

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Physique  
Laboratoire de physique théorique Bejaïa

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT**

Domaine : Physique      Filière : Physique  
Spécialité : Physique Théorique

Présentée par  
**BENARAB Warda**

*Thème*

**Sur la Quantification des Systèmes avec  
Contraintes**

La soutenance aura lieu le 23/11/2024 à 10:00 à la salle de soutenance N° 1 du  
campus Targa Ouzemmour

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Université	Qualité
Mme AISSAT Nadia Epose OULEBSIR	MCA	Univ. de Bejaïa	Président
Mr BELHADI Zahir	MCA	Univ. de Bejaïa	Rapporteur
Mr ZIDI Mohamed Sadek	MCA	Univ. de Jijel	Examineur
Mr FERKOUS Nourredine	MCA	Univ. de Jijel	Examineur
Mr BEKLI Mohamed Réda	MCA	Univ. de Bejaïa	Examineur
Mr BELABBAS Abdelmoumene	MCB	Univ. de Bejaïa	Examineur

Année Universitaire : 2023/2024

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Formalisme de la mécanique analytique en théorie des champs</b>	<b>5</b>
1.1 Formalisme lagrangien	6
1.2 Formalisme hamiltonien	8
1.3 Crochets de Poisson et quantification canonique	9
1.4 Fonctionnelles et dérivées fonctionnelles	11
1.5 Formalisme lagrangien en théorie des champs	15
1.6 Formalisme hamiltonien en théorie des champs	17
1.7 Crochets de Poisson en théorie des champs	19
<b>2 Formalisme de Dirac</b>	<b>22</b>
2.1 Lagrangiens singuliers et contraintes	22
2.2 Classification des contraintes et crochets de Dirac	24
2.3 Exemples d'application	27
2.4 Extension de la méthode de Dirac à la théorie des champs	30
2.5 Application au champ de Maxwell	32
2.6 Quantification de Dirac du Modèle self-dual (SD)	37
<b>3 Approche de Faddeev-Jackiw</b>	<b>42</b>
3.1 Méthode de Faddeev et Jackiw	42
3.2 Quantification de Faddeev-Jackiw du Modèle de Christ-Lee	45
3.3 Quantification de Faddeev-Jackiw du champ de Maxwell	48
3.4 Quantification Faddeev-Jackiw du Modèle self-dual (SD)	51
3.5 Quantification Faddeev-Jackiw de l'action de Stueckelberg	53
<b>4 La méthode des constantes d'intégration généralisée</b>	<b>58</b>
4.1 Aperçu de la méthode des constantes d'intégration	59
4.2 Méthode des constantes d'intégration généralisée (GCI)	60
4.3 Applications à des systèmes avec un degré de liberté fini	64
4.4 Champ de Klein-Gordon	68
4.4.1 Champ de Klein-Gordon dans l'espace des positions	68

4.4.2	Champ de Klein-Gordon dans l'espace des impulsions . . . . .	70
4.5	Le champ de Maxwell . . . . .	71
4.5.1	Le champ de Maxwell dans l'espace des positions . . . . .	71
4.5.2	Le champ de Maxwell dans l'espace des impulsions . . . . .	75
4.6	Modèle sigma non linéaire $O(3)$ . . . . .	77
4.7	Le champ de Proca . . . . .	82
4.8	Le champ de Stueckelberg . . . . .	84
4.9	Modèle self-dual (SD) . . . . .	87
 <b>Conclusion Générale</b>		 <b>90</b>
 <b>Annexes</b>		 <b>92</b>
4.10	Annexe A . . . . .	92
4.11	Annexe B . . . . .	94
 <b>Bibliographie</b>		 <b>97</b>

---

# Introduction Générale

Dans la formulation de Heisenberg de la mécanique quantique, les équations d'évolution temporelle des opérateurs décrivant un système microscopique s'obtiennent grâce à un calcul de commutateurs, obtenus suite à la quantification canonique, fortement liée aux crochets de Poisson dans le cas des systèmes réguliers. Mais les systèmes décrits par des lagrangiens singuliers, donnant naissance à des systèmes hamiltoniens avec contraintes, ne peuvent pas être quantifiés dans le cadre de la mécanique analytique par les crochets de Poisson, d'où l'intérêt de l'étude des crochets de Dirac, mieux adaptés à la présence des contraintes. Ce genre de systèmes est bien présent en physique théorique, comme c'est le cas des théories des champs de jauge, de la théorie du champ gravitationnel, de la supersymétrie, ....

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de l'application des méthodes de quantification aux systèmes avec contraintes. Autrement dit, son objectif principal est d'apporter des éléments de réponse à la question suivante : « Comment procéder à la quantification des systèmes physiques ayant des contraintes ? ». En effet, plusieurs méthodes de quantification subsistent, à savoir, le formalisme de Dirac [1, 2] et la méthode de Faddeev-Jackiw [3], ainsi qu'une nouvelle approche appelée la méthode des constantes d'intégration généralisée [4, 5, 6, 7].

La méthode de Dirac [1, 2], qui est une généralisation de la mécanique hamiltonienne, est la méthode standard qui permet d'étudier les systèmes avec contraintes afin de déterminer les crochets des variables fondamentales (coordonnées et moments généralisés). L'idée principale de cette méthode qui s'applique aux systèmes décrits par des lagrangiens singuliers, est d'abord de déterminer les contraintes primaires résultant de la définition des moments conjugués. Ensuite, des conditions de consistence sont imposées à ces contraintes, ce qui peut faire ressortir de nouvelles contraintes appelées les contraintes secondaires.

L'ensemble de toutes les contraintes seront classées en contraintes de première classe générant des symétries de jauge qui doivent être fixées par des conditions supplémentaires, ainsi que des contraintes de deuxième classe, qui permettent de définir le crochet de Dirac généralisant le crochet de Poisson. Le formalisme de Dirac est cohérent, complet et bien élaboré pour les systèmes ayant des contraintes, mais il nécessite beaucoup de concepts

et de nombreuses étapes pour sa mise en œuvre. En particulier, il faut déterminer toutes les contraintes, pour ensuite les classer en première et en deuxième classe.

Il existe une méthode alternative pour étudier ces systèmes d'une manière différente et plus simple, c'est l'approche de Faddeev – Jackiw [3]. Avec cette méthode, il faut d'abord rendre le lagrangien linéaire par rapport aux vitesses, dans le but de calculer la matrice symplectique, résultant des équations d'Euler-Lagrange. A ce stade on peut distinguer deux cas : le cas où l'on peut calculer la matrice inverse de la matrice symplectique, dont les éléments sont les crochets de Dirac, et le deuxième cas où la matrice symplectique est singulière, ce qui est la marque de présence des contraintes, qui doivent être incorporées dans le lagrangien. Il faut recalculer la matrice symplectique avec le nouveau lagrangien, pour tomber dans l'un des deux cas précédents. La procédure va se poursuivre jusqu'à l'obtention d'une matrice régulière inversible, dont l'inversion donne directement les crochets souhaités. Dans cette approche, la classification des contraintes est sans intérêt, contrairement à la méthode de Dirac.

Récemment, une autre approche directe et simple, dite la méthode des constantes d'intégration "CI" généralisée [4, 5, 6, 7], a permis de quantifier plusieurs systèmes avec succès en théorie des champs. Il s'agit d'une généralisation de la méthode des constantes d'intégration "CI" [8, 9] qui repose entièrement sur la connaissance de la solution analytique des équations de mouvement et l'utilisation des constantes d'intégration pour la détermination des crochets des variables fondamentales. La méthode "CI" généralisée se contente du développement limité de Taylor à l'ordre un de la solution des équations de mouvement au voisinage de l'instant initial, en partant de conditions initiales quelconques, au lieu d'utiliser la solution complète. Autrement dit, c'est les conditions initiales qui vont jouer le rôle des constantes d'intégration.

La méthode des constantes d'intégration généralisée (GCI) postule les équations de Hamilton en terme de crochets de Dirac proches de l'instant initial, ce qui permet de déduire les crochets relatifs aux conditions initiales. Ensuite, les crochets des variables fondamentales (coordonnées et impulsions conjuguées) à tout instant ultérieur sont obtenus en remplaçant les conditions initiales dans les expressions entre crochets par les variables fondamentales correspondantes, car la forme des crochets de Dirac reste inchangée dans le temps dans le cas d'un système autonome.

La méthode GCI ne donne pas beaucoup d'importance aux contraintes, encore moins à leur classification et surtout elle ne nécessite pas des outils mathématiques très avancés. Elle est simple et directe, et elle repose sur l'identification, en se servant du développement limité de la solution des équations d'Euler-Lagrange et les équations de Hamilton exprimées en terme du crochet de Dirac à l'instant initial. Elle arrive à reproduire pas mal de résultats déjà établis en théorie des champs, à commencer par les champs de Klein-Gordon, Dirac et Maxwell [6]. Le champ de Proca décrivant des particules massives de

---

spin 1, ainsi que sa version invariante de jauge due à Strueckelberg, sont aussi traités avec à l'aide de la méthode des constantes d'intégration généralisée [7].

Pour ce faire, le manuscrit est organisé en quatre chapitres. Dans le chapitre un, nous rappelons quelques notions fondamentales de la mécanique analytique dans ses formulations lagrangienne et hamiltonienne, suivi de son extension à la théorie des champs. Le chapitre deux est consacré à l'exposé du formalisme de Dirac, avec certaines applications à des systèmes avec contraintes telles que le le champ de Maxwell et le champ de Proca. Le chapitre trois met en avant la méthode de Faddeev-Jackiw, suivie d'une étude d'exemples physiquement intéressants comme le champ de Maxwell. Dans le chapitre quatre, plusieurs systèmes singuliers sont traités à l'aide de la méthode des constantes d'intégration généralisée (GCI), afin de mettre à l'épreuve son efficacité en théorie des champs.

---

# Formalisme de la mécanique analytique en théorie des champs

La mécanique analytique est apparue entre 1750-1850 suite aux travaux des mathématiciens tels que Joseph-Louis Lagrange et William Rowan Hamilton, comme une reformulation très mathématisée de la mécanique newtonienne. La mécanique analytique utilise des fonctions mathématiques appelées "lagrangiens" et "hamiltoniens" qui décrivent le système dans son ensemble, en se basant principalement sur des trajectoires tracées entre deux points de l'espace des configurations.

Dans la première partie de ce chapitre, on va présenter un rappel de la mécanique analytique [10, 11] en commençant par aborder quelques notions fondamentales, notamment la définition du lagrangien et des coordonnées généralisées. Ensuite, Nous allons revenir sur le principe variationnel pour déterminer les équations de mouvement. Grâce à la transformation de Legendre, on va explorer le formalisme de Hamilton, incluant les moments généralisés et les crochets de Poisson. Cette partie se termine par un exposé sur la quantification canonique qui permet de faire la transition de la mécanique classique à la mécanique quantique standard.

Dans la deuxième partie, nous allons nous intéressés au passage des points matériels à la théorie des champs [10], dans le but de comprendre comment la quantification canonique va donner naissance à la théorie quantique des champs. Cette théorie développée dans les années 1930 pour unifier la mécanique quantique et la relativité restreinte, permet de décrire les particules subatomiques en tenant compte des principes de la mécanique quantique tout en respectant les principes de la relativité restreinte. Dans cette théorie, au lieu de considérer des particules ponctuelles comme dans la mécanique quantique traditionnelle, on travaille plutôt avec des champs quantiques qui remplissent tout l'espace.

## 1.1 Formalisme lagrangien

Considérons un système dynamique caractérisé par  $N$  coordonnées généralisées notées  $q_1, q_2, \dots, q_N$  et leurs vitesses généralisées  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$ . La fonction dépendant des positions et des vitesses qui caractérise notre système est appelée le lagrangien, noté  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Cette fonction représente souvent la différence entre les énergies cinétique  $T$  et potentielle  $U$  exprimée par la relation  $L = T - U$ . En d'autres termes, c'est la relation qui permet de quantifier en chaque point de la trajectoire, l'échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Afin de formuler les équations de Lagrange, il faut exprimer une autre quantité déterminante appelée l'action  $S$ , qui est définie comme l'intégrale du lagrangien  $L$  par rapport au temps entre deux instants  $t_i$  et  $t_f$ . Mathématiquement, cela s'exprime comme suit

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (1.1.1)$$

La variation de cette action  $S$  entre deux trajectoires la première notée  $q_i(t)$ , et la deuxième notée  $q_i(t) + \delta q_i(t)$ , où  $\delta q_i(t)$  représente l'écart infinitésimal entre les deux trajectoires, est

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt (L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)). \quad (1.1.2)$$

En développant le lagrangien  $L$  au premier ordre, on obtient

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \right).$$

Sachant que la variation ( $\delta$ ) commute avec la dérivée différentielle ( $\frac{d}{dt}$ ), on peut écrire que  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \left( \frac{d}{dt} q_i \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i)$ . En appliquant ensuite, une intégration par parties au troisième terme  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$ , nous obtenons  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$ . En substituant cette expression dans l'équation précédente, nous pouvons la réécrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f}. \end{aligned}$$

Nous postulons ici que toutes les trajectoires passent par les mêmes extrémités, représentées respectivement par les valeurs initiales  $q(t_i)$  et finales  $q(t_f)$  des coordonnées généralisées, c'est-à-dire, nous choisissons des chemins tels que  $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$ . Cette condition conduit à l'annulation du dernier terme. Le principe de moindre action stipule que l'action doit être stationnaire  $\delta S = 0$ , d'où l'égalité

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

La seule façon pour que cette intégrale soit égale à zéro pour toutes les variations indépendantes du chemin  $\delta q_i(t)$ , est d'imposer aux trajectoires réelles les équations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1.3)$$

Ces équations différentielles sont appelées les équations d'Euler-Lagrange décrivant l'évolution temporelle des coordonnées généralisées d'un système.

Dans les systèmes mécaniques, les forces de liaison sont des forces internes qui lient les différentes parties de ce système. Par conséquent, les grandeurs physiques ne sont pas toutes indépendantes, ce qui se traduit par des contraintes holonomes, dépendantes des coordonnées et du temps, sous la forme

$$\phi_m(q_i, t) = 0 \quad m = 1, \dots, M. \quad (1.1.4)$$

Ces  $M$  relations de ce type laissent seulement  $N - M$  coordonnées indépendantes. Afin de résoudre ce problème, on introduit un nouveau lagrangien  $\tilde{L}$ , par l'addition des combinaisons linéaires des contraintes  $\lambda_m \phi_m$  au lagrangien  $L(q_i, \dot{q}_i)$

$$\tilde{L} = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \lambda_m \phi_m(q_i, t), \quad (1.1.5)$$

où les  $\lambda_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  sont des multiplicateurs de Lagrange qui sont totalement arbitraires, et qu'on les considère comme des nouvelles variables dynamiques. Donc, les multiplicateurs de Lagrange et les coordonnées généralisées  $q_i$  forment ensemble  $N + M$  paramètres, qui conduisent aux équations de mouvement suivantes

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \quad i = 1 \dots N \quad (1.1.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}_m} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_m(q_i, t) = 0 \quad m = 1 \dots M \quad (1.1.7)$$

La somme  $\lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}$  peut être interprétée comme une force de contrainte généralisée. Les dernières équations reproduisent exactement les contraintes du départ.

## 1.2 Formalisme hamiltonien

Comme nous avons vu précédemment, le formalisme de Lagrange fournit une description de la dynamique d'un système ayant  $N$  degrés de liberté qui s'exprime à travers  $N$  équations différentielles du second ordre. Dans ce qui suit, nous exposons le formalisme hamiltonien reformulé par Hamilton en 1827. C'est une autre façon d'exprimer les équations dynamiques du mouvement d'un système sous forme de  $2N$  équations différentielles du premier ordre, au lieu des  $N$  équations lagrangiennes du second ordre. Le passage du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien se fait en introduisant d'abord les moments conjugués  $p_i$  associés aux coordonnées généralisées  $q_i$  par les relations

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2.1)$$

En utilisant le résultat précédent, on peut réécrire les équations de Lagrange  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  sous la forme

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2.2)$$

Le lagrangien  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  est une fonction des coordonnées  $q_i$ , de leurs dérivées temporelles  $\dot{q}_i$  et du temps. On définit le hamiltonien comme étant la transformée de Legendre du lagrangien par rapport aux variables  $\dot{q}_i$ . Par conséquent, le hamiltonien du système est alors donné par

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \quad (1.2.3)$$

où, bien sûr **toutes** les vitesses généralisées  $\dot{q}_i$  sont écrites en fonction des coordonnées  $q_i$  et des moments  $p_i$ . Nous pouvons définir l'action en terme du hamiltonien comme dans la dernière section

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt = \int_{t_i}^{t_f} (p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)) dt.$$

Comme les équations de mouvement découlent du principe de moindre action, on peut obtenir ces équations directement à partir de la forme précédente de l'action. En effet, la

variation de l'action est donnée par

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \left( \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left( \delta p_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left( \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt + p_i \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f}
\end{aligned}$$

Le dernier terme disparaît puisque nous avons fixé les extrémités de tous les chemins ( $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ ). Le principe de moindre action stipule que la variation de l'action est égale à zéro pour le chemin réel  $\delta S = 0$ , de plus les variables  $p_i$  et  $q_i$  sont indépendantes et arbitraires, on conclut alors que les deux expressions entre parenthèses sont nulles, ce qui conduit aux équations de Hamilton

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 &\implies \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, N \\
\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 &\implies \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Ces équations de mouvement exprimées en termes des variables  $p_i$  et  $q_i$  de l'espace des phases, qui sont aussi appelées les équations canoniques de Hamilton.

### 1.3 Crochets de Poisson et quantification canonique

Les crochets de Poisson sont des expressions mathématiques jouant un rôle essentiel dans l'étude de la dynamique classique, qui la fait paraître dans une forme presque identique à la mécanique quantique. Si  $f(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$  et  $g(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$  sont deux fonctions sur l'espace des phases, le crochet de Poisson est défini comme étant

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{1.3.1}$$

où  $q_i$  et  $p_i$  sont respectivement les coordonnées généralisées et les impulsions conjuguées.

Les crochets de Poisson respectent les propriétés

- \*) Antisymétrique  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- \*\*) Bilinéarité  $\{af_1 + bf_2, g\} = a\{f_1, g\} + b\{f_2, g\}$
- \*\*\*) Règle de Leibniz  $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$
- \*\*\*\*) Identité de Jacobi  $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

Les crochets de Poisson des variables canoniques sont appelés les crochets de Poisson fondamentaux. Ils sont donnés par

$$\{q_k, q_j\} = 0 \quad ; \quad \{p_k, p_j\} = 0 \quad ; \quad \{q_k, p_j\} = -\{p_k, q_j\} = \delta_{jk}. \quad (1.3.2)$$

Les crochets de Poisson peuvent être utilisés pour décrire les équations de Hamilton : la dérivée temporelle d'une fonction  $f = f(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$  s'écrit

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.3.3)$$

A l'aide des équations (1.2.4) et (1.3.1), on réécrit l'équation précédente

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.3.4)$$

En particulier, les équations de Hamilton peuvent s'écrire sous la forme

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3.5)$$

La formulation par les crochets de Poisson de la mécanique hamiltonienne met l'accent sur un lien direct entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Le passage entre les deux se fait en remplaçant les variables dynamiques  $A(q_i, p_i, t)$  de l'espace des phases par des opérateurs  $\hat{A}(\hat{q}_i, \hat{p}_i, t)$  agissant dans un espace de Hilbert. La quantification canonique est basé sur l'utilisation de crochets de Poisson pour déterminer les commutateurs des différents opérateurs quantiques grâce à la relation de Dirac

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}} \quad (1.3.6)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite et  $i$  est le nombre imaginaire pur ( $i^2 = -1$ ), tandis que  $\widehat{\{A, B\}}$  est l'opérateur correspondant à l'expression classique résultant du calcul du crochet de Poisson  $\{A, B\}$ . En particulier, les commutateurs canoniques des opérateurs des coordonnées et les impulsions s'écrivent

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 \quad i, j = 1 \dots N. \quad (1.3.7)$$

Les équations de Heisenberg décrivant l'évolution temporelle d'un opérateur quantique, s'expriment à l'aide des commutateurs

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H, \hat{H}_H] + \left( \frac{\partial \hat{A}_H}{\partial t} \right) \quad (1.3.8)$$

où  $\hat{H}_H$  est l'opérateur hamiltonien. Ainsi, les équations de Heisenberg relatives aux opérateurs fondamentaux sont très similaires à celles de la formulation de Hamilton de la mécanique classique (1.3.5) car

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{q}_i}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{q}_i, \hat{H}] & i = 1 \dots N \\ \frac{d\hat{p}_i}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{p}_i, \hat{H}] & i = 1 \dots N\end{aligned}\quad (1.3.9)$$

D'une manière équivalente, on peut décrire l'évolution d'un système en mécanique quantique à l'aide de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_s = \hat{H} |\Psi(t)\rangle_s. \quad (1.3.10)$$

Dans la représentation de Heisenberg, l'état du système  $|\Psi(t)\rangle_H$  est indépendant du temps, et les opérateurs  $\hat{A}_H$  évoluent dans le temps, tandis que dans la représentation de Schrödinger, les opérateurs sont indépendants du temps  $\hat{A}_s$  et l'état du système évolue  $|\Psi(t)\rangle_s$  dans le temps.

## 1.4 Fonctionnelles et dérivées fonctionnelles

La théorie quantique des champs a été développée à partir des années 1930 afin de résoudre les difficultés principales de la mécanique quantique, particulièrement son extension relativiste. Dans cette partie nous allons exposer les points essentiels des formulations lagrangienne et hamiltonienne de la théorie des champs indispensables pour faire le passage de la théorie des champs classique vers la théorie quantique des champs, grâce à la quantification canonique.

La théorie des champs permet d'étudier l'évolution d'un système avec un nombre arbitraire des particules  $N$ , décrites par des champs ayant une infinité de degré de liberté. Dans ce cas, on remplace l'ensemble des coordonnées généralisées  $q_i(t)$  dépendants du temps, par des champs  $\varphi_a(\vec{x}, t) = \varphi_a(x^\mu)$ , définis en tout point de l'espace  $\vec{x}$  et à tout instant  $t$ .

Le cadre mathématique que nous utiliserons pour faire les calculs en théorie des champs repose sur les notions de fonctionnelles et des dérivées fonctionnelles. Une fonctionnelle  $F$  sur l'espace est une forme linéaire qui associe aux champs  $\varphi_a$  défini dans l'espace, cette fonctionnelle  $F(\varphi_a)$  s'écrit souvent sous forme intégrale

$$F(\varphi_a) = \int dx^3 f(\varphi_a(\vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_a(\vec{x})) \quad (1.4.1)$$

où  $f(\varphi_a, \vec{\nabla}\varphi_a)$  est l'expression de la densité associée à la fonctionnelle  $F$ . Autrement dit, une fonctionnelle est une fonction de fonctions.

La variation fonctionnelle de  $F$  généralise la notion de la différentielle d'une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$ , donnée par  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  où  $dx_i$  est une variation infinitésimale de  $x_i$ . En effet, soit  $\delta\varphi_a$  une variation du champ  $\varphi_a$  telle que  $\delta\varphi_a(\vec{x})$  est infinitésimale quelque soit  $\vec{x}$ . La variation fonctionnelle de  $F$  est définie par analogie à la différentielle totale par

$$\delta F(\varphi_a) = F(\varphi_a + \delta\varphi_a) - F(\varphi_a) = \int dx^3 \left( \frac{\delta F}{\delta\varphi_a(\vec{x})} \delta\varphi_a(\vec{x}) \right) \quad (1.4.2)$$

où  $\frac{\delta F}{\delta\varphi_a(\vec{x})}$  est la dérivée fonctionnelle de  $F$  par rapport au champ  $\varphi_a$  au point  $\vec{x}$ . Mais nous avons  $F(\varphi_a) = \int dx^3 f(\varphi_a(\vec{x}), \vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x}))$ , d'où

$$\begin{aligned} \delta F &= F(\varphi_a + \delta\varphi_a) - F(\varphi_a) \\ &= \int dx^3 f(\varphi_a(\vec{x}) + \delta\varphi_a(\vec{x}), \vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x}) + \delta\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) - \int dx^3 f(\varphi_a(\vec{x}), \vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) \\ &= \int dx^3 \left( f(\varphi_a(\vec{x}), \vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) + \frac{\partial f}{\partial\varphi_a(\vec{x})} \delta\varphi_a(\vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x}))} \cdot \delta(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) \right) \\ &\quad - \int dx^3 f(\varphi_a(\vec{x}), \vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\delta F = \int dx^3 \left( \frac{\partial f}{\partial\varphi_a(\vec{x})} \delta\varphi_a(\vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x}))} \cdot \delta(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) \right) \quad (1.4.3)$$

En admettant que la dérivation et la variation commutent  $\delta(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) = \vec{\nabla}(\delta\varphi_a(\vec{x}))$ , le deuxième terme va s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x}))} \cdot \delta(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x})) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x}))} \delta\varphi_a(\vec{x}) \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\varphi_a(\vec{x}))} \right) \delta\varphi_a(\vec{x}) \quad (1.4.4)$$

En injectant cette expression dans l'équation (1.4.3), on trouve que

$$\begin{aligned} \delta F &= \int dx^3 \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi_a(\vec{x})} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_a(\vec{x}))} \right) \right) \delta \varphi_a(\vec{x}) \\ &+ \int dx^3 \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_a(\vec{x}))} \delta \varphi_a(\vec{x}) \right). \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul. En effet, selon le théorème de Gauss-Ostrogradski, l'intégrale sur un volume  $\Omega$  de la divergence d'un champ est égale au flux de ce champ à travers une surface fermée  $\partial\Omega$  qui délimite ce volume

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dx^3 = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Dans notre cas, les variations  $\delta \varphi_a(t, \vec{x})$  sont supposées nulles sur la surface d'intégration, ce qui annule l'intégrale de surface. La situation se généralise aux cas des intégrales sur l'espace temps

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} a^{\mu} dx^4 = \int_{\partial\Omega} a^{\mu} \cdot dS_{\mu} = 0$$

où  $dS_{\mu}$  est l'élément de volume spatial fermé,  $a^{\mu}(\vec{x}, t)$  est un champ de quadrivecteur nul sur la frontière  $\partial\Omega$ . Finalement, la variation  $\delta F$  de la fonctionnelle  $F$  se réduit à la forme

$$\delta F = \int dx^3 \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi_a(\vec{x})} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_a(\vec{x}))} \right) \right) \delta \varphi_a(\vec{x}). \quad (1.4.5)$$

La comparaison avec (1.4.3) nous permet de déduire l'expression des dérivées fonctionnelles de  $F$  en fonction de sa densité  $f$

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi_a(\vec{x})} \equiv \frac{\partial f}{\partial \varphi_a(\vec{x})} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_a(\vec{x}))} \right). \quad (1.4.6)$$

Ici, dans l'expression de la densité  $f = f(\varphi_a(\vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_a(\vec{x}))$ , les champs doivent être exprimés en fonction de l'argument  $\vec{x}$ . Cette expression mathématique joue un rôle essentiel dans les calculs de la théorie des champs, car elle ramène les dérivées fonctionnelles d'une fonctionnelle aux dérivées partielles de sa densité.

