

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

Nom prénom CHABANI Tinhinane

Nom Prénom MAOUCHI Karima

Thème

Ecoulement convectif en régime variable de la couche limite d'un fluide visqueux sur une surface verticale

Soutenu le 25/06/2023 devant le jury composé de:

Mr. D. SADAoui

Président

Mr. H. ALI AGHA

Rapporteur

Mr. N. BOUTALBI

Examineur

Année Universitaire 2022-2023

Remerciements

« Au nom du Dieu le clément et le miséricordieux »

*Nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude envers dieu pour nous avoir accordé le courage nécessaire pour poursuivre notre parcours d'étude. Nous ne saurions également oublier notre promoteur, **Mr.ALI AGHA Hamza**, dont les précieux conseils ont été indispensables pour mener à bien notre travail.*

Nos remerciements les plus sincères s'adressent également aux membres du jury qui ont généreusement accepté d'évaluer notre travail. Leur expertise et leur critique constructive ont grandement contribué à améliorer notre recherche.

Nous remercions aussi à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce monde travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

*Tout particulièrement aux personnes qui me sont les plus chères au monde,
Mes parents, pour leurs soutiens et sacrifices tout au long de ma vie, que dieu les gardes
parmi nous le plus longtemps possible.*

A mes frères Safi et Lyes.

A mon binôme et sa famille.

A tous mes ami(e)s.

A tous ceux qui m'ont accordé le moindre soutien.

Tinhinane

Dédicaces

Je dédié ce modeste travail

A ceux que dieu ma donnée de plus chère :

A ma chère mère qui ma entoure avec sa tendresse et qui n'a cessé de prier pour moi que dieux la protège.

A la mémoire de mon père que dieux l'accueille en son vaste paradis.

A mon unique frère YANIS et ma sœur HANANE à qui je souhaite beaucoup de succès dans leur vie.

A ma chère binôme TINHINANE et sa famille.

A toute ma famille, a tous mes amis, Tous ceux qui m'aiment et que j'aime, et à tous ceux qui m'ont encouragé et cru on moi durant ma vie.

KARIMA

Table de matière :

Remerciements	1
Dédicaces.....	2
Dédicaces.....	3
Table de matière :	4
Liste des figures	6
Liste des tableaux	7
Nomenclature.....	8
Symboles grecs.....	9
Introduction générale	10
Chapitre I Théorie et contexte scientifique.....	12
I.1. Introduction	13
I.2. Notion générale sur les fluides visqueux	14
I.2.1. Introduction.....	14
I.2.2. Définition de fluide	14
I.2.3. Phénomène de viscosité.....	14
I.2.3.1. Viscosité dynamique - Viscosité cinématique.....	15
I.2.3.2. Ordre de grandeur : influence de la température	17
I.2.3.3. Viscosimètre d'Ostwald.....	17
I.2.3.4. Viscosimètre à chute de bille ou viscosimètre d'Hoepler.....	18
I.3. Notion sur la convection	19
I.3.1. Différents types de convection.....	20
I.3.1.1. Convection forcée	20
I.3.1.2. Convection naturelle	20
I.3.1.3. Convection mixte.....	20
I.3.2. Flux de chaleur.....	20
I.3.2.1. Flux de chaleur convectif	20
I.3.3. Coefficients d'échanges de chaleur par convection	21
I.3.4. Le nombre de Nusselt.....	22
I.3.5. L'importance de la convection dans la nature et dans l'énergie.....	23
I.3.5.1. Dans la nature	23
I.3.5.2. Dans l'énergie	23
I.4. Notion de couche limite	24
I.4.1. Les types de la couche limite	24
I.4.1.1. Couche limite dynamique.....	24
• Couche limite laminaire	24
• Couche limite turbulente	25
I.4.1.2. Couche limite thermique	26
I.4.2. Hypothèses de la couche limite.....	28
I.4.3. Les caractéristiques de la couche limite.	28

I.4.4. Développement de la couche limite laminaire sur une plaque verticale	28
I.5. Equation d'état de transfert, hypothèses simplificatrices.....	31
I.5.1. Equations de conservation	31
I.5.2. Approximation de Boussinesq	31
I.6. Etat de l'art.....	33
I.7. Conclusion.....	38
Chapitre II Problématique et modélisation mathématique	39
II.1. Introduction.....	40
II.2. Formulation mathématique	40
II.3. Equation mathématique	41
II.3.1. Equation dimensionnelle	41
II.3.1.1. Equation de continuité	41
II.3.1.2. Equation de mouvement.....	41
II.3.1.3. Equation d'énergie.....	42
II.3.2. Conditions aux limites ordinaires	43
II.3.3. Caractérisation du nombre de Nusselt et le coefficient de frottement	43
II.4. Procédure numérique.....	44
II.5. Conclusion	46
Chapitre III Résultats et discussion	47
III.1. Introduction.....	48
III.2. Validation du code de calcul.....	48
III.3. Résultats et discussion.....	49
III.3.1. Profil de vitesse	49
III.3.2. Profil de températures	51
III.4. Nombre de Nusselt	53
III.5. Coefficient de frottement.....	53
III.6. Conclusion	54
Conclusion générale et perspectives.....	55
Annexe A.....	57
Références bibliographiques	64

Liste des figures

Fig. I-1 Schéma montrant la formation d'un profil de vitesse à cause des forces de frottement [2].	15
Fig. I-2 Schéma montrant la relation entre la force de glissement et le coefficient de viscosité [2].	16
Fig. I-3 Viscosimètre d'Ostwald [2].	18
Fig. I-4 Viscosimètre d'Hoepler [2].	18
Fig. I-5 Schéma du transfert de chaleur convectif [5].	21
Fig. I-6 Développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane [6].	25
Fig. I-7 délimitation des zones de couche limite dynamique [10].	26
Fig. I-8 développement d'une couche limite thermique le long d'une plaque plan isotherme [11].	27
Fig. I-9 Développement de la couche limite sur une plane verticale chauffée.	29
Fig. II-1 Modèle physique et système de coordonnées [27].	41
Fig. III-1 vitesse vs A ($Pr = 1.0$ et $\lambda = 1.0$).	49
Fig. III-2 vitesse vs Pr ($A = 1.0$ et $\lambda = 1.0$).	50
Fig. III-3. Vitesse vs λ ($A = 1.0$ et $Pr = 1.0$).	50
Fig. III-4 Température vs Pr ($A = 1.0$ et $\lambda = 1.0$).	51
Fig. III-5 Température vs A ($Pr = 1.0$ et $\lambda = 1.0$).	52
Fig. III-6 Température vs λ ($Pr = 1.0$ et $A = 1.0$).	52

Liste des tableaux

Tableau I-1 Variation de la viscosité en fonction de la température [2].	17
Tableau III-1 Comparaison des résultats de $F'(0)$ et $\theta'(0)$ pour différentes valeurs de A , λ , et Pr .	48
Tableau III-2 Valeur de Nusselt $Nu_x / Ru_x^{1/2} = -\theta'(0)$	53
Tableau III-3 valeur de coefficient de frottement $C_f R_{ex}^{1/2} = 2f''(0)$	54

Nomenclature

Symboles	définition	unité (SI)
C_p	Chaleur spécifique	$J.kg^{-1}.k^{-1}$
C_v	Capacité thermique massique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
H	Enthalpie massique	$J.kg^{-1}$
g	Accélération de la gravité	$m.s^{-2}$
f	Fonction de flux sans dimension	
k	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
A	Paramètre de régime variable	
λ	Paramètre de flottabilité	
u_w	La vitesse a la paroi	$m.s^{-1}$
Pr	Nombre de Prandtl	
Nu	Nombre de Nusselt	
Nu_x	Nombre de Nusselt local	
q_w	Transfert de chaleur a la paroi	W/m^2
C_f	Coefficient de frottement	
Re	Nombre de Reynolds	
T	Température	K
T_∞	Température ambiante	K
T_w	Température a la paroi	K
P	Pression	Pa
u, v	Composantes de la vitesse dimensionnelles	$m.s^{-1}$
x, y	Coordonnées cartésiennes	m

Symboles grecs

ν	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$N.s.m^{-2}$
β	Coefficient de dilatation thermique	K^{-1}
ψ	Fonction de courant	$m^2.s^{-1}$
η	Variable de similitude	
τ_w	Frottement superficiel	
θ	Température adimensionnelle	

Indices

f	Fluide
w	Paroi
∞	Infini

Introduction générale

Les fluides visqueux jouent un rôle essentiel dans de nombreux aspects de notre vie quotidienne, allant des applications industrielles à la biologie et à l'environnement. Leur comportement complexe et leur capacité à se déformer sous l'effet de forces externes en font des sujets d'étude fascinants dans le domaine de la mécanique des fluides. Parmi les phénomènes associés aux fluides visqueux, l'écoulement convectif en régime variable de la couche limite sur une surface verticale occupe une place particulièrement importante.

La viscosité d'un fluide mesure sa résistance interne au mouvement et est responsable de la formation de la couche limite. La couche limite est une région mince adjacente à une surface solide où les forces de viscosité sont dominantes. Dans les fluides visqueux, la couche limite joue un rôle crucial dans le transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement entre la surface et le fluide environnant.

Lorsque la couche limite est soumise à des variations de conditions, telles que des gradients de température, des différences de pression ou des variations de vitesse du fluide, l'écoulement convectif en régime variable se produit. Comprendre et prédire ce type d'écoulement revêt une importance capitale dans de nombreux domaines d'application, tels que l'industrie chimique, l'aéronautique, la climatisation des bâtiments et la conception de systèmes de refroidissement.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier en détail l'écoulement convectif en régime variable de la couche limite d'un fluide visqueux sur une surface verticale. Nous nous intéresserons aux mécanismes fondamentaux qui gouvernent ce phénomène et aux facteurs qui influencent son comportement, tels que les propriétés du fluide, les conditions aux limites et les caractéristiques de la surface. Nous examinerons également les méthodes numériques et expérimentales utilisées pour modéliser et étudier l'écoulement convectif en régime variable, en mettant l'accent sur les avantages et les limitations de chacune.

En étudiant et en comprenant l'écoulement convectif en régime variable de la couche limite des fluides visqueux, nous pourrions mieux appréhender les phénomènes complexes qui se produisent à l'interface entre la surface solide et le fluide environnant. Cela nous permettra d'améliorer les techniques de prédiction et de contrôle de l'écoulement, ouvrant ainsi la voie à des applications plus efficaces et innovantes dans de nombreux domaines.

Le présent travail est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre est divisé en trois parties dont la première est consacrée pour les fluides visqueux, leurs principales définitions, leurs fabrications, les propriétés essentielles liées à leurs utilisations ainsi que leurs applications dans divers domaines d'industrie. La deuxième partie est consacrée à l'étude théorique de la convection dans un milieu fluide et la troisième partie est consacrée à la synthèse bibliographique.

Dans le deuxième chapitre nous introduisons à la problématique ainsi la partie mathématique du problème étudié, ce chapitre sera consacré à la description du problème physique, la géométrie du problème, le système de coordonnées ainsi les équations dynamiques et thermiques qui gouvernent la zone de couche limite pour fluides visqueux.

Le troisième chapitre est consacré pour la méthode numérique utilisé pour étudier le problème physique, nous avons choisi la méthode des différences finies. La programmation sera sous Matlab.

Dans ce dernier, nous discutons les résultats obtenus. Ensuite, nous examinons l'influence des paramètres de contrôle du problème sur la vitesse, la température.

Enfin, la conclusion où nous dégagerons les points forts et les résultats de notre étude et les perspectives qu'elle offre.

Chapitre I Théorie et contexte scientifique

I.1. Introduction

Les fluides sont présents dans pratiquement tous les aspects de la vie quotidienne (transport, industrie, chimie, biologie...). Ils sont aussi présents dans pratiquement tous les domaines des sciences de la Terre : par ex. la circulation atmosphérique, la circulation océanique, l'écoulement souterrains (les aquifères), les écoulements magmatiques, les mouvements dans le noyau terrestre liquide, ainsi que les écoulements catastrophiques (volcanisme, tsunamis, coulées de boue ou lahars, avalanches, etc.).

Même si cela peut sembler paradoxal, la dynamique des fluides est également importante pour certains solides. En effet, certains solides comme les glaciers fluent (bien que lentement) et possèdent donc une rhéologie (la façon dont ils se déforment et s'écoulent) similaire à celle des fluides. D'autres corps sont indéniablement solides, comme le manteau par ex., qui transmet les ondes sismiques de cisaillement, ce qu'un fluide ne pourrait pas faire.

Mais sur de grandes échelles de temps, certains matériaux (comme le manteau) se comportent comme s'ils étaient en fait fluides. La déformation de ces solides peut donc être étudiée et comprise à l'aide des mêmes équations que celles qui régissent la dynamique des fluides. L'ascension des magmas dans la croûte terrestre et leur épanchement en surface sont également régis par la dynamique des fluides. Cette dynamique est particulièrement riche car les propriétés des magmas couvrent une grande gamme de valeurs.

En effet, ces propriétés dépendent de la composition des magmas, de leur température (qui évolue au cours du temps), de la pression, de leur teneur en cristaux et en gaz, etc. Cette variabilité est à l'origine de la complexité et des richesses des écoulements magmatiques. Dans ce présent chapitre on parlera sur les fluides visqueux d'une manière générale, leurs fabrications et leurs propriétés physiques et thermiques. On parlera aussi sur les généralités de la convection et de la couche limite, y compris les mécanismes sous-jacents et les phénomènes associés.

Nous aborderons également des applications pratiques de ces concepts dans les domaines de la météorologie et de l'aérodynamique, en examinant des exemples concrets de flux de fluides autour d'objets tels que des ailes d'avion et des bâtiments. Enfin, nous discuterons des modèles mathématiques utilisés pour décrire la convection et la couche limite, ainsi que des techniques numériques utilisées pour simuler ces phénomènes.

I.2. Notion générale sur les fluides visqueux

I.2.1. Introduction

Les scientifiques ont étudié les propriétés des fluides et ont cherché à comprendre leur comportement. Parmi les différents types de fluides, les fluides visqueux ont suscité un intérêt particulier. Un fluide visqueux est un type de fluide qui résiste au mouvement relatif entre ses différentes couches ou particules. Contrairement à un fluide parfait, qui s'écoule facilement sans résistance interne, un fluide visqueux présente une certaine viscosité, c'est-à-dire une résistance à l'écoulement.

