR et al. « A review on powder bed fusion technology of metal additive manufacturing ». In : *Additive manufacturing handbook* (2017), p. 251-253.
- [6] K BOUZIANE-NEDJADI et al. « Fréquence de la malnutrition (dénutrition, surpoids/obésité) et prévalence de la carence martiale chez les nourrissons de l'Ouest algérien ». In : *Nutrition Clinique et Métabolisme* 33.1 (2019), p. 94-95.
- [7] William D CALLISTER et David G RETHWISCH. *Materials science and engineering : an introduction*. Wiley New York, 1999.
- [8] Denis CRISTOL, Christophe MORACE et Anne MULLER. « Les apprentissages informels dans la formation pour adultes ». In : (2013).
- [9] MS DOMACK et JM BAUGHMAN. « Development of nickel-titanium graded composition components ». In : *Rapid Prototyping Journal* 11.1 (2005), p. 41-51.
- [10] Luis Abraham GARCÍA-HERNÁNDEZ et al. « Optical detection of cancer cells using lab-on-a-chip ». In : *Biosensors* 13.4 (2023), p. 439.
- [11] Reza GHANAVATI et Homam NAFFAKH-MOOSAVY. « Additive manufacturing of functionally graded metallic materials : A review of experimental and numerical studies ». In : *Journal of Materials Research and Technology* 13 (2021), p. 1628-1664.
- [12] Gregory R HANCOCK et Ralph O MUELLER. *Structural equation modeling : A second course*. Iap, 2013.
- [13] Nabil HEBBAR et al. « etude de l'effet de deformation de cisaillement sur la reponse statique et dynamique des structures composites epaisses ». Thèse de doct. 2018.

- [14] J-F HOCHEDÉZ et al. « Dark signal correction for a lukecold frame-transfer CCD-New method and application to the solar imager of the PICARD space mission ». In : *Astronomy & Astrophysics* 561 (2014), A17.
- [15] Vistasp M KARBHARI et Guijun XIAN. « Hygrothermal effects on high VF pultruded unidirectional carbon/epoxy composites : Moisture uptake ». In : *Composites Part B : Engineering* 40.1 (2009), p. 41-49.
- [16] Kevin KENDALL et Michaela KENDALL. *High-temperature solid oxide fuel cells for the 21st century : fundamentals, design and applications*. Elsevier, 2015.
- [17] W David KINGERY, Harvey Kent BOWEN et Donald R UHLMANN. *Introduction to ceramics*. T. 17. John wiley & sons, 1976.
- [18] M KOIZUMU. « The concept of FGM, ceramic transactions ». In : *Funct. Grad. Mater* 34 (1993), p. 3-10.
- [19] Laiyu LU et al. « Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer ». In : *NDT & E International* 44.2 (2011), p. 169-177.
- [20] Xian-geng MENG et al. « Near infrared broadband emission of bismuth-doped aluminophosphate glass ». In : *Optics Express* 13.5 (2005), p. 1628-1634.
- [21] Laurent MULLER et Elisabeth SPITZ. « Évaluation multidimensionnelle du coping : Validation du Brief COPE sur une population française ». In : *L'encéphale* 29.6 (2003), p. 507-518.
- [22] Omar OULD AMAR et Yasser BOULIFA. « Comportement dynamique des plaques FGM sandwich avec un coeur en nid d'abeille ». Thèse de doct. FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL, 2021.
- [23] Michael J SCHNEIDER et Madhu S CHATTERJEE. « Introduction to surface hardening of steels ». In : (2013).
- [24] Sreena SURESH. « Graded materials for resistance to contact deformation and damage ». In : *Science* 292.5526 (2001), p. 2447-2451.
- [25] Qianbin WANG, Qiguang WANG et Changxiu WAN. « Preparation and evaluation of a biomimetic scaffold with porosity gradients in vitro ». In : *Anais da Academia Brasileira de Ciencias* 84 (2012), p. 9-16.
- [26] Fumio WATARI et al. « Fabrication and properties of functionally graded dental implant ». In : *Composites Part B : Engineering* 28.1-2 (1997), p. 5-11.
- [27] I YADROITSEV et al. « Strategy of manufacturing components with designed internal structure by selective laser melting of metallic powder ». In : *Applied Surface Science* 254.4 (2007), p. 980-983.
- [28] Qiang ZHANG et al. « Precipitation, temperature and runoff analysis from 1950 to 2002 in the Yangtze basin, China/Analyse des précipitations, températures et débits de 1950 à 2002 dans le bassin du Yangtze, en Chine ». In : *Hydrological Sciences Journal* 50.1 (2005).

Résumé

Résumé :

Ce mémoire présente une analyse détaillée d'une sphère à Gradient de Fonctionnalité (FGM) soumise à une pression, appliquée dans le domaine biomédical. Le Chapitre 1 introduit les fondements des FGM, en explorant leurs propriétés et applications générales. Le Chapitre 2 se concentre sur les calculs analytiques utilisés pour modéliser le comportement de la sphère FGM sous contrainte, en utilisant des méthodes mathématiques rigoureuses. Le Chapitre 3 présente les résultats obtenus à partir de ces modèles et en discute les implications pratiques, notamment en termes de performances biomédicales potentielles.

Mots clés : Gradient de Fonctionnalité, sphère, pression, biomédical, modélisation analytique.

Abstract :

This thesis presents a detailed analysis of a Functionally Graded Material (FGM) sphere under pressure, applied in the biomedical field. Chapter 1 introduces the fundamentals of FGMs, exploring their properties and general applications. Chapter 2 focuses on the analytical calculations used to model the behavior of the FGM sphere under stress, employing rigorous mathematical methods. Chapter 3 presents the results obtained from these models and discusses their practical implications, particularly in terms of potential biomedical performance.

Keywords : Functionally Graded Material, sphere, pressure, biomedical, analytical modeling.