Par exemple si  $F = \varphi_b(\vec{y})$ , il suffit de l'écrire sous la forme  $F = \int dx^3 \varphi_b(\vec{x}) \delta(\vec{y} - \vec{x})$  pour déduire la densité  $f = \varphi_b(\vec{x}) \delta(\vec{y} - \vec{x})$ . L'utilisation de la formule (1.4.6), se solde par

le resultat

$$\frac{\delta\varphi_b(\vec{y})}{\delta\varphi_a(\vec{x})} = \delta_b^a \delta(\vec{y} - \vec{x}). \quad (1.4.7)$$

On a aussi,

$$\frac{\delta\varphi_b(\vec{y})^\alpha}{\delta\varphi_a(\vec{x})} = \frac{\delta}{\delta\varphi_a(\vec{x})} \int dx^3 \varphi_b(\vec{x})^\alpha \delta(\vec{y} - \vec{x}) = \alpha \varphi_b(\vec{x})^{\alpha-1} \delta_b^a \delta(\vec{y} - \vec{x}). \quad (1.4.8)$$

Maintenant si  $F = \partial_{y_i} \varphi_b(\vec{y})$ , alors  $F = \int dx^3 \partial_{x_i} \varphi_b(\vec{x}) \delta(\vec{y} - \vec{x}) = - \int dx^3 \varphi_b(\vec{x}) \partial_{x_i} \delta(\vec{y} - \vec{x})$ , d'où l'expression de la densité  $f = -\varphi_b(\vec{x}) \partial_i \delta(\vec{y} - \vec{x})$ . La dérivée fonctionnelle va être

$$\frac{\delta \partial_{y_i} \varphi_b(\vec{y})}{\delta \varphi_a(\vec{x})} = -\delta_b^a \partial_{x_i} \delta(\vec{y} - \vec{x}). \quad (1.4.9)$$

Dans ce qui suit, nous allons prendre en considération la dépendance temporelle des champs  $\varphi_a = \varphi_a(t, \vec{x})$ , car il s'agit bien du cas qui nous intéresse. En effet, on peut toujours définir une fonctionnelle sur l'espace de la forme

$$F(\varphi_a(t), \dot{\varphi}_a(t)) = \int dx^3 f(\varphi_a(t, \vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_a(t, \vec{x}), \dot{\varphi}_a(t, \vec{x})). \quad (1.4.10)$$

Notez bien que l'intégration se fait sur tout l'espace, et le temps joue seulement le rôle d'un paramètre qui ne varie pas dans le calcul de cette intégrale. C'est pour cette raison que l'évolution de  $F$  nécessite à la fois la connaissance de  $\varphi_a(t, \vec{x})$  et de  $\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})$  qui doivent être considérées comme des champs indépendants. Dans ce cas, la variation de  $F$  sera

$$\delta F = \int dx^3 \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_a(t, \vec{x})} \delta \varphi_a(t, \vec{x}) + \frac{\delta F}{\delta \dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} \delta \dot{\varphi}_a(t, \vec{x}) \right). \quad (1.4.11)$$

En utilisant l'expression (1.4.10), et grace à un calcul similaire au calcul effectué ci-dessous, on obtient la variation de la fonctionnelle  $F$

$$\delta F = \int dx^3 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi_a(t, \vec{x})} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_a(t, \vec{x}))} \right) \right) \delta \varphi_a(t, \vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} \delta \dot{\varphi}_a(t, \vec{x}) \right) \quad (1.4.12)$$

Finalement, après une identification des équations (1.4.11) et (1.4.12), on aboutit aux dérivées fonctionnelles de la fonctionnelle  $F$  par rapport aux champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$  et  $\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})$

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi_a(t, \vec{x})} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_a(t, \vec{x})} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_a(t, \vec{x}))} \right) \quad (1.4.13)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} \quad (1.4.14)$$

Puisque la densité  $f(\varphi_a(t, \vec{x}), \vec{\nabla}\varphi_a(t, \vec{x}), \dot{\varphi}_a(t, \vec{x}))$  ne dépend pas de  $\vec{\nabla}\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})$ , on conclut que  $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\dot{\varphi}_a(t, \vec{x}))} \right) = 0$ . Ainsi les équations précédentes peuvent se mettre sous les formes symétriques

$$\begin{cases} \frac{\delta F}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} = \frac{\partial f}{\partial\varphi_a(t, \vec{x})} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\varphi_a(t, \vec{x}))} \right) \\ \frac{\delta F}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} = \frac{\partial f}{\partial\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial(\vec{\nabla}\dot{\varphi}_a(t, \vec{x}))} \right) \end{cases} \quad (1.4.15)$$

En particulier, l'utilisation de la fonction delta de Dirac permet de déduire les relations ci-dessous

$$\frac{\delta\varphi_b(t, \vec{y})}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} = \delta_b^a \delta(\vec{y} - \vec{x}) \quad ; \quad \frac{\delta\partial_{y_i}\varphi_b(t, \vec{y})}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} = -\delta_b^a \partial_{x_i} \delta(\vec{y} - \vec{x}) \quad ; \quad \frac{\delta\dot{\varphi}_b(t, \vec{y})}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} = 0. \quad (1.4.16)$$

On a aussi

$$\frac{\delta\dot{\varphi}_b(t, \vec{y})}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} = \delta_b^a \delta(\vec{y} - \vec{x}) \quad ; \quad \frac{\delta\partial_{y_i}\dot{\varphi}_b(t, \vec{y})}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} = -\delta_b^a \partial_{x_i} \delta(\vec{y} - \vec{x}) \quad ; \quad \frac{\delta\varphi_b(t, \vec{y})}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} = 0. \quad (1.4.17)$$

## 1.5 Formalisme lagrangien en théorie des champs

En théorie des champs, l'état d'un système est décrit par  $N$  champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$ ,  $a = 1 \dots N$  qui remplissent tout l'espace  $\vec{x}$ , à tout instant  $t$ . Dans ce cas, le lagrangien  $L$  s'écrit comme étant une intégrale par rapport à l'espace d'une densité lagrangienne  $\mathcal{L}$

$$L = \int dx^3 \mathcal{L}(\varphi_a(t, \vec{x}), \partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x})) \quad (1.5.1)$$

où la densité lagrangienne  $\mathcal{L}(\varphi_a(t, \vec{x}), \partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}))$  est une fonction des champs  $\varphi_a(x^\mu) = \varphi_a(t, \vec{x})$  et leurs dérivées spatiales et temporelles  $\partial_\mu\varphi_a(\vec{x}, t)$  où  $\partial_\mu \in \{c^{-1}\partial_t, \partial_i\}$ . On peut alors déduire l'action  $S$  du système comme étant l'intégrale du lagrangien par rapport au temps, cela revient à prendre l'intégrale sur tout d'espace-temps de la densité Lagrangienne

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\varphi_a(t, \vec{x}), \dot{\varphi}_a(t, \vec{x})) = \int dx^4 \mathcal{L}(\varphi_a(t, \vec{x}), \dot{\varphi}_a(t, \vec{x}), \partial_i\varphi_a(t, \vec{x})) \quad (1.5.2)$$

où  $\int dx^4 = \int_{t_i}^{t_f} dt \int dx^3$ . La variation de l'action  $S$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dx^4 \mathcal{L}(\varphi_a(t, \vec{x}) + \delta\varphi_a(t, \vec{x}), \partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}) + \delta\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x})) - \int dx^4 \mathcal{L}(\varphi_a(t, \vec{x}), \partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x})) \\ &= \int dx^4 \left( \mathcal{L}(\varphi_a(t, \vec{x}), \partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x})) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(\vec{x}, t)}\delta\varphi_a(t, \vec{x}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(\vec{x}, t))}\delta(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x})) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L}(\varphi_a(t, \vec{x}), \partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x})) \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $\delta(\partial_\mu\varphi_a(\vec{x}, t)) = \partial_\mu(\delta\varphi_a(\vec{x}, t))$ . Le troisième terme peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}))}\delta(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x})) = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}))}\delta\varphi_a(t, \vec{x}) \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}))} \right) \delta\varphi_a(t, \vec{x}). \quad (1.5.3)$$

Maintenant, en utilisant ce dernier résultat, on déduit que la variation de l'action  $S$  sera

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dx^4 \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(t, \vec{x})} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}))} \right) \right) \delta\varphi_a(t, \vec{x}) \\ &\quad + \int dx^4 \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}))} \delta\varphi_a(t, \vec{x}) \right). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Gauss-Ostrogradski, la contribution du dernier terme est nulle, car il s'agit d'une quadri-divergence. Selon le principe de moindre action,  $\delta S = 0$ , ce qui permet d'avoir les équations d'Euler-Lagrange décrivant l'évolution des champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$  comme suit :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(t, \vec{x})} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a(t, \vec{x}))} \right) = 0. \quad (1.5.4)$$

Ces équations respectent bien la symétrie relativiste entre l'espace et le temps, mais il est également possible d'obtenir ces équations à partir d'un principe variationnel. Pour se faire au lieu d'utiliser la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$ , on va utiliser le lagrangien  $L$ . En effet, on a

$$S = \int dt L(\varphi_a(\vec{x}, t), \dot{\varphi}_a(t, \vec{x}))$$

La variation de l'action  $S$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \left( \frac{\delta L}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} \delta\varphi_a(t, \vec{x}) + \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} \delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x}) \right) \\ &= \int dt \left( \frac{\delta L}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} \right) \right) \delta\varphi_a(t, \vec{x}) + \int \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} \delta\varphi_a(t, \vec{x}) \right) dt \end{aligned}$$

où nous avons effectué une intégration par parties sur le dernier terme de la première ligne. Par ailleurs, la variation des champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$  sur ces bornes d'intégration est nulle  $\delta\varphi_a(t_i, \vec{x}) = \delta\varphi_a(t_f, \vec{x}) = 0$ , donc le troisième terme de la dernière ligne est nul. Le principe de moindre action  $\delta S = 0$  conduit directement aux équations

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} \right) = 0. \quad (1.5.5)$$

Ces équations qui font intervenir les dérivées fonctionnelles ressemblent beaucoup aux équations de la mécanique classiques. D'après les relations (1.4.13) et (1.4.14) on déduit que

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi_a(t, \vec{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi_a(t, \vec{x})} - \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_a(t, \vec{x}))} \right) \quad (1.5.6)$$

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_a(t, \vec{x})}. \quad (1.5.7)$$

En remplaçant ce résultat dans (1.5.5), on obtient les équations de mouvement (1.5.4), ce qui montre l'équivalence des deux approches.

## 1.6 Formalisme hamiltonien en théorie des champs

En gardant la même l'analogie avec la mécanique classique décrivant les points ponctuels, donc le passage à la formulation hamiltonienne commence par la définition des moments conjugués comme étant les dérivées fonctionnelles du lagrangien par rapport aux dérivées temporelles des champs

$$\pi^a = \frac{\delta L}{\delta(\dot{\varphi}_a(t, \vec{x}))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\varphi}_a(t, \vec{x}))} \quad (1.6.1)$$

Le hamiltonien  $H$  et la densité hamiltonienne correspondante  $\mathcal{H}$  sont définis par

$$H(\varphi_a, \pi^a) = \int dx^3 \mathcal{H}(\varphi_a, \vec{\nabla}\varphi_a; \pi^a, \vec{\nabla}\pi^a) \quad \text{où} \quad \mathcal{H}(\varphi_a, \vec{\nabla}\varphi_a; \pi^a, \vec{\nabla}\pi^a) = \pi^a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L} \quad (1.6.2)$$

ce qui sous-entend que les vitesses  $\dot{\varphi}_a$  vont toutes s'exprimer en fonction des champs et leurs moments conjugués. Donc, le hamiltonien va être une fonctionnelle des champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$  et leurs moments conjugués  $\pi^a(t, \vec{x})$ , où le temps joue le rôle d'un paramètre.

Pour obtenir les équations de mouvement, on doit calculer la variation de hamiltonien, en se servant de la définition de la dérivée fonctionnelle

$$\delta H = \int dx^3 \left( \frac{\delta H}{\delta\varphi_a} \delta\varphi_a + \frac{\delta H}{\delta\pi^a} \delta\pi^a \right). \quad (1.6.3)$$

Mais d'un autre côté,

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta \left( \int dx^3 \pi^a \dot{\varphi}_a \right) - \delta L \\ &= \int dx^3 (\delta \pi^a \dot{\varphi}_a + \pi^a \delta \dot{\varphi}_a) - \int dx^3 \left( \frac{\delta L}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_a} \delta \dot{\varphi}_a \right).\end{aligned}$$

D'après (1.6.1), (1.5.5), on a les relations  $\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_a} = \pi^a$  et  $\frac{\delta L}{\delta \varphi_a} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_a} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\pi^a)$ , alors l'équation précédente se réduit à

$$\delta H = \int dx^3 (\dot{\varphi}_a \delta \pi^a - \dot{\pi}^a \delta \varphi_a). \quad (1.6.4)$$

En comparant les expressions (1.6.4) et (1.6.3), on déduit les équations de Hamilton relatives à la théorie des champs

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_a = \frac{\delta H}{\delta \pi^a} \\ \dot{\pi}^a = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_a} \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Il y a une autre méthode pour retrouver ces résultats, mais avec la densité hamiltonienne du système qui dépend explicitement de  $(\varphi_a, \vec{\nabla} \varphi_a, \pi^a, \vec{\nabla} \pi^a)$ . En effet,

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta \int dx^3 \mathcal{H}(\varphi_a, \vec{\nabla} \varphi_a; \pi^a, \vec{\nabla} \pi^a) \\ &= \int dx^3 \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\vec{\nabla} \varphi_a)} \cdot \delta (\vec{\nabla} \varphi_a) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} \delta \pi^a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\vec{\nabla} \pi^a)} \cdot \delta (\vec{\nabla} \pi^a) \right)\end{aligned}$$

Après une intégration par parties du deuxième et du quatrième termes, et en appliquant le théorème de Gauss-Ostrograski, l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$\delta H = \int dx^3 \left( \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_a} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \varphi_a} \right) \right) \delta \varphi_a + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \pi^a} \right) \right) \delta \pi^a \right). \quad (1.6.6)$$

Par comparaison de cette équation avec l'équation (1.6.4), on déduit la forme suivante des équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \pi^a} \right) \\ \dot{\pi}^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_a} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \varphi_a} \right). \end{cases} \quad (1.6.7)$$

## 1.7 Crochets de Poisson en théorie des champs

Le crochet de Poisson se généralise facilement au cas des deux fonctionnelles  $A[\varphi_a, \pi_a]$  et  $B[\varphi_a, \pi_a]$  qui dépendent des champs  $\varphi_a(\vec{x}, t)$  et leurs moments conjugués  $\pi^a(\vec{x}, t)$

$$\{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\} = \int dz^3 \left( \frac{\delta A(\mathbf{x})}{\delta \varphi_a(\mathbf{z})} \frac{\delta B(\mathbf{y})}{\delta \pi^a(\mathbf{z})} - \frac{\delta A(\mathbf{x})}{\delta \pi^a(\mathbf{z})} \frac{\delta B(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{z})} \right). \quad (1.7.1)$$

Avec cette notation, il faut savoir que nous avons utilisé l'écriture en gras pour désigner les vecteurs ( $\vec{x} = \mathbf{x}$ ,  $\vec{y} = \mathbf{y}$  et  $\vec{z} = \mathbf{z}$ ), et que les champs  $\varphi_a$  ainsi que les moments conjugués  $\pi^a$  sont pris au temps égal, même dans les expressions des fonctionnelles  $A[\varphi_a, \pi_a]$  et  $B[\varphi_a, \pi_a]$ , mais comme le temps joue le rôle d'un paramètre dans le calcul des crochets de Poisson, on a décidé d'omettre de l'écrire explicitement, afin d'éviter de le répéter inutilement.

Pour évaluer ces crochets, on a besoin de quelques relations mathématiques qu'on a déjà vues (1.4.16), à savoir, les dérivées fonctionnelles des champs et leurs moments conjugués

$$\frac{\delta \varphi_a(\mathbf{x})}{\delta \varphi_b(\mathbf{z})} = \delta_a^b \delta^3(x - z) \quad , \quad \frac{\delta \pi^a(\mathbf{x})}{\delta \pi^b(\mathbf{z})} = \delta_b^a \delta^3(x - z). \quad (1.7.2)$$

De même

$$\frac{\delta \pi^a(\mathbf{x})}{\delta \varphi_b(\mathbf{z})} = 0 \quad , \quad \frac{\delta \varphi_a(\mathbf{x})}{\delta \pi^b(\mathbf{z})} = 0. \quad (1.7.3)$$

A présent, nous pouvons calculer les trois crochets de Poisson entre les variables  $\varphi_a(\mathbf{x})$ , et  $\pi_b(\mathbf{y})$ . En effet,

$$\begin{aligned} \{\varphi_a(\mathbf{x}), \pi^b(\mathbf{y})\} &= \int dz^3 \left( \frac{\delta \varphi_a(\mathbf{x})}{\delta \varphi_c(\mathbf{z})} \frac{\delta \pi^b(\mathbf{y})}{\delta \pi^c(\mathbf{z})} - \frac{\delta \varphi_a(\mathbf{x})}{\delta \pi^c(\mathbf{z})} \frac{\delta \pi^b(\mathbf{y})}{\delta \varphi_c(\mathbf{z})} \right) \\ &= \int dz^3 (\delta_a^c \delta^3(x - z) \delta_c^b \delta^3(y - z)) \\ &= \delta_a^b \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

On a aussi,

$$\{\varphi_a(\mathbf{x}), \varphi_b(\mathbf{y})\} = 0 \quad , \quad \{\pi^a(\mathbf{x}), \pi^b(\mathbf{y})\} = 0. \quad (1.7.5)$$

C'est bien ces crochets qui remplacent en théorie des champs, les crochets habituels de la mécanique analytique  $\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$  et  $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ .

Soit maintenant la fonctionnelle  $F$  qui dépend du temps à travers le temps figurant dans les champs  $\varphi_a(\vec{x}, t)$  et  $\pi^a(\vec{x}, t)$ , dont l'expression est

$$F[\varphi_a(t), \pi_a(t)] = \int dx^3 f \left( \varphi_a(t, \vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_a(t, \vec{x}); \pi^a(t, \vec{x}), \vec{\nabla} \pi^a(t, \vec{x}) \right). \quad (1.7.6)$$

Afin de calculer  $\frac{dF}{dt}$ , commençons par examiner  $F[\varphi_a(t + \varepsilon), \pi_a(t + \varepsilon)]$  où  $\varepsilon$  est un intervalle de temps infinitésimal. En effet,

$$\begin{aligned}
F[\varphi_a(t + \varepsilon), \pi_a(t + \varepsilon)] &= \int dx^3 f\left(\varphi_a(t + \varepsilon, \vec{x}), \vec{\nabla}\varphi_a(t + \varepsilon, \vec{x}); \pi_a(t + \varepsilon, \vec{x}), \vec{\nabla}\pi_a(t + \varepsilon, \vec{x})\right) \\
&= \int dx^3 f\left(\varphi_a + \varepsilon \frac{\partial \varphi_a}{\partial t}, \vec{\nabla}\varphi_a + \varepsilon \frac{\partial \vec{\nabla}\varphi_a}{\partial t}; \pi_a + \varepsilon \frac{\partial \pi_a}{\partial t}, \vec{\nabla}\pi_a + \varepsilon \frac{\partial \vec{\nabla}\pi_a}{\partial t}\right) \\
&= \int dx^3 f\left(\varphi_a, \vec{\nabla}\varphi_a; \pi_a, \vec{\nabla}\pi_a\right) \\
&\quad + \varepsilon \int dx^3 \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\varphi_a} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}\varphi_a}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \pi_a} \frac{\partial \pi_a}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\pi_a} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}\pi_a}{\partial t} \right)
\end{aligned} \tag{1.7.7}$$

Mais,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\varphi_a} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}\varphi_a}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\varphi_a} \dot{\varphi}_a \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\varphi_a} \right) \dot{\varphi}_a \tag{1.7.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\pi_a} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}\pi_a}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\pi_a} \dot{\pi}^a \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\pi_a} \right) \dot{\pi}^a. \tag{1.7.9}$$

Alors,

$$F[\varphi_a(t + \varepsilon), \pi_a(t + \varepsilon)] = F[\varphi_a(t), \pi_a(t)] \tag{1.7.10}$$

$$\quad + \varepsilon \int dx^3 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi_a} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\varphi_a} \right) \right) \dot{\varphi}_a + \left( \frac{\partial f}{\partial \pi_a} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}\pi_a} \right) \right) \dot{\pi}^a \right) \tag{1.7.11}$$

où nous avons annulé les termes de la divergence à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski.

En utilisant l'expression (1.4.6) de la dérivée fonctionnelle, on aboutit à la relation

$$F[\varphi_a(t + \varepsilon), \pi_a(t + \varepsilon)] - F[\varphi_a(t), \pi_a(t)] = \varepsilon \int dx^3 \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_a} \dot{\varphi}_a + \frac{\delta F}{\delta \pi_a} \dot{\pi}^a \right). \tag{1.7.12}$$

Finalement, la dérivée  $\dot{F} = \frac{dF}{dt}$  de la fonctionnelle  $F$  par rapport au temps va sous s'écrire sous la forme

$$\dot{F}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\varphi_a(t + \varepsilon), \pi_a(t + \varepsilon)] - F[\varphi_a(t), \pi_a(t)]}{\varepsilon} = \int dx^3 \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_a} \dot{\varphi}_a + \frac{\delta F}{\delta \pi_a} \dot{\pi}^a \right). \tag{1.7.13}$$

En se servant des équations de Hamilton (1.5.5), on obtient l'équation de l'évolution temporelle de la fonctionnelle  $F$  à l'aide du crochets de Poisson

$$\dot{F}(t) = \int dx^3 \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_a} \frac{\delta H}{\delta \pi^a} - \frac{\delta F}{\delta \pi^a} \frac{\delta H}{\delta \varphi_a} \right) = \{F, H\}. \quad (1.7.14)$$

En particulier, les équations de Hamilton vont se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_a(t, \mathbf{y}) = \{\varphi_a(t, \mathbf{y}), H\} \\ \dot{\pi}^a(t, \mathbf{y}) = \{\pi^a(t, \mathbf{y}), H\} \end{cases} \quad (1.7.15)$$

Ces équations prises avec les relations (1.7.4) et (1.7.5) sont essentielles pour étudier l'évolution d'un système décrit par des champs qui occupent tout l'espace et qui évoluent dans le temps.

La quantification canonique se fait en remplaçant les champs  $\varphi_a$  et  $\pi^a$  par des opérateurs de champs  $\hat{\varphi}_a$  et  $\hat{\pi}^a$ , dont les commutateurs s'obtiennent directement à partir des crochets (1.7.4) et (1.7.5) comme suit :

$$[\hat{\varphi}_a(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}^b(t, \mathbf{y})] = i\hbar \delta_a^b \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.7.16)$$

et,

$$[\hat{\varphi}_a(t, \mathbf{x}), \hat{\varphi}_b(t, \mathbf{x})] = [\hat{\pi}^a(t, \mathbf{y}), \hat{\pi}^b(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (1.7.17)$$

Ces commutateurs permettent d'avoir les équations de mouvement grâce aux équations de Heisenberg ayant une forme analogue aux équations de Hamilton (1.7.15). Autrement dit,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi}_a(t, \mathbf{y}) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\varphi}_a(t, \mathbf{y}), \hat{H}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \hat{\pi}^a(t, \mathbf{y}) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\pi}^a(t, \mathbf{y}), \hat{H}]. \end{cases} \quad (1.7.18)$$

Ce chapitre se termine ici, après avoir vu les outils mathématiques nécessaires à la description des champs. Un rôle particulier est joué par les dérivées fonctionnelles dans les deux formulations lagrangienne et hamiltonienne, ainsi que dans le calcul des crochets de Poisson.

Les systèmes singuliers représentent une partie très importante des lagrangiens décrivant des systèmes physiques. Le champ électromagnétique, le champ spinoriel, ainsi que le champ gravitationnel sont bel et bien des systèmes singuliers.