L'histoire de la compréhension des fluides visqueux remonte à plusieurs siècles, avec des observations faites par des scientifiques tels que Leonardo da Vinci et Galilée. Cependant, c'est Isaac Newton qui a formulé la loi de la viscosité de Newton en 1687, qui décrit la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement dans un fluide visqueux. Au fil des siècles, des scientifiques ont continué à étudier les propriétés des fluides visqueux et à développer des modèles mathématiques pour décrire leur comportement.

Aujourd'hui, la compréhension des fluides visqueux est importante pour de nombreuses applications pratiques, telles que la conception de systèmes de tuyauterie, la production de lubrifiants et la conception de réacteurs chimiques. La viscosité des fluides peut être décrite mathématiquement par les équations de Navier-Stokes, qui modélisent le comportement de la vitesse, de la pression et de la densité du fluide.

I.2.2. Définition de fluide

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide [1].

I.2.3. Phénomène de viscosité

La viscosité est la capacité que les fluides ont à résister aux écoulements. Plus précisément, la viscosité est la capacité que les fluides ont à s'opposer à la vitesse d'écoulement ; les fluides visqueux ne peuvent pas s'opposer au mouvement mais ils peuvent diminuer la vitesse à laquelle cet écoulement a lieu, et leur viscosité quantifie cette capacité à freiner l'écoulement.

L'eau, l'huile, le miel coulent différemment : l'eau coule vite, mais avec des tourbillons, le miel coule lentement, mais de façon bien régulière. La chute d'un parachutiste se fait à vitesse constante, contrairement à la loi de la chute libre. La pression d'un liquide réel diminue tout au long d'une canalisation dans laquelle il s'écoule, même si elle est horizontale et de section uniforme. Dans un fluide réel, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent. La viscosité est due à ces frottements qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres. Les phénomènes dus à la viscosité des fluides ne se produisent que lorsque ces fluides sont en mouvement. Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse Figure I.1. On dit qu'il existe un profil de vitesse [2].

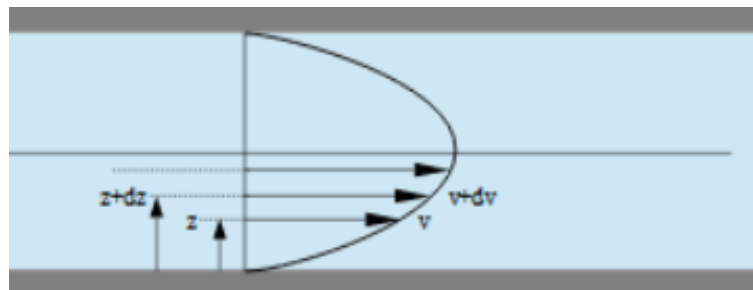


Fig. I-1 Schéma montrant la formation d'un profil de vitesse à cause des forces de frottement [2].

La représentation par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance z de cette couche au plan fixe ($v = v(z)$)

I.2.3.1. Viscosité dynamique - Viscosité cinématique

- **Viscosité dynamique**

On considère deux couches de fluide adjacentes distantes de z Figure I.2 La force de frottement qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit Δv , à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz [2].

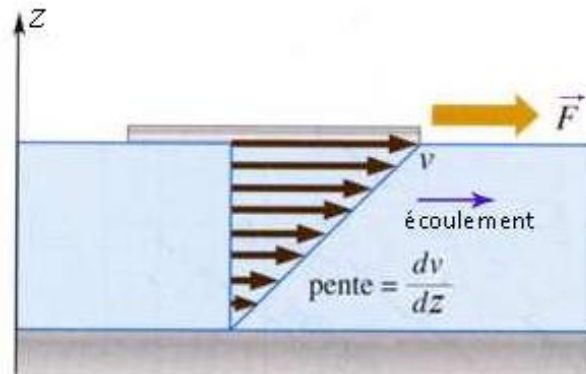


Fig. I-2 Schéma montrant la relation entre la force de glissement et le coefficient de viscosité

[2]

Le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique du fluide et la relation entre la force de glissement F et η est donnée par

$$F = \eta S \frac{dv}{dz} \quad (\text{I.1})$$

η : Coefficient de viscosité dynamique du fluide

Dimension : $[\eta] = \text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-1}$

Unité :

Dans le système international (SI), l'unité de viscosité dynamique est le Pascal seconde (

Pa.s) ou Poiseuille (Pl) :

$$1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Pl} = 1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.$$

Dans le système (CGS) : l'unité est le Poise (Po) ; $1 \text{ Pl} = 10\text{Po}$.

- **Viscosité cinématique**

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique et de la masse volumique

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (\text{I.2})$$

Dimension : $[\nu] = \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$

Unité :

- Dans le système international (SI), l'unité de viscosité cinématique n'a pas de nom particulier : (m²/s).
- Dans le système CGS, l'unité est le Stokes (St) : 1m²/s = 10⁴ St.

I.2.3.2. Ordre de grandeur : influence de la température

La viscosité des liquides diminue beaucoup lorsque la température augmente

Tableau I.1. Il n'existe pas de relation rigoureuse liant η et T, mais nous pouvons écrire :

$$\eta = k.T \quad (\text{I.3})$$

K : Constante quelconque.

Fluide	η (Pa.s)
Eau (0 °C)	1,787 x 10 ⁻³
Eau (20 °C)	1,002 x 10 ⁻³
Eau (100 °C)	0,2818 x 10 ⁻³
H ₂ (20 °C)	0,860 x 10 ⁻⁵
O ₂ (20 °C)	1,95 x 10 ⁻⁵

Tableau I-1 Variation de la viscosité en fonction de la température [2].

I.2.3.3. Viscosimètre d'Ostwald

L'appareil comporte : Un capillaire bien calibré, Une ampoule A portant deux repères R1 et R2. Un réservoir en U contenant le liquide étudié.

On aspire le liquide jusqu'à R1 et on mesure la durée Δt qu'il met pour s'écouler jusqu'au repère R2. Ce temps d'écoulement est proportionnel à la viscosité dynamique du liquide et inversement proportionnel à la pression motrice. On montre que K étant une constante caractéristique de l'appareil. Les constructeurs délivrent avec chaque tube, un certificat d'étalonnage où intervient plutôt K : $\eta = K \cdot \rho \cdot t$ [2].

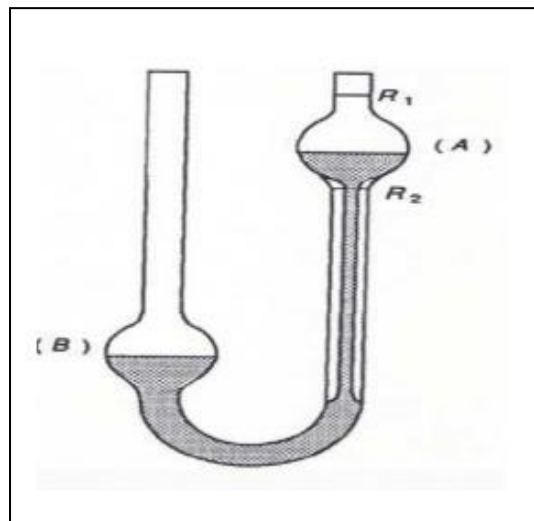


Fig. I-3Viscosimètre d'Ostwald [2].

Principe de Le l'appareil consiste à faire écouler de l'eau, dont on veut mesurer la viscosité, à travers un tube capillaire avec une vitesse débitante assez petite pour que la loi de Poiseuille puisse s'appliquer :

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{\eta L} \quad (\text{I.4})$$

Q : Débit volumique

$\Delta p / L$: La chute de pression par unité de longueur, qui est due à la viscosité.

R : le rayon du tube capillaire.

I.2.3.4. Viscosimètre à chute de bille ou viscosimètre d'Hoepler

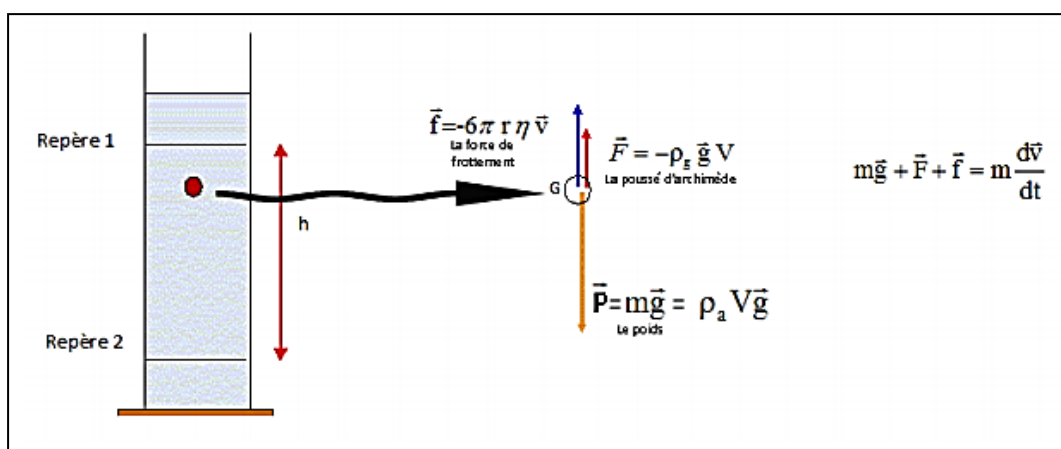


Fig. I-4Viscosimètre d'Hoepler [2].

Une bille sphérique tombe lentement dans un tube bien calibré renfermant le liquide visqueux. On mesure la durée t que met la bille pour parcourir une certaine distance. Si la viscosité est suffisante, la bille atteint très rapidement une vitesse limite de chute constante v_{lim} et cette vitesse est assez faible pour que la force de frottement soit décrite par la loi de Stokes :

$$F = 6\pi R \cdot \eta \cdot v_{\text{lim}} \quad (\text{I.5})$$

La bille est en outre soumise à son poids et à la poussée d'Archimède. La 2ème loi de Newton se traduit donc, lorsqu'il n'y a plus d'accélération, par :

$$6\pi R \cdot \eta \cdot v_{\text{lim}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot (\rho_{\text{bille}} - \rho_{\text{liq}}) g \quad (\text{I.6})$$

En on déduit :

$$\eta = \frac{2R^2}{9v_{\text{lim}}} (\rho_{\text{bille}} - \rho_{\text{liq}}) \quad (\text{I.7})$$

I.3. Notion sur la convection

La convection est un mode de transfert d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Elle est considérée comme le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacent. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite, les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse températures et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte, simultanément, le fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée et convection mixte. [3].

I.3.1. Différents types de convection

I.3.1.1. Convection forcée

Le phénomène de convection forcée apparaît quand le mouvement du fluide est imposé par une cause mécanique extérieure (pompe, ventilateur...) au système [3].

I.3.1.2. Convection naturelle

Le phénomène de convection naturelle thermique apparaît spontanément, sous le seul effet des différences de masse volumique résultantes des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravifique...) [3].

I.3.1.3. Convection mixte

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convection sont considérées séparément, du même ordre de grandeur [3].

I.3.2. Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{s} \frac{dQ}{dt} \quad (I.8)$$

Où S est l'aire de la surface (m²). On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (I.9)$$

I.3.2.1. Flux de chaleur convectif

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton qui stipule que la densité de flux de chaleur échangé entre une paroi solide et un fluide en écoulement est proportionnelle à l'écart de température qui lui a donné naissance [4].

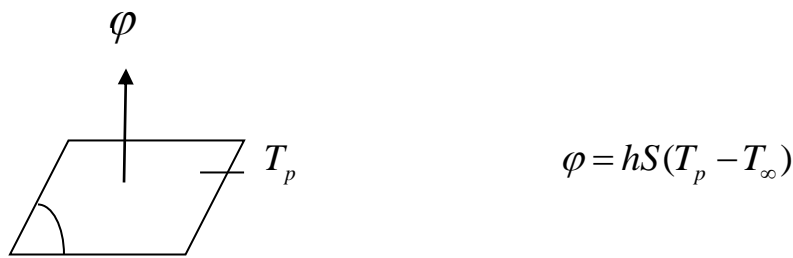


Fig. I-5 Schéma du transfert de chaleur convectif [5].

Avec :

φ Flux de chaleur transmis par convection (W)

h Coefficient de transfert de chaleur par convection (W m⁻² °C⁻¹)

T_p Température de surface du solide (°C)

T_∞ Température du fluide loin de la surface du solide (°C)

S Aire de la surface de contact solide/fluide (m²)

I.3.3. Coefficients d'échanges de chaleur par convection

Le coefficient h est la conductance thermique de convection, ou coefficient d'échange thermique par convection. Il s'exprime en W/ (m². K) ; quel que soit le type de convection (libre ou forcée) et quel que soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) [6].

Il existe quatre méthodes générales pour déterminer le coefficient d'échange de chaleur par convection :

- Résolution analytique ou numérique des équations de mouvements.
- Etude approchées de la couche limite par les méthodes d'intégration.
- Analyse dimensionnelle combinée avec l'expérience.
- L'analogie entre le transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement [7].

I.3.4. Le nombre de Nusselt

Lorsque la vitesse du fluide est faible, le transport d'énergie n'est que faiblement aidé par les courants de mélange à échelle macroscopique. Au voisinage immédiat de la paroi la chaleur se meut par conduction pure, les molécules du fluide étant stationnaires par rapport à la frontière de la couche limite. Comme à l'interface ($y=0$) la chaleur s'écoule seulement par conduction, la densité de flux de chaleur peut être calculée à partir de l'équation [7].

$$\varphi = -\lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{I.10})$$

On peut établir une relation entre le coefficient d'échange de chaleur, h , et le gradient de température à la paroi en écrivant :

$$Q = -\lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = hS (T_p - T_\infty) \quad (\text{I.11})$$

Q : Quantité de chaleur transmise entre les milieux 1 et 2 en (J).

S : surface d'échange de chaleur.