Le premier à étudier ces systèmes dans leur généralité est le physicien britannique Paul Dirac dans un travail datant des années cinquante [1, 2]. Son approche est une généralisation du formalisme hamiltonien pour prendre en considération la présence de contraintes, caractérisant les systèmes singuliers. Le résultat final est la définition du crochet de Dirac qui se substitue au crochet de Poisson, mais sans violer ses propriétés.

Dans ce chapitre, nous allons faire un exposé de la méthode de Dirac et de son utilisation en théorie des champs, dans le but de procéder au traitement du champ de Maxwell et de modèle self-dual (SD).

## 2.1 Lagrangiens singuliers et contraintes

Soit un système décrit par un lagrangien  $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ , fonction des coordonnées généralisées  $q_i$  et des vitesses généralisées  $\dot{q}_i$ , où  $i = 1, \dots, N$ . Ce lagrangien est dit singulier, si les moments conjugués  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  et les coordonnées généralisées ne sont pas tous complètement indépendants, ce qui revient à dire qu'il existe donc des relations du type  $\phi_m(q_i, p_i) = 0$  avec  $m = 1, 2, \dots, M$  appelées des contraintes primaires. Ainsi, la formulation hamiltonienne reposant sur l'indépendance des coordonnées et des moments conjugués, sera bien altérée par cette situation, en l'occurrence les crochets de Poisson, ce qui va sûrement avoir des conséquences sur la quantification canonique.

Pour quantifier ces systèmes, l'idée de Dirac est d'introduire un nouveau hamiltonien  $H_T$ , obtenu par l'addition de combinaisons linéaires des contraintes  $\lambda_m \phi_m$  au hamiltonien canonique  $H = \dot{q}_i p_i - L$ , de telle sorte que

$$H_T = H + \lambda_m \phi_m(q, p). \quad (2.1.1)$$

$H_T$  est appelé le hamiltonien total et les  $\lambda_m$  sont des multiplicateurs de Lagrange qui sont totalement arbitraires, et considérés comme étant des nouvelles variables dynamiques. Le lagrangien associé à ce hamiltonien est

$$L_T = p_i \dot{q}_i - H_T \quad (2.1.2)$$

et l'action correspondante à ce lagrangien sera  $S = \int_{t_i}^{t_f} L_T(q_j, \dot{q}_j, t) dt$ . Le principe de moindre action  $\delta S = 0$  nous permet de déduire les équations du mouvement comme suit :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \delta H - \delta \lambda_m \phi_m - \lambda_m \delta \phi_m) dt \\ &= p_i \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \left[ \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right. \\ &\quad \left. + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \phi_m \delta \lambda_m \right] dt. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Comme le premier terme va s'annuler grâce aux conditions aux limites, on obtient l'ensemble des équations du mouvement

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} & i &= 1 \dots N \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} & i &= 1 \dots N \\ \phi_m &= 0 & m &= 1 \dots M. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Ainsi, l'évolution temporelle  $\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i$  d'une variable dynamique de l'espace des phase  $F(q_i, p_i)$  va se mettre sous la forme

$$\dot{F} = \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \lambda_m \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \quad ; \quad \phi_m = 0, \quad (2.1.5)$$

où l'on reconnaît bien la définition du crochet de Poisson qu'il faut d'abord calculer avant d'imposer les contraintes  $\phi_m = 0$ . Autrement dit,

$$\dot{F} = \{F, H\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} \quad ; \quad \phi_m = 0. \quad (2.1.6)$$

À cause des contraintes primaires  $\phi_m = 0$ , le système évolue nécessairement sur la surface des contraintes. Pour rappeler cette règle, Dirac a introduit la notion d'égalité faible ( $\approx$ ) au lieu de l'égalité forte ( $=$ ), qui est valable à condition de respecter les contraintes  $\phi_m \approx 0$ ,

ainsi l'équation (2.1.6) devient

$$\dot{F} \approx \{F, H\} + \lambda_m \{F, \phi_m\} \approx \{F, H_T\}. \quad (2.1.7)$$

En particulier, les équations d'évolution des variables canoniques seront

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_T\} \quad ; \quad \dot{p}_i \approx \{p_i, H_T\}. \quad (2.1.8)$$

La formulation de Dirac impose des conditions de consistance basées sur la conservation des contraintes primaires  $\phi_m$  au cours du temps  $\dot{\phi}_m \approx 0$ . mais grâce à l'équation (2.1.7), cela est assuré si  $\{\phi_m, H_T\} \approx 0$ , d'où les relations

$$\{\phi_m, H\} + \lambda_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0 \quad ; \quad m', m = 1 \dots M. \quad (2.1.9)$$

L'examen de ces conditions de consistance conduit à l'une des situations suivantes :

- (i) Les conditions de consistance donnent des contradictions ( $1 = 0$ ) ;
- (ii) Les conditions de consistance sont systématiquement vérifiées ( $0 \approx 0$ ), soit par un calcul direct, soit il y a une reproduction de l'une des contraintes primaires, et l'itération se termine. Cela peut s'accompagner par la détermination de quelques multiplicateurs ;
- (iii) Tous les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_m$  sont faiblement fixées, et dans ce cas, la procédure itérative s'arrête aussi ;
- (iv) Des contraintes supplémentaires indépendantes des multiplicateurs  $\lambda_m$ , et des contraintes primaires  $\phi_m$ , vont apparaître. Elles sont les contraintes secondaires  $\chi_k$ , qui doivent satisfaire les conditions de consistance

$$\dot{\chi}_k(q, p) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \{\chi_k, H\} + \lambda_m \{\chi_k, \phi_m\} \approx 0 \quad k = 1 \dots K \quad (2.1.10)$$

où  $K$  est le nombre des contraintes secondaires. Cette procédure doit être répétée jusqu'à ce qu'il n'y est plus de nouvelles contraintes. Autrement-dit, on va se trouver dans l'un des trois premiers cas précédents. Il s'agit là de l'algorithme de Dirac-Bergmann.

## 2.2 Classification des contraintes et crochets de Dirac

Après la détermination des contraintes primaires et secondaires, il faut procéder à une autre classification de ces contraintes en première et en deuxième classe. On dit qu'une contrainte  $\phi_j$  est de première classe si son crochet de Poisson avec toutes les autres contraintes s'annule faiblement

$$\{\phi_j, \phi_{j'}\} \approx 0 \quad \forall j' \in \{1, \dots, M + K\}. \quad (2.2.1)$$

La notation suivante  $\phi_j$ , représente une contrainte première ou secondaire,  $M$  représente le nombre des contraintes primaires,  $K$  représente le nombre des contraintes secondaires. On dit qu'une contrainte est de deuxième classe si son crochet de Poisson avec, au moins une autre contrainte, est différent du zéro

$$\{\phi_j, \phi_{j'}\} \neq 0 \quad \exists j' \in \{1, \dots, M + K\}. \quad (2.2.2)$$

D'après ces définitions, toute contrainte de première classe  $\phi_j$  ne va pas aider dans la détermination des paramètres  $\lambda_m$ , car en lui appliquant la condition de consistance, on aura

$$\{\phi_j, H\} + \lambda_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \{\phi_j, H\} \approx 0 \quad (2.2.3)$$

Ainsi les contraintes de première classe engendrent une sorte d'indétermination dans l'évolution du système étudié. C'est exactement la caractéristique d'une symétrie de jauge.

Pour cette raison, on va d'abord étudier les systèmes qui contiennent des contraintes primaires et secondaires toutes de deuxième classe. Dans ce cas, nous utilisons les notations suivantes : les  $\xi_m, m = 1 \dots M$  pour les  $M$  contraintes primaires, les  $\xi_k, k = 1 + M \dots M + K$  pour les  $K$  contraintes secondaires. Dans l'ensemble, on va avoir  $R = M + K$  contraintes qui sont notées  $\xi_r, r = 1 \dots R$ . Les  $R$  conditions de consistance (2.1.7) s'écrivent

$$\{\xi_r, H_T\} \approx \{\xi_r, H_c\} + \lambda_m \{\xi_r, \xi_m\} \approx 0 \quad m = 1 \dots M \text{ et } r = 1 \dots R. \quad (2.2.4)$$

Il s'agit d'un système d'équations linéaires de  $R$  équations avec  $M$  inconnues (où  $M \leq R$ ), qui peut être inversé afin d'obtenir les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_m$  ainsi que des identités nulles

$$\begin{aligned} \lambda_m &\approx -\{\xi_m, \xi_{r'}\}^{-1} \{\xi_{r'}, H_c\} & m = 1 \dots M, r' = 1 \dots R \\ 0 &\approx -\{\xi_r, \xi_{r'}\}^{-1} \{\xi_{r'}, H_c\} & r = M + 1 \dots R, r' = 1 \dots R. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

En injectant l'expression des multiplicateurs de Lagrange dans l'équation (2.1.6), on trouve que

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \phi_m\} \{\xi_m, \xi_{r'}\}^{-1} \{\xi_{r'}, H_c\} \quad m = 1 \dots M \text{ et } r' = 1 \dots R \quad (2.2.6)$$

A l'aide de (2.2.5) on a les identités  $\{\xi_r, \xi_{r'}\}^{-1} \{\xi_{r'}, H_c\} \approx 0$ , pour  $r = M + 1 \dots R$ , par conséquent, l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \phi_r\} \{\xi_r, \xi_{r'}\}^{-1} \{\xi_{r'}, H_c\} \quad r, r' = 1 \dots R. \quad (2.2.7)$$

A ce stade, nous introduisons des nouveaux crochets appelés les crochets de Dirac définis par

$$\{F, H_c\}_D = \{F, H_c\} - \{F, \phi_r\} \{\xi_r, \xi_{r'}\}^{-1} \{\xi_{r'}, H_c\} \quad (2.2.8)$$

ainsi  $\{F, H_c\}_D$  représente le crochet de Dirac de  $F$  et  $H_c$ . Avec ces crochets, nous aurons

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_D. \quad (2.2.9)$$

D'une façon générale, les crochets de Dirac de deux quantités quelconques sont donnés par

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \xi_r\} \{\xi_r, \xi_{r'}\}^{-1} \{\xi_{r'}, g\}. \quad (2.2.10)$$

Les crochets de Dirac définis par l'équation (2.2.10) satisfont toutes les propriétés des crochets de Poisson

$$\begin{aligned} \{f, g\}_D &= -\{g, f\}_D \Rightarrow \{f, f\}_D = 0 && \text{(Antisymétrie)} \\ \{\alpha f + \beta g, h\}_D &= \alpha \{f, h\}_D + \beta \{g, h\}_D && \text{(Linéarité)} \\ \{fg, h\}_D &= f \{g, h\}_D + \{f, h\}_D g && \text{(Règle de Leibniz)} \\ \{f, \{g, h\}\}_D + \{h, \{f, g\}\}_D + \{g, \{h, f\}\}_D &= 0 && \text{(Identité de Jacobi)} \\ \{f, \xi_r\} &= 0 && \text{(\xi}_r \text{ est de deuxième classe)} \\ \{f, \gamma_l\}_D &\approx \{f, \gamma_l\} && \text{(\gamma}_l \text{ est de première classe)} \end{aligned}$$

ou  $f, g, h$  sont des quantités qui dépendent de  $p_i, q_i$ , et  $\alpha, \beta$  sont des quantités réels.

Pour terminer cette section, supposons que nous sommes dans le cas où nous avons des contraintes de première classe  $\gamma_s, s = 1 \dots S$  en plus des contraintes de deuxième classe  $\xi_r, r = 1 \dots R$  ( $R$  est pair). La méthode de Dirac ne peut pas s'appliquer directement, il faut ajouter des conditions supplémentaires  $\zeta_s(q, p) \approx 0$  où  $s = 1 \dots S$ , dont le nombre doit être égal à celui des contraintes de première classe, pour qu'elles deviennent de seconde classe. Donc, si on note toutes ces contraintes comme  $(\xi_1, \dots, \xi_R; \gamma_1, \dots, \gamma_S; \zeta_1, \dots, \zeta_S) = (\psi_1, \dots, \psi_R; \psi_{R+1}, \dots, \psi_{R+S}; \psi_{R+S+1}, \dots, \psi_{R+2S})$ , les contraintes  $\psi_h, h = 1 \dots R + 2S$  vont constituer les contraintes de ce système qui vont nous permettre de définir le crochet de Dirac comme suit :

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \psi_h\} \{\psi_h, \psi_{h'}\}^{-1} \{\psi_{h'}, g\} \quad h, h' = 1 \dots R + 2S \quad (2.2.11)$$

Enfin, en termes de ces crochets de Dirac, nous avons pris en considération la présence de toutes les contraintes, primaires et secondaires, de première et de deuxième classe, ce qui n'était pas possible avec les crochets de Poisson.

## 2.3 Exemples d'application

**Exemple 1** Le système constitué d'une particule de masse  $m$  se déplaçant sur la surface d'une sphère de rayon  $R$  est décrit par le lagrangien

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \omega (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$

où  $\omega$  est un multiplicateur de Lagrange jouissant du statut d'une variable indépendante. En utilisant la définition des moments conjugués  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  pour les variables  $x, y, z, \omega$  respectivement, on obtient

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}, \quad p_\omega = 0.$$

À partir des équations précédentes, nous obtenons une seule contrainte primaire  $\phi_1 = p_\omega$ . Le hamiltonien de ce système  $H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} + p_\omega\dot{\omega} - L$  prend la forme

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \omega (x^2 + y^2 + z^2 - R^2),$$

et le hamiltonien total est

$$H_T = H + \lambda_m \phi_m = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \omega (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + \lambda_1 p_\omega$$

où  $\lambda_1$  est un multiplicateur de Dirac. La condition de consistance  $\dot{\phi}_1 \approx \{\phi_1, H_T\} \approx 0$  de la contrainte primaire permet de trouver une contrainte secondaire

$$\{\phi_1, H\} + \lambda_2 \{\phi_1, \phi_2\} \approx 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \approx 0.$$

La même procédure pour la contrainte secondaire  $\varphi_1 \approx x^2 + y^2 + z^2 - R^2$  va donner une autre contrainte secondaire

$$\{\varphi_1, H\} + \lambda_1 \{\varphi_1, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow xp_x + yp_y + zp_z \approx 0.$$

Si on procède de la même manière avec la contrainte  $\varphi_2 \approx xp_x + yp_y + zp_z$ , on aboutit à une autre contrainte

$$\{\varphi_2, H\} + \lambda_1 \{\varphi_2, \phi_1\} \approx 0 \Rightarrow 2 \left( \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \omega (x^2 + y^2 + z^2) \right) \approx 0.$$

En appliquant les conditions de consistance à la contrainte secondaire  $\varphi_3 \approx \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \omega (x^2 + y^2 + z^2)$ , on obtient le multiplicateur  $\lambda_1 \approx 0$ , et la procédure itérative s'arrête.

Nous avons donc une seule contrainte primaire  $\phi_1$  et trois secondaires  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , qui sont toutes de deuxième classe car

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \varphi_1\} = \{\phi_1, \varphi_2\} = 0; \{\phi_1, \varphi_3\} &\approx -2R^2 \not\approx 0 \\ \{\varphi_1, \varphi_2\} &\approx 2R^2 \not\approx 0; \{\varphi_1, \varphi_3\} \approx 0; \{\varphi_2, \varphi_3\} \approx -8\omega R^2. \end{aligned}$$

Donc toutes les contraintes de ce système  $\xi_1 = \phi_1, \xi_2 = \varphi_1, \xi_3 = \varphi_2, \xi_4 = \varphi_3$  sont de deuxième classe. Avec ces contraintes, on obtient la matrice de Dirac

$$\Delta = [\{\xi_i, \xi_j\}]_{i,j=1\dots 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2R^2 \\ 0 & 0 & 2R^2 & 0 \\ 0 & -2R^2 & 0 & -8\omega R^2 \\ 2R^2 & 0 & 8\omega R^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

et son inverse

$$\Delta^{-1} = [\{\xi_i, \xi_j\}^{-1}]_{i,j=1\dots 4} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\omega}{R^2} & 0 & \frac{1}{2R^2} \\ \frac{2\omega}{R^2} & 0 & \frac{-1}{2R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2R^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2R^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Ainsi, le crochet de Dirac des deux fonctions  $f$  et  $g$  se calcule par l'expression

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \xi_i\} \{\xi_i, \xi_j\}^{-1} \{\xi_j, g\}.$$

En particulier, nous avons les crochets de Dirac suivants :

$$\begin{aligned} \{x, x\}_D = \{x, y\}_D = \{y, z\}_D = \{x, z\}_D = \{y, y\}_D = \{z, z\}_D = \{\omega, \omega\}_D &= 0 \\ \{x, p_x\}_D = \frac{y^2+z^2}{R^2}, \quad \{y, p_y\}_D = \frac{x^2+z^2}{R^2}, \quad \{z, p_z\}_D = \frac{x^2+y^2}{R^2}, \quad \{\omega, p_\omega\}_D &= 0 \\ \{x, p_y\}_D = \{y, p_x\}_D = -\frac{xy}{R^2}, \quad \{y, p_z\}_D = \{z, p_y\}_D = -\frac{yz}{R^2}, \quad \{x, p_z\}_D = \{z, p_x\}_D &= -\frac{xz}{R^2} \\ \{p_x, p_y\}_D = \frac{-xp_y+yp_x}{R^2}, \quad \{p_x, p_z\}_D = \frac{-xp_z+zp_x}{R^2}, \quad \{p_y, p_z\}_D = \frac{-yp_z+zp_y}{R^2}. \end{aligned}$$

Il est clair que ces crochets de Dirac sont différents des crochets de Poisson habituels.

**Exemple 2** Dans le cadre de la recherche de lagrangiens à partir des équations de mouvement, ce qui est désigné par le problème inverse, Hojman et Urrutia [14] ont construit un lagrangien linéaire par rapport aux vitesses s'écrivant sous la forme

$$L = (y + z) \dot{x} + \omega \dot{z} + \frac{1}{2} (\omega^2 - 2yz - z^2). \quad (2.3.3)$$

La définition des moments conjugués  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  pour les variables  $(x, y, z, \omega)$  respectivement, va nous donner

$$p_x = y + z, \quad p_y = 0, \quad p_z = \omega, \quad p_\omega = 0,$$

d'où les contraintes primaires

$$\phi_1 = p_x - y - z, \quad \phi_2 = p_y, \quad \phi_3 = p_z - \omega, \quad \phi_4 = p_\omega.$$

Le hamiltonien canonique  $H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} + p_\omega \dot{\omega} - L$  prend la forme simple

$$H = \frac{1}{2} (-\omega^2 + 2yz + z^2),$$

d'où le hamiltonien total

$$\begin{aligned} H_T &= H + \lambda_m \phi_m \\ &= \frac{1}{2} (-\omega^2 + 2yz + z^2) + \lambda_1(p_x - y - z) + \lambda_2(p_y) + \lambda_3(p_z - \omega) + \lambda_4(p_\omega) \end{aligned}$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont les multiplicateurs de Dirac. Les conditions de consistance sur les contraintes primaires  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  vont nous donner ces quatre paramètres. En effet,

$$\dot{\phi}_1 \approx \{\phi_1, H_T\} \approx 0 \Rightarrow \lambda_3 + \lambda_2 \approx 0$$

$$\dot{\phi}_2 \approx \{\phi_2, H_T\} \approx 0 \Rightarrow \lambda_1 \approx z$$

$$\dot{\phi}_3 \approx \{\phi_3, H_T\} \approx 0 \Rightarrow \lambda_4 \approx -y$$

$$\dot{\phi}_4 \approx \{\phi_4, H_T\} \approx 0 \Rightarrow \lambda_2 \approx -\omega$$

La procédure itérative s'arrête ici car il n'y a pas des nouvelles contraintes. Nous avons aussi les relations

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -1; \{\phi_1, \phi_3\} \approx -1; \{\phi_3, \phi_4\} \approx -1.$$

Toutes les contraintes de ce système  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  sont de deuxième classe. Avec ces contraintes, on obtient la matrice de Dirac

$$\Delta = [\{\xi_i, \xi_j\}]_{i,j=1\dots 4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse prend la forme

$$\Delta^{-1} = [\{\xi_i, \xi_j\}^{-1}]_{i,j=1\dots 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les crochets de Dirac non nuls relatifs à ce système sont

$$\{x, y\}_D = 1, \quad \{y, \omega\}_D = -1, \quad \{z, \omega\}_D = 1, \quad \{x, p_y\}_D = \{y, p_x\}_D = 1, \quad \{y, p_z\}_D = 1. \quad (2.3.4)$$

Une fois de plus, ces crochets diffèrent des crochets de Poisson, ce qui est dû à la présence des contraintes.

## 2.4 Extension de la méthode de Dirac à la théorie des champs

Jusqu'à présent, l'approche de Dirac étudiée précédemment traite les systèmes à degrés de liberté finis, dans cette partie nous allons montrer sa validité dans le cas des systèmes à degrés de liberté infinis. Comme nous l'avons déjà vu dans le premier chapitre, pour faire ce passage, on commence par remplacer les variables  $q_i$  par les champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$ , ainsi, les contraintes qui peuvent résulter de la définition des moments conjugués, vont relier les champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$  et les moments conjugués  $\pi_a(t, \vec{x})$ , indépendamment des vitesses  $\partial_t \varphi_a(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}_a(t, \vec{x})$ . Autrement-dit, nous allons avoir des relations de type  $\phi_m = \phi_m(\varphi_a(t, \vec{x}), \pi_a(t, \vec{x}))$  qui vont dépendre de l'espace en plus du temps. Pour les prendre en considération, il faut ajouter l'intégrale sur l'espace

$$\Phi(t) = \Phi(\varphi_a, \pi_a, \lambda_m) = \int dx^3 \lambda_m(t, \vec{x}) \phi_m(\varphi_a(t, \vec{x}), \pi_a(t, \vec{x})) \quad m = 1\dots M \quad (2.4.1)$$

où les champs  $\lambda_s(t, \vec{x})$  sont des multiplicateurs. Le Hamiltonien total (2.1.1) sera alors

$$H_T = H(\varphi_a, \pi_a) + \Phi(\varphi_a, \pi_a, \lambda_m) \quad (2.4.2)$$

$$= H(\varphi_a, \pi_a) + \int dx^3 \lambda_m(t, \vec{x}) \phi_m(\varphi_a(t, \vec{x}), \pi_a(t, \vec{x})) \quad m = 1 \dots M. \quad (2.4.3)$$

La variation de l'action dans ce cas est

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int L dt = \delta \int dt \left( \int \pi_a \dot{\varphi}_a dx^3 - H_T \right) \\ &= \delta \int dt \left( \int \pi_a \dot{\varphi}_a dx^3 - H - \Phi \right) \\ &= \int dt \int dx^3 \left[ \delta \pi_a \dot{\varphi}_a + \pi_a \delta \dot{\varphi}_a - \frac{\delta H}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a - \frac{\delta H}{\delta \pi_a} \delta \pi_a - \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi_a} \delta \varphi_a - \frac{\delta \Phi}{\delta \pi_a} \delta \pi_a - \frac{\delta \Phi}{\delta \lambda_m} \delta \lambda_m \right]. \end{aligned}$$

Sachant que  $\pi_a \delta \dot{\varphi}_a = \frac{\partial(\pi_a \delta \varphi_a)}{\partial t} - \dot{\pi}_a \delta \varphi_a$ , on obtient finalement

$$\delta S = \int dt \int dx^3 \left[ \frac{\partial(\pi_a \delta \varphi_a)}{\partial t} - \left( \dot{\pi}_a + \frac{\delta H}{\delta \varphi_a} + \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi_a} \right) \delta \varphi_a + \left( \dot{\varphi}_a - \frac{\delta H}{\delta \pi_a} - \frac{\delta \Phi}{\delta \pi_a} \right) \delta \pi_a - \frac{\delta \Phi}{\delta \lambda_m} \delta \lambda_m \right].$$

Le premier terme va s'annuler grâce aux conditions aux limites  $\delta \varphi_a(t_i) = \delta \varphi_a(t_f) = 0$ . D'après le principe de variation  $\delta S = 0$ , qui consiste à annuler l'intégrale précédente, il faut que les équations suivantes soient vérifiées

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\delta H}{\delta \pi_a} + \frac{\delta \Phi}{\delta \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_a} - \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi_a}, \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \lambda_m} = 0. \quad (2.4.4)$$

Les dernières équations ne sont rien d'autre que les contraintes primaires car  $\frac{\delta \Phi}{\delta \lambda_m} = \phi_m(\varphi_a(t, \vec{x}), \pi_a(t, \vec{x})) = 0$ .

Essayons maintenant de trouver les conditions de consistance applicables en théories des champs à partir de l'évolution temporelle de la grandeur  $F(t)$  qui dépend des champs  $\varphi_a$ , et des moments conjugués  $\varphi_a$ , donnée par  $F(t) = \int dx^3 f(\varphi_a, \vec{\nabla} \varphi_a; \pi_a, \vec{\nabla} \pi_a)$ . En effet, d'après (1.7.13)

$$\dot{F}(t) = \int dx^3 \left[ \frac{\delta F}{\delta \varphi_a} \dot{\varphi}_a + \frac{\delta F}{\delta \pi_a} \dot{\pi}_a \right].$$

En injectant les équations du mouvement (2.4.4) dans l'équation précédente, on obtient

$$\dot{F} = \int dx^3 \left[ \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_a} \frac{\delta H_c}{\delta \pi_a} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a} \frac{\delta H_c}{\delta \varphi_a} \right) + \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_a} \frac{\delta \Phi}{\delta \pi_a} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a} \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi_a} \right) \right]$$

En terme des crochets de Poisson,

$$\dot{F} = \{F, H\} + \{F, \Phi\} \approx \{F, H\} + \int dx^3 \lambda_m(t, \vec{x}) \{F, \phi_m\}. \quad (2.4.5)$$

Cette équation est l'analogie de l'équation (2.1.6). Donc dans le cas d'une contrainte quelconque  $\phi_j = \phi_j(\varphi_a(t, \vec{x}), \pi_a(t, \vec{x})) = \phi_j(t, \vec{x})$ , la conservation dans le temps  $\dot{\phi}_j = 0$ , va induire directement les conditions de consistance

$$\{\phi_j(t, \vec{x}), H\} + \int dy^3 \lambda_m(t, \vec{y}) \{\phi_j(t, \vec{x}), \phi_m(t, \vec{y})\} \approx 0 \quad \forall \vec{x}.$$

Ces conditions vont nous permettre de déduire toutes les contraintes du système en suivant l'algorithme de Dirac-Bergmann explicité dans la première partie de ce chapitre. Ensuite, à l'aide des crochets de Poisson, ces dernières vont être classées en première et en deuxième classe. Des conditions supplémentaires sont nécessaires en cas de présence de contraintes de première classe, car cela va lever l'indétermination de certains paramètres. Au final, nous allons avoir un ensemble de contraintes toutes de deuxième classe qu'on va noter  $\sigma_k(\varphi_a(t, \vec{x}), \pi_a(t, \vec{x})) = \sigma_k(t, \vec{x})$ . Les crochets de Poisson de ces contraintes définissent la matrice de Dirac

$$\{\sigma_k(\vec{x}), \sigma_{k'}(\vec{y})\} = G_{kk'}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (2.4.6)$$

L'inversion de cette matrice des contraintes se calcule à l'aide de la relation

$$\int d y^3 G_{kk'}(\vec{x}, \vec{y}) G^{k'k''}(\vec{y}, \vec{z}) = \delta_k^{k''} \delta(\vec{y} - \vec{z}), \quad (2.4.7)$$

où  $G^{k'k''}(\vec{y}, \vec{z}) = G_{k'k''}(\vec{y}, \vec{z})^{-1}$ . A l'aide de cette matrice, il est possible de définir le crochet de Dirac en théorie des champs par la relation

$$\{F(\vec{x}), G(\vec{y})\}_D = \{F(\vec{x}), G(\vec{y})\} - \int \int du^3 dv^3 \{F(\vec{x}), \sigma_k(\vec{u})\} G^{kk'}(\vec{u}, \vec{v}) \{\sigma_{k'}(\vec{v}), G(\vec{y})\} \quad (2.4.8)$$

où  $F(\vec{x}), G(\vec{y})$  sont des fonctions des champs  $\varphi_a(t, \vec{x})$  et des moments conjugués  $\pi_a(t, \vec{x})$ . Ces crochets de Dirac des champs satisfont toutes les propriétés d'antisymétrie, de bilinéarité, de règle de Leibnitz ainsi que de l'identité de Jacobi.

## 2.5 Application au champ de Maxwell

Le champ de Maxwell n'est pas du tout trivial du fait qu'il présente des contraintes directement liées à sa symétrie de jauge. L'expression du lagrangien de champ électromagnétique libre est donnée par

$$L = \int dx^3 \mathcal{L}, \quad (2.5.1)$$

où la densité lagrangienne qui décrit ce champ est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (2.5.2)$$

avec  $\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  est la densité Lagrangienne du champ de Maxwell libre et  $\mathcal{L}_{int} = -J^\mu A_\mu$  la densité Lagrangienne de l'interaction avec la matière, où  $J^\mu$  est le 4-vecteur courant. Le tenseur électromagnétique est défini par  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ( $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ ). Les équations d'Euler-Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\lambda)} = 0$  se solde par les équations de mouvement

$$\partial_\beta F^{\beta\lambda} = J^\lambda. \quad (2.5.3)$$

Les moments conjugués  $\pi^\lambda$  des variables canoniques  $A_\lambda$  sont définis par

$$\pi^\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} = -F^{0\lambda} \quad \Rightarrow \quad \pi^0 = 0 \quad \text{et} \quad \pi^i = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (2.5.4)$$

On obtient ainsi une contrainte primaire qui prend la forme  $\Omega_1 = \pi^0 = 0$  (parce que  $\pi^0$  est indépendant des vitesses, contrairement à  $\pi^i$  qui dépend des  $\dot{A}^i$ ). Comme  $\pi^i = -F^{0i}$ , la densité lagrangienne peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}\pi^i\pi_i - J^\mu A_\mu. \quad (2.5.5)$$

Le hamiltonien du système qui s'exprime comme  $H = \int dx^3 (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L})$  se calcule grâce aux relations (2.5.4) et (2.5.5) pour obtenir

$$H = \int dx^3 \left( \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}\pi^i\pi_i + \pi^i \partial_i A_0 + J^\mu A_\mu \right). \quad (2.5.6)$$

Le hamiltonien total  $H_T$  sera alors

$$H_T = \int dx^3 (\mathcal{H} + \lambda_1 \pi^0) = \int dx^3 \left( \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}\pi^i\pi_i + (J^0 - \partial_i \pi^i)A_0 + J^i A_i + \lambda_1 \pi^0 \right) \quad (2.5.7)$$

où nous avons utilisé la relation  $\pi^i \partial_i A_0 = \partial_i (\pi^i A_0) - \partial_i \pi^i A_0$ , ensuite ommis le terme de la divergence  $\partial_i (\pi^i A_0)$  qui est sans contribution. Ainsi, la densité hamiltonienne totale est

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}\pi^i\pi_i + (J^0 - \partial_i \pi^i)A_0 + J^i A_i + \lambda_1 \pi^0. \quad (2.5.8)$$

Selon Dirac, les contraintes primaires doivent être conservées dans le temps ce qui peut générer des contraintes secondaires. La condition de consistance appliquée à  $\Omega_1 = \pi^0$

donne

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^0(\mathbf{x}) \approx 0 &\Rightarrow \{\pi^0(\mathbf{x}), H_T\} \approx 0 \\
&\Rightarrow \int dz^3 \left( \frac{\delta\pi^0(\mathbf{x})}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\pi^0(\mathbf{x})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \right) \approx 0 \\
&\Rightarrow - \int dz^3 \left( \delta_\mu^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \frac{\delta H_T}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \right) \approx 0 \\
&\Rightarrow -\delta_\mu^0 \frac{\delta H_T}{\delta A_\mu(\mathbf{x})} \approx 0
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

D'un autre côté, la dérivée fonctionnelle de Hamiltonien par rapport aux champs  $A_\mu$  donne

$$\frac{\delta H_T}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial A_\mu} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial(\partial_k A_\mu)} = J^\mu - \delta_j^\mu \partial_k F^{kj} - \delta_0^\mu \partial_k \pi^k. \tag{2.5.10}$$

En remplaçant (2.5.10) dans (2.5.9), on obtient la contrainte secondaire

$$(J^0 - \partial_k \pi^k) \approx 0.$$

La condition de consistance relative à la contrainte secondaire  $\Omega_2 = \partial_k \pi^k - J^0 \approx 0$  nous donne

$$\begin{aligned}
\{(\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{x}), H_T\} &= \int dz^3 \left( \frac{\delta(\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{x})}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta(\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{x})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= - \int dz^3 \frac{\delta(\partial_k \pi^k)(\mathbf{x})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta A_\mu(\mathbf{z})}.
\end{aligned}$$

mais  $\frac{\delta(\partial_k \pi^k)(\mathbf{x})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} = -\delta_\mu^k \partial_k^z \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})$ , d'où

$$\begin{aligned}
\{(\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{x}), H_T\} &= \int dz^3 \delta_\mu^k \partial_k^z \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) (J^\mu - \delta_j^\mu \partial_i F^{ij} - \delta_0^\mu \partial_i \pi^i)(\mathbf{z}) \\
&= - \int dz^3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \partial_k^z (J^k - \delta_j^k \partial_i F^{ij})(\mathbf{z}) = 0.
\end{aligned}$$

Les conditions de consistance des contraintes ne peuvent donner aucune nouvelle contrainte parce qu'on a obtenu l'identité  $0 \approx 0$ . Le calcul du crochet de Poisson de ces contraintes montre bien qu'elles sont de première classe

$$\{\pi^0(\mathbf{x}), (\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{y})\} = \int dz^3 \left( \frac{\delta\pi^0(\mathbf{x})}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta(\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{y})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\pi^0(\mathbf{x})}{\delta\pi^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta(\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{y})}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \right) = 0$$

Pour bien définir le crochet de Dirac, des conditions supplémentaires doivent être introduites pour fixer la jauge, et pour que les deux contraintes de première classe deviennent de seconde classe. D'habitude, la jauge de Coulomb est prise comme condition de jauge  $\Omega_3 = A^0$ ,  $\Omega_4 = \partial_k A^k$  à condition que les champs soient libres ( $J^0 = 0$ ). L'étape suivante consiste à calculer les éléments de la matrice de Dirac pour l'ensemble des contraintes

$\Omega_1 = \pi^0$ ,  $\Omega_2 = \partial_k \pi^k$ ,  $\Omega_3 = A^0$  et  $\Omega_4 = \partial_k A^k$ . En particulier,

$$\{\Omega_1, \Omega_3\} = \{\pi^0(\mathbf{x}), A^0(\mathbf{y})\} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

et

$$\begin{aligned} \{\Omega_2, \Omega_4\} &= \{(\partial_k \pi^k - J^0)(\mathbf{x}), \partial_i A^i(\mathbf{y})\} \\ &= \int dz^3 \left( \frac{\delta(\partial_k \pi^k)(\mathbf{x})}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta \partial_k A^k(\mathbf{y})}{\delta \pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta(\partial_k \pi^k)(\mathbf{x})}{\delta \pi^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta \partial_i A^i(\mathbf{y})}{\delta A_\mu(\mathbf{z})} \right) \\ &= \int dz^3 (\delta_\mu^k \delta_i^\mu \partial_k (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \partial_i (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}))) \\ &= -\partial_i \partial^i (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \end{aligned}$$

Les autres crochets sont nuls. Ainsi, la matrice des contraintes est

$$G_{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\{\Omega_I(\mathbf{x}), \Omega_J(\mathbf{y})\}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_i \partial^i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_i \partial^i & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.5.11)$$

Il est possible d'avoir la matrice inverse (voir l'annexe) pour aboutir à la matrice

$$G^{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.12)$$

A ce stade, le crochet de Dirac peut être défini par l'expression

$$\{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\}_D = \{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\} - \int \int du^3 dv^3 \{F(\mathbf{x}), \Omega_I(\mathbf{u})\} G^{IJ}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_J(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\}. \quad (2.5.13)$$

Explicitement,

$$\begin{aligned}
\{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\}_D &= \{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^3 dv^3 \{F(\mathbf{x}), \pi^0(\mathbf{u})\} \delta^3(u-v) \{A^0(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^3 dv^3 \{F(\mathbf{x}), \partial_k \pi^k(\mathbf{u})\} \frac{1}{4\pi |\mathbf{u}-\mathbf{v}|} \{\partial_i A^i(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&+ \int \int du^3 dv^3 \{F(\mathbf{x}), A^0(\mathbf{u})\} \delta^3(u-v) \{\pi^0(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&+ \int \int du^3 dv^3 \{F(\mathbf{x}), \partial_i A^i(\mathbf{u})\} \frac{1}{4\pi |\mathbf{u}-\mathbf{v}|} \{\partial_k \pi^k(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\}.
\end{aligned}$$

Pour commencer, évaluons le crochet de Dirac  $\{A_\mu(\mathbf{x}), A_\gamma(\mathbf{y})\}_D$

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(\mathbf{x}), A_\gamma(\mathbf{y})\}_D &= \{A_\mu(\mathbf{x}), A_\gamma(\mathbf{y})\} \\
&- \int du^3 \{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^0(\mathbf{u})\} \{A^0(\mathbf{u}), A_\gamma(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^3 dv^3 \{A_\mu(\mathbf{x}), -\partial_k \pi^k(\mathbf{u})\} \frac{1}{4\pi |\mathbf{u}-\mathbf{v}|} \{\partial_i A^i(\mathbf{v}), A_\gamma(\mathbf{y})\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\{\pi^\mu(\mathbf{x}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\}_D &= \{\pi^\mu(\mathbf{x}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\} \\
&+ \int du^3 \{\pi^\mu(\mathbf{x}), A^0(\mathbf{u})\} \{\pi^0(\mathbf{u}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\} \\
&+ \int \int du^3 dv^3 \{\pi^\mu(\mathbf{x}), \partial_i A^i(\mathbf{u})\} \delta^3(u-v) \{-\partial_k \pi^k(\mathbf{v}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Et pour terminer,

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\}_D &= \{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\} \\
&- \int du^3 \{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^0(\mathbf{u})\} \{A^0(\mathbf{u}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^3 dv^3 \{A_\mu(\mathbf{x}), -\partial_k \pi^k(\mathbf{u})\} \frac{1}{4\pi |\mathbf{u}-\mathbf{v}|} \{\partial_i A^i(\mathbf{v}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\}.
\end{aligned}$$

Le résultat final est

$$\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\gamma(\mathbf{y})\}_D = (\delta_\mu^\gamma - \delta^{0\gamma} \delta_\mu^0) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \delta_\mu^k \delta^{i\gamma} \partial_k \partial_i \left( \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right).$$

Ces crochets sont bien connus en théorie des champs [10, 30]. Cet exemple nous montre bien comment obtenir le crochet de Dirac d'un système physique en présence des contraintes primaires et secondaires et combien cela coûte en terme d'étapes et de calculs.

## 2.6 Quantification de Dirac du Modèle self-dual (SD)

Le modèle self-dual (SD) [29, 34, 35, 36], de Townside, Pilch et Van Nieuwenhuizen décrit trois champs scalaires  $B^\mu$  en deux dimensions spatiales et une dimension temporelle. La densité lagrangienne décrivant cette interaction est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - \frac{m}{2} \varepsilon_{\mu\gamma\rho} B^\mu \partial^\gamma B^\rho \quad (2.6.1)$$

où  $\mu, \gamma, \rho \in \{0, 1, 2\}$ . Le tenseur de Levi-Civita  $\varepsilon_{\mu\gamma\rho}$  est choisi avec la convention  $\varepsilon_{012} = \varepsilon_{201} = \varepsilon_{120} = 1$  et  $\varepsilon_{021} = \varepsilon_{102} = \varepsilon_{210} = -1$ . Les moments conjugués des champs définis par la relation  $\pi_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B^\beta)}$  sont

$$\pi_\beta = -\frac{m}{2} \delta_0^\gamma \delta_\beta^\rho \varepsilon_{\mu\gamma\rho} B^\mu \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 0 \quad \text{et} \quad \pi_i = -\frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} B^j \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (2.6.2)$$

On obtient ainsi trois contraintes primaires

$$\Omega_0 = \pi_0 \quad ; \quad \Omega_i = \pi_i + \frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} B^j \quad i, j = 1, 2. \quad (2.6.3)$$

Explicitement, la densité lagrangienne s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - \frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} B^0 \partial^i B^j - \frac{m}{2} \varepsilon_{i0j} B^i \partial^0 B^j - \frac{m}{2} \varepsilon_{ij0} B^i \partial^j B^0.$$

A l'aide de la relation  $\frac{m}{2} \varepsilon_{ij0} B^i \partial^j B^0 = \frac{m}{2} \varepsilon_{ij0} \partial^j (B^i B^0) - \frac{m}{2} \varepsilon_{ij0} (\partial^j B^i) B^0$ , on peut réécrire la densité lagrangienne comme

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - m \varepsilon_{0ij} B^0 \partial^i B^j - \frac{m}{2} \varepsilon_{i0j} B^i \partial^0 B^j, \quad (2.6.4)$$

où nous avons ommis le terme de la divergence  $-\frac{m}{2} \varepsilon_{ij0} \partial^j (B^i B^0)$ . Le hamiltonien du système se présente sous la forme

$$H = \int dx^2 \mathcal{H} = \int dx^2 \left( \pi^\mu \dot{B}_\mu - \mathcal{L} \right) \quad (2.6.5)$$

et en prenant en compte les relations (2.6.3), on obtient le hamiltonien canonique

$$H = \int dx^2 \left( -\frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu + m \varepsilon_{0ij} B^0 \partial^i B^j \right). \quad (2.6.6)$$

Le hamiltonien total sera alors

$$H_t = \int dx^2 \left( -\frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu + m \varepsilon_{0ij} B^0 \partial^i B^j + \lambda^0 \pi_0 + \lambda^i \left( \pi_i + \frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} B^j \right) \right). \quad (2.6.7)$$

Utilisons maintenant les conditions de consistance suivantes pour extraire des contraintes secondaires :

$$\dot{\Omega}_0 = \{\Omega_0, H_T\} \approx 0 \quad , \quad \dot{\Omega}_i = \{\Omega_i, H_T\} \approx 0.$$

D'abord, la condition de consistance de la contrainte primaire  $\Omega_0$  nous donne

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_0 = \{\Omega_0, H_T\} &= \int dz^2 \left( \frac{\delta \pi^0(\mathbf{x})}{\delta B_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta \pi^\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta \pi^0(\mathbf{x})}{\delta \pi^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta B_\mu(\mathbf{z})} \right) \\ &= - \int dz^2 \left( \delta_0^\mu \delta^3(x-z) \frac{\delta H_T}{\delta B_\mu(\mathbf{z})} \right) = -\delta_0^\mu \frac{\delta H_T(\mathbf{y})}{\delta B_\mu(\mathbf{z})} \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_T}{\delta B^\mu} &= \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial B^\mu} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial (\partial_k B^\mu)} \\ &= -m^2 B_\mu + m \delta_\mu^0 \varepsilon_{0ij} \partial^i B^j + \lambda^i \frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} \delta_\mu^j - m \delta^{ni} \delta_\mu^j \partial_n (\varepsilon_{0ij} B^j). \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Si on injecte (2.6.9) dans (2.6.8), on aboutit à une contrainte secondaire

$$\dot{\Omega}_0 = \Omega_3 = m^2 B_0 - m \varepsilon_{0ij} \partial^i B^j \approx 0. \quad (2.6.10)$$

Cette dernière doit vérifier la condition de consistance

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_3 = \{\Omega_3, H_T\} &= \int dz^2 \left( \frac{\delta \Omega_3(\mathbf{x})}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta \Omega_3(\mathbf{x})}{\delta \pi_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\ &= \int dz^2 \left( \frac{\delta \Omega_3(\mathbf{x})}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{z})} \right) = \int dz^2 \left( \frac{\delta (m B_0 - \varepsilon_{0ij} \partial^i B^j)(\mathbf{x})}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{z})} \right) \\ &= m \delta_\mu^0 \left( \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{x})} \right) + \delta_\mu^j \varepsilon_{0ij} \partial^i \left( \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{x})} \right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{x})} &= \frac{\partial \mathcal{H}_T(\mathbf{x})}{\partial \pi_\mu(\mathbf{x})} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}_T(\mathbf{x})}{\partial (\partial_k \pi_\mu(\mathbf{x}))} \\ &= \lambda^0 \delta_0^\mu + \lambda^i \delta_i^\mu. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la condition de consistance pour  $\Omega_3$  permet de déterminer une condition entre les multiplicateurs de Lagrange

$$\dot{\Omega}_3 = m\lambda^0 + \varepsilon_{0ij}\partial^i\lambda^j \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^0 \approx -\frac{1}{m}\varepsilon_{0ij}\partial^i\lambda^j. \quad (2.6.11)$$

Pour les autres contraintes  $\Omega_k$  où  $k \in \{1, 2\}$ , les conditions de consistance

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_k &= \{\Omega_k, H_T\} \approx 0 \\ &= \int dz^2 \left( \frac{\delta\Omega_k(\mathbf{x})}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\Omega_k(\mathbf{x})}{\delta \pi_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta H_T}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\ &= \left( \frac{m}{2}\varepsilon_{0kl}\delta_\mu^l \frac{\delta H_T}{\delta \pi_\mu(\mathbf{x})} - \delta_k^\mu \frac{\delta H_T}{\delta B^\mu(\mathbf{x})} \right). \end{aligned}$$

La procédure se termine ici car les conditions de consistance des contraintes ne peuvent plus donner de nouvelles contraintes, car elles conduisent aux équations des multiplicateurs lagrangiens  $\varepsilon_{0ki}\lambda^i \approx (-mB_k - \partial^i(\varepsilon_{0ik}B^0))$ . Ainsi, il existe quatre contraintes dans ce système, trois contraintes primaires  $\Omega_1 = \pi_0$ ,  $\Omega_i = \pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{0ij}B^j$  et une contrainte secondaire  $\Omega_4 = m^2B_0 - m\varepsilon_{0ij}\partial^iB^j$ . Leurs crochets de Poisson sont (voir l'annexe A)

$$\{\Omega_0, \Omega_i\} = 0, \quad \{\Omega_1, \Omega_3\} = -m^2 \delta^2(y - x)$$

et

$$\{\Omega_i, \Omega_j\} = m\varepsilon_{0ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\Omega_j, \Omega_3\} = m\varepsilon_{0ij}\partial^i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Donc toutes les contraintes sont de deuxième classe. Afin de simplifier les calculs, on peut écrire les contraintes sous une forme plus explicite

$$\Omega_1 = \pi_1 + \frac{m}{2}B^2 \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \pi_2 - \frac{m}{2}B^1,$$

et

$$\Omega_0 = \pi_0 \quad \text{et} \quad \Omega_3 = m^2B_0 - m\partial^1B^2 + m\partial^2B^1.$$

A partir des crochets de Poisson de ces contraintes (voir l'annexe), nous construisons la matrice de Dirac

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m \\ 0 & 0 & -1 & \partial_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\partial_1 \\ m & \partial^2 & -\partial^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.6.12)$$

La matrice inverse prend la forme (voir l'annexe A)

$$G^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} 0 & \partial^1 & \partial^2 & -1 \\ \partial_1 & 0 & -m & 0 \\ \partial_2 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.6.13)$$

ce qui permet de déduire les crochets de Dirac

$$\{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\}_D = \{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\} - \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_I(\mathbf{u})\} (G^{-1})^{IJ}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_J(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\}. \quad (2.6.14)$$

Pour commencer, nous avons (voir l'annexe A)

$$\{B_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\}_D = \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.6.15)$$

Les crochets  $\{B^k(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})\}_D$  s'obtiennent grâce aux relations  $\pi_i \approx \frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} B^j$  ou  $\pi^1 \approx \frac{B^2}{2m}$  et  $\pi^2 \approx -\frac{B^1}{2m}$

$$\begin{aligned} \{B^k(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})\}_D &= \left\{ B^k(\mathbf{x}), \frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} B^j(\mathbf{y}) \right\}_D \\ &= \frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} \frac{\varepsilon^{okj}}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Sachant que le tenseur Levi-Civita vérifie la relation  $\varepsilon_{0ij} \varepsilon^{okj} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jk})$  si  $i \neq j$  et  $j \neq k$ , on déduit que

$$\{B^k(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})\}_D = \frac{1}{2} \delta_i^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Il est possible de déterminer, les crochets de Dirac entre  $B^k(\mathbf{x})$  et  $B_0(\mathbf{y})$  à partir aux relations de la contrainte (2.6.10) qui implique que  $B_0 \approx \frac{1}{m} (\partial^1 B^2 - \partial^2 B^1)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \{B^k(\mathbf{x}), B_0(\mathbf{y})\}_D &= \left\{ B^k(\mathbf{x}), \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \partial^i B^j(\mathbf{y}) \right\}_D \\ &= \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \partial^i \left( \frac{\varepsilon^{okj}}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\{B^k(\mathbf{x}), B_0(\mathbf{y})\}_D = \frac{1}{2m^2} \partial^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.6.16)$$

En suivant la même manière, on déduit le crochet

$$\{B^0(\mathbf{x}), B_0(\mathbf{y})\}_D = \frac{1}{2m^2} \partial_k \partial^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.6.17)$$

Une autre fois, le crochet de Dirac a bien remplacé le crochet de Poisson pour décrire le modèle Self-Dual avec succès. Le seul souci avec cette approche réside dans le fait qu'elle nécessite beaucoup de concepts et développements en terme du calcul.

---

# Approche de Faddeev-Jackiw

L'approche de Faddeev Jackiw (FJ) [3] est une méthode permettant de traiter les contraintes des systèmes physiques singuliers, tout comme le formalisme de Dirac.

Cette approche est différente de la méthode de Dirac qui nécessite la classification des contraintes, afin de déduire les crochets de Dirac, ce qui se fait sur plusieurs étapes qui ne sont pas faciles à réaliser. La méthode de FJ part à partir d'un lagrangien du premier ordre par rapport aux vitesses, pour obtenir des équations de mouvement du premier ordre. Cela permet de déduire la matrice symplectique qui va donner directement les crochets de Dirac si elle est inversible, sinon elle va donner naissance à des contraintes qu'il faut ajouter au lagrangien pour refaire la procédure. Contrairement à la méthode de Dirac, la méthode de FJ ne fait pas de distinction entre les contraintes de première ou de deuxième classe.

Dans ce chapitre, nous allons donner un aperçu sur la méthode de F-J. Nous commençons par l'étude des systèmes de degré de liberté fini, ensuite, nous nous concentrons sur la théorie des champs, dans l'objectif de quantifier le champ de Maxwell et le modèle self-dual (SD).