A partir de l'égalité ci-dessus on peut calculer le rapport suivant :

$$\frac{hS}{\lambda S} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{(T_p - T_\infty)} \quad (\text{I.12})$$

On introduit une longueur L ($S= L*L$) caractéristique du corps à partir duquel la chaleur se transmet, l'équation ci-dessus se met sous la forme suivante : [7]

$$\frac{hS}{\lambda S} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{(T_p - T_\infty)} \Rightarrow \frac{hL}{\lambda L} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{(T_p - T_\infty)} \Rightarrow \frac{hL}{\lambda} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{(T_p - T_\infty)}{L}} = Nu \quad (\text{I.13})$$

Le rapport $\frac{hL}{\lambda}$ est appelé nombre de Nusselt Nu . Nusselt peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface solide sur le gradient de température de référence

$\frac{(T_p - T_\infty)}{L}$. En pratique le nombre de Nusselt est une mesure commande du coefficient d'échange de chaleur par convection car, une fois sa valeur connue, on peut calculer le coefficient d'échange de chaleur : [7]

$$h = Nu \frac{\lambda}{L} \quad (\text{I.14})$$

I.3.5. L'importance de la convection dans la nature et dans l'énergie

I.3.5.1. Dans la nature

- La convection est responsable de la circulation des masses d'air dans l'atmosphère, ce qui conduit à la formation de différents types de climats et de phénomènes météorologiques tels que les tempêtes, les cyclones, les tornades et les nuages.
- Dans les océans, la convection joue également un rôle important dans la circulation des courants marins, qui transportent la chaleur, les nutriments et les organismes marins à travers le monde.
- Dans la croûte terrestre, la convection de la matière mantellique est responsable de la tectonique des plaques et de la formation de montagnes, de volcans et de fosses océaniques.

I.3.5.2. Dans l'énergie

- La convection est utilisée dans les chaudières pour produire de la vapeur qui alimente les turbines dans les centrales électriques. Dans ce processus, la chaleur est transférée de la source de combustion à l'eau, qui se transforme en vapeur et est ensuite utilisée pour produire de l'électricité.
- Dans les panneaux solaires thermiques, la convection est utilisée pour faire circuler l'eau chaude ou le fluide caloporteur à travers les panneaux, où la chaleur est transférée à l'eau et est ensuite utilisée pour chauffer les bâtiments.
- Dans les fours industriels, la convection est utilisée pour répartir la chaleur de manière uniforme, ce qui permet une cuisson plus rapide et plus efficace des aliments.

En somme, la convection est un processus important dans de nombreux domaines de la nature et de l'énergie, et sa compréhension et son utilisation sont essentielles pour améliorer notre vie quotidienne et protéger notre planète.

I.4. Notion de couche limite

Le concept de la théorie de la couche limite a été introduit par Prandtl en 1904, qui a conçu et qui a donné l'idée d'une couche caractéristique des fluides dans la région juste près d'une frontière solide. Il a proposé que même pour une très faible viscosité, la condition d'adhérence devait être satisfaite à la limite solide (ce qui implique que la vitesse du fluide à une frontière solide soit la même que celle de la frontière elle-même [8]). Ce concept donne naissance à la mécanique des fluides moderne [9]. Un phénomène identique appelé couche limite thermique peut être également observée dans le cas d'un transfert de chaleur entre le fluide et le solide.

I.4.1. Les types de la couche limite

I.4.1.1. Couche limite dynamique

Lorsqu'un fluide se déplace sur un obstacle, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. La couche limite est la zone de fluide contiguë la paroi (ou bien, on peut dire qu'il s'agit d'une zone d'interface entre le corps et le fluide), dans laquelle se produit l'accommodation entre la vitesse nulle en paroi et la pleine vitesse locale du fluide libre.

De nombreuses propriétés de l'écoulement (frottement, transfert thermique et présence éventuelle de décollements) dépendent de cette couche limite.

- **Couche limite laminaire**

La couche limite laminaire est la zone près d'une surface où le fluide qui s'écoule a un mouvement régulier et uniforme, sans turbulences significatives. Dans cette zone, les molécules de fluide adhèrent à la surface, créant une mince couche de fluide qui glisse doucement le long de la surface. Est importante en ingénierie et en physique, car elle peut affecter la résistance au mouvement d'un objet dans un fluide. Les ingénieurs et les scientifiques doivent donc souvent prendre en compte la couche limite laminaire lors de la conception de structures ou d'objets qui se déplacent dans des fluides

La couche limite laminaire est caractérisée par le fait que toutes les vectrices vitesses sont parallèles à un même plan, l'écoulement se présente alors sous la forme de lame de fluide glissant les unes sur les autres. Ces lames restent rectilignes sur une certaine longueur, puis s'estompent. On observe une telle couche limite vers le bord d'attaque d'un profil. On appelle conventionnellement l'épaisseur δ de la couche limite la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse U est telle que $U=0.99U_\infty$.

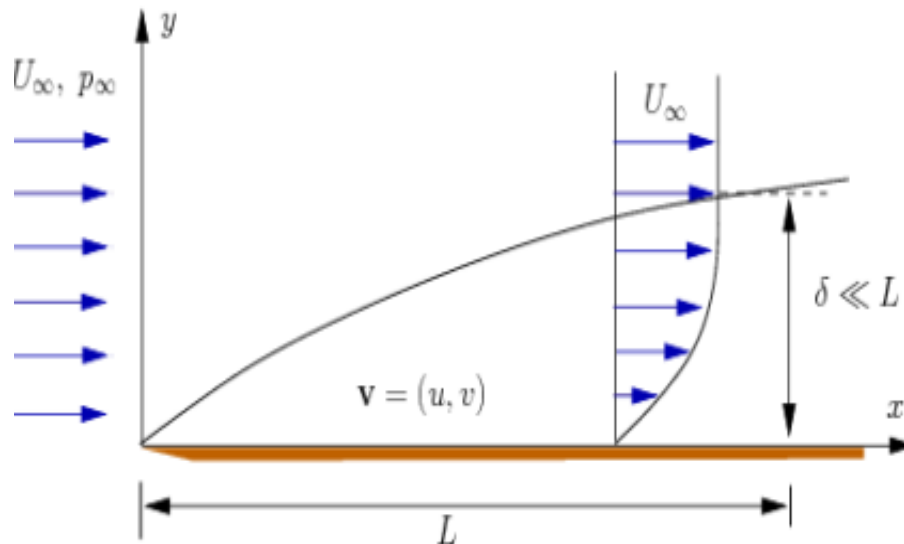


Fig. I-6Développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane [6].

- **Couche limite turbulente**

La couche limite turbulente est la zone près d'une surface où le fluide qui s'écoule a un mouvement irrégulier et chaotique, caractérisé par des tourbillons et des fluctuations de vitesse. Contrairement à la couche limite laminaire, la couche limite turbulente ne suit pas une trajectoire régulière le long de la surface est importante en ingénierie et en physique, car elle peut avoir un impact significatif sur la résistance au mouvement d'un objet dans un fluide. Les ingénieurs et les scientifiques doivent donc prendre en compte la couche limite turbulente lors de la conception d'objets qui se déplacent à des vitesses élevées ou dans des fluides visqueux, tels que les avions, les navires et les turbines.

L'écoulement présente un caractère désordonné, due en partie aux aspérités qu'existent toujours sur la paroi. La couche limite devient turbulente et les vecteurs vitesses ne sont plus parallèles entre eux.

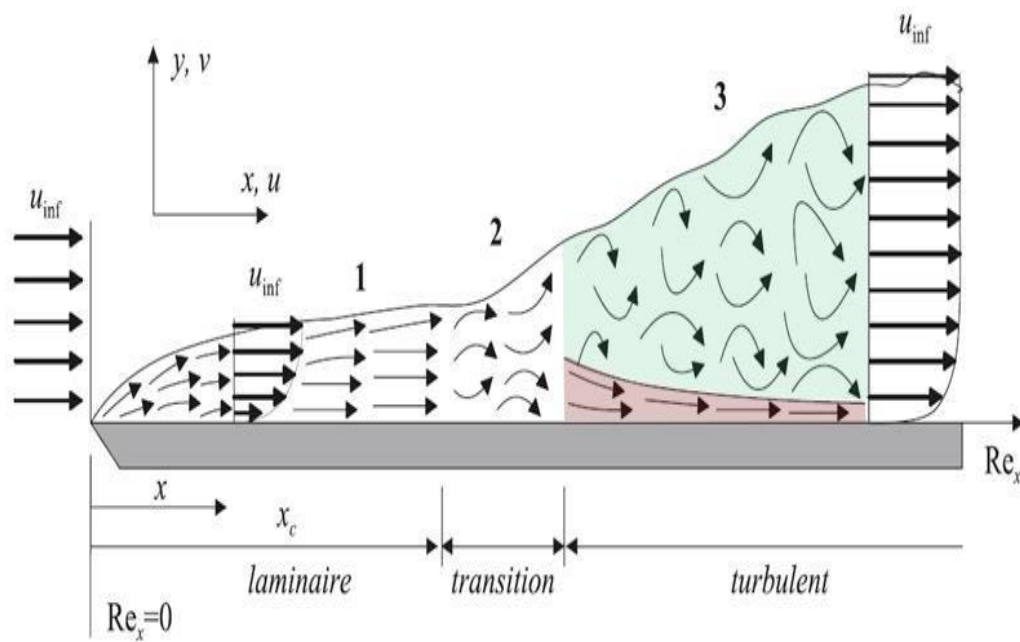


Fig. I-7délimitation des zones de couche limite dynamique [10].

On remarque qu'il existe une délimitation entre les deux zones précédemment définies que l'on nomme zone de transition.

I.4.1.2. Couche limite thermique

La couche limite thermique est la zone de transition entre la surface d'un objet et le fluide environnant, où il y a un échange de chaleur entre les deux. Plus précisément, il s'agit de la couche la plus proche de la surface où la température varie considérablement en fonction de la distance à la surface.

La taille de la couche limite thermique dépend de plusieurs facteurs, tels que la vitesse du fluide, la température de la surface et la viscosité du fluide. Une couche limite plus épaisse signifie que l'échange de chaleur entre la surface et le fluide environnant est plus important, tandis qu'une couche limite plus fine signifie que l'échange de chaleur est moindre.

La couche limite thermique ne se développe au sein d'un écoulement de fluide visqueux en contact avec un corps solide, qui si ces derniers sont à des températures différentes.

Supposons par exemple que l'écoulement incident sur une plaque plane soit à une température uniforme T_∞ . Et que la surface de cette dernière soit maintenue à une température T_w également uniforme mais différente de T_∞ . En explorant le champ de température T perpendiculairement à la plaque, selon l'ordonnée y , on observera une variation

progressive de T à T_∞ , d'abord rapide puis de plus en plus lente à mesure qu'on pénètre dans l'écoulement.

L'épaisseur δ_t de la couche limite thermique est conventionnellement définie comme étant la distance à la paroi pour laquelle le rapport $\frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = 0.99$ [6].

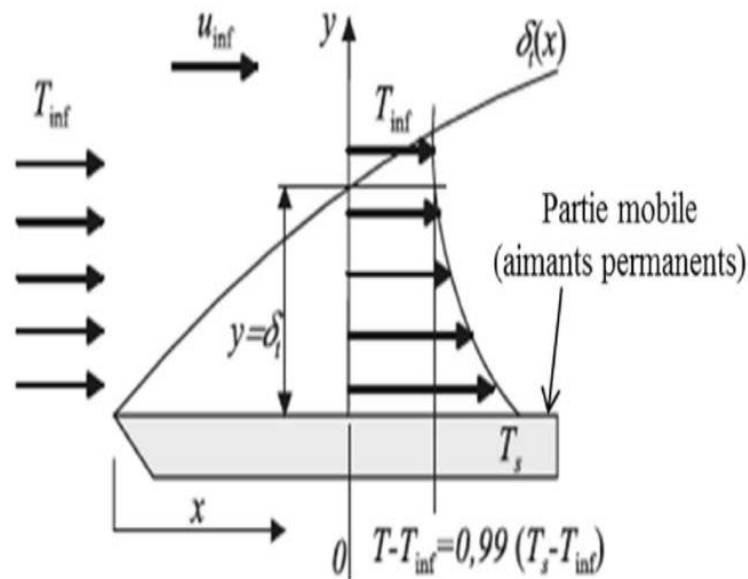


Fig. I-8 développement d'une couche limite thermique le long d'une plaque plan isotherme [11].

Dans le cas où ces deux phénomènes se présentent de manière, il existe un nombre adimensionnel, le nombre de Prandtl Pr caractérisant le fluide et défini par $Pr = \frac{\nu}{a}$, traduisant

le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique, qui permet de lier les épaisseurs des deux couche limites :

- $Pr \ll 1$ Dans ce cas la chaleur se diffuse plus rapidement que la quantité de mouvement donc l'épaisseur de la couche limite thermique sera plus grande que celle de la couche limite dynamique $\delta > \delta_t$
- $Pr \gg 1$ Dans ce cas l'écoulement se caractérise par une diffusion de la quantité de mouvement beaucoup plus importante que la diffusion de la chaleur $\delta_t > \delta$

$Pr \approx 1$ les deux épaisseurs sont du même ordre de grandeur

I.4.2. Hypothèses de la couche limite

On considère un écoulement stationnaire, visqueux et compressible d'un fluide sans force de masse avec les hypothèses citées ci-dessous :

- La vitesse de l'écoulement extérieur est de l'ordre U_∞
- La longueur caractéristique est de l'ordre L (position de la bosse)
- L'épaisseur caractéristique est de l'ordre δ , avec $\delta \ll L$
- Le gradient de la pression est d'ordre ρU_∞^2

I.4.3. Les caractéristiques de la couche limite.

La couche limite est une zone de l'atmosphère située près de la surface terrestre où les propriétés physiques de l'air subissent des changements significatifs. Les caractéristiques de la couche limite comprennent :

- Épaisseur : la couche limite est généralement d'une épaisseur de quelques conditions météorologiques.
- Vitesse du vent : à l'intérieur de la couche limite, la vitesse du vent diminue régulièrement de la surface terrestre jusqu'à une hauteur d'environ 1 km.
- Turbulence : la couche limite est caractérisée par une turbulence importante due aux turbulences engendrées par la friction entre l'air et la surface terrestre.
- Température : la température de l'air dans la couche limite diminue avec l'altitude, ce qui peut entraîner la formation de brouillard ou de nuages bas.
- Humidité : l'humidité de l'air varie en fonction des conditions locales, de la présence d'eau dans le sol et de l'évapotranspiration.
- Effets sur les avions : la couche limite peut avoir un effet important sur les avions, notamment en raison des turbulences et des changements de vitesse du vent.