## 3.1 Méthode de Faddeev et Jackiw

Considérons un système décrit par un lagrangien singulier  $L = L(q_i, \dot{q}_i)$  avec  $i = 1, \dots, N$ . Les moments canoniques  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_j, \dot{q}_j)$  peuvent présenter des contraintes primaires  $\phi_m = 0$ , mais il est toujours possible de construire le hamiltonien canonique par la relation

$$H = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) \quad (3.1.1)$$

à condition de prendre juste les variables indépendantes, ce qui est possible en utilisant les contraintes primaires pour exprimer quelques variables en fonction des autres. Une fois que c'est fait, le lagrangien linéaire s'obtient par la relation

$$L = p_i \dot{q}_i - H \quad (3.1.2)$$

à condition de ne retenir que les variables indépendantes. Maintenant, les coordonnées et les moments restant dans le lagrangien seront considérés comme étant des indépendants.

Faddeev et Jackiw ont proposé une approche alternative, qui ne s'applique qu'aux lagrangiens linéaires par rapport aux vitesses dépendent des variables dynamiques  $\xi_I = (q_k, p_a)$

$$L^{(0)} = A_I(\xi) \dot{\xi}_I - H \quad (3.1.3)$$

avec

$$A_I(\xi) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_I} \quad (3.1.4)$$

Les équations d'Euler Lagrange relatives aux variables dynamiques ( $\xi_I$ ) sont

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_I} \right) = \frac{\partial L}{\partial \xi_I}. \quad (3.1.5)$$

Ceci conduit aux équations du premier ordre

$$f_{IJ} \dot{\xi}_J = \frac{\partial H}{\partial \xi_I}, \quad (3.1.6)$$

où les  $f_{IJ} = \frac{\partial A_J(\xi)}{\partial \xi_I} - \frac{\partial A_I(\xi)}{\partial \xi_J}$  sont les éléments de la matrice de Faddeev-Jackiw qui antisymétrique  $f_{IJ} = -f_{JI}$ . Si la matrice symplectique  $f$  est régulière ( $\det(f_{IJ}) \neq 0$ ), l'équation d'Euler-Lagrange (3.1.6) devient

$$\dot{\xi}_I = f_{IJ}^{-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_J}, \quad (3.1.7)$$

où  $f_{IJ}^{-1}$  c'est l'inverse de la matrice  $f_{IJ}$ . D'autre part, les équations de Hamilton pour les variables dynamiques ( $\xi_I$ ) vont s'écrire grâce aux crochets de Dirac sous la forme

$$\dot{\xi}_I = \{\xi_I, H\} \quad \Rightarrow \quad \dot{\xi}_I = \{\xi_I, \xi_J\} \frac{\partial H}{\partial \xi_J}. \quad (3.1.8)$$

En comparant les équations (3.1.7) et (3.1.8), on obtient directement les crochets de Dirac

$$\{\xi_I, \xi_J\} = f_{IJ}^{-1}. \quad (3.1.9)$$

Si la matrice symplectique  $f$  est singulière ( $f$  est non inversible  $\det(f_{IJ}) = 0$ ), des contraintes sont obtenues à partir des modes zéro  $\nu^\alpha$  de la matrice symplectique. Selon le

formalisme de Faddeev-Jackiw, ces modes zéro doivent satisfaire la condition suivante

$$\nu_I^\alpha f_{IJ} = 0. \quad (3.1.10)$$

Les modes zéro donneront naissance aux contraintes qui peuvent être exprimées comme

$$\phi_\alpha(\xi) = \nu_I^\alpha \frac{\partial H}{\partial \xi_I} = 0. \quad (3.1.11)$$

Les quantités  $\phi_\alpha(\xi)$  sont les contraintes dans le formalisme symplectique FJ. La prochaine étape est d'introduire les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes  $\phi_\alpha(\xi)$ , pour le premier lagrangien linéaire suivant :

$$L^{(1)} = A_J^{(1)}(\xi) \dot{\xi}_J^{(1)} - H^{(1)} + \dot{\lambda}_\alpha \phi_\alpha(\xi) \quad (3.1.12)$$

où  $H^{(1)}(\xi^i) = H(\xi^i)|_{\phi_\alpha(\xi)=0}$ . Les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_\alpha$  seront traités comme des variables symplectiques indépendantes pour former l'ensemble des variables symplectiques  $\xi_I^{(1)} = (\xi_I, \lambda_\alpha)$ . les équations d'E-L dans ce cas seront

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial A_J(\xi)}{\partial \xi_I} - \frac{\partial A_I(\xi)}{\partial \xi_J} \right) \dot{\xi}_J + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_I} \dot{\lambda}_\alpha &= \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \xi_I} \\ - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_J} \dot{\xi}_J &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} f_{IJ} & \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_I} \\ -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \xi_J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_J \\ \dot{\lambda}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \xi_I} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.14)$$

On déduit directement la nouvelle matrice  $f_{IJ}^{(1)}$ , en terme du nouvel ensemble des variables dynamiques  $\xi_I^{(1)}$

$$f_{IJ}^{(1)} = \frac{\partial A_J^1(\xi)}{\partial \xi_I^{(1)}} - \frac{\partial A_I^1(\xi)}{\partial \xi_J^{(1)}} \quad (3.1.15)$$

Si la matrice  $f_{IJ}^{(1)}$  est régulière, alors nous pouvons avoir l'inverse, le travail se termine ici par l'obtention des crochets. Sinon, il faut répéter la procédure ci-dessus jusqu'à ce que les modes zéro correspondants ne nous donnent aucune nouvelle contrainte. Si la matrice finale est inversible, on aura les crochets de Dirac, mais si elle demeure singulière, il faut introduire à la main des conditions supplémentaires pour éviter la singularité, ce qui va fixer la jauge pour voir une matrice symplectique inversible.

Au moment où le formalisme de Dirac nécessite beaucoup de concepts, ce qui demande de faire des calculs considérables, l'approche de Faddeev-Jackiw est directe et

sans concepts spécifiques. La différence majeure entre les deux approches réside dans la nécessité ou non, de classer les contraintes en première et en deuxième classe.

En principe, pour passer à la théorie des champs, la méthode de Faddeev-Jackiw nécessite de remplacer les dérivées partielles par les dérivées des fonctionnelles. En effet, après la linéarisation, la densité lagrangienne va devenir du premier ordre de la forme

$$\mathcal{L}^{(0)} = a_I^{(0)}(\xi, \vec{\nabla}\xi) \dot{\xi}^{(0) I} - V^{(0)}(\xi, \vec{\nabla}\xi) \quad (3.1.16)$$

où les champs indépendants sont  $\xi^I(t, \vec{x}) = (\varphi^a(t, \vec{x}), \pi^a(t, \vec{x}))$  et leurs facteurs sont les  $a_I(\xi, \nabla\xi)$ , tandis que  $V^{(0)}(\xi, \vec{\nabla}\xi) = \mathcal{H}(\xi, \vec{\nabla}\xi)$  est la densité hamiltonienne. Ainsi, les composantes de la matrice symplectique de F-J  $f_{IJ}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y})$  vont être

$$f_{IJ}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta a_J^{(0)}(\vec{y})}{\delta \xi^{(0)I}(\vec{x})} - \frac{\delta a_I^{(0)}(\vec{x})}{\delta \xi^{(0)J}(\vec{y})}. \quad (3.1.17)$$

Quand la matrice  $f_{IJ}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y})$  est inversible, les crochets des différents champs s'obtiennent directement par inversion. Dans le cas contraire (la matrice est singulière), des contraintes peuvent être obtenues en calculant les modes zéro  $v_\alpha^{(0)}$  comme suit

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &\equiv \int dz^3 v_\alpha^{(0)I} \frac{\delta H^{(0)}}{\delta \xi^{(0)I}} = 0 \\ \Omega_\alpha &\equiv \int dz^3 v_\alpha^{(0)I} \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)I}} \left( \int dx^3 V^{(0)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Les quantités  $\Omega_\alpha$  sont les contraintes dans le formalisme symplectique de F-J qui vont être introduites dans la densité lagrangienne à l'aide des multiplicateurs de Lagrange

$$\mathcal{L}^{(1)}(\xi^i) = a_I^{(1)} \dot{\xi}^{(1) I} - V^{(1)} + \dot{\lambda}^\alpha \Omega_\alpha \quad (3.1.19)$$

où  $V^{(1)} = V^{(0)}(\xi, \vec{\nabla}\xi) \Big|_{\Omega_\alpha=0}$ . A présent, il faut refaire la procédure précédente jusqu'à ce que la matrice symplectique soit régulière. Dans ce cas, il faut l'inverser pour avoir les crochets. Dans le cas où elle reste singulière, il faut ajouter des conditions supplémentaires à la densité lagrangienne de telle sorte que la matrice symplectique soit inversible.

## 3.2 Quantification de Faddeev-Jackiw du Modèle de Christ-Lee

Le lagrangien de ce modèle [12] peut être écrit sous la forme

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \left( \dot{\theta} - z \right)^2 - V(r). \quad (3.2.1)$$

Les moments conjugués associés aux coordonnées généralisées  $(r, \theta, z)$  respectivement sont

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} - r^2 \dot{z} \quad , \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0.$$

Le hamiltonien  $H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - L$  donne

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_\theta z + V(r).$$

Pour appliquer le formalisme de F-J, on va prendre un lagrangien linéaire par rapport aux vitesses comme suit

$$L^{(0)} = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \left( \frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_\theta z + V(r) \right).$$

Soit  $V^{(0)}$  le hamiltonien zéro qui désigne le hamiltonien canonique

$$V^{(0)} = H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_\theta z + V(r).$$

Du lagrangien linéaire, on déduit que les variables symplectiques sont  $\xi^{(0)i} \equiv (r, p_r, \theta, p_\theta, z)$ , et ainsi que les facteurs  $A_i^{(0)} \equiv (A_r^{(0)} = p_r, A_{p_r}^{(0)} = 0, A_\theta^{(0)} = p_\theta, A_{p_\theta}^{(0)} = 0, A_z^{(0)} = 0)$ . Ainsi, la matrice symplectique sera

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} - \frac{\partial A_i^{(0)}}{\partial \xi^{(0)j}}.$$

Explicitement,

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

La matrice  $f_{ij}^{(0)}$  est singulière, donc il existe des contraintes dans le système, et pour les trouver, on calcule le mode zéro associé à cette matrice, qui est  $(\nu^{(0)})^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \nu^z)$ , où  $\nu^z$  est une quantité arbitraire. A l'aide de ce mode, on déduit la première contrainte

$$\Omega^{(0)} = v_z^{(0)} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)z}} = v_z^{(0)} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z} \implies v_z^{(0)} p_\theta = 0. \quad (3.2.3)$$

La contrainte est  $p_\theta = 0$ . Selon le formalisme de F-J, elle doit être ajoutée au lagrangien de premier ordre comme suit

$$L^{(1)}(\xi^i) = p_r \dot{r} + p_z \dot{z} + \dot{\lambda} p_\theta - V^{(1)} \quad (3.2.4)$$

où

$$V^{(1)} = V^{(0)} \Big|_{\Omega^0=0} \quad (3.2.5)$$

$$= \frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_\theta z + V(r) \Big|_{p_\theta=0} = \frac{p_r^2}{2} + V(r). \quad (3.2.6)$$

Autrement-dit,

$$L^{(1)}(\xi^i) = p_r \dot{r} + p_z \dot{z} + \dot{\lambda} p_\theta - \frac{p_r^2}{2} - V(r) \quad (3.2.7)$$

A présent, l'ensemble des variables symplectiques est  $\xi^{(1)i} \equiv (r, p_r, \theta, p_\theta, \lambda)$  et matrice symplectique  $f_{ij}^{(1)} = \frac{\partial A_j^{(1)}}{\partial \xi^{(1)i}} - \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \xi^{(1)j}}$  est

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est singulière et son seul mode zéro est  $(\nu^{(0)})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu^\theta & 0 & -\nu^\lambda \end{pmatrix}$ , ce qui permet de déduire la relation

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= v_\theta^{(1)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi^{(1)\theta}} - v_\lambda^{(1)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi^{(1)\lambda}} \\ &\implies \Omega^{(1)} = v_\theta^{(1)} \cdot 0 = 0 \implies 0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pas de nouvelles contraintes et la matrice  $f_{ij}^{(1)}$  est toujours singulière, nous allons donc ajouter la condition supplémentaire  $\theta = 0$  pour fixer la jauge, pour que le lagrangien devienne

$$L^{(2)} = p_r \dot{r} + p_z \dot{z} + \dot{\lambda} p_\theta + \dot{\rho} \theta - \frac{p_r^2}{2} - V(r) \quad (3.2.8)$$

Maintenant, les variables symplectiques sont  $\xi^{(2)i} \equiv (r, p_r, \theta, p_\theta, \lambda, \rho)$ , et la matrice symplectique  $f_{ij}^{(2)} = \frac{\partial A_j^{(2)}}{\partial \xi^{(2)i}} - \frac{\partial A_i^{(2)}}{\partial \xi^{(2)j}}$  sera au final

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

Cette fois-ci, cette matrice est régulière, et son inverse est donné par la matrice suivante :

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons tirer directement le crochet

$$\{r, p_r\} = 1,$$

tandis que les autres sont nuls où font intervenir les multiplicateurs de Lagrange [12].

### 3.3 Quantification de Faddeev-Jackiw du champ de Maxwell

La densité lagrangienne qui décrit le champ libre de Maxwell [24, 42] est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.3.1)$$

La densité hamiltonienne correspondante est

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\pi^i\pi_i - (\partial_i\pi^i)A_0 + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \quad (3.3.2)$$

Pour utiliser le formalisme de Faddeev-Jackiw, nous devons exprimer la densité lagrangienne ci-dessus sous une forme linéaire comme suit :

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^i\dot{A}_i - V^{(0)}. \quad (3.3.3)$$

Nous utilisons la notation  $V^{(0)} = \mathcal{H}$  pour présenter la densité hamiltonienne. De l'équation (3.3.2), on déduit

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^i\dot{A}_i - \left( -\frac{1}{2}\pi^i\pi_i - (\partial_i\pi^i)A_0 + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \right). \quad (3.3.4)$$

A partir de la densité lagrangienne linéaire, on déduit les variables symplectiques suivantes  $\xi^{(0)i} \equiv (A^i, \pi_i, A_0)$ , et leurs facteurs  $(a_{A^i}^{(0)} = \pi_i, a_{\pi_i}^{(0)} = 0, a_{A_0}^{(0)} = 0)$ . Cela nous

permet de calculer les éléments de la matrice symplectique

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\delta a_j^{(0)}}{\delta \xi^{(0)i}} - \frac{\delta a_i^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}}.$$

Explicitement,

$$f_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.3.5)$$

La matrice  $f_{ij}^{(0)}(x, y)$  est singulière, et elle a un mode zéro  $v^{(0)}$  donné par  $v^{(0)} = (0, 0, v_{A_0}^{(0)})$ , où  $v_k^{(0)}$  est une fonction arbitraire. En utilisant ce mode zéro, nous pouvons obtenir la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \int dz^3 v_k^{(0)} \frac{\delta H^0}{\delta \xi^{(0)k}} = \int dz^3 v_k^{(0)} \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)k}} \left( \int dx^3 V^{(0)} \right) \\ 0 &= \int dz^3 v_{A_0}^{(0)} \frac{\delta}{\delta A_0} \left( \int dx^3 V^{(0)} \right) = \int dz^3 v_{A_0}^{(0)} \left( \frac{\partial V^{(0)}}{\partial A_0} - \partial_k \frac{\partial V^{(0)}}{\partial (\partial_k A_0)} \right) \\ 0 &= - \int dz^3 v_{A_0}^{(0)} (\partial_k \pi^k) \end{aligned}$$

On reconnaît la contrainte  $\Omega^0 = \partial_i \pi_i$  bien connue lors de l'étude du champ électromagnétique. Pour cette contrainte, choisissons le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , pour obtenir la densité lagrangienne linéaire

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^i \dot{A}_i + \dot{\lambda} (\partial_i \pi_i) - V, \quad (3.3.6)$$

où la densité hamiltonienne correspondante  $V^{(1)}$

$$V^{(1)} = V^{(0)} \Big|_{\Omega^0=0} = -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}. \quad (3.3.7)$$

Par conséquent, les variables symplectiques vont être  $\xi^{(1)i} \equiv (A^i, \pi_i, \lambda)$ , et leurs facteurs seront  $\left( a_{A^i}^{(1)} = \pi_i, a_{\pi_i}^{(1)} = 0, a_{\lambda}^{(1)} = \partial_i \pi_i \right)$ . A présent, la matrice symplectique  $f_{ij}^{(1)} = \frac{\delta a_j^{(1)}}{\delta \xi^{(1)i}} - \frac{\delta a_i^{(1)}}{\delta \xi^{(1)j}}$  devient

$$f_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & \partial_j \\ 0 & -\partial_j & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.3.8)$$

Cette matrice est singulière et son mode zéro est  $v_k^{(1)} = (-\partial^i v_k^{(1)}, 0, v_k^{(1)})$ , où  $v_k^{(1)}$  est une fonction arbitraire, ce qui permet d'obtenir la relation suivante

$$\begin{aligned} 0 &= \int dz^3 v_k^{(1)} \frac{\delta}{\delta \xi^{(1)k}} \left( \int dx^2 V^{(1)} \right) = \int dz^3 \left( -\partial^i v_{A^i}^{(1)} \frac{\delta H^1}{\delta A^1} + v_\lambda^{(1)} \frac{\delta H^1}{\delta \lambda} \right) \\ 0 &= \int dz^3 \left( -\partial^k v_{A^k}^{(1)} \frac{\delta H^1}{\delta A^k} \right). \end{aligned}$$

Mais  $\frac{\delta H^{(1)}}{\delta A^i} = \partial^i (F_{li})$ , d'où l'on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \int dz^3 v_k^{(1)} \frac{\delta}{\delta \xi^{(1)k}} \left( \int dx^2 V^{(1)} \right) = \int dz^3 (-\partial^k \partial^i (F_{ki})) \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Cette condition se réduit donc à l'identité  $0 = 0$ , ce qui signifie qu'il n'y a aucune autre nouvelle contrainte et la matrice symplectique (3.3.2) est toujours singulière.

Pour remédier à cette singularité, il est possible de prendre une condition supplémentaire (jauge de Coulomb)  $\Omega^1 = \partial_i A_i = 0$ . Il faut donc insérer cette condition de jauge dans la densité lagrangienne à l'aide du multiplicateur de Lagrange  $\eta$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^i \dot{A}_i + \dot{\lambda} (\partial_i \pi_i) + \dot{\eta} (\partial_i A_i) - V^{(2)},$$

où,

$$V^{(2)} = V^{(1)} \Big|_{\Omega^1=0} = -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \Big|_{\Omega^1=0}.$$

Explicitement,

$$V^{(2)} = -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{2} (\partial_i A_j) (\partial^i A^j) \quad (3.3.9)$$

Maintenant, l'ensemble des variables symplectiques est  $\xi^{(2)i} \equiv (A^i, \pi_i, \lambda, \eta)$ , et leurs facteurs sont  $1 \left( a_{A^i}^{(2)} = \pi_i, a_{\pi_i}^{(2)} = 0, a_\lambda^{(2)} = \partial_i \pi_i, a_\eta^{(2)} = \partial_i A_i \right)$ . Ainsi, la matrice symplectique

$f_{ij}^{(2)} = \frac{\delta a_j^{(2)}}{\delta \xi^{(2)i}} - \frac{\delta a_i^{(2)}}{\delta \xi^{(2)j}}$  va prendre la forme

$$f_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & \partial_j \\ -\delta_{ij} & 0 & \partial_j & 0 \\ 0 & -\partial_j & 0 & 0 \\ -\partial_j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.3.10)$$

Ici, la matrice symplectique  $f_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est régulière, donc on peut trouver son inverse qui est donnée par

$$f_{ij}^{-{(2)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_i}{\nabla^2} \\ \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_i}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_i}{\nabla^2} & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} \\ \frac{\partial_i}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.3.11)$$

Les éléments de la matrice  $f_{ij}^{-{(2)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  donnent les crochets nécessaires à la quantification canonique

$$\left\{ \xi_i^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_j^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = f_{ij}^{-{(2)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.3.12)$$

En particulier, nous avons

$$\left\{ A^i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y}) \right\} = \left( -\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.3.13)$$

Les autres crochets sont égaux à zéro. Ce résultat est identique au résultat déjà obtenu dans le chapitre précédent grâce au formalisme de Dirac [10, 11].

### 3.4 Quantification Faddeev-Jackiw du Modèle self-dual (SD)

La densité lagrangienne décrivant ce modèle est [29, 34]

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - \frac{m}{2} \varepsilon_{\mu\gamma\rho} B^\mu \partial^\gamma B^\rho. \quad (3.4.1)$$

Cette densité lagrangienne est de forme linéaire car

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - m \varepsilon_{0ij} B^0 \partial^i B^j - \frac{m}{2} \varepsilon_{i0j} B^i \partial^0 B^j \\ &= \frac{m}{2} B^1 \dot{B}^2 - \frac{m}{2} B^2 \dot{B}^1 + \frac{m^2}{2} (B_0 B^0 + B_1 B^1 + B_2 B^2) - m B^0 \partial^1 B^2 + m B^0 \partial^2 B^1. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

En conséquence, la densité hamiltonienne est

$$V^{(0)} = \mathcal{H} = \frac{-m^2}{2} (B_0 B^0 + B_1 B^1 + B_2 B^2) + m B^0 \partial^1 B^2 - m B^0 \partial^2 B^1. \quad (3.4.3)$$

A partir de la densité Lagrangienne linéaire, on identifie l'ensemble des variables  $\xi^{(0)i} = (B_0, B^1, B^2)$ , et leurs facteurs ( $a_{B_0}^{(0)} = B_0$ ,  $a_{B^1}^{(0)} = -\frac{m}{2} B^2$ ,  $a_{B^2}^{(0)} = \frac{m}{2} B^1$ ). La ma-

trice symplectique  $f_{ij}^{(0)} = \frac{\delta a_j^{(0)}}{\delta \xi^{(0)i}} - \frac{\delta a_i^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}}$  va prendre la forme

$$f_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -m & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.4.4)$$

On observe que la matrice symplectique  $f_{ij}^{(0)}$  est singulière et son mode zéro est  $v_k^{(0)} = (v_k^{(0)}, 0, 0)$ , où  $v_k^{(0)}$  est une fonction arbitraire. En utilisant ce dernier, on peut obtenir une contrainte

$$\begin{aligned} 0 &= \int dz^2 v_k^{(0)} \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)k}} \left( \int dx^2 V^{(0)} \right) = \int dz^2 v_{B_0}^{(0)} \frac{\delta H}{\delta B_0} \\ 0 &= \int dz^2 v_{B_0}^{(0)} \left( \frac{\partial V^{(0)}}{\partial B_0} - \partial_k \frac{\partial V^{(0)}}{\partial (\partial_k B_0)} \right) = \int dz^2 v_{B_0}^{(0)} (-m^2 B^0 + m \varepsilon_{0ij} \partial^i B^j). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons la contrainte

$$\Omega^0 = -m^2 B^0 + m \varepsilon_{0ij} \partial^i B^j. \quad (3.4.5)$$

La densité hamiltonienne devient

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega^0=0} = \frac{-m^2}{2} B_i B^i + \frac{m^2}{2} B_0 B^0, \quad (3.4.6)$$

et la densité lagrangienne sera

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu - m \varepsilon_{0ij} B^0 \partial^i B^j - \frac{m}{2} \varepsilon_{i0j} B^i \partial^0 B^j - \dot{\lambda} (\Omega^0) - V^{(1)}.$$

Explicitement,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= +\frac{m}{2} B^1 \partial^0 B^2 - \frac{m}{2} B^2 \partial^0 B^1 + (-m^2 B^0 + m \partial^1 B^2 - m \partial^2 B^1) \dot{\lambda} \\ &+ m^2 (B_1 B^1 + B_2 B^2) - m B^0 \partial^1 B^2 + m B^0 \partial^2 B^1 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Ainsi, les variables symplectiques sont  $\xi^{(1)i} = (B_0, B^1, B^2, \lambda)$ , et leurs facteurs sont ( $a_{B_0}^{(1)} = 0$ ,  $a_{B^1}^{(1)} = -\frac{m}{2} B^2$ ,  $a_{B^2}^{(1)} = \frac{m}{2} B^1$ ,  $a_\lambda^{(1)} = -m^2 B^0 + m \varepsilon_{0ij} \partial^i B^j$ ). Maintenant, nous allons déduire la nouvelle matrice symplectique  $f_{ij}^{(1)} = \frac{\delta a_j^{(1)}}{\delta \xi^{(1)i}} - \frac{\delta a_i^{(1)}}{\delta \xi^{(1)j}}$ . Après calcul,

$$f_{ij}^{(1)} = m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & -\partial^2 \\ 0 & -1 & 0 & \partial^1 \\ m & \partial^2 & -\partial^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.4.8)$$

La matrice inverse existe et elle est donnée par

$$f_{ij}^{(1)-} = \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} 0 & \partial^1 & \partial^2 & 1 \\ -\partial^1 & 0 & -m & 0 \\ -\partial^2 & m & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.4.9)$$

Les crochets généralisés, correspondants aux crochets de Dirac sont

$$\{B_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\} = \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.4.10)$$

On déduit aussi

$$\{B^0(\mathbf{x}), B_k(\mathbf{y})\} = \frac{1}{m^2} \partial^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.4.11)$$

Au final, nous avons trouvé les mêmes crochets que l'approche de Dirac [34, 35, 36], ce qui illustre clairement l'équivalence de ces deux approches.

### 3.5 Quantification Faddeev-Jackiw de l'action de Stueckelberg

La densité lagrangienne du champ de stueckelberg [15, 25, 26, 27] s'obtient en ajoutant d'abord un terme de masse à la densité lagrangienne du champ de Maxwell pour obtenir le champ de Proca, puis un autre champ scalaire est additionné afin de restaurer la symétrie de jauge. La densité lagrangienne obtenue est

$$L = \int dx^3 \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{M^2}{2} (\partial_\mu \phi + \frac{1}{e} A_\mu) (\partial^\mu \phi + \frac{1}{e} A^\mu) \right) \quad (3.5.1)$$

où  $F^{\mu\nu}$  est le tenseur électromagnétique et  $\phi$  est un champ scalaire. Ainsi, les moments conjugués  $\pi^\mu$  des champs  $A_\mu$  sont  $\pi^\mu = -F^{0\mu}$ , d'où

$$\begin{cases} \pi_0 = 0 \\ \pi^i = -F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Le moment conjugué  $\pi_\phi$  du champ  $\phi$  est

$$\pi_\phi = \frac{M^2}{e} (A_0 + \frac{1}{e} \dot{\phi}). \quad (3.5.3)$$

On en déduit la densité Lagrangienne linéaire suivante :

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi_\phi \dot{\phi} - V^{(0)}, \quad (3.5.4)$$

où la densité hamiltonienne est donnée par

$$V^{(0)} = -A^0 (\partial_i \pi^i + e\pi_\phi) - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{e^2}{2M^2} \pi_\phi^2 + \frac{M^2}{2} (A_i + \frac{1}{e} \partial_i \phi)^2. \quad (3.5.5)$$

Ainsi, la densité lagrangienne linéaire sera

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^i \dot{A}_i + \pi_\phi \dot{\phi} - A^0 (\partial_i \pi^i + e\pi_\phi) - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{e^2}{2M^2} \pi_\phi^2 + \frac{M^2}{2} (A_i + \frac{1}{e} \partial_i \phi)^2. \quad (3.5.6)$$

L'ensemble des variables symplectiques sont  $\xi^{(0)i} \equiv (A^i, \pi_i, \phi, \pi_\phi, A_0)$  et les facteurs sont  $(a_{\dot{A}^i}^{(0)} = \pi^i, a_{\dot{\pi}_i}^{(0)} = 0, a_{\dot{\phi}}^{(0)} = \pi_\phi, a_{\dot{\pi}_\phi}^{(0)} = 0, a_{\dot{A}_0}^{(0)} = 0)$ . Les éléments de la matrice symplectique sont donnés par  $f_{ij}^{(0)} = \frac{\delta a_i^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} - \frac{\delta a_j^{(0)}}{\delta \xi^{(0)i}}$ , d'où

$$f_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.5.7)$$

Cette matrice est singulière et son mode zéro  $v_k^{(0)} = (0, 0, 0, 0, v_k^{(0)})$ , ( $v_{A_0}^{(0)}$  est une fonction arbitraire). Cela conduit à relation suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \int dz^2 v_{B_0}^{(0)} \frac{\delta H}{\delta A_0} = \int dz^2 v_k^{(0)} \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)k}} \left( \int dx^2 V^{(0)} \right) \\ 0 &= \int dz^2 v_{A_0}^{(0)} \left( \frac{\partial V^{(0)}}{\partial A_0} - \partial_k \frac{\partial V^{(0)}}{\partial (\partial_k A_0)} \right) = \int dz^2 v_{A_0}^{(0)} \left( A_i + \frac{1}{e} \partial_i \phi \right). \end{aligned}$$

D'après la dernière équation, on obtient la contrainte

$$\Omega^{(0)} = \left( A_i + \frac{1}{e} \partial_i \phi \right) = 0. \quad (3.5.8)$$

A présent, la densité lagrangienne devient

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^i \dot{A}_i + \pi_\phi \dot{\phi} + \dot{\lambda} \Omega^0 - V^{(1)} \quad (3.5.9)$$

où la densité hamiltonienne  $V^{(1)}(\xi^i)$  s'écrit sous la forme

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega^0=0} = -\frac{1}{2}\pi^i\pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{e^2}{2M^2}\pi_\phi^2 + \frac{M^2}{2}\left(A_i + \frac{1}{e}\partial_i\phi\right)^2 \quad (3.5.10)$$

L'ensemble des variables symplectiques devient  $\xi^{(1)i} \equiv (A^i, \pi_i, \phi, \pi_\phi, \lambda)$ . En utilisant ces variables symplectiques, on peut calculer la matrice symplectique

$$f_{ij}^{(1)} = \frac{\delta a_j^{(1)}}{\delta \xi^{(1)i}} - \frac{\delta a_i^{(1)}}{\delta \xi^{(1)j}}.$$

Sous forme matricielle,

$$f_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & \partial^j \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & -\partial^j & 0 & -e & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.5.11)$$

Cette matrice est encore singulière et elle a un mode zéro  $v_k^{(1)} = (\partial^i\alpha(\mathbf{x}), 0, -e\alpha(\mathbf{x}), 0, \alpha(\mathbf{x}))$  où  $\alpha(\mathbf{x})$  est une fonction quelconque. On en déduit la relation

$$\begin{aligned} 0 &= \int dx^3 v_k^{(1)} \frac{\delta}{\delta \xi^{(1)k}} \left( \int dx^3 V^{(1)} \right) \\ &= \int dx^3 \alpha(x) \left( \partial^j \frac{\delta}{\delta A^j} - e \frac{\delta}{\delta \pi_\phi} + \frac{\delta}{\delta \lambda} \right) V^{(1)} \\ 0 &= \int dx^3 \alpha(x) \left\{ \partial^j \left( \frac{\partial V^{(1)}}{\partial A^j} - \partial_k \frac{\partial V^{(1)}}{\partial (\partial_k A^i)} \right) \right. \\ &\quad \left. - e \alpha(x) \left( \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \pi_\phi} - \partial_k \frac{\partial V^{(1)}}{\partial (\partial_k \pi_\phi)} \right) \right\} \\ 0 &= \int dx^3 \alpha(x) \left\{ \partial^j \left( -M^2 \frac{\partial (A^i + \frac{1}{e}\partial^i\phi)}{\partial A^j} (A_i + \frac{1}{e}\partial_i\phi) - \frac{1}{2} \partial^k \left( \frac{\partial F_{nm}}{\partial (\partial^k A^j)} \right) F^{nm} \right) \right. \\ &\quad \left. + e M^2 \partial^k \left( \frac{\partial (A^i + \frac{1}{e}\partial^i\phi)}{\partial (\partial^k \phi)} (A_i + \frac{1}{e}\partial_i\phi) \right) \right\} \\ 0 &= \int dx^3 \alpha(x) M^2 \left( -\delta_j^i \partial^j (A_i + \frac{1}{e}\partial_i\phi) + e \left( \delta_k^i \partial^k (A_i + \frac{1}{e}\partial_i\phi) \right) \right) \\ 0 &= \int dx^3 M^2 \alpha(x) \left( -\partial^j (A_j + \frac{1}{e}\partial_j\phi) + \left( \partial^i (A_i + \frac{1}{e}\partial_i\phi) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Cette procédure ne donne aucune autre contrainte et notre matrice est toujours singulière, ce qui est le signe d'une symétrie de jauge. On doit donc choisir une condition supplémentaire comme  $\Omega^1 = \partial_i A_i + \frac{M^2}{e}\phi = 0$  et l'ajouter à la densité lagrangienne afin

d'avoir

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^i \dot{A}_i + \pi_\phi \dot{\phi} + \dot{\lambda} \Omega^0 + \dot{\eta} \Omega^1 - V^{(2)}, \quad (3.5.12)$$

où

$$V^{(2)} = V^{(1)}|_{\Omega^1=0} = -\frac{1}{2}\pi^i \pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{e^2}{2M^2}\pi_\phi^2 + \frac{M^2}{2}\left(A_i + \frac{1}{e}\partial_i\phi\right)^2. \quad (3.5.13)$$

Dans ce cas, les variables symplectiques  $\xi^{(2)i}$  deviennent  $\xi^{(2)i} \equiv (A^i, \pi_i, \phi, \pi_\phi, \lambda, \eta)$  et la matrice symplectique sera

$$f_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & \partial^j \\ -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & \partial^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{M^2}{e} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e & 0 \\ 0 & -\partial^j & 0 & -e & 0 & 0 \\ -\partial^i & 0 & \frac{-M^2}{e} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.5.14)$$

Cette fois-ci, la matrice inverse  $[f_{ij}^{(2)}]^{-1}$  prend la forme

$$[f_{ij}^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{ij} & 0 & -\frac{M^2}{e} \frac{\partial^i}{D} & 0 & \frac{\partial^i}{D} \\ -\Delta_{ij} & 0 & e \frac{\partial^i}{D} & 0 & -\frac{\partial^i}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 & \frac{e}{D} \\ -\frac{M^2}{e} \frac{\partial^i}{D} & 0 & -\Delta & 0 & e & 0 \\ 0 & -\partial^i & 0 & -e & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^i}{D} & 0 & -\frac{e}{D} & 0 & \frac{1}{D} & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.5.15)$$

avec,

$$\Delta_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{D}, \quad D \equiv \Delta - m^2. \quad (3.5.16)$$

Au final, on déduit directement que les crochets non nuls sont

$$\{A_i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{y}, t)\} = \left( \delta_i^j + \frac{\partial_i \partial^k}{\Delta - m^2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.5.17)$$

$$\begin{aligned}
\{\phi(\vec{x}, t), \pi^i(\vec{y}, t)\} &= -\frac{m \partial^i}{\Delta - m^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\{A_i(\vec{x}, t), \pi_\phi(\vec{y}, t)\} &= \frac{m \partial_i}{\Delta - m^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\{\phi(\vec{x}, t), \pi_\phi(\vec{y}, t)\} &= \left( \frac{\Delta}{\Delta - m^2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

Ces résultats, qu'on a obtenu en utilisant la méthode de Faddeev-Jackiw sont identiques à ceux de la méthode de Dirac [22, 23], ce qui illustre leur équivalence.

---

# La méthode des constantes d'intégration généralisée

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la quantification canonique repose sur l'utilisation des crochets de Poisson pour déterminer les commutateurs des différents opérateurs obtenus par le principe de correspondance. Cependant, cette démarche ne fonctionne que dans les cas réguliers, d'où la nécessité d'introduire les crochets de Dirac dans les cas singuliers caractérisés par la présence des contraintes. Deux principales approches permettent d'avoir les mêmes résultats : le formalisme de Dirac [1, 2] et la méthode de Faddeev-Jackiw [3].

La méthode des constantes d'intégration "CI" est une autre façon de déterminer les crochets de Dirac des systèmes singuliers exactement solubles de manière différente, simple et accessible sans exiger des outils mathématiques avancés [8, 9]. Avec cette approche, il faut avoir accès à la solution générale des équations de mouvement (équations d'Euler-Lagrange) avec toutes les constantes d'intégration indépendantes, qui seront ensuite exploitées afin de déterminer les crochets des variables fondamentales.

Dans les cas non intégrables, une approche des constantes d'intégration généralisée "GCI" est mise au point, en remplaçant les solutions générales par des développements limités à l'ordre un, au voisinage de l'instant initial [4, 5, 6, 7]. Elle utilise les conditions initiales à la place des constantes d'intégration pour évaluer les crochets à l'instant initial par la méthode CI, ensuite elle permet de déduire directement les crochets à tout instant grâce à une propriété de covariance des crochets d'un système autonome dans le temps. La méthode GCI ne fait pas de distinction entre les contraintes car elles sont toutes satisfaites explicitement par les développements limités.

L'objectif de ce chapitre, est d'abord de rappeler brièvement le principe de la méthode CI, ensuite d'introduire sa version généralisée GCI à travers plusieurs exemples en théorie des champs, tout en prenant le soin de bien expliciter tous les détails nécessaires à sa mise en oeuvre.

## 4.1 Aperçu de la méthode des constantes d'intégration

Considérons un système classique décrit par un lagrangien singulier autonome  $L(q, \dot{q})$  où les  $q = (q_1, \dots, q_N)$  sont les coordonnées généralisées et les  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$  sont les vitesses généralisées. En théorie, Il est possible de résoudre les équations d'Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ,  $i = 1 \dots N$ , et de trouver la solutions générales à tout instant  $q(t) = Q(t, C)$ , et  $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = P(t, C)$  avec toutes les constantes d'intégration indépendantes  $C = (C_1, C_2, \dots, C_M)$ , avec  $M \leq 2N$  car les contraintes réduisent le nombre de ces constantes. En effet, le point fort de l'utilisation de la solution vient du fait que cela assure que toutes les contraintes sont respectées, sans même les déterminer ou les classer. Le hamiltonien  $H(q, p) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L$  peut s'écrire en fonction des constantes  $C = (C_1, C_2, \dots, C_M)$ , et son expression sera  $H = H(Q(t, C), P(t, C)) = H(C)$ , car  $H$  est une grandeur conservée.

La méthode CI [8] utilise les équations de Hamilton  $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$  et  $\dot{p}_i = \{p_i, H\}$  en se servant de la solution  $q(t) = Q(t, C)$ , et  $p(t) = P(t, C)$  afin de calculer les crochets des constantes d'intégration  $\{C_I, C_J\}$ . Autrement-dit, il faut continuer avec les équations  $\frac{\partial Q_i(t, C)}{\partial t} = \{Q_i(t, C), H(C)\}$  et  $\frac{\partial P_i(t, C)}{\partial t} = \{P_i(t, C), H(C)\}$ , qui peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i(t, C)}{\partial t} &= \sum_{J, K=1}^M \{C_J, C_K\} \frac{\partial Q_i}{\partial C_J} \frac{\partial H}{\partial C_K} \quad i = 1 \dots N \\ \frac{\partial P_i(t, C)}{\partial t} &= \sum_{J, K=1}^M \{C_J, C_K\} \frac{\partial P_i}{\partial C_J} \frac{\partial H}{\partial C_K} \quad i = 1 \dots N. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Les crochets  $\{C_j, C_k\}$  s'obtiennent directement par identification, car nous avons remplacé la solution des équations d'Euler-Lagrange dans les équations de Hamilton, écrites en terme des crochets de Dirac généralisant les crochets de Poisson. Ensuite, il suffit d'utiliser ces crochets  $\{C_J, C_K\}$  pour déterminer les crochets des variables fondamentales  $q = Q(t, C)$  et  $p = P(t, C)$ .

Pour bien illustrer cette approche, soit le lagrangien  $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{z}$ . Les moments conjugués sont  $p_x = \dot{x}$ ,  $p_y = x$  et  $p_z = -y$ , et les équations de mouvement sont  $\ddot{x} - \dot{y} = 0$ ,

$\dot{x} + \dot{z} = 0$  et  $\dot{y} = 0$ . La solution analytique est

$$\begin{aligned} x(t) &= at + b \quad ; \quad y(t) = c \quad ; \quad z(t) = -at + d \\ p_x(t) &= a \quad ; \quad p_y(t) = at + b \quad ; \quad p_z = -y. \end{aligned}$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont les constantes d'intégration indépendantes. Le hamiltonien prend la forme  $H = \frac{p_x^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ . Ce hamiltonien ne donne pas tous les crochets car il dépend juste de la constante  $a$ . Pour cette raison, nous allons ajouter des termes supplémentaires au lagrangien  $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + xy - yz - \lambda x - \xi y$ , où  $\lambda$  et  $\xi$  sont des paramètres constants annuler à la fin des calculs. Les équations de mouvement deviennent  $\ddot{x} - \dot{y} + \lambda = 0$ ,  $\dot{x} + \dot{z} + \xi = 0$ ,  $\dot{y} = 0$  et la solution analytique sera

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\lambda}{2}t^2 + at + b & y(t) &= c & z(t) &= \frac{\lambda}{2}t^2 - at - \xi t + d \\ p_x(t) &= -\lambda t + a & p_y(t) &= -\frac{\lambda}{2}t^2 + at + b & p_z(t) &= -c \end{aligned}$$

Maintenant, le hamiltonien est donné par  $H = \frac{p_x^2}{2} + \lambda x + \xi y$ , et il est égal à  $H = \frac{1}{2}a^2 + \lambda b + \xi c$ . Nous allons maintenant juste appliquer les équations de Hamilton  $\frac{dx}{dt} = \{x, H\}$  et  $\frac{dz}{dt} = \{z, H\}$ , pour obtenir les relations

$$\begin{aligned} -\lambda t + a &= \lambda\{a, b\}t + \xi\{a, c\}t + \{b, a\}a + \xi\{b, c\} \\ \lambda t - a - \xi &= -\lambda\{a, b\}t - \xi\{a, c\}t + \{d, a\}a + \lambda\{d, b\} + \xi\{d, c\}. \end{aligned}$$

On déduit facilement par identification, les crochets

$$\{a, b\} = -1 \quad ; \quad \{a, c\} = 0 \quad ; \quad \{a, d\} = 1 \quad ; \quad \{b, c\} = 0 \quad ; \quad \{b, d\} = 0 \quad ; \quad \{c, d\} = 1.$$

A partir de ces derniers et de la solution des équations de mouvement, il est possible de vérifier les crochets non nuls  $\{x, p_x\} = 1$ ,  $\{p_x, p_y\} = -1$ ;  $\{p_x, z\} = -1$ ;  $\{y, z\} = 1$ ;  $\{z, p_z\} = 1$ , qui sont exactement les crochets de Dirac recherchés.

## 4.2 Méthode des constantes d'intégration généralisée (GCI)

La méthode des constantes d'intégration généralisée est une généralisation de la méthode des constantes d'intégration qui permettra de retrouver les mêmes résultats du formalisme de Dirac et de la méthode Faddeev-Jackiw. En effet, un des soucis majeur qu'on rencontre avec la méthode "CI" dans sa version initiale est la difficulté de trouver les solutions générales des systèmes non-intégrables. Heureusement, une généralisation de

cette approche peut se faire en utilisant un développement de Taylor de la solution au voisinage de l'instant initial, en se servant des conditions initiales qui vont jouer le rôle des constantes d'intégration. En effet, si les variables fondamentales sont  $\xi(t) = (q(t), p(t))$ , la formule de Taylor à l'ordre un sera

$$\xi_I(t) = \tilde{\xi}_I + \dot{\xi}_I \Big|_{t=0} t + O(t^2) \quad (4.2.1)$$

où les  $\tilde{\xi}_I$  sont les conditions initiales  $\xi_I(0) = \tilde{\xi}_I$ . Les dérivées à l'instant initial  $\dot{\xi}_I \Big|_{t=0}$  s'obtiennent à partir des équations de mouvement (équations d'Euler-Lagrange) en fonction de  $\tilde{\xi}_I$ . Le hamiltonien du système étant conservé, il va aussi s'exprimer en fonction des conditions initiales  $H = H(\tilde{\xi}) = \tilde{H}$ . Pour accéder aux crochets  $\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\}$ , il faut imposer les équations de Hamilton (de Poisson) à l'instant initial

$$\frac{d\xi_I}{dt} \Big|_{t=0} = \{\xi_I, H\} \Big|_{t=0} \Rightarrow \dot{\xi}_I \Big|_{t=0} = \{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\xi}_J} \quad (4.2.2)$$

où  $\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\}$  sont les crochets de notre système à l'instant initial. Jusqu'à présent, nous avons juste appliqué la méthode des constantes d'intégration (CI) au voisinage de l'instant initiale, rien d'autre. La méthode des constantes d'intégration généralisée (GCI) nous donne le moyen de déduire directement les crochets à tout instant. En effet, si les crochets initiaux sont  $\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} = \Theta_{IJ}(\tilde{\xi})$ , où les  $\Theta_{IJ}(\tilde{\xi})$  sont des fonctions des conditions initiales, alors les crochets à tout instant vont garder la même forme  $\{\xi_I(t), \xi_J(t)\} = \Theta_{IJ}(\xi(t))$ , ce qui revient à remplacer  $\tilde{\xi}_I$  par les  $\xi_I(t)$  dans les expressions des crochets de l'instant initial

$$\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} = \Theta_{IJ}(\tilde{\xi}) \quad \Rightarrow \quad \{\xi_I(t), \xi_J(t)\} = \Theta_{IJ}(\xi(t)). \quad (4.2.3)$$

Cela nous rappelle un résultat de la mécanique quantique où les commutateurs de Heisenberg à tous les instants et les commutateurs de Schrödinger prises à l'instant initial ont la même forme. Mathématiquement, cela s'exprime par

$$\left[ \hat{A}_s, \hat{B}_s \right] = \hat{C}_s \quad \Rightarrow \quad \left[ \hat{A}_H(t), \hat{B}_H(t) \right] = \hat{C}_H(t). \quad (4.2.4)$$

Dans ce qui suit, nous allons démontrer la propriété énoncée ci-dessus (4.2.3), selon laquelle les crochets conservent leur forme dans le temps. L'évolution au cours du temps des variables fondamentales  $\xi_K(t)$  est déterminée par les équations de Hamilton (4.1.1) comme suit

$$\frac{d\xi_K}{dt} = \{\xi_K, H\} = \{\xi_I, \xi_J\} \frac{\partial H}{\partial \xi_I} \frac{\partial}{\partial \xi_J} \xi_K. \quad (4.2.5)$$

A l'aide l'opérateur de Liouville défini par

$$G(\xi) = \{\xi_I, \xi_J\} \frac{\partial H}{\partial \xi_I} \frac{\partial}{\partial \xi_J} = \{., H\}, \quad (4.2.6)$$

l'équation précédente devient

$$\frac{d\xi_K}{dt} = G\xi_K, \quad (4.2.7)$$

d'où l'on déduit les dérivées d'ordre supérieurs

$$\frac{d^n \xi_K}{dt^n} = \{\dots\{\{\{\xi_K, H\}, H\}, H\}\dots, H\} = G^n \xi_K. \quad (4.2.8)$$

L'évolution au cours du temps des variables fondamentales peut être obtenue sous forme d'un développement de Taylor au voisinage de l'instant initial comme suit :

$$\xi_K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left. \frac{d^n \xi_K}{dt^n} \right|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n \xi_K|_{t=0}. \quad (4.2.9)$$

A présent, introduisons les conditions initiales  $\tilde{\xi}_K = \xi_K(0) = \xi_K|_{t=0}$ , qui vont nous permettre de définir l'opérateur de Liouville initial

$$G_0 = \{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\xi}_I} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_J}, \quad (4.2.10)$$

où  $\tilde{H} = H(\tilde{\xi})$  est le hamiltonien conservé au cours du temps et  $\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\}$  les crochets à l'instant initial. Ainsi, l'équation (4.2.9) devient

$$\xi_K(t) = \sum_n \frac{t^n}{n!} (G_0)^n \tilde{\xi}_K = \Rightarrow \xi_K(t) = e^{tG_0} \tilde{\xi}_K. \quad (4.2.11)$$

Il s'agit de la solution des équations de mouvement exprimée en terme de l'opérateur de Liouville. De la même manière, on peut écrire la fonction autonome  $f(\xi)$  comme étant

$$f(\xi) = e^{tG_0} f(\tilde{\xi}). \quad (4.2.12)$$

A l'aide de l'identité de Jacobi, on aboutit à la règle de Leibniz. En effet, nous avons

$$\{\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\}, \tilde{H}\} + \{\{\tilde{H}, \tilde{\xi}_I\}, \tilde{\xi}_J\} + \{\{\tilde{\xi}_J, \tilde{H}\}, \tilde{\xi}_I\} = 0 \quad (4.2.13)$$

d'où,

$$G_0\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} = \{G_0\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} + \{\tilde{\xi}_I, G_0\tilde{\xi}_J\} \quad (4.2.14)$$

car  $\{\tilde{f}, \tilde{H}\} = G_0 \tilde{f}$ . En continuant à appliquer successivement l'opérateur de Liouville sur la dernière équation, on obtient la règle de Leibniz générale

$$G_0^k \{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} = \sum_{s=0}^k C_k^s \{G_0^s \tilde{\xi}_I, G_0^{k-s} \tilde{\xi}_J\} \quad (4.2.15)$$

où  $C_k^s = \frac{s!}{k!(k-s)!}$  est une combinaison de  $s$  éléments parmi  $k$  éléments.

Pour achever la démonstration, utilisons (4.2.11) pour calculer le crochet  $\{\xi_I(t), \xi_J(t)\}$ . En effet,

$$\begin{aligned} \{\xi_I(t), \xi_J(t)\} &= \{e^{tG_0} \tilde{\xi}_I, e^{tG_0} \tilde{\xi}_J\} \\ &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \frac{t^n t^m}{n! m!} \{G_0^n \tilde{\xi}_I, G_0^m \tilde{\xi}_J\}. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Pour continuer, remarquons le fait que  $\mathbb{N}^2 = \cup_{k=0}^{\infty} S_k$  où  $S_k = \{(n, m) \mid n + m = k\}$ , ce qui veut dire que  $S_k = \{(s, k-s) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq s \leq k\}$ . Ainsi, toute somme sur  $\mathbb{N}^2$  de termes  $T(n, m)$ , se ramène à une somme sur  $\mathbb{N}$  d'une somme sur  $S_k$  de terme  $T(s, k-s)$  :

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} T(n, m) = \sum_{(n,m) \in \cup_{k=0}^{\infty} S_k} T(n, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(n,m) \in S_k} T(n, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k T(s, k-s). \quad (4.2.17)$$

Dans notre cas (4.2.16), on déduit que

$$\begin{aligned} \{\xi_I(t), \xi_J(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(n,m) \in S_k} \frac{t^{m+n}}{n! m!} \{G_0^m \tilde{\xi}_I, G_0^n \tilde{\xi}_J\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k \frac{t^k}{s! (k-s)!} \{G_0^s \tilde{\xi}_I, G_0^{k-s} \tilde{\xi}_J\}. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Finalement, à l'aide de la règle de Leibnitz (4.2.15), on conclut que

$$\{\xi_I(t), \xi_J(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} G_0^k \{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} = e^{tG_0} \Theta_{IJ}(\tilde{\xi}) = \Theta_{IJ}(\xi(t)). \quad (4.2.19)$$

Effectivement, nous avons démontré la covariance des crochets dans le temps

$$\{\tilde{\xi}_I, \tilde{\xi}_J\} = \Theta_{IJ}(\tilde{\xi}) \quad \Rightarrow \quad \{\xi_I(t), \xi_J(t)\} = \Theta_{IJ}(\xi(t)) \quad (4.2.20)$$

Pour récapituler, il est possible de procéder à la quantification des systèmes singuliers grâce à un développement de Taylor qui permet de calculer les crochets des variables du

système à l'instant initial à partir des équations de Hamilton, ensuite de les déduire à tous les instants car ils gardent leur forme au cours du temps.