I.4.4. Développement de la couche limite laminaire sur une plaque verticale

Un exemple classique de convection naturelle externe est celui du développement de la couche limite sur une plaque verticale chauffée **Fig. I-9**. Ce cas de figure est proche de celui rencontré près des parois latérales interne d'un réfrigérateur (autre que la paroi de l'évaporateur). La plaque est immergée dans un fluide étendu et immobile avec $T_s \succ T_\infty$. Les forces de flottabilité induisent une couche limite dynamique dans laquelle le fluide chauffé

s'élève verticalement entrainant le fluide de la région immobile. Une couche limite se développe également si $T_s < T_\infty$. Dans ce cas, le mouvement du fluide est descendant (cas de la paroi de l'évaporateur dans les réfrigérateurs ménager à froid statique) [3].

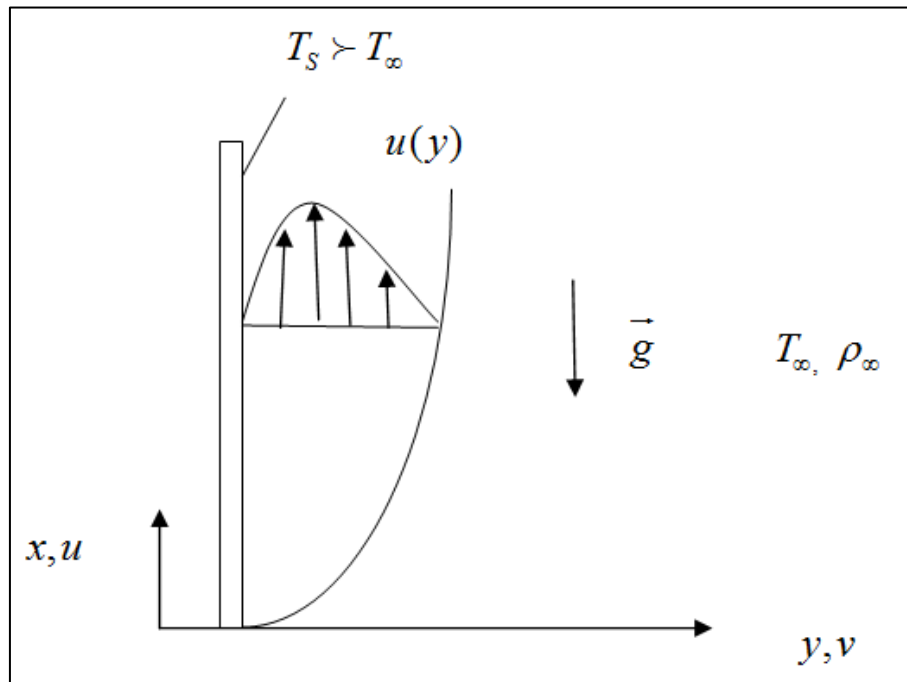


Fig. I-9 Développement de la couche limite sur une plane verticale chauffée

Considérons maintenant un écoulement laminaire de couche limite en régime permanent. **Fig. I-9**. La gravité est dirigée vers le bas (direction $-x$). Nous supposons que le problème est bidimensionnel et on utilise l'approximation de Boussinesq.

L'équation de mouvement suivant la direction x s'écrit alors (en négligeant le terme $(\partial^2 u / \partial x^2)$) :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.15})$$

Notons qu'il n'y a aucune force de gravité dans la direction y (dans l'équation du mouvement suivant y), d'où $\partial p / \partial y = 0$. Par conséquent gradient de pression suivant x à un

point quelconque dans la couche limite est égale au gradient de pression dans la région hors de la couche limite. Dans cette région $u=0$, et l'équation (I.10) se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_{\infty} g \quad (\text{I.16})$$

En substituant l'équation (I.13) dans (I.12), nous obtenons l'expression suivante :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{\rho} (\rho_{\infty} - \rho) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.17})$$

L'équation (I.14) s'applique à chaque point de la couche limite.

Le premier terme dans le second membre de l'équation (I.14) désigne la poussée d'Archimède qui peut être explicitée en utilisant le coefficient volumétrique de dilatation thermique (β), l'ensemble des équations régissant le problème est alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.18})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.19})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{I.20})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

Pour $y = 0; u = v = 0$ et $T = T_s$

Pour $y \rightarrow \infty; u \rightarrow 0$ et $T \rightarrow T_{\infty}$

Effets sur la dispersion de la pollution : la couche limite peut également avoir un impact sur la dispersion de la pollution atmosphérique, car elle peut agir comme une barrière qui empêche la dispersion de la pollution au-dessus de la couche limite.

En résumé, la couche limite est une zone importante de l'atmosphère qui joue un rôle clé dans de nombreux phénomènes météorologiques et environnementaux.

I.5. Equation d'état de transfert, hypothèses simplificatrices

I.5.1. Equations de conservation

La convection naturelle est régie par trois équations : l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de l'énergie. Ces équations s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{g} \quad (\text{I.22})$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho U \vec{u} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \bar{\bar{\tau}} : \vec{\nabla} \vec{u} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (\text{I.23})$$

U : énergie interne massique [J kg^{-1}], u : vitesse du fluide [m s^{-1}].

j : densité du flux convectif [Wm^{-2}], $\bar{\bar{\tau}}$: tenseur des contraintes visqueuses [Pa].

g : accélération de pesanteur [m s^{-2}], p : pression [Pa].

I.5.2. Approximation de Boussinesq

L'approximation de boussinesq consiste à supposer que la masse volumique est constante sauf dans le terme généralisé de la convection naturelle soit le terme $\rho \vec{g}$ de l'équation de Navier Stocks. Ainsi :

$$\rho = cte \quad (\text{I.24})$$

Sauf pour :

$$\rho \vec{g} = \rho_{\infty} (1 - \beta(T - T_{\infty})) \vec{g} \quad (\text{I.25})$$

Cette approximation linéaire est valable pour : $(T - T_{\infty}) \ll T_{\infty}$.

Pour un gaz parfait $\beta = \frac{1}{T_{\infty}}$ est la température de référence [K] ;

T_∞ est prise à l'infini en convection externe autour d'un projet et elle prise comme une valeur moyenne loin des parois en convection interne.

- On considère l'air comme un gaz parfait ($U = c_v T + cte$, $H = C_p T + cte$) c_v : capacité thermique massique à pression constante [$J kg^{-1} K^{-1}$];

C_p : capacité thermique massique à pression constante [$J kg^{-1} K^{-1}$];

H : enthalpie massique [$J kg^{-1}$]

- On néglige l'apport de l'énergie interne dû à la dissipation visqueuse

$$\bar{\tau} : \bar{\nabla} \vec{u} \square |\bar{\nabla} \cdot \vec{j}| \quad (I.26)$$

- On suppose que le fluide est newtonien de viscosité constante et incompressible

$$\bar{\tau} = \rho \nu (\bar{\nabla} \vec{u} + (\bar{\nabla} \vec{u})^t) \quad (I.27)$$

- On suppose que la conductivité thermique est constante

$$\vec{j} = -k \bar{\nabla} T \quad (I.28)$$

En appliquant ces approximations, les équations (I.26), (I.27) et (I.28) deviennent respectivement :

$$\bar{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (I.29)$$

$$\frac{\partial \rho^\infty \vec{u}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho^\infty \vec{u} \vec{u} = -\bar{\nabla} (p + \rho^\infty g z) + \rho^\infty \nu \nabla^2 \vec{u} - \rho^\infty \beta (T - T_\infty) \vec{g} \quad (I.30)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot T \vec{u} = a \nabla^2 T \quad (I.31)$$

Avec $\alpha = k / (\rho C_p)$; $\nu = \mu / \rho$

α : diffusion thermique du fluide [$m^2 s^{-1}$].

ν : viscosité cinématique du fluide [$m^2 s^{-1}$].

Par la suite on note abusivement p au lieu de $(p + \rho_\infty gz)$ et ρ au lieu de ρ_∞ .

I.6. Etat de l'art

KV Prasad et al : Nous présentons des solutions numériques à l'écoulement in stationnaire de la couche limite convective d'un fluide visqueux sur une surface d'étirement vertical avec des propriétés de transport et un rayonnement thermique variables. Les situations d'écoulement flottant d'assistance et d'opposition sont prises en compte. À l'aide d'une transformation de similarité, les équations différentielles partielles dépendantes du temps qui régissent sont d'abord transformées en équations différentielles ordinaires non linéaires couplées à coefficients variables. Les solutions numériques de ces équations soumises à des conditions aux limites appropriées sont obtenues par un schéma aux différences finies du second ordre connu sous le nom de méthode de Keller-Box. Les résultats numériques ainsi obtenus sont analysés pour les effets des paramètres pertinents à savoir, le paramètre in stationnaire, le paramètre de convection libre, le paramètre d'aspiration/injection, le nombre de Prandtl [12].

FatehMebarek-Oudina et al : On étudie computationnelle de la convection libre dans une enceinte poreuse rainurée remplie de nanoliquide hybride à base d'eau en présence d'un champ magnétique externe. Pour résoudre les équations gouvernantes du problème, la technique des éléments finis de Galerkin est utilisée. Pour plusieurs paramètres déterminants tels que le nombre de Rayleigh ($102 \leq Ra \leq 106$), le paramètre de champ magnétique ($0 \leq Ha \leq 100$), le nombre de Darcy ($10^{-2} \leq Da \leq 10^{-4}$), les résultats sont obtenus et discutés via des lignes de courant, isothermes et nombre de Nusselt moyen. Le champ magnétique a un bon effet régulateur pour l'écoulement des fluides et le transfert de chaleur dans les milieux poreux [13].

K Vajravelu, A Hadjinicolaou : Une analyse est effectuée pour étudier les caractéristiques de transfert de chaleur dans la couche limite laminaire d'un fluide visqueux sur une surface continue à étirement linéaire avec une température de paroi variable soumise à l'aspiration ou au soufflage. L'étude considère les effets du chauffage par friction (dissipation visqueuse) et de la génération de chaleur interne d'absorption. Deux cas sont étudiés, à savoir (i) la surface à température de surface prescrite (PST-Case) et (ii) la surface à flux thermique de paroi prescrit (PHF-Case). Les solutions pour la température et les caractéristiques de transfert de chaleur sont obtenues en fonction des fonctions de Kummer. Pour les grands nombres de Prandtl (σ), une largeur de couche limite de $1/\sigma$ est remarquée dans les cas PST et PHF. De

plus, il est montré qu'il n'y a pas de solution de type couche limite pour un petit nombre de Prandtl [14].

MohsenSheikholeslami et al : Étant donné que le transport par advection dans un ferrofluide peut être contrôlé en utilisant un champ magnétique externe, le nanofluide magnétique (ferrofluide) a diverses applications dans les processus de transfert de chaleur. Contrairement à la convection libre ou forcée, la convection ferrohydrodynamique n'est pas encore bien décrite. Dans la littérature, nous voyons des papiers avec des champs magnétiques constants ; mais les hypothèses ne sont pas exactes, car les champs ne sont pas conformes aux équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Dans cette étude, le transfert de chaleur par convection forcée dans un couvercle semi annulaire sous l'influence d'un champ magnétique variable est étudié. L'enceinte est remplie de ferrofluide (Fe_3O_4 -eau). La méthode des éléments finis basée sur le volume de contrôle (CVFEM) est utilisée pour résoudre les équations gouvernantes en tenant compte à la fois des effets ferrohydrodynamiques (FHD) et magnétohydrodynamiques (MHD). On suppose que l'aimantation du fluide varie linéairement avec la température et l'intensité du champ magnétique [15].

MON Malik, Mair Khan: On présente une étude numérique de l'écoulement MHD du modèle de fluide de Casson à viscosité variable vers une feuille d'étirement à épaisseur variable. Le modèle de flux de chaleur Cattaneo – Christov est utilisé à la place de la loi de Fourier pour explorer les caractéristiques de transfert de chaleur. Les équations différentielles partielles déterminantes sont transformées en équations différentielles ordinaires non linéaires en utilisant des transformations de similarité appropriées. Ces équations sont résolues en utilisant une technique numérique, connue sous le nom de méthode de la boîte de Keller. Les paramètres physiques pertinents apparaissant dans les distributions de vitesse et de température sont analysés et discutés à l'aide de graphiques. Afin de vérifier l'exactitude de la méthode, une comparaison a été effectuée avec certains résultats publiés précédemment [16].

S Nadeem et al : Cette étude se concentre sur les caractéristiques de transfert de chaleur et les effets de l'endoscope pour l'écoulement péristaltique d'un fluide de troisième ordre. Deux modèles de viscosité variable sont choisis. La perturbation et les solutions numériques sont obtenues dans chaque cas. Une étude comparative est également faite entre les deux solutions. L'importance des paramètres d'écoulement pertinents entrant dans la modélisation de l'écoulement est discutée [17].

KuppalapalleVajravelu et al : Une étude numérique est réalisée pour étudier les effets de la viscosité dépendante de la température sur l'écoulement et le transfert de chaleur d'un nanofluide sur une surface plane en présence de dissipation visqueuse. Les équations différentielles partielles non linéaires gouvernantes sont transformées en équations différentielles ordinaires non linéaires et sont résolues numériquement par la méthode de la boîte de Keller. Les résultats numériques indiquent que l'effet de la fraction volumique des nanoparticules est d'augmenter le transfert de chaleur et donc d'améliorer l'épaisseur de la couche limite thermique. Ceci est vrai même en présence de viscosité variable et de dissipation visqueuse. De plus, les résultats obtenus pour les caractéristiques de transfert de chaleur avec les nanoparticules révèlent de nombreux comportements intéressants qui justifient une étude plus approfondie sur les effets des « nano-particules solides » [18].

CY Wang, Chiu-On Ng : Les développements récents dans les échangeurs de chaleur à micro-échelle ont accru le besoin de comprendre l'écoulement des fluides et le transfert de chaleur dans un microcanal. Dans cette étude, nous examinons un écoulement entraîné par la flottabilité entièrement développée dans un microcanal vertical à plaques parallèles, qui a une paroi présentant un glissement superhydrophobe et un saut de température, et une autre paroi étant une surface normale sans glissement. Des solutions analytiques sont dérivées pour la convection libre dans le canal, où le chauffage est appliqué à l'une des deux parois, et par une température de paroi constante ou un flux de chaleur constant. Nous examinons comment le glissement superhydrophobe et le saut de température peuvent affecter le débit volumique et le nombre de Nusselt dans diverses conditions de chauffage. Il existe une valeur critique du coefficient de saut de température [19].

Chiu-On Ng, N Rudraiah : Il s'agit d'une étude sur le transport de masse, accompli par réaction, advection et dispersion, d'un soluté dans un écoulement de Poiseuille stable à travers un tube circulaire avec une couche de paroi réactive. La réaction consiste en une composante réversible due à l'échange de phase entre le fluide en écoulement et la couche de paroi et une composante irréversible due à l'absorption dans la paroi. Tout d'abord, le modèle de dispersion généralisé est utilisé pour déduire les valeurs asymptotiques à l'état d'équilibre des trois premiers coefficients de transport en termes de forces et de cinétique des deux réactions, qui peuvent être de n'importe quelle ampleur. Deuxièmement, une simulation numérique est effectuée pour examiner le développement temporel des profils de concentration des phases fluide et paroi à partir de la libération initiale du soluté dans le tube [20].

RR Kairiet al : On étudie l'influence de l'effet de la dissipation visqueuse et du rayonnement sur le transfert de chaleur par convection naturelle à partir d'une plaque plane verticale dans un milieu poreux non Darcy saturé d'un fluide non newtonien de viscosité variable. La paroi et le milieu ambiant sont maintenus à des niveaux de température constants mais différents. Le modèle de loi de puissance d'Ostwald-de Waele est utilisé pour caractériser le comportement du fluide non newtonien. La viscosité du fluide est supposée suivre le modèle de viscosité de Reynolds. L'approximation de Rosseland est utilisée pour décrire le flux de chaleur radiatif dans l'équation de l'énergie. Les équations gouvernantes sous leur forme non similaire sont résolues numériquement par la méthode de non-similarité locale. Les effets de la viscosité variable, de la dissipation visqueuse, le rayonnement et les paramètres d'indice de loi de puissance sur les profils de vitesse et de température ainsi que sur le coefficient de transfert de chaleur sont analysés [21].

P Kandaswamy et al : La convection naturelle laminaire instationnaire dans une enceinte avec des parois latérales partiellement thermiquement actives et une génération de chaleur interne est étudiée numériquement. Les parties thermiquement inactives des parois latérales et des parois horizontales sont isolées thermiquement. Les équations gouvernantes sont résolues en utilisant la méthode du volume de contrôle avec un schéma de loi de puissance. Neuf combinaisons différentes des zones thermiquement actives chaudes et froides sont considérées. Les effets des générations de chaleur, des rapports d'aspect, des différents nombres de Prandtl et des emplacements de la partie thermiquement active des parois latérales sur le modèle d'écoulement (lignes de courant), la distribution de la chaleur (isothermes), la vitesse à mi-hauteur et le taux de transfert de chaleur des parois de l'enceinte sont présentées. On observe que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof en raison d'une augmentation de la force de flottabilité et diminue avec une augmentation de la génération de chaleur. Le transfert de chaleur s'avère être le maximum [22].

K Vajravelu, RN Mohapatra : Le problème de l'écoulement de la couche limite sur une plaque plane avec injection et une vitesse constante opposée en direction à celle du courant principal uniforme est analysé. On montre que la solution de ce problème de couche limite dépend non seulement du rapport de la vitesse de la plaque à la vitesse du flux libre (λ), mais aussi du paramètre de vitesse d'injection (C). On montre aussi qu'il existe une gamme de valeurs de λ et C pour lesquelles les équations différentielles associées aux problèmes de

couche limite admettent des solutions analytiques. Les valeurs critiques de λ et C sont obtenues numériquement et leur importance dans la réduction de la traînée est discutée [23].

E Soewono et al : On obtient des solutions pour une classe d'équations différentielles singulières, non linéaires, du second ordre apparaissant dans la théorie de la couche limite avec aspiration/injection, lorsque des variables de Crocco sont employées. Des résultats d'existence, d'unicité et d'analyticité sont établis pour des conditions aux limites correspondant à l'écoulement d'un flux uniforme sur une plaque plane semi-infinie (problème classique de Blasius) et pour l'écoulement derrière une faible expansion. Comme la technique de normalisation (dans les réf. [8, 9, 11]) ne fonctionne pas, une nouvelle technique est développée et utilisée pour prouver l'existence et les théorèmes d'unicité. De plus, les solutions analytiques sont comparées aux solutions numériques [24].

AA Mohammed : L'analyse de similarité du problème de la convection libre axisymétrique sur une plaque infinie horizontale d'une fluide micropolaire est considérée en supposant que la plaque est soumise à une condition aux limites thermique mixte. On montre que la condition aux limites thermiques est caractérisée par un paramètre positif m et que les deux cas $m = 0$ et $m = 1$ correspondent respectivement à la température prescrite de la plaque et au flux de chaleur de surface prescrit. Si l'on doit calculer le coefficient de transfert de chaleur pour différentes valeurs de m , il n'est pas nécessaire de résoudre le problème des valeurs limites à chaque fois ; il suffit de résoudre une certaine équation polynomiale à condition que la solution soit connue pour toute valeur particulière de m [25].

Ahmed A Mohammadein, NA Al Shear : On présente la concentration du transfert de chaleur stable dans l'écoulement de la couche limite au-delà d'une surface courbe dans un milieu poreux saturé à perméabilité variable. Les équations différentielles couplées non linéaires régissant l'écoulement de la couche limite, le transfert de chaleur et le transfert de masse sont résolues en utilisant la méthode de perturbation à deux termes avec les nombres d'Eckert et de Prandtl. Les solutions de similarité obtenues pour les équations de la couche limite thermique d'ordre zéro et du premier ordre ont été présentées pour deux cas ; à savoir, une perméabilité uniforme et une perméabilité variable. Des résultats numériques pour les profils de vitesse et de température ainsi que pour le coefficient de fraction de peau et le taux de transfert de chaleur pariétal sont obtenus et rapportés graphiquement pour diverses conditions afin de montrer les aspects intéressants de la solution [26].

I.7. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les fluides visqueux et la convection, nous pouvons conclure que la convection est un phénomène important dans les fluides, en particulier pour les transferts thermiques. Les types de convection, tels que la convection naturelle et forcée, peuvent être différenciés en fonction des forces qui les génèrent. La couche limite est également un concept clé dans l'étude des fluides visqueux, car elle décrit la zone près d'une surface où les effets de la viscosité sont importants.

L'analyse mathématique de ces phénomènes est essentielle pour comprendre leurs propriétés et leurs comportements. Les équations de Navier-Stokes sont un exemple important d'équations mathématiques qui peuvent être utilisées pour décrire le mouvement des fluides visqueux. En outre, les équations de la couche limite, telles que les équations de Prandtl, sont utilisées pour étudier le flux de fluide près d'une surface.

Chapitre II Problématique et modélisation mathématique

II.1. Introduction

Dans cette partie du travail, nous présentons le modèle physique. Nous établissons les équations de gouvernantes de couches limites, qui peuvent être écrites sous la forme dimensionnelle sous réserve de conditions aux limites, et les écrire sous forme des équations différentielles ordinaire, ensuite nous posons les conditions aux limites.

II.2. Formulation mathématique

Considérons l'écoulement bidimensionnel laminaire instationnaire de la couche limite d'un fluide visqueux incompressible devant une plaque verticale plane (**Fig. II-1**). Le système de coordonnées cartésiens à son origine située au bord d'attaque de la plaque avec l'axe x positif s'étendant le long de la plaque vers le haut, tandis que l'axe y est mesuré perpendiculairement à la surface de la plaque et est positif dans la direction allant de la plaque au fluide. Nous supposons que pour le temps $t < 0$, les flux de fluide et de chaleur sont stables. Les flux de fluide et de chaleur instationnaires commencent à $t = 0$, la plaque est étant étiré avec une vitesse $U_w(x, t)$ le long de l'axe des x , en gardant l'origine fixe. La température de la plaque $T_w(x, t)$ est supposée être une fonction linéaire de x . Les propriétés thermo-physiques du fluide ambiant sont supposées être constantes. Sous ces hypothèses (avec les approximations de Boussinesq et de la couche limite), les équations gouvernantes de la convection écoulement et transfert de chaleur du fluide visqueux [27].

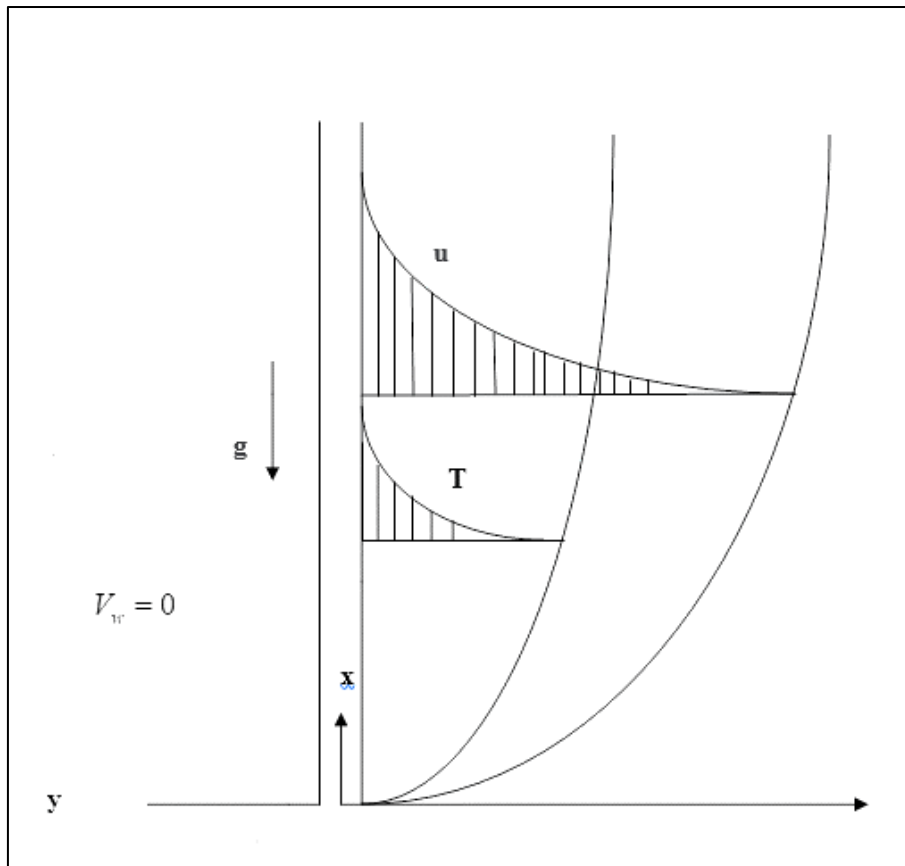


Fig. II-1 Modèle physique et système de coordonnées [27].

II.3. Equation mathématique

II.3.1. Equation dimensionnelle

Compte tenu des hypothèses formulées précédemment, les équations de continuité, de mouvement et d'énergie s'écrivent :

II.3.1.1. Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

II.3.1.2. Equation de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (\text{II.2})$$

II.3.1.3. Equation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II.3})$$

u et v sont les composantes de vitesse dans les directions x et y , respectivement, ν est la viscosité cinématique, g est l'accélération due à la gravité, β est le coefficient de dilatation thermique, T est la température du fluide, T_∞ est la température ambiante température, ρ est la masse volumique, C_p est la chaleur spécifique à pression constante, k est la conductivité thermique du fluide. $u_w = \frac{ax}{(1-ct)}$ est la vitesse à la paroi. Le dernier terme dans l'équation

(II.2) est dû à la force de flottabilité.

Les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} u = u_w ; \quad v = 0 ; \quad T = T_w ; \quad \text{à } y = 0 \\ u \rightarrow 0 ; \quad T \rightarrow T_\infty ; \quad y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$T_w(x, t) = T_\infty + \frac{bx}{(1-ct)^2} \quad (\text{II.5})$$

$$T = \frac{bx}{(1-ct)^2} \theta + T_\infty \quad (\text{II.6})$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (\text{II.7})$$

Ici b est une constante et a a une dimension température/longueur, avec $b > 0$ et $b < 0$ correspondant respectivement aux flux d'assistance et d'opposition, et $b = 0$ est pour la limite de convection forcée (absence de force de flottabilité). Ces formes particulières de $u_w(x, t)$ et $T_w(x, t)$ ont été choisies afin d'obtenir une nouvelle transformation de similarité, qui transforme les équations aux dérivées partielles gouvernantes (II.1) – (II.3) en un ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées équations à coefficients variables. En définissant les fonctions sans dimension suivantes f et θ , et la variable de similarité η comme

$$\eta = \left(\frac{a}{v(1-ct)} \right)^{\frac{1}{2}} y, \quad \psi = \left(\frac{va}{v(1-ct)} \right)^{\frac{1}{2}} xf(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{(T - T_{\infty})}{(T_w - T_{\infty})} \quad (\text{II.8})$$

Où, $\psi(x, y, t)$ est une fonction de flux définie comme $(u, v) = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$ qui satisfait à l'identique l'équation de conservation de masse. (II.1). En substituant (II.6) à (II.3) et (II.4) et en utilisant (II.2) on obtient

$$f''' + ff'' - f'^2 - A(f' + \frac{1}{2}\eta f'') + \lambda\theta = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\theta'' - \text{Pr}(\theta f' - f\theta') - A\text{Pr}(2\theta + \frac{1}{2}\eta\theta') = 0 \quad (\text{II.10})$$

Nous avons trois paramètres définis par :

A : Paramètre de régime variable :

$$A = \frac{c}{a} \quad (\text{II.11})$$

λ : Paramètre de flottabilité :

$$\lambda = g\beta \frac{b}{a^2} \quad (\text{II.12})$$

Pr : Prandtl :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{II.13})$$

II.3.2. Conditions aux limites ordinaires

$$\eta = 0 ; \quad f' = 1 ; \quad f = 0 ; \quad \theta = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty ; \quad f' \rightarrow 0 ; \quad \theta \rightarrow 0$$

II.3.3. Caractérisation du nombre de Nusselt et le coefficient de frottement

Nous avons le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser le transfert thermique entre un fluide et une paroi, défini par :

$$Nu_x = \frac{xq_w}{K(T_w - T_{\infty})} \quad (\text{II.14})$$

Où q_w est le transfert de chaleur de la paroi, donné par :

$$q_w = -K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{II.15})$$

Nous avons le coefficient de frottement est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser l'écoulement, défini par :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_w^2 / 2} \quad (\text{II.16})$$

Où le frottement superficiel τ_w donné par :

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{II.17})$$

Dans le contexte actuel le nombre de Nusselt local réduit Nu_x et le coefficient de frottement local réduit C_f peuvent être introduits et représentés dans l'ordre respectif suivant :

$$Nu_x = -\text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \theta'(0) \quad (\text{II.18})$$

$$C_f \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} = 2f''(0) \quad (\text{II.19})$$

II.4. Procédure numérique

Le domaine de l'analyse numérique est très important pour la résolution des équations différentielles qui modélisent les phénomènes physiques, car il n'existe de solution analytique pour ces problèmes non linéaires. Dans cette étude, la méthode des volumes finie est utilisée pour obtenir une solution approchée d'un problème aux limites a deux points, constitue d'un ensemble d'équation différentielle ordinaire couple. Cette méthode fournit une solution continue et uniforme sur l'intervalle d'intégration en utilisant la formule de lobatto de troisième degré. Le solveur bvp4c sous MATLAB est utilisé pour résoudre le système d'équations algébriques résultant avec les conditions aux limites.