Nous allons dans ce qui suit, vérifier d'abord la validité de notre méthode en l'appliquant à des systèmes à un degré de liberté fini, ensuite nous nous intéresserons au cas de la théorie des champs.

### 4.3 Applications à des systèmes avec un degré de liberté fini

#### Application 1

L'oscillateur isotonique à une dimension est décrit par le lagrangien  $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{k}{x^2}$ . Ce système régulier généralisant le cas l'oscillateur harmonique correspondant au cas particulier où  $k = 0$ . Le moment conjugué associé à la coordonnée  $x$  est  $p_x = \dot{x}$ , et l'équation différentielle de mouvement est  $\ddot{x} + \omega^2 x - \frac{2k}{x^3} = 0$ . Ainsi, nous aurons donc le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x \\ \dot{p}_x = -\omega^2 x + \frac{2k}{x^3} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Cherchons à présent des développements limités à l'ordre un de  $x(t)$  et  $p_x(t)$  de la forme  $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + O(t^2)$  et  $p_x(t) = p_x(0) + \dot{p}_x(0)t + O(t^2)$ . Si on choisit comme conditions initiales  $x(0) = X$  et  $p_x(0) = P_x$ , ensuite on remplace dans les équations précédentes, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = X + P_x t + O(t^2) \\ p_x(t) = P_x + \left(-\omega^2 X + \frac{2k}{X^3}\right)t + O(t^2). \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Le hamiltonien  $H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{k}{x^2}$  est conservé, on conclut donc que  $H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 X^2 + \frac{k}{X^2}$ . La méthode GCI utilise les équations de Hamilton au voisinage de l'instant initial

$$\begin{cases} \dot{x}|_{t=0} = \{x|_{t=0}, H\} \\ \dot{p}_x|_{t=0} = \{p_x|_{t=0}, H\} \end{cases} \implies \begin{cases} P_x = \{X, P_x\}P_x + \{X, X\}\omega^2 X + \{X, X\}\left(-\frac{k}{X^3}\right) \\ -\omega^2 X + \frac{2k}{X^3} = \{P_x, P_x\}P_x + \{P_x, X\}\omega^2 X + \{P_x, X\}\left(-\frac{k}{X^3}\right) \end{cases} \quad (4.3.3)$$

On déduit directement les crochets  $\{X, P_x\} = 1$ ,  $\{X, X\} = 0$  et  $\{P_x, P_x\} = 0$ . Comme ces crochets gardent leur forme dans le temps, on peut affirmer que  $\{x, p_x\} = 1$ ,  $\{x, x\} = 0$  et  $\{p_x, p_x\} = 0$ , qui sont des crochets de Poisson, car notre système est régulier.

**Application 2**

Considérons maintenant le système décrit par le lagrangien  $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}\dot{y} - \frac{x^2}{2}y$ . Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, ces équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{cases} \ddot{x} = xy - xy \\ \dot{x} = -\frac{1}{2}x. \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_x = \dot{x} \\ p_y = \frac{x^2}{2}. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Mais, l'équation  $\dot{x} = -\frac{1}{2}x$  permet de réécrire notre système différentiel comme suit :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\dot{x} = xy - xy \\ \dot{x} = -\frac{1}{2}x. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_x = -\frac{1}{2}x \\ p_y = \frac{x^2}{2}. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Le développement de Taylor de la solution de ce système est

$$\begin{cases} x(t) = X - \frac{X}{2}t + O(t^2) \\ y(t) = Y + \left(\frac{1}{4} + Y\right)t + O(t^2) \end{cases} \quad (4.3.6)$$

où  $x(0) = X$  et  $y(0) = Y$  sont les conditions initiales quelconques indépendantes. Le hamiltonien est conservé, donc  $H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{x^2}{2}y \Big|_{t=0} = \frac{X^2}{8} + \frac{X^2}{2}Y$ . Nous allons maintenant utiliser les équations de Hamilton à l'instant initial  $\dot{x}(t)|_{t=0} = \{x|_{t=0}, H\}$  et  $\dot{y}(t)|_{t=0} = \{y|_{t=0}, H\}$ . En effet,

$$\begin{cases} -\frac{X}{2} = \left\{X, \frac{X^2}{8} + \frac{X^2}{2}Y\right\} \\ \left(\frac{1}{4} + Y\right) = \left\{Y, \frac{X^2}{8} + \frac{X^2}{2}Y\right\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{X}{2} = \{X, Y\} \frac{X^2}{2} \\ \left(\frac{1}{4} + Y\right) = \{Y, X\} \frac{X}{4} + \{Y, X\} XY \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Ces deux égalités impliquent que  $\{X, Y\} = \frac{-1}{X}$ , d'où on déduit que  $\{x, y\} = -\frac{1}{x}$ . Les autres crochets non nuls sont  $\{y, p_x\} = -\frac{1}{x}$  et  $\{y, p_y\} = 1$  car  $p_x = -\frac{1}{2}x$  et  $p_y = \frac{x^2}{2}$ .

**Application 3**

Soit le système mécanique décrit par le lagrangien  $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{z}$ . Les moments conjugués sont  $p_x = \dot{x}$ ,  $p_y = x$  et  $p_z = -y$ , et les équations différentielles correspondantes sont  $\ddot{x} - \dot{y} = 0$ ,  $\dot{x} + \dot{z} = 0$  et  $\dot{y} = 0$ . Le développement de Taylor à l'ordre un de la solution est

$$x(t) = X + P_x t + O(t^2) ; \quad y(t) = Y + O(t^2) ; \quad z(t) = Z + P_x t + O(t^2) \quad (4.3.8)$$

où seules les conditions initiales  $x(0) = X$ ,  $y(0) = Y$ ,  $z(0) = Z$  et  $p_x(0) = P_x$  sont indépendantes, car  $p_y = x$  et  $p_z = -y$ , d'où  $p_y(0) = x(0)$  et  $p_z(0) = -y(0)$ . On sait que le hamiltonien est conservé, dans ce cas  $H = \frac{p_x^2}{2} \Big|_{t=0} = \frac{P_x^2}{2}$ . Parmi les conditions

initiales indépendantes, seul  $P_x$  figure dans l'expression du Hamiltonien, ce qui constitue un problème de sous-détermination. Pour le résoudre, on ajoute au lagrangien deux termes supplémentaires  $(\lambda x)$  et  $(\xi y)$  et le lagrangien devient  $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{z} + \lambda x + \xi y$ , où  $\lambda$  et  $\xi$  sont des paramètres réels qu'on annule à la fin. Maintenant, les équations de mouvement seront  $\ddot{x} - \lambda = 0$ ,  $\dot{x} + \dot{z} - \xi = 0$  et  $\dot{y} = 0$ . Ainsi, on trouve le développement de Taylor à l'ordre un de la solution comme suit :

$$\begin{cases} x(t) = X + P_x t + O(t^2) \\ y(t) = Y + O(t^2) \\ z(t) = Z - (P_x - \xi)t + O(t^2) \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Après toutes ces modifications le hamiltonien devient  $H = H|_{t=0} = \frac{p_x^2}{2} - \lambda X - \xi Y$ . Les équations de Hamilton à l'instant initial sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t)|_{t=0} = \{x|_{t=0}, H\} & \Rightarrow & P_x = \{X, P_x\}P_x - \lambda\{X, X\} - \xi\{X, Y\} \\ \dot{y}(t)|_{t=0} = \{y|_{t=0}, H\} & \Rightarrow & 0 = \{Y, P_x\}P_x - \lambda\{Y, X\} - \xi\{Y, Y\} \\ \dot{z}(t)|_{t=0} = \{z|_{t=0}, H\} & \Rightarrow & -P_x + \xi = \{Z, P_x\}P_x - \lambda\{Z, X\} - \xi\{Z, Y\}. \end{cases} \quad (4.3.10)$$

Les crochets non nuls à l'instant initial sont  $\{X, P_x\} = 1$ ,  $\{Z, P_x\} = \{Z, Y\} = -1$ . On déduit directement les crochets à tout instant  $\{x, p_x\} = 1$  et  $\{z, p_x\} = \{z, y\} = -1$ . Ces crochets sont valables pour le lagrangien du départ, car ils ne dépendent pas des paramètres  $\lambda$  et  $\xi$ .

#### Application 4

Cette application est consacrée au lagrangien de Christ-Lee qui s'écrit en coordonnées cylindriques sous la forme

$$L = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2(\dot{\theta} - z)^2 - V(r) \Rightarrow H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{r^2} + p_\theta z + V(r) \quad (4.3.11)$$

Ce système présente par construction, une symétrie de jauge sous la transformation  $\theta(t) \rightarrow \theta(t) + \varepsilon(t)$  et  $z(t) \rightarrow z(t) + \dot{\varepsilon}(t)$ , où  $\varepsilon(t)$  une fonction arbitraire du temps. Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0 \\ \dot{\theta} = z \Rightarrow \dot{\theta} - z = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}(\dot{\theta} - z)\right) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_r = \dot{r} \Rightarrow \dot{p}_r = \ddot{r} \\ p_\theta = r^2(\dot{\theta} - z) \\ p_z = 0. \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Pour fixer la jauge, choisissons  $\theta(t) = 0$ . Ainsi, on peut avoir la formule de Taylor suivante

$$\begin{cases} r(t) = R + P_R t + O(t^2) \\ p_r(t) = P_R - \left. \frac{\partial V(r)}{\partial r} \right|_{r=R} t + O(t^2) \end{cases} \quad (4.3.13)$$

où  $r(0) = R$  et  $p_r(0) = P_R$  sont les conditions initiales. Le hamiltonien du système est  $H = H|_{t=0} = \frac{P_R^2}{2} + V(R)$ . Nous allons maintenant utiliser les équations de Hamilton  $\dot{r}|_{t=0} = \{r|_{t=0}, H\}$  et  $\dot{p}_r|_{t=0} = \{p_r|_{t=0}, H\}$  prises à l'instant initial afin d'obtenir les différents crochets à cet instant. En effet,

$$\begin{cases} P_R = \{X, P_R\}P_R + \{R, V(R)\} = \{X, P_R\}P_R + \{R, R\} \frac{\partial V(R)}{\partial R} \\ - \left. \frac{\partial V(r)}{\partial r} \right|_{t=0} = \{P_R, P_R\}P_R + \{P_R, V(R)\} = \{P_R, P_R\}P_R + \{P_R, R\} \frac{\partial V(R)}{\partial R} \end{cases} \quad (4.3.14)$$

Après une identification directe, nous aboutissons aux crochets relatifs aux conditions initiales

$$\{R, P_R\} = 1 \quad ; \quad \{R, R\} = 0 \quad ; \quad \{P_R, P_R\} = 0 \quad (4.3.15)$$

Ces relations gradient la même forme à n'importe quel instant comme on vient de le démontrer ci-dessus, alors

$$\{r, p_r\} = 1 \quad ; \quad \{r, r\} = 0 \quad ; \quad \{p_r, p_r\} = 0. \quad (4.3.16)$$

Ces résultats sont équivalents à ceux déjà obtenus en la méthode Dirac et l'approche de Faddeev–Jackiw.

### Application 5

Le lagrangien de Hojman et Urrutia [14] va faire l'objet d'une dernière application. En effet,

$$L = (y + z)\dot{x} + w\dot{z} + \frac{1}{2}(w^2 - 2yz - z^2). \quad (4.3.17)$$

On a déjà étudié cet exemple avec plusieurs méthodes dans les chapitres précédents. C'est le autour de la méthode "CI" généralisée d'être appliquée. Les équations de mouvement sont  $\dot{y} + \dot{z} = 0$ ,  $\dot{x} - z = 0$ ,  $\dot{w} = \dot{x} - y - z$ ,  $\dot{z} + w = 0$  et le développement de Taylor de leur solution est

$$\begin{cases} x(t) = X + Z t + O(t^2) \\ y(t) = Y + W t + O(t^2) \\ z(t) = Z - W t + O(t^2) \\ w(t) = Y - Y t + O(t^2), \end{cases} \quad (4.3.18)$$

où  $x(0) = X$ ,  $y(0) = Y$ ,  $z(0) = Z$  et  $w(0) = W$  sont les conditions initiales. Le hamiltonien est conservé dans le temps, alors  $H = \frac{-W^2}{2} + YZ + \frac{Z^2}{2}$ . Les équations de Hamilton à l'instant initial sont

$$\begin{cases} \dot{x}(t)|_{t=0} = \{x|_{t=0}, H\} & \Rightarrow & Z = -\{X, W\}W + Z\{X, Y\} + Y\{X, Z\} + Z\{X, Z\} \\ \dot{y}(t)|_{t=0} = \{y|_{t=0}, H\} & \Rightarrow & W = -\{Y, W\}W + Y\{Y, Z\} + Z\{Y, Z\} \\ \dot{z}(t)|_{t=0} = \{z|_{t=0}, H\} & \Rightarrow & -W = -\{Z, W\}W + Z\{Z, Y\} \\ \dot{w}(t)|_{t=0} = \{w|_{t=0}, H\} & \Rightarrow & -Y = Z\{W, Y\} + Y\{W, Z\} + Z\{W, Z\}. \end{cases} \quad (4.3.19)$$

En comparant les membres de gauche avec les membres de droite des expressions précédentes, on conclut que les seuls crochets non nuls sont

$$\{X, Y\} = 1 \quad , \quad \{Y, W\} = -1 \quad , \quad \{Z, W\} = 1. \quad (4.3.20)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que les crochets à tout instant ultérieur des variables fondamentales sont  $\{x, y\} = \{z, w\} = 1$ , et  $\{y, w\} = -1$ . En effet, il suffit de les utiliser pour écrire les équations de Hamilton, ensuite de s'assurer qu'ils conduisent à des équations équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange du départ.

Dans le reste de ce chapitre, nous allons aborder la question de la quantification au voisinage de l'instant initial en théorie des champs, en se servant des conditions initiales. En effet, nous allons montrer la validité de la méthode des constantes d'intégration généralisée (GCI) à travers l'étude de plusieurs exemples de la théorie des champs.

## 4.4 Champ de Klein-Gordon

### 4.4.1 Champ de Klein-Gordon dans l'espace des positions

Le lagrangien du champ de Klein-Gordon réel  $\phi(\vec{x}, t)$  s'écrit  $L = \int dx^3 (\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2)$  où la masse  $m > 0$ . En utilisant l'expression du moment conjugué  $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}$ , et l'équations d'Euler-Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \phi)} = 0$ , on obtient l'équation de Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = m^2 \phi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\phi} = \pi \\ \dot{\pi} = \Delta \phi - m^2 \phi. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Le hamiltonien associé à ce champ est

$$H = \int \frac{dx^3}{2} (\pi^2 + \partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2). \quad (4.4.2)$$

Cherchons à présent un développement de Taylor à l'ordre un au voisinage de l'instant initial  $t = 0$  de la solution de l'équation (4.4.1), partant des conditions initiales  $\phi(0, \vec{x}) = \Phi(\vec{x})$  et  $\pi(0, \vec{x}) = \Pi(\vec{x})$ . Cela revient à poser  $\phi(t, \vec{x}) = \phi(0, \vec{x}) + \dot{\phi}(0, \vec{x})t + O(t^2)$  et  $\pi(t, \vec{x}) = \pi(0, \vec{x}) + \dot{\pi}(0, \vec{x})t + O(t^2)$ , ensuite remplacer dans l'équation (4.4.1), pour ne garder que les termes d'ordre un. On obtient facilement

$$\phi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}) + \Pi(\vec{x}) t + O(t^2) \quad (4.4.3)$$

$$\pi(\vec{x}, t) = \Pi(\vec{x}) + (\Delta\Phi(\vec{x}) - m^2\Phi(\vec{x})) t + O(t^2). \quad (4.4.4)$$

Le hamiltonien est conservé, donc

$$H = H|_{t=0} = \int \frac{dx^3}{2} (\Pi(\vec{x})^2 + \partial_i\Phi(\vec{x}) \partial_i\Phi(\vec{x}) + m^2\Phi(\vec{x})^2). \quad (4.4.5)$$

Nous allons maintenant utiliser les équations de Hamilton à l'instant initial  $\dot{\phi}(\vec{x}, t)|_{t=0} = \{\phi(\vec{x}, t)|_{t=0}, H\}$  et  $\dot{\pi}(\vec{x}, t)|_{t=0} = \{\pi(\vec{x}, t)|_{t=0}, H\}$ , pour déterminer les crochets de  $\Phi(\vec{x})$  et  $\Pi(\vec{x})$ . A l'aide des équations (4.4.3) et (4.4.4), on obtient les relations

$$\Pi(\vec{x}) = \{\Phi(\vec{x}), H\} \quad (4.4.6)$$

$$\Delta\Phi(\vec{x}) - m^2\Phi(\vec{x}) = \{\Pi(\vec{x}), H\} \quad (4.4.7)$$

Maintenant, en utilisant l'expression (4.4.5) du hamiltonien, on aura

$$\Pi(\vec{x}) = \int dy^3 ( \{\Phi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})\} \Pi(\vec{y}) - \{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} (\Delta'\Phi(\vec{y}) + m^2\Phi(\vec{y})) ) \quad (4.4.8)$$

où  $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ . Ici, nous avons remplacé  $\{\Phi(\vec{x}), \partial'_i\Phi(\vec{y})\} \partial'_i\Phi(\vec{y})$  par  $\partial'_i [\{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} \partial'_i\Phi(\vec{y})] - \{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} \partial'_i\partial'_i\Phi(\vec{y})$  ensuite, on a omis la divergence  $\partial'_i [\{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} \partial'_i\Phi(\vec{y})]$ . Les conditions initiales sont complètement indépendantes, donc après identification entre le membre de gauche et de droite de (4.4.8), on déduit les crochets

$$\{\Phi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{et} \quad \{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} = 0 \quad (4.4.9)$$

De la même manière on obtient avec l'équation (4.4.4), la relation

$$\Delta\Phi(\vec{x}) - m^2\Phi(\vec{x})^2 = \int dy^3 ( \{\Pi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})\} \Pi(\vec{y}) + \{\Pi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} (-\Delta\Phi(\vec{x}) + m^2\Phi(\vec{x})^2) ),$$

qui permettent de déterminer les crochets

$$\{\Pi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})\} = -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{et} \quad \{\Pi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})\} = 0. \quad (4.4.10)$$

Comme les crochets restent invariants au cours du temps, on déduit finalement que

$$\{\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{et} \quad \{\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})\} = \{\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\} = 0 \quad (4.4.11)$$

Nous avons ainsi aboutit aux crochets du champ scalaire réel du Klein-Gordon, bien connus en théorie des champs.

#### 4.4.2 Champ de Klein-Gordon dans l'espace des impulsions

Dans cette partie, on va utiliser les relations (4.4.6) et (4.4.7) dans l'espace des impulsions, en exprimant le champ réel de Klein-Gordon et son moment conjugué à l'instant initial à l'aide de la transformation de Fourier, dans le but de retrouver les relations de commutation bien connues. Pour ce faire remarquons d'abord, que tout nombre complexe  $z$  peut se mettre sous la forme  $z = \frac{\alpha+\beta}{2} + i\frac{\alpha-\beta}{2}$  où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . L'intérêt de cette écriture réside dans le fait que si  $z = z(\vec{k})$ , où  $\vec{k} \in \mathbb{R}$  et  $z(\vec{k}) = z(-\vec{k})^*$  alors

$$z(\vec{k}) = \frac{1+i}{2} \alpha(\vec{k}) + \frac{1-i}{2} \alpha(-\vec{k}). \quad (4.4.12)$$

À l'aide de la transformation de Fourier, la condition initiale  $\Phi(\vec{x}) = \int f(\vec{k}) e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} dk^3$  où  $f(\vec{k}) = f(-\vec{k})^*$  pour assurer la réalité de  $\Phi(\vec{x})$ . Donc, il existe une fonction  $\alpha(\vec{k})$  tel que  $f(\vec{k}) = \frac{1+i}{2}\alpha(\vec{k}) + \frac{1-i}{2}\alpha(-\vec{k})$  et la transformée de Fourier devient alors

$$\Phi(\vec{x}) = \int dk^3 \alpha(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right). \quad (4.4.13)$$

Nous avons la même situation avec la condition initiale  $\Pi(\vec{x})$  qui va se mettre à son tour sous la forme

$$\Pi(\vec{x}) = \int dk^3 \beta(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right). \quad (4.4.14)$$

On peut à présent exprimer le hamiltonien à l'instant initial  $H$  à l'aide des fonctions  $\alpha(\vec{q})$  et  $\beta(\vec{q})$ . Après un calcul un peu long, on obtient

$$H = \int \frac{(2\pi)^3}{2} dq^3 (\beta(\vec{q})^2 + (m^2 + \vec{q}^2)\alpha(\vec{q})^2). \quad (4.4.15)$$

À l'aide des relations (4.4.13) et (4.4.15), on aura

$$\begin{aligned} \{\Phi(\vec{x}), H\} &= (2\pi)^3 \int dk^3 dq^3 \left[ \left\{ \alpha(\vec{k}), \beta(\vec{q}) \right\} \beta(\vec{q}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \alpha(\vec{k}), \alpha(\vec{q}) \right\} (m^2 + \vec{q}^2) \alpha(\vec{q}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Tenant compte de (4.4.14) et (4.4.16), on aboutit aux relations de commutation

$$\left\{ \alpha(\vec{k}), \beta(\vec{q}) \right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} - \vec{q}) \quad \text{et} \quad \left\{ \alpha(\vec{k}), \alpha(\vec{q}) \right\} = 0 \quad (4.4.17)$$

Nous avons aussi,

$$\begin{aligned} \{ \Pi(\vec{x}), H \} &= (2\pi)^3 \int dk^3 dq^3 \left[ \left\{ \beta(\vec{k}), \beta(\vec{q}) \right\} \beta(\vec{q}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \beta(\vec{k}), \alpha(\vec{q}) \right\} (m^2 + \vec{q}^2) \alpha(\vec{q}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

et

$$\Delta\Phi(\vec{x}) - m^2\Phi(\vec{x}) = - \int dk^3 (m^2 + \vec{k}^2) \alpha(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \quad (4.4.19)$$

Comme  $\Delta\Phi(\vec{x}) - m^2\Phi(\vec{x}) = \{ \Pi(\vec{x}), H \}$  (voir (4.4.7)), on déduit directement les relations

$$\left\{ \beta(\vec{k}), \alpha(\vec{q}) \right\} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) \quad \text{et} \quad \left\{ \beta(\vec{k}), \beta(\vec{q}) \right\} = 0. \quad (4.4.20)$$

Maintenant, grâce aux relations (4.4.17) et (4.4.20), on déduit facilement les crochets

$$\{ \Phi(\vec{x}), \Pi(\vec{y}) \} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \{ \Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y}) \} = \{ \Pi(\vec{x}), \Pi(\vec{y}) \} = 0. \quad (4.4.21)$$

Nous avons ainsi obtenu le même résultat déjà vu dans la section précédente (4.4.11).