L'utilisation doit fournir les points de maillage initial et une approximation initiale de la solution, ainsi que des problèmes pour contrôler les régions de l'écoulement tels que A , Pr , λ . Les détails de la méthode sont présents dans l'annexe A.

Définir le maillage et les vecteurs initiaux énumérés ci-dessous

$$x = \text{linspace}(a, b, n);$$

$$y_{init} = [000000];$$

Introduire la fonction "solinit" en utilisant "bvpinit" comme indiqué ci-dessous

$$\text{Solinit} = \text{bvpinit}(x, y_{init}, \text{paramètres})$$



Définir les fonctions "odefun", "bcfun" et "solinit" de la manière suivante :

$$\text{dydx} = \text{odefun}(\eta, y)$$

$$\text{dydx} = [y_2; y_3; F(\eta, f', f''); y_4; G(\eta, \theta, \theta')]$$

$$\text{res} = \text{bcfun}(Y_0 - Y_{init})$$

$$\text{res} = [y_0(2) - 1; y_{inf}(2); y_0(4) - 1; y_{int}(4)];$$



Utilisation de la commande suivante pour intégrer le problème :

$$\text{Sol} = \text{bvp4c}(@\text{odefun}@bcfun, \text{solinit}),$$

*Solx=xsol, (Maillage par *bvp4c*)*

*Sol.y=ysol ;(solution approximative par *bvp4c*)*

Plot (xsol,ysol(2 , :)) (ceci tracera f' en fonction de η)



Fin

II.5. Conclusion

Nous sommes arrivés à travers des manipulations mathématiques (méthode de similitude) à un système d'équations qui représente avec adéquation notre problème physique, et ce dernier nous a aidés à mieux comprendre le modèle physique étudié.

Dans le chapitre qui suit nous essayerons de résoudre numériquement les équations mathématiques en utilisant le logiciel Matlab avec la méthode des différences finis.

Chapitre III Résultats et discussion

III.1. Introduction

Afin de résoudre le système constitué des équations de continuité, de mouvement, d'énergie associées des conditions initiale et aux limites correspondantes, conditions initiale et résolues numériquement, ont été résolues numériquement en utilisant le solveur `bv4c` créé en Matlab.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux résultats numériques obtenus de l'évolution de transfert convectif sur une plaque verticale en présence d'un fluide. Les résultats numériques obtenus sont affichés à l'aide d'illustrations graphiques, ces dernières montrent l'effet des différents paramètres (paramètre de régime variable A , paramètre de flottabilité λ et le nombre de Prandtl Pr) sur les profils de vitesse $f'(\eta)$ et de température $\theta(\eta)$ ainsi que le nombre de Nusselt local Nu_x et le coefficient de frottement C_f .

III.2. Validation du code de calcul

Afin de vérifier l'exactitude de la méthode utilisée, les résultats actuels correspondants sont comparés à ceux obtenus par (tableau III.1). Il ressort de ce tableau que les résultats actuels sont en bon accord avec ceux rapportés par le travail cité. Tableau III.1 Comparaison de $F'(0)$ et $\theta'(0)$ pour différentes valeurs de A, λ et Pr .

A	λ	Pr	Ref [24]	Présent travail
0.0	0.0	0.72	0.8086334	0.8088
		1.0	1.0000000	1.0000
		3.0	1.9236825	1.9236
		7.0	3.0722502	3.0722
		10.0	3.7206739	3.7205
		100.0	2.2940832	12.2938

Tableau III-1 Comparaison des résultats de $F'(0)$ et $\theta'(0)$ pour différentes valeurs de A, λ , et Pr .

III.3. Résultats et discussion

Une étude paramétrique a été réalisée selon la méthode décrite précédemment (méthode des différences finies) un ensemble représentatif des résultats graphiques a été obtenu pour la vitesse $F'(\eta)$, la température $\theta(\eta)$. Cela pour plusieurs conditions paramétriques. L'effet de paramètre de régime variable (A), paramètre de flottabilité (λ), et le nombre de Prandtl (Pr).

III.3.1. Profil de vitesse

La variation de la distribution de la vitesse suivant la variable de similarité η est représenté sur les figures **Fig. III-1** à **Fig. III-3** pour quelque ensemble de valeurs de A, λ, Pr . à partir de ces figures, on constate la vitesse augmente jusqu'à un maximum et diminue asymptotiquement vers zéro au bord de la couche limite.

La figure **Fig. III-1** montre l'influence de paramètre de régime variable (A) sur la variation de vitesse. On peut constater une diminution de la vitesse à mesure que le paramètre A (lié au régime) augmente. Cela peut être dû à l'augmentation de la vitesse à la proximité de la plaque et l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite.

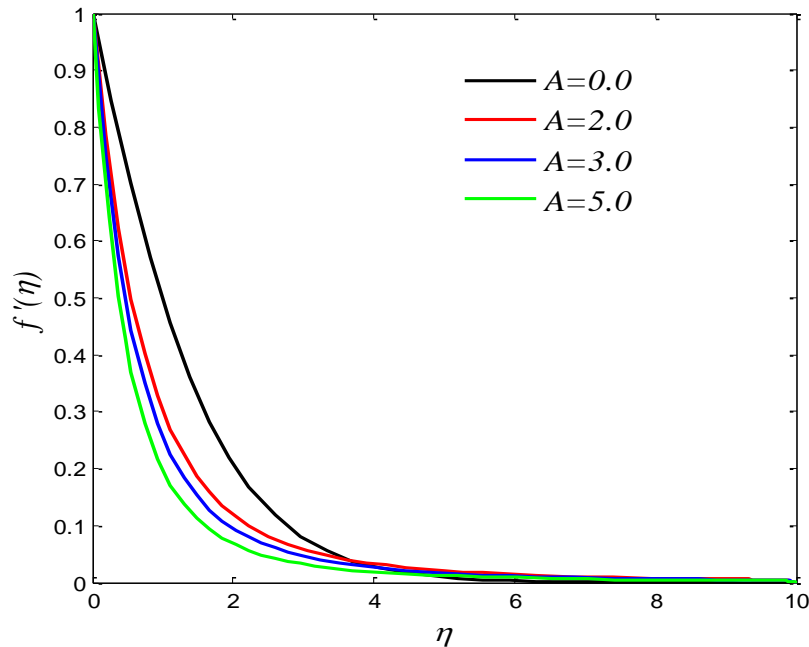


Fig. III-1 vitesse vs A ($Pr = 1.0$ et $\lambda = 1.0$)

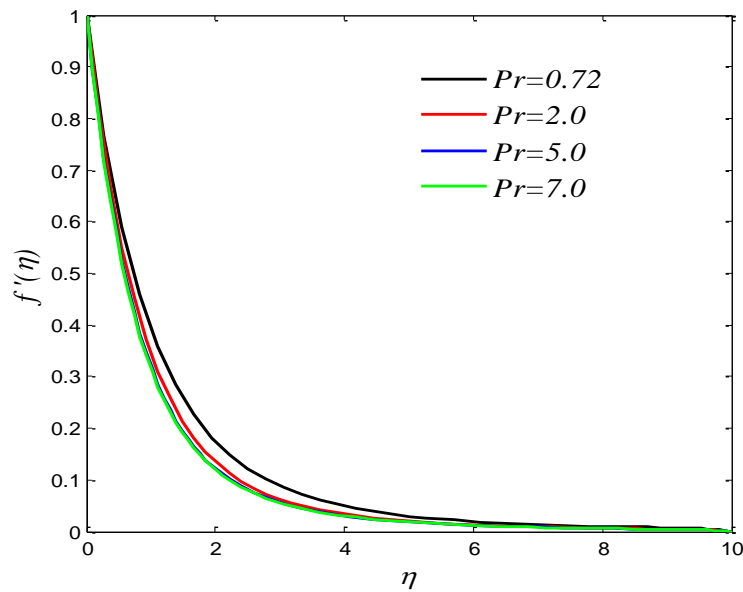


Fig. III-2 vitesse vs Pr ($A = 1.0$ et $\lambda = 1.0$)

L'effet de nombre de Prandtl Pr sur la répartition de la vitesse est décrit dans la figure **Fig. III-2**. A partir de cette figure on observe un comportement inverse pour la vitesse par rapport au paramètre (A) l'augmentation de nombre de Prandtl (Pr) impose une diminution de plus de la vitesse.

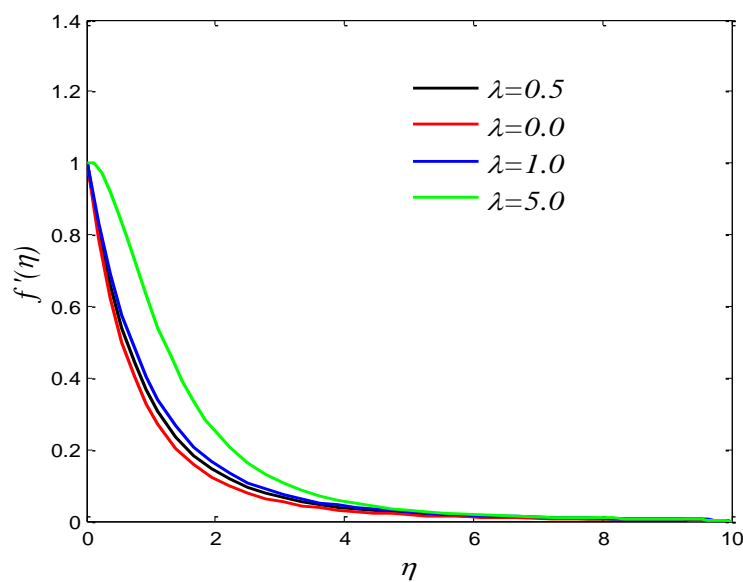


Fig. III-3. Vitesse vs λ ($A = 1.0$ et Pr = 1.0)

En outre, dans la figure **Fig. III-3** l'augmentation de paramètre de flottabilité (λ) conduit à diminuer la vitesse à proximité de la plaque en raison de l'effet d'inertie qui implique la réduction de l'épaisseur de la couche limite.

III.3.2. Profil de températures

La variation de la distribution de la température suivant la variable de similarité η est représentée respectivement sur les figures **Fig. III-4** à **Fig. III-6** pour quelques ensembles de valeurs de A , λ , Pr .

La figure **Fig. III-4** montre que l'effet du nombre de Prandtl (Pr) se traduit par une diminution de température et de la couche limite thermique quand le nombre de Prandtl est élevé ($Pr=5.0$)

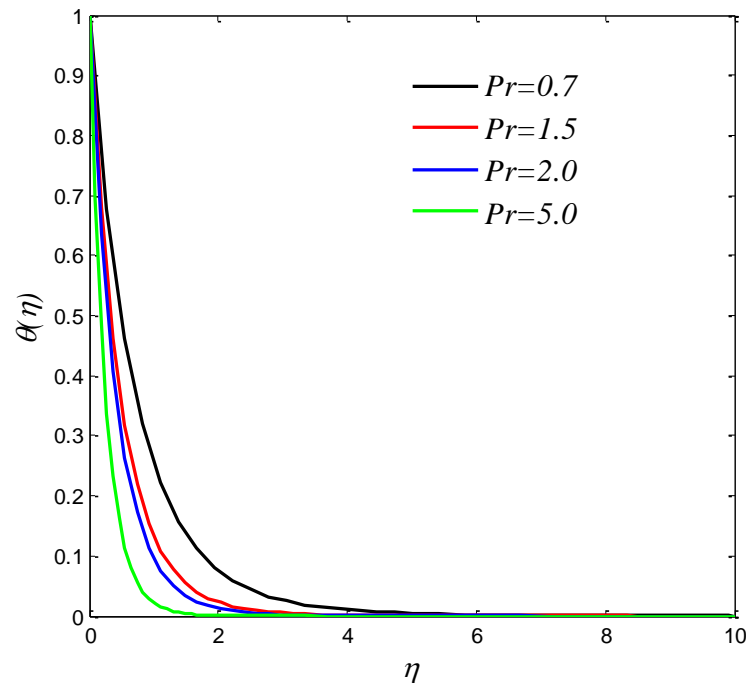


Fig. III-4 Température vs Pr ($A = 1.0$ et $\lambda = 1.0$)

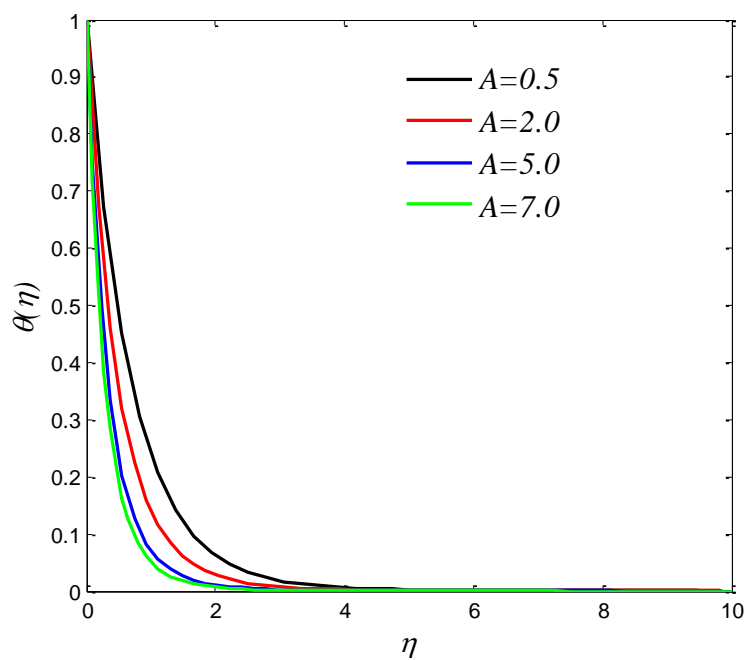


Fig. III-5Température vs A (Pr =1.0 et $\lambda= 1.0$)

La figure **Fig. III-5** montre que l'augmentation du paramètre de régime variable A à effet sur la diminution de la température.

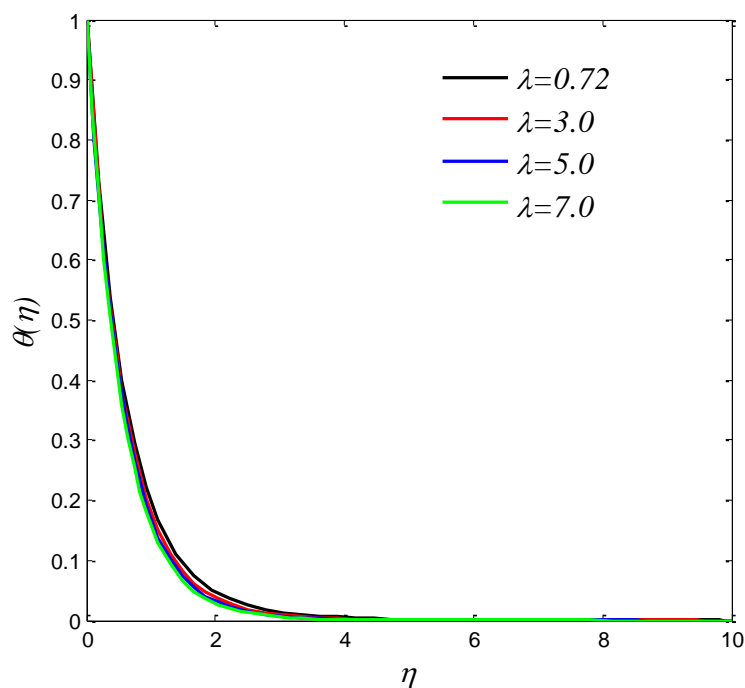


Fig. III-6Température vs λ (Pr =1.0 et A= 1.0)

La figure **Fig. III-6** montre l'effet du paramètre de flottabilité λ sur les profils de température dans la couche limite, On remarque que, la température diminue avec l'augmentation du λ .

III.4. Nombre de Nusselt

λ	A	Pr	$Nu_x / Ru_x^{1/2} = -\theta'(0)$
0.0	0.0	0.72	0.8088
		1.00	1.0000
		5.20	2.6132
		10.0	3.7205
0.0	1	7.0	4.6333
1.0			4.6453
3.0			4.6684
5.0			4.6906
1.0	0.0	7.0	3.1054
	3.0		6.7930
	5.0		8.4166
	10.0		11.5176

Tableau III-2 Valeur de Nusselt $Nu_x / Ru_x^{1/2} = -\theta'(0)$

Le **Tableau III-2** présente les valeurs du nombre de Nusselt en fonction de variations du nombre de Prandtl (Pr), du paramètre de régime variable (A) et du paramètre de flottabilité (λ). En examinant le tableau, il est évident que le nombre de Nusselt augmente pour toutes les valeurs de (a, Pr, λ).

III.5. Coefficient de frottement

λ	A	Pr	$C_f R_{ex}^{1/2} = 2f''(0)$
0.0	0.0	0.72	-2.0000
		1.00	-2.0000
		7.20	-2.0000
		10.0	-2.0000
0.0	1.0	7.00	-2.6441
1.0			-2.3198
3.0			-1.6876
5.0			-1.0680
1.0	0.0	7.0	-1.5924
	3.0		-3.3970
	5.0		-4.2174
	10.0		-5.7848

Tableau III-3 valeur de coefficient de frottement $C_f R_{ex}^{1/2} = 2f''(0)$

Le **Tableau III-3** présente les valeurs du coefficient de frottement en fonction de différentes variables : le nombre de Prandtl (Pr), le paramètre de régime variable (A) et le paramètre de flottabilité (λ). En analysant le tableau, on peut observer que certaines valeurs restent constantes avec différentes valeurs de Pr, tandis que d'autres augmentent avec des valeurs différentes de λ et diminuent avec les valeurs de A.

Les valeurs négatives du coefficient de frottement indiquent que la force de frottement s'oppose au mouvement du fluide.

III.6. Conclusion

Nous avons étudié numériquement dans ce chapitre l'influence de l'effet sur l'écoulement de la couche limite sur une plaque verticale, en utilisant la méthode des différences finies. Les équations différentielles représentant le problème physique ont été transformées en données numériques, les résultats numériques sont affichés par des illustrations graphiques. L'analyse montre que les profils de vitesse, de température dans les couches limites respectives dépendent de trois paramètres adimensionnels, à savoir le nombre de Prandtl Pr, paramètre de flottabilité, et le paramètre de régime variable.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail a été consacré pour l'étude théorique et numérique d'un écoulement de couche limite convective naturelle d'un fluide visqueux devant une plaque verticale avec flux de chaleur surfacique.

L'analyse mathématique a joué un rôle essentiel pour comprendre les propriétés et les comportements de ces phénomènes. Les équations de Navier-Stokes ont été présentées comme un outil essentiel pour décrire le mouvement des fluides visqueux, tandis que les équations de la couche limite, telles que les équations de Prandtl, ont été utilisées pour étudier le flux de fluide près d'une surface.

En utilisant la méthode de similitude et des manipulations mathématiques, nous avons obtenu un système d'équations qui représente de manière adéquate notre problème physique, ce qui nous a permis de mieux comprendre le modèle étudié. Dans le chapitre suivant, nous prévoyons de résoudre numériquement ces équations mathématiques à l'aide du logiciel Matlab et de la méthode des différences finies.

En outre, nous avons réalisé une étude numérique de l'influence de l'effet de la couche limite sur une plaque verticale, en utilisant la méthode des différences finies. Les équations différentielles représentant le problème physique ont été transformées en données numériques, et les résultats ont été illustrés graphiquement. L'analyse a révélé que les profils de vitesse et de température dans les couches limites respectives dépendent de trois paramètres adimensionnels : le nombre de Prandtl (Pr), le paramètre de flottabilité et le paramètre de régime variable.

Les conclusions tirées de cette étude sont comme suite :

Les graphes représentent les profils de vitesse adimensionnelle en fonction de η montrent :

- La vitesse adimensionnelle diminue en augmentant le paramètre de régime variable A et le nombre de Prandtl Pr et le paramètre de flottabilité λ .

Les graphes représentant les profils de température adimensionnelle en fonction de la variable η montrent :

- La température diminue avec l'augmentation du paramètre de régime variable A , du paramètre flottabilité λ , du nombre de Prandtl Pr .
- L'épaisseur de la couche limites thermique diminue avec l'augmentation du nombre de Prandtl Pr , ce qui implique la diminution de la température adimensionnelle.

Le tableau du nombre de Nusselt en fonction de la variation du nombre de Prandtl Pr , du paramètre de régime variable A et du paramètre de flottabilité λ montrent :

- Le nombre de Nusselt augmente à mesure que le nombre de Prandtl Pr , paramètre de régime variable A et le paramètre de flottabilité λ augmente.

Le tableau du coefficient de frottement C_f fonction de la variation du nombre de Prandtl Pr , du paramètre de régime variable A et du paramètre de flottabilité λ montrent :

- Le coefficient de frottement C_f reste constant avec l'augmentation de nombre de Prandtl Pr .
- Le coefficient de frottement C_f augmente lorsque le paramètre de flottabilité λ augmente.
- Le coefficient de frottement C_f diminue avec l'augmentation de paramètre de régime variable A .

Finalement, on peut conclure que les paramètres de contrôle du problème ainsi les propriétés thermo physiques du fluide ont en effet considérable sur le transfert de chaleur et de masse.

Annexe A

A.1.Introduction

Les équations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent en permanence. Ils se posent en modèles à travers les mathématiques, les sciences et l'ingénierie. En soi, un système d'équations différentielles a de nombreuses solutions. Communément une solution d'intérêt est déterminé en spécifiant les valeurs de tous ses composants en un seul point $x = a$. c'est un problème de valeur initiale (IVP).

Cependant, dans de nombreuses applications d'une solution est déterminée d'une manière plus complexe. Un problème de valeur limite (BVP) spécifie les valeurs ou des équations pour composants de la solution à plus d'un x . Contrairement de IVP, un problème de valeur limite ne peut être avoir une solution, ou peut avoir un nombre fini, ou peut avoir une infinité. De ce fait, les programmes de résolution de BVP, les utilisateurs doivent fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent, il existe des paramètres qui doivent être déterminés de telle sorte que le BVP a une solution.

Encore une fois il pourrait y avoir plus d'une possibilité, afin que les programmes nécessitent une estimation pour les paramètres souhaités. Singularités dans les coefficients et les problèmes posés sur des intervalles infinis ne sont pas inhabituelles. Cet annexe montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un BVP avec le programme `bvp4c` Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème type d'un BVP aussi facile que possible. BVPs sont beaucoup plus difficiles à résoudre qu'IVP et tout solveur peut échouer, même avec de bonnes estimations pour la solution et des paramètres inconnus. `Bvp4c` est un solveur efficace, mais la méthode sous-jacente et l'environnement de calcul ne sont pas appropriés pour de grandes précisions, ni pour des problèmes avec très brusques changements de leurs solutions [28].

A.2 problème de valeur aux limites

Si la fonction f est lisse sur $[a, b]$, la valeur initiale problème $y' = f(x, y)$, $y(a)$ donné, a une solution unique. Problèmes de valeur aux limites à deux points sont illustrés par l'équation

$$y'' + y = 0 \quad (A.1)$$

avec des conditions aux limites $y(a) = A$, $y(b) = B$. Un moyen important d'analyser ces problèmes est de considérer une famille de solutions d'IVP. Soit $y(x, s)$ la solution des valeurs initiales $y(a) = A$, $y'(a) = s$. chaque $y(x, s)$ s'étend à $x = b$ et nous demandons, pour quelles valeurs de $S, y(b, s) = B$? S'il existe une solution de cette équation algébrique, $y(x, s)$ correspondant constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités facilement. Soit $u(x)$ la solution définie par $y(a) = A$, $y'(a) = 0$ et $v(x)$ la solution définie par $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. La linéarité implique que $y(x, s) = u(x) + Sv(x)$, et la condition à la limite $B = y(b, s) = u(b) + Sv(b)$ s'élève à une équation algébrique linéaire pour la pente initiale inconnue s . les faits familiers de l'existence et l'unicité de solutions d'équations algébriques linéaires nous disent alors qu'il y a soit une solution exactement à la BVP, ou il Ya des valeurs limites B pour lesquels il n'existe aucune solution et d'autres pour lesquels il existe une infinité de solutions [28].

A.3. Méthodes numériques

L'approche théorique de la BVP du paragraphe 2 est basé sur la solution de IVP pour Odes et la solution des équations algébriques non linéaires. Parce qu'il y a des programmes efficaces pour les deux tâches, il est naturel de les combiner dans un programme pour la solution du BVP. L'approche est appelée une méthode de tir (shooting method). Parce qu'il apparaît avant si droit d'utiliser des outils numériques de qualité pour la solution du BVP par des techniques de tirs, il est peut-être surprenant que `bvp4c` n'est pas un code de technique de tirs. La difficulté de base avec cette méthode est qu'une parfaitement agréable BVP peut nécessiter l'intégration des IVP qui sont instables. C'est, la solution d'un BVP peut être insensible aux changements de valeurs limites, mais les solutions de l'IVP de méthode de tir sont sensibles aux changements dans les valeurs initiales. L'exemple simple

$$y'' - 100y = 0 \quad (A.2)$$

avec $y(0) = 1$, $y(1) = B$ fait le point. La tire implique la solution

$$y(x, s) = \cos 10x + 0.1s \sinh 10x$$

De IIVP avec valeurs initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = s$. De toute évidence, ce qui peut être aussi grand $0.1 \sinh 10 \approx 1101$. Un petit calcul montre que la pente qui conduit à la satisfaction de la condition à la limite à $x = 1$ est $s = 10 (B - \cosh 10) / \sinh 10$ puis que, pour la solution de la BVP, $dydB = \sinh 10 \leq 1$. Evidemment, les solutions de IIVP sont beaucoup plus sensibles aux variations de la pente initiale de la solution s , alors que la solution du BVP est à des changements dans la valeur limite B . si I'VP n'est pas trop instable, le tir peut être très efficace. IVP instables peuvent causer un code de tirs à l'échec

Parce que l'intégration "explose" avant d'atteindre la fin de l'intervalle. Plus souvent, cependant, IIVP atteint solveur la fin, mais est incapable de calculer un résultat précis là-bas et de ce fait, le solveur de l'équation non linéaire est incapable de trouver des valeurs initiales précises. Une variété de techniques sont utilisées pour améliorer la prise de vue, mais quand IIVP sont très instables, prise de vue n'est tout simplement pas une approche naturelle pour résoudre BVP.

Bvp4c met en œuvre une méthode de collocation pour la solution du BVP de la forme

$$y' = f(x, y, p), a \leq x \leq b \quad (\text{A.3})$$

Avec la non-linéaire générale, deux points conditions aux limites

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Ici p est un vecteur de paramètres inconnus. Pour plus de simplicité, il est supprimé dans les expressions qui suivent. La solution d'approximation $s(x)$ est une fonction continue qu'est un polynôme cubique sur chaque sous-intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ d'une maille $a = x_0$

$$g(s(a), s(b)) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Et qu'il satisfait aux équations différentielles (de collocatives) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle

$$s'(X_n) = f(X_n, s(X_n)) \quad (\text{A.6})$$

$$s'(x_n) = f(x_n, s(x_n)) \quad (\text{A.7})$$

$$s'\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = f\left(\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right), s\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)\right) \quad (\text{A.8})$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébriques non linéaires pour les coefficients définissant $s(x)$. A la différence de la technique de tir, la solution $y(x)$ est évaluée sur tout l'intervalle $[a, b]$ et les conditions aux limites sont pris en compte à tous les

moments. Les équations algébriques non linéaires sont résolues de manière itérative par linéarisation, si cette approche s'appuie sur les solveurs d'équations linéaires de Matlab plutôt que ses codes IVP. La méthode de base de `bvp4c`, que l'on appelle la méthode de Simpson, est bien connue et se trouve dans un certain nombre de codes. Il peut être démontré que les hypothèses modestes, $s(x)$ est une approximation de quatrième ordre à

Une solution isolée $y(x)$, cet est à dire, $(xy) - (xs) \leq Ch^4$. Ici, h est la valeur maximale de la taille de pas $h_n = x_{n+1} - x_n$ et C est une constante. Parce que ce n'est pas vrai de certaines méthodes de collocation populaires, nous insistons sur le fait important que cette borne est vraie pour tout x dans $[a, b]$. Après $s(x)$ est calculé sur un maillage avec `bvp4c`, il peut être évalué à peu de frais à tout x , ou un ensemble de x , dans $[a, b]$ avec la fonction `bvpval`. Parce que BVPs peuvent avoir plus d'une solution, les codes de BVP obliger les utilisateurs à fournir une estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend une estimation d'un maillage initial révèle que le comportement de la solution souhaitée. Les codes ensuite adapté le maillage de manière à obtenir une solution numérique exacte avec un nombre réduit de points de maillage. Venir avec suffisamment bonne supposition est souvent la partie la plus difficile de résoudre un BVP. `Bvp4c` adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de traiter avec suppositions pauvres. La continuité de $s(x)$ sur $[a, b]$ et collocation aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que $s(x)$ a également une dérivée continue sur $[a, b]$. Pour une telle approximation, le résidu $r(x)$ dans l'équation différentielle est définie par:

$$r(x) = s'(x) - f(x, s(x)) \quad (\text{A.9})$$

Autrement dit, cela dit que $s(x)$ est la solution exact d'ODEs perturbés

$$s'(x) = f(x, s(x) + r(x)) \quad (\text{A.10})$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites sont $g(s(a), s(b))$. `bvp4c` contrôle les tailles de ces résidus. Si les résidus sont uniformément petite, $s(x)$ est une bonne solution dans le sens que ce est la solution exacte d'un problème proche de celui fourni au solveur. En outre, pour un problème relativement bien conditionné, les petits résidus impliquent que $s(x)$ est proche de $y(x)$, même quand h n'est pas assez petit pour que la quatrième ordre de convergence est évident. Les codes de techniques de tir peuvent également être décrites comme contrôlant la taille de ces résidus: à chaque étape, un code

d'IVP contrôle l'erreur locale, ce qui équivaut à contrôler la taille du résidu d'un prolongement continu approprié de formule utilisé, et le solveur d'équations non linéaires est utilisé pour trouver des valeurs initiales pour lesquelles le résiduel dans les conditions aux limites est faible. Suppression résiduelle a des vertus importantes: résidus sont bien définis, peu importe à quel point la solution approchée, et les résidus peuvent être

Évaluée importe où simplement en évaluation $f(x, s(x))$ ou $g(s(a), s(b))$. Bvp4c est basée sur des algorithmes qui sont plausibles, même lorsque le maillage initial est très faible, mais fournir des résultats corrects que h tends vers 0. Ils exploitent des propriétés très intéressantes de la méthode de Simpson. BVPs se posent dans les formes les plus diverses. À peu près tout BVP peuvent être formulées pour solution avec bvp4c. La première étape consiste à écrire l'ODE comme un système de premières équations différentielles d'ordre. C'est une tâche familière, car elle doit également être faite pour IVP solveur de Matlab. L'idée de base est d'introduire de nouvelles variables, une pour chaque variable dans le problème d'origine et l'autre pour chacun de ses dérivés à un de moins que le dérivé le plus élevé apparaisse. Le procédé est illustré dans. C'est tout ce qui est nécessaire pour résoudre un IVP, mais BVP peut être beaucoup plus compliqué: Comme nous l'avons déjà vu, contrairement IVP, problèmes aux limites n'ont pas nécessairement une solution, et quand ils le font, la solution n'est pas nécessairement unique. En effet, BVP implique généralement des valeurs de paramètres pour lesquels le problème a une solution. En outre, les singularités de toutes sortes ne sont pas du tout inhabituelles [28].

A.4. Syntaxe de bvp4c sur Matlab

bvp4c Résoudre des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires
la syntaxe de cette méthode est:

```
sol = bvp4c(@odefun,@bcfun,solinit,options)
```

avec les arguments suivants:

odefun	<p>Une fonction qui évalue la BVP sous la forme d'un système équivalent des premières équations différentielles commandé. Il peut avoir la forme fonction $dydx = \text{odefun}(x,y)$, où x est un scalaire, et $dydx$ et y sont des vecteurs de colonne.</p>
bcfun	<p>Une fonction qui calcule le résiduel dans les conditions aux limites. bcfun peut avoir la forme fonction $\text{res} = \text{bcfun}(ya,yb)$ où ya et yb sont des vecteurs colonne correspondant à la solution numérique au $x = a$ et $x = b$, respectivement.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Les premiers éléments $ya(1)$ et $yb(1)$ sont les valeurs de y à $x = a$ et $x = b$. • Les éléments secondes $ya(2)$ et $yb(2)$ sont les valeurs de dy/dx en $x = a$ $x = b$
solinit	<p>Une structure contenant la proposition initiale d'une solution. solinit peuvent être créés en utilisant la fonction bvpinit. $\text{solinit} = \text{bvpinit}(x,yinit)$; où x est un vecteur estimation des points de maillage initial que le procédé en solution dans bvp4c devrait d'abord utiliser.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pour un BVP avec un domaine $[a, b]$, le premier élément de x est a, et le dernier élément est b. • Maillage initial peut être choisi en utilisant $x = \text{linspace}(a,b,N)$; or $x = [a:\text{increment}:b]$; • Le vecteur $yinit$ est l'estimation initiale de la solution, il peut être constant ou fonction de x.

sol	<p>sol est une structure contenant la solution. Il est renvoyé par bvp4c. Il a les champs suivants:</p> <p>sol.x Maillage sélectionné par bvp4c. Le nombre final de points de maillage est déterminée par le solveur BVP4c pendant le processus de solution.</p> <p>sol.y Champ de solution dans les points de maillage de sol.x</p> <p>La structure de sol peut avoir n'importe quel nom. Il est commode d'utiliser des sous-fonctions de placer toutes les fonctions requises par bvp4c dans un seul fichier M-file</p>
Options	<p>Le solveur cherche à contrôler l'erreur dans la solution par les résidus dans les conditions aux limites, à la fois pour chaque sous-intervalle et les limites du système. Des dispositions sont prises pour la spécification de l'erreur absolue dans les solutions et l'erreur relative autorisée à se propager entre itérations.</p> <pre>options = bvpset('RelTol',10^(-6), 'Abstol',10^(-6), 'Nmax', 5000,'Stats','off','Vectorized','on');</pre>

Références bibliographiques

- [1] Yousfi, S. (2016/2017). Mécanique des Fluides 1. Deuxième année de licence, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf.
- [2] Faculté des Sciences Naturelles et de la Vie, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf. (2017). Chapitre 2 : Viscosité [Cours en ligne].
- [3] HADDAD, Aghilasse & CHAOUCH, Oualid. (2020). Ecoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux surfacique imposé. Mémoire de Master, Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, Faculté de Technologie, Département de Génie Mécanique.
- [4] Mergui, S. Cours de transfert thermique [Cours en ligne]. De www.fast.u-psud.fr.
- [5] Khaldi, S. (2019). Généralités sur les transferts de chaleur [Document PDF], de https://elearn.univ-tlemcen.dz/pluginfile.php/75973/mod_resource/content/1/chapitre%201.pdf.
- [6] Baaissa, I. E. (2019). Évaluation du coefficient de transfert convectif 'H' entre une surface plane et un fluide en écoulement, cas de plusieurs liquides et gaz [Mémoire de master]. Université de Biskra. Récupéré de archives.univ-biskra.dz.
- [7] Kharbouch, B. (2018/2019). Transfert de chaleur - Partie : Convection [Notes de cours]. Cours de licence fondamentale, Parcours Énergétique, Université Abdelmalek Essaadi, Tétouan, Maroc.
- [8] A. SINGH studies on variation of boundary layer parameteres on rough surfaces in turbulent boundary layer zone. National institue of technology Rourkela, PP [1], 2015
- [9] N. MOKRANI. Simulation numérique par code fluent d'une couche limite contrôlée et non contrôlée sur un profil d'aile NACA 0012 a l'incidence de 18° Mémoire de Master. Université de Tizi Ouzou, PP [22], (2009/2010).
- [10] Bulliard-Sauret, O. (2016). Étude expérimentale de l'intensification des transferts thermiques par les ultrasons en convection forcée [Thèse de doctorat, spécialité : Mécanique des fluides, Énergétique et Procédés]. Université Grenoble Alpes, France.
- [11] Kenfack, P. (2018). La conception, l'étude théorique et expérimentale d'une génératrice électrique linéaire à structure polyentrefer à lames guidées ou frottantes [Thèse de doctorat,

spécialité : Electronique]. Université de Montpellier, École doctorale : Information, Structures et Systèmes.

[12] Vajravelu, K., Prasad, K. V., Lee, J., Lee, C., Pop, I., & van Gorder, R. A. (2011). Convective heat transfer in the flow of viscous Ag-water and Cu-water on a stretching surface. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(5), 843-851. Elsevier Masson.

[13] Mebarek-Oudina, F. (2019). Convective heat transfer of Titania nanofluids of different base in fluids in cylindrical annulus with discrete heat source. *Heat Transfer-Asian Research*, 48(1), 135-147. Wiley.

[14] Vajravelu, K., & Hadjinicolaou, A. (1993). Heat transfer in a viscous fluid over a stretching sheet with viscous dissipation and internal heat generation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 20(3), 417-430. Pergamon.

[15] Sheikholeslami, M., Pizzi, A., & Mirshokrai, A. (2016). Determination of reaction rate parameters for the acid copper chromate fixation reactions on oak (*Quercus castaneifolia* CA Mey) sapwood. *Wood Material Science & Engineering*, 11(3), 153-162. Taylor & Francis.

[16] Malik, M. Y., Khan, M., Salahuddin, T., & Khan, I. (2016). Variable viscosity and MHD flow in Casson fluid with Cattaneo-Christov heat flux model: Using Keller box method. *Journal of Engineering Science and Technology*, 4(19), 1985-1992. Elsevier.

[17] Nadeem, S., Haq, R. U., & Lee, C. (2012). MHD flow of a Casson fluid over an exponentially shrinking sheet. *Scientia Iranica*, 19(6), 1550-1553. No longer published by Elsevier.

[18] Vajravelu, K., & Hadjinicolaou, A. (1993). Heat transfer in a viscous fluid over a stretching sheet with viscous dissipation and internal heat generation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 20(3), 417-430. Pergamon.

[19] Vajravelu, K., Prasad, K. V., & Ng, C.-O. (2013). Unsteady convective boundary layer flow of a viscous fluid at a vertical surface with variable fluid properties. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14(1), 455-464. Pergamon.

[20] Ng, C.-O., & Ruffraiah, N. (2008). Convection diffusion in steady flow through a tube with a retentive and absorptive wall. *Physics of Fluids*, 20(7), 073604. American Institute of Physics.

- [21] Kairi, R. R., Murthy, P. V. S. N., & Ng, C.-O. (2011). Effect of viscous dissipation on natural convection in a non-Darcy porous medium saturated with non-Newtonian fluid of variable viscosity. *Bentham Open*.
- [22] Machhadani, H., Kandaswamy, P., Sakr, S., Vardi, A., Wirtmuller, A., Nevou, L., Guillot, F., Pozzovivo, G., Tchernycheva, M., & Alouche, Y. (date à vérifier). GaN/AIGaN intersubband optoelectronic devices. *New Journal of Physics*
- [23] Vajravelu, K., & Mohapatra, R. N. (1990). On fluid dynamic drag reduction in some boundary layer flows. *Acta Mechanica*, 81, 59-68. Springer-Verlag.
- [24] Wijaya, K. P., Gotz, T., & Soewono, E. (2016). Advances in mosquito dynamics modeling. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(16), 4750-4763.
- [25] Omer, K. M., Faraj, R. H., & Mohammed, A. A. (2022). Self-compacting concrete composites modified with nanoparticles: A comprehensive review, analysis, and modeling. *Journal of Building Engineering*, 50(100808), 104170. Elsevier.
- [26] Wahab, A., Hassan, A., Qasim, M. A., Ali, H. M., Babar, H., & Sajid, M. U. (2019). Solar energy systems-potential of nanofluids. *Journal of Molecular Liquids*, 289, 111049. Elsevier.
- [27] Vajravelu, K., Prasad, K.V., Ng, C.-O. (2011). "Unsteady convective boundary layer flow of a viscous fluid at vertical surface with variable fluid properties." *Nonlinear Analysis: Real World Applications*,, pages 455-464, Elsevier.
- [28] ALI AGHA, Hamza et BOUAZIZ, Mohamed Najib. Transferts convectifs naturels et complexes en milieu Poreux non Darceen. 2015.These de doctorat.

Résumé

Dans ce travail, on a étudié L'écoulement convectif d'un fluide visqueux sur une surface variable devant une plaque verticale avec un flux de chaleur. L'obtention des équations de la couche limite pour un écoulement convection naturelle est étudié numériquement en utilisant un schéma aux différences finies, L'objectif de la présente étude est d'étudier les effets simultanés de la chaleur. Les diffusions sur une couche limite de convection naturelle s'écoulent sur une surface perméable sous une surface convective condition limite. Notre méthode a été montré qu'un ensemble de similarités appropriées les transformations réduisent les équations aux dérivées partielles couplées non linéaires régissant l'écoulement, thermique et champs de concentration en un ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées non linéaires. Cette étude montre que les profils de vitesse, de température et de concentration dans les couches limites respectives dépendent, outre les nombres de Prandtl, schmidt, Taux de flottabilité, Le paramètre de convection mixte thermique et le coefficient de solet. En plus de l'étude de ces paramètres sur les caractéristiques d'écoulement de la couche limite (vitesse, température, concentration de nanoparticules et transfert de chaleur), des corrélations pour le nombres de Nusselt a été développé sur la base d'une analyse de régression de la donnée.

Mots clés : Fluide visqueux, couche limite, convection naturelle et la méthode de différence finis

Abstract

In this work, we studied the convective flow of a viscous fluid over a variable surface in front of a vertical plate with heat flux. The derivation of the boundary layer equations for natural convection flow was carried out using the similarity transformation for the continuity, momentum, and energy equations. The resulting differential equations governing the problem were transformed into a set of three ordinary equations, which were numerically solved using the finite difference method with MATLAB code. A set of results is presented graphically for the velocity and temperature profiles, with variations in the parameters. Furthermore, the obtained results revealed the influence of different control parameters on the convective flow, including velocity and temperature profiles, as well as the Nusselt number.

Keywords: viscous fluid, boundary layer, natural convection and the finite difference method.