## 4.5 Le champ de Maxwell

### 4.5.1 Le champ de Maxwell dans l'espace des positions

Le champ de Maxwell décrivant le champ électromagnétique n'est pas du tout trivial, du fait qu'il présente des contraintes directement liées à sa symétrie de jauge. L'expression de son lagrangien libre est

$$L = -\frac{1}{4} \int dx^3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.5.1)$$

où  $F_{\mu\nu}$  est le tenseur du champ électromagnétique défini en fonction de quadri-potentiels  $A_\mu$  par  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  où  $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Dans la jauge de Coulomb  $\partial_i A^i = 0$  et  $A_0 = 0$ , les équations de mouvement  $\partial_\beta F^{\beta\lambda} = 0$  et les moments conjugués  $\pi^\mu = -F^{0\mu}$  se

réduisent à la forme relativement simple

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad \pi_0 = 0 \quad (4.5.2)$$

$$\partial_i A^i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\pi}^i = -\dot{A}^i \quad (4.5.3)$$

$$\partial_i \pi^i = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\pi}^i = -\Delta A^i \quad (4.5.4)$$

Le hamiltonien de ce système est alors réduit à la forme

$$H = \frac{1}{2} \int dx^3 \left( (\pi^i)^2 + (\partial_j A^i)^2 - \partial_i A^j \partial_j A^i \right) \quad (4.5.5)$$

Maintenant supposons que nous partons des conditions initiales  $A^i(\vec{x}, 0) = \Lambda^i(\vec{x})$  et  $\pi^i(\vec{x}, 0) = \Pi^i(\vec{x})$ . Les équations (4.5.3) et (4.5.4) prises à l'instant initial ( $t = 0$ ), se réduisent aux relations  $\partial_i \Lambda^i = 0$ ,  $\partial_i \Pi^i = 0$ ,  $\dot{A}^i|_{t=0} = -\Pi^i$  et  $\dot{\pi}^i|_{t=0} = -\Delta \Lambda^i$ , d'où les développements limités à l'ordre un au voisinage de  $t = 0$  suivant :

$$A^i(\vec{x}, t) = \Lambda^i(\vec{x}) - \Pi^i(\vec{x}) t + O(t^2) \quad (4.5.6)$$

$$\pi^i(\vec{x}, t) = \Pi^i(\vec{x}) - \Delta \Lambda^i(\vec{x}) t + O(t^2) \quad (4.5.7)$$

$$\partial_i \Lambda^i(\vec{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_i \Pi^i(\vec{x}) = 0 \quad (4.5.8)$$

Le hamiltonien conservé devient

$$H = \int \left( \frac{1}{2} \Pi^i(\vec{x}) \Pi^i(\vec{x}) + \frac{1}{2} \partial_j \Lambda^i(\vec{x}) \partial_j \Lambda^i(\vec{x}) - \frac{1}{2} \partial_i \Lambda^j(\vec{x}) \partial_j \Lambda^i(\vec{x}) \right) dx^3. \quad (4.5.9)$$

A ce stade imposons les équations de Hamilton à l'instant initial  $\dot{A}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = \{A^k(\vec{x}, t)|_{t=0}, H\}$  et  $\dot{\pi}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = \{\pi^k(\vec{x}, t)|_{t=0}, H\}$ , comme l'exige bien la méthode des constants d'intégration généralisée. A partir de (4.5.6), (4.5.7) et (4.5.8), il résulte

$$-\Pi^i(\vec{x}) = \{\Lambda^i(\vec{x}), H\} \quad \text{avec} \quad \partial_i \Pi^i(\vec{x}) = 0 \quad (4.5.10)$$

$$-\Delta \Lambda^i(\vec{x}) = \{\Pi^i(\vec{x}), H\} \quad \text{avec} \quad \partial_i \Lambda^i(\vec{x}) = 0 \quad (4.5.11)$$

A l'aide de (4.5.9) et (4.5.10), on obtient

$$\begin{aligned} -\Pi^i(\vec{x}) &= \int dy^3 \left( \{\Lambda^i(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\} \Pi^j(\vec{y}) + \{\Lambda^i(\vec{x}), \partial'_j \Lambda^k(\vec{y})\} \partial'_j \Lambda^k(\vec{y}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \{\Lambda^i(\vec{x}), \partial'_k \Lambda^j(\vec{y})\} \partial'_j \Lambda^k(\vec{y}) - \frac{1}{2} \{\Lambda^i(\vec{x}), \partial'_j \Lambda^k(\vec{y})\} \partial'_k \Lambda^j(\vec{y}) \right) \end{aligned}$$

Comme les  $\Lambda^i$  et les  $\Pi^i$  sont complètement indépendants, la contribution des termes de membre droite qui ne contiennent pas les  $\Pi^i$  doit s'annuler. Pour ce faire, il faut que

$$\{\Lambda^k(\vec{x}), \Lambda^i(\vec{y})\} = 0. \quad (4.5.12)$$

Il nous reste alors la relation

$$\Pi_i(\vec{x}) = - \int dy^3 \Pi_j(\vec{y}) \{\Lambda_i(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y})\} \quad \text{avec} \quad \partial_i \Pi^i(\vec{x}) = 0. \quad (4.5.13)$$

Il est clair que l'identification ne peut pas se poursuivre ainsi, car les  $\Pi^i$  sont liés par la relation  $\partial_i \Pi^i = 0$ . Afin de remédier à cette situation, on va faire appel au théorème de Helmholtz.

Le champ vectoriel  $\Pi_i(\vec{x})$  est physiquement nul à l'infini, donc il se décompose d'une façon **unique** selon le théorème de Helmholtz [30, 31, 32, 33] comme suit :

$$\Pi_i(\vec{x}) = \Pi_i^\perp(\vec{x}) + \Pi_i^{//}(\vec{x}) \quad (4.5.14)$$

où  $\Pi_i^\perp(\vec{x})$  et  $\Pi_i^{//}(\vec{x})$  désignent respectivement la composante transversale et longitudinale du champ  $\Pi_i(\vec{x})$  vérifiant les équations

$$\text{div } \vec{\Pi}^\perp = \partial_i \Pi_i^\perp = 0 \quad \text{rot } \vec{\Pi}^{//} = \vec{0}. \quad (4.5.15)$$

Ces composantes sont données par

$$\Pi_i^\perp(\vec{x}) = \int dy^3 \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}) \Pi_j(\vec{y}) \quad (4.5.16)$$

$$\Pi_i^{//}(\vec{x}) = \int dy^3 \delta_{ij}^{//}(\vec{x} - \vec{y}) \Pi_j(\vec{y}) \quad (4.5.17)$$

où on reconnaît la fonction delta transverse  $\delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y})$  et la fonction delta longitudinale  $\delta_{ij}^{//}(\vec{x} - \vec{y})$ . Mais le champs vectoriel  $\Pi^i$  vérifie déjà la condition de transversalité  $\text{div } \vec{\Pi} = 0$ , on déduit alors que  $\Pi_i(\vec{x}) = \Pi_i^\perp(\vec{x})$  et  $\Pi_i^{//} = 0$ . Finalement,

$$\Pi_i(\vec{x}) = \int dy^3 \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}) \Pi_j(\vec{y}) \quad \text{avec} \quad \partial_i \Pi_i(\vec{x}) = 0 \quad (4.5.18)$$

où

$$\delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}) = \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_i \partial_j \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.5.19)$$

A présent, en comparant les équations (4.5.13) et (4.5.18) on obtient directement le crochet

$$\{\Lambda_i(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y})\} = -\delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.5.20)$$

Essayons maintenant de refaire les mêmes étapes avec l'équation (4.5.11). En effet

$$-\Delta\Lambda^i(\vec{x}) = \int dy^3 (\{\Pi^i(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\} \Pi^j(\vec{y}) + \{\Pi^i(\vec{x}), \partial'_j \Lambda^k(\vec{y})\} \partial'_j \Lambda^k(\vec{y}) \\ - \frac{1}{2} \{\Pi^i(\vec{x}), \partial'_k \Lambda^j(\vec{y})\} \partial'_j \Lambda^k(\vec{y}) - \frac{1}{2} \{\Pi^i(\vec{x}), \partial'_j \Lambda^k(\vec{y})\} \partial'_k \Lambda^j(\vec{y})).$$

Après quelques manipulations avec l'utilisation de la relation  $\partial'_j \Lambda^j(\vec{y}) = 0$ , la relation précédente se réduit à la forme

$$\Delta\Lambda^i(\vec{x}) = \int dy^3 (-\{\Pi^i(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\} \Pi^j(\vec{y}) + \{\Pi^i(\vec{x}), \Lambda^k(\vec{y})\} \Delta' \Lambda^k(\vec{y})). \quad (4.5.21)$$

Les  $\Lambda^i$  et  $\Pi^j$  sont complètement indépendants, donc par identification

$$\{\Pi^i(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\} = 0 \quad (4.5.22)$$

Il nous reste la relation

$$\Delta\Lambda_i(\vec{x}) = \int dy^3 \{\Pi_i(\vec{x}), \Lambda_j(\vec{y})\} \Delta' \Lambda_j(\vec{y}) \quad \text{avec} \quad \partial_i \Lambda_i = 0 \quad (4.5.23)$$

Le champ vectoriel  $\Delta\vec{\Lambda}$  est physiquement nul à l'infini et il est transversal car  $\text{div} \Delta\vec{\Lambda} = \Delta \text{div} \vec{\Lambda} = 0$ . Donc, il va vérifier la relation

$$\Delta\Lambda_i(\vec{x}) = \int dy^3 \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}) \Delta' \Lambda_j(\vec{y}) \quad \text{avec} \quad \partial_i \Lambda^i = 0 \quad (4.5.24)$$

L'identification directe entre les deux équations précédentes va nous permettre d'avoir le crochet qui suit

$$\{\Pi_i(\vec{x}), \Lambda_j(\vec{y})\} = \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.5.25)$$

On en déduit directement que les crochets (4.5.25) sont valides à tout instant

$$\{A_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)\} = -\delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.5.26)$$

Nous avons donc obtenu, à l'aide de la méthode GCI, les crochets bien connus en théorie des champs, qui sont nécessaires à la quantification canonique du champ de Maxwell.

### 4.5.2 Le champ de Maxwell dans l'espace des impulsions

A l'aide de la transformation de Fourier, les conditions initiales  $\vec{A}(\vec{x}, 0) = \vec{\Lambda}(\vec{x})$  et  $\vec{\pi}(\vec{x}, 0) = \vec{\Pi}(\vec{x})$  du champ de Maxwell et ses moments conjugués réels peuvent s'écrire

$$\vec{\Lambda}(\vec{x}) = \int dk^3 \vec{\alpha}(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \quad (4.5.27)$$

$$\vec{\Pi}(\vec{x}) = \int dk^3 \vec{\beta}(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \quad (4.5.28)$$

où  $\vec{\alpha}(\vec{k}), \vec{\beta}(\vec{k})$  sont des fonctions vectorielles réelles. A partir de la condition de Coulomb  $\partial_i \Lambda_i = 0$ , on obtient les relations d'orthogonalité  $\vec{\alpha}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0, \forall \vec{k} \in R^3$  (le vecteur  $\vec{k}$  est perpendiculaire au plan contenant le vecteur  $\vec{\alpha}(\vec{k})$ ). Il est donc toujours possible de trouver une base réelle de ce plan  $\{\vec{\varepsilon}_1(\vec{k}), \vec{\varepsilon}_2(\vec{k})\}$  vérifiant les relations

$$\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda'}(\vec{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad \vec{\varepsilon}_1(\vec{k}) \wedge \vec{\varepsilon}_2(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad , \quad (4.5.29)$$

$$\vec{\varepsilon}_1(-\vec{k}) = \vec{\varepsilon}_1(\vec{k}) \quad , \quad \vec{\varepsilon}_2(-\vec{k}) = -\vec{\varepsilon}_2(\vec{k}). \quad (4.5.30)$$

Ainsi, le vecteur  $\vec{\alpha}(\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^2 \alpha_\lambda(\vec{k}) \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})$  où  $\alpha_1(\vec{k})$  et  $\alpha_2(\vec{k})$  sont des composantes réelles indépendantes. A présent,

$$\vec{\Lambda}(\vec{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \int dk^3 \alpha_\lambda(\vec{k}) \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right). \quad (4.5.31)$$

De même, l'équation  $\partial_i \Pi_i = 0$ , va nous permettre d'écrire

$$\vec{\Pi}(\vec{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \int dk^3 \beta_\lambda(\vec{k}) \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \quad (4.5.32)$$

où les  $\beta_\lambda(\vec{k})$  sont les composantes réelles indépendantes du vecteur  $\vec{\beta}(\vec{k})$ . Il faut savoir que les trois vecteurs  $\left\{ \vec{\varepsilon}_1(\vec{k}), \vec{\varepsilon}_2(\vec{k}), \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right\}$  forment une base de tout l'espace et ils respectent la relation de fermeture

$$\sum_{\lambda=1}^2 \left( \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \right)_i \left( \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \right)_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}. \quad (4.5.33)$$

L'injection des expressions (4.5.31) et (4.5.32) dans le hamiltonien (4.5.9) va le réduire à la forme

$$H = \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\lambda'=1}^2 \int dq^3 \left( \beta_{\lambda'}(\vec{q})^2 + |\vec{q}|^2 \alpha_{\lambda'}(\vec{q})^2 \right). \quad (4.5.34)$$

Calculons à ce stade le crochet  $\{\vec{\Lambda}(\vec{x}), H\}$  en fonction des  $\alpha_\lambda(\vec{k})$  et  $\beta_\lambda(\vec{k})$ . En effet,

$$\begin{aligned} \{\vec{\Lambda}(\vec{x}), H\} &= (2\pi)^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int dk^3 dq^3 \left( \left\{ \alpha_\lambda(\vec{k}), \beta_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} \beta_{\lambda'}(\vec{q}) + |\vec{q}^2| \left\{ \alpha_\lambda(\vec{k}), \alpha_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} \alpha_{\lambda'}(\vec{q}) \right) \\ &\quad \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \end{aligned}$$

D'après (4.5.10), cette équation doit être comparée avec (4.5.32) pour obtenir immédiatement les crochets

$$\left\{ \alpha_\lambda(\vec{k}), \beta_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{q}) \quad , \quad \left\{ \alpha_\lambda(\vec{k}), \alpha_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} = 0. \quad (4.5.35)$$

Nous avons aussi,

$$\begin{aligned} \{\vec{\Pi}(\vec{x}), H\} &= (2\pi)^3 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int dk^3 dq^3 \left( \left\{ \beta_\lambda(\vec{k}), \beta_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} \beta_{\lambda'}(\vec{q}) + |\vec{q}^2| \left\{ \beta_\lambda(\vec{k}), \alpha_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} \alpha_{\lambda'}(\vec{q}) \right) \\ &\quad \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right) \end{aligned}$$

et

$$-\Delta \vec{\Lambda}(\vec{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \int dk^3 \vec{k}^2 \alpha_\lambda(\vec{k}) \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left( \frac{1+i}{2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}} \right).$$

Selon (4.5.11),  $-\Delta \vec{\Lambda}(\vec{x}) = \{\vec{\Pi}(\vec{x}), H\}$ , donc après une identification directe, on aura les crochets

$$\left\{ \beta_\lambda(\vec{k}), \alpha_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{q}) \quad , \quad \left\{ \beta_\lambda(\vec{k}), \beta_{\lambda'}(\vec{q}) \right\} = 0. \quad (4.5.36)$$

Finalement, pour avoir le crochet  $\{\Lambda^k(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y})\}$ , il suffit d'utiliser les résultats (4.5.35) et (4.5.36) et la relation de fermeture (4.5.33). En effet,

$$\{\Lambda_i(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y})\} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int dk^3 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|k^2|} \right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = -\delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.5.37)$$

Ce résultat est identique au résultat déjà obtenus dans la section précédente. On conclut donc que la méthode GCI fonctionne bel et bien dans l'espace ordinaire et dans l'espace de Fourier.

## 4.6 Modèle sigma non linéaire $\mathbf{O}(3)$

Cette théorie est décrite par le lagrangien  $L = \int dx \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \lambda (\phi_a \phi_a - 1) \right)$  où  $a \in \{1, 2, 3\}$  et  $\mu \in \{0, 1\}$  tandis que  $\lambda(t, x)$  est un multiplicateur Lagrange. Les moments conjugués des champs  $\phi_a$  et  $\lambda$  sont  $\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_a)} = \dot{\phi}_a$  et  $\pi_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \lambda)} = 0$  respectivement. Les équations d'Euler-Lagrange conduisent aux équations de mouvement

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_a = \square \phi_a = 2\lambda \phi_a \quad \Rightarrow \quad \phi_a \square \phi_b = \phi_b \square \phi_a \quad a, b \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.6.1)$$

et

$$\phi_a^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1. \quad (4.6.2)$$

Les équations (4.6.1), peuvent s'écrire en terme des moments conjugués  $\pi_a = \dot{\phi}_a$  sous la forme

$$\phi_a (\dot{\pi}_b - \partial_x^2 \phi_b) = \phi_b (\dot{\pi}_a - \partial_x^2 \phi_a) \quad a, b \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.6.3)$$

Le hamiltonien correspondant à notre lagrangien est

$$H = \int \frac{dx}{2} (\pi_a^2 + \partial_x^2 \phi_a \partial_x^2 \phi_a). \quad (4.6.4)$$

De la contrainte  $\phi_a^2 = 1$ , on propose d'écrire les champs  $\phi_a$  en fonctions de deux champs indépendants  $\alpha(x, t)$  et  $\beta(x, t)$  comme suit

$$\phi_1(x, t) = \cos \alpha(x, t) ; \quad \phi_2(x, t) = \sin \alpha(x, t) \cos \beta(x, t) ; \quad \phi_3(x, t) = \sin \alpha(x, t) \sin \beta(x, t). \quad (4.6.5)$$

En utilisant  $\pi_a = \dot{\phi}_a$ , on déduit les expressions des moments conjugués

$$\pi_1 = -\dot{\alpha} \sin \alpha ; \quad \pi_2 = \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta ; \quad \pi_3 = \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta \quad (4.6.6)$$

où  $\dot{\alpha}(x, t) = \partial_t \alpha(x, t)$  et  $\dot{\beta}(x, t) = \partial_t \beta(x, t)$ . La substitution dans le hamiltonien (4.6.4) conduit à la forme réduite

$$H = \int \frac{dx}{2} \left( \dot{\alpha}^2 + \alpha'^2 + (\dot{\beta}^2 + \beta'^2) \sin^2 \alpha \right), \quad (4.6.7)$$

où  $\alpha'(x, t) = \partial_x \alpha(x, t)$  et  $\beta'(x, t) = \partial_x \beta(x, t)$ . A l'aide des équations d'Euler-Lagrange (4.6.1), on déduit ces deux équations

$$\square \alpha = \ddot{\alpha} - \alpha'' = (\dot{\beta}^2 - \beta'^2) \cos \alpha \sin \alpha, \quad (4.6.8)$$

$$\square \beta = \ddot{\beta} - \beta'' = -2 \left( \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha' \beta' \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (4.6.9)$$

L'étape suivante consiste à écrire les champs  $\xi_I \in \{\phi_a, \pi_a\}$  sous la forme d'un développement de Taylor du premier ordre  $\xi_I(t) = \xi_I(0) + \dot{\xi}_I(0)t + O(t^2)$  au voisinage de l'instant initial  $t = 0$ . Autrement dit,

$$\begin{cases} \phi_a(x, t) = \phi_a(x, 0) + \dot{\phi}_a(x, 0) t + O(t^2) \\ \pi_a(x, t) = \pi_a(x, 0) + \dot{\pi}_a(x, 0) t + O(t^2) \end{cases} \quad (4.6.10)$$

où  $\phi_a(x, 0)$  et  $\pi_a(x, 0)$  sont les conditions initiales associées aux champs  $\phi_a(x, t)$  et  $\pi_a(x, t)$ . A l'aide des relations (4.6.5) et (4.6.6), ces conditions peuvent s'exprimer en terme de  $\alpha(x, 0) = A(x)$ ,  $\beta(x, 0) = B(x)$ ,  $\dot{\alpha}(x, 0) = V(x)$  et  $\dot{\beta}(x, 0) = W(x)$ . En particulier<sup>(1)</sup>,

$$\phi_2(x, 0) = \sin A \cos B, \quad (4.6.11)$$

$$\pi_1(x, 0) = -V \sin A. \quad (4.6.12)$$

Les moments conjugués sont  $\pi_a(t, x) = \dot{\phi}_a(t, x)$ , donc à l'instant initial nous avons  $\pi_a(0, x) = \dot{\phi}_a(0, x)$ , particulièrement,

$$\dot{\phi}_2(0, x) = V \cos A \cos B - W \sin A \sin B. \quad (4.6.13)$$

A partir de la définition (4.6.6), on a  $\pi_1 = -\dot{\alpha} \sin \alpha$ . Après la dérivation par rapport au temps, on trouve que  $\dot{\pi}_1 = -\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha$ . Maintenant, en utilisant (4.6.8), nous obtenons l'équation

$$\dot{\pi}_1 = -\alpha'' \sin \alpha + \left( \dot{\beta}^2 - \beta'^2 \right) \cos \alpha \sin^2 \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha. \quad (4.6.14)$$

En prenant  $t = 0$ , on déduit que

$$\dot{\pi}_1(x, 0) = -A'' \sin A + \left( W^2 - B'^2 \right) \cos A \sin^2 A - V^2 \cos A. \quad (4.6.15)$$

Finalement, nous obtenons les développements de Taylor au premier ordre

$$\begin{cases} \phi_2(x, t) = \sin A \cos B + (V \cos A \cos B - W \sin A \sin B) t + O(t^2), \\ \pi_1(x, t) = -V \sin A - \left( A'' \sin A + \left( -W^2 + B'^2 \right) \cos A \sin^2 A + V^2 \cos A \right) t + O(t^2). \end{cases} \quad (4.6.16)$$

Comme le hamiltonien est conservé, il peut s'écrire

$$H = H|_{t=0} = \int \frac{dx}{2} \left( V^2 + A'^2 + \left( W^2 + B'^2 \right) \sin^2 A \right). \quad (4.6.17)$$

<sup>(1)</sup>Pour appliquer l'approche GCI, il suffit d'utiliser  $\phi_2$  et  $\pi_1$ . Bien sur, un autre choix est possible.

A ce stade, la méthode "CI" généralisée peut être appliquée en prenant les équations de Hamilton au voisinage de l'instant initial  $\dot{\xi}_a \Big|_{t=0} = \{\xi_a(0), H\}$ . Dans notre cas, ces équations sont  $\dot{\phi}_a(x, t) \Big|_{t=0} = \{\phi_a(x, 0), H\}$  et  $\dot{\pi}_a(x, t) \Big|_{t=0} = \{\pi_a(x, 0), H\}$ . Commençons par le champ  $\phi_2(x, t)$  qui satisfait l'équation  $\dot{\phi}_2(x, t) \Big|_{t=0} = \{\phi_2(x, 0), H\}$ , où  $\phi_2(x, 0) = \sin A(x) \cos B(x)$  et  $H = \int \frac{dy^3}{2} \left( V^2 + A'^2 + (W^2 + B'^2) \sin^2 A \right) (y)$ . En effet, le crochet  $\{\phi_2(x, 0), H\}$  peut être développé pour obtenir la forme explicite<sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} \{\phi_2(x, 0), H\} = \int dy \left( \{A(x), V(y)\} \underline{V(\vec{y}) \cos A(\vec{x}) \cos B(\vec{x})} - \{B(x), V(y)\} V(y) \sin A(x) \sin B(x) \right. \\ + \{A(x), A'(y)\} A'(y) \cos A(x) \cos B(x) - \{B(x), A'(y)\} A'(y) \sin A(x) \sin B(x) \\ + \{A(x), W(y)\} W(y) \cos A(x) \cos B(x) \sin^2 A(y) \\ - \{B(x), W(y)\} \underline{W(\vec{y}) \sin A(\vec{x}) \sin B(\vec{x})} \sin^2 A(y) \\ + \{A(x), B'(y)\} B'(y) \cos A(x) \cos B(x) \sin^2 A(y) \\ - \{B(x), B'(y)\} B'(y) \sin A(x) \sin B(x) \sin^2 A(y) \\ + \{A(x), A(y)\} \cos A(x) \cos B(x) \cos A(y) \sin A(y) (W^2 + B'^2) \\ \left. + \{B(x), A(y)\} \sin A(x) \sin B(x) \cos A(y) \sin A(y) (W^2 + B'^2) \right) \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

D'un autre côté, d'après (4.6.16), on a

$$\dot{\phi}_2(x, t) \Big|_{t=0} = V(x) \cos A(x) \cos B(x) - W(x) \sin A(x) \sin B(x). \quad (4.6.19)$$

La comparaison des deux égalités précédentes conduit aux crochets non nuls suivants<sup>(3)</sup>

$$\{A(x), V(y)\} = \delta(x - y) \quad ; \quad \{B(x), W(y)\} = \frac{\delta(x - y)}{\sin^2 A(y)}, \quad (4.6.20)$$

tandis que les autres crochets sont nuls.

<sup>(2)</sup>Ici, nous allons utiliser les propriétés  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ , et  $\{k(f), g\} = k'(f)\{g, f\}$ .

<sup>(3)</sup>Cela est possible en utilisant la relation bien connue  $f(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y})$ .

Faisons la même chose avec  $\pi_1(x, t)$  en commençant par l'équation de Hamilton  $\dot{\pi}_1(x, t)|_{t=0} = \{\pi_1(x, 0), H\}$  où  $\pi_1(x, 0) = -V(x) \sin A(x)$ . En effet,

$$\begin{aligned} \{\pi_1(x, 0), H\} = & - \int dy \left( \{V(x), V(y)\} V(y) \sin A(x) + \{A(x), V(y)\} V(x) V(y) \cos A(x) \right. \\ & - \{V(x), A(y)\} A''(y) \sin A(x) + \{A(x), A'(y)\} A'(y) V(x) \cos A(x) \\ & + \{V(x), W(y)\} \sin A(x) W(y) \sin^2 A(y) \\ & + \{A(x), W(y)\} W(y) V(x) \cos A(x) \sin^2 A(y) \\ & + \{V(x), B'(y)\} B'(y) \sin A(x) \sin^2 A(y) \\ & + \{A(x), B'(y)\} B'(y) V(x) \sin^2 A(y) \cos A(x) \\ & + \{V(x), A(y)\} \left( W^2 + B^2 \right) \sin A(x) \sin A(y) \cos A(y) \\ & \left. + \{A(x), A(y)\} V(x) \left( W^2 + B^2 \right) \cos A(x) \sin A(y) \sin A(x) \right). \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

où nous avons remplacé  $\{V(x), A'(y)\} A'(y) \sin A(x)$  par  $-\{V(x), A(y)\} A''(y) \sin A(x)$  après une intégration par parties. Cette opération est possible car  $\{A(x), A(y)\} = 0$  et

$$\{V(x), A'(y)\} A'(y) \sin A(x) = \partial_y (\{V(x), A(y)\} A'(y) \sin A(x)) - \{V(x), A(y)\} A''(y) \sin A(x). \quad (4.6.22)$$

En utilisant les crochets déjà obtenus ci-dessus, nous pouvons réduire notre expression

$$\begin{aligned} \{\pi_1(x, 0), H\} = & -V^2(x) \cos A(x) - A''(x) \sin A(x) - \left( W^2(x) + B^2(x) \right) \sin^2 A(x) \cos A(y) \\ & - \int dy \left( \{V(x), V(y)\} V(y) \sin A(x) + \{V(x), W(y)\} \sin A(x) W(y) \sin^2 A(y) \right. \\ & \left. + \{V(x), B'(y)\} B'(y) \sin A(x) \sin^2 A(y) \right) \end{aligned}$$

Maintenant, par l'identification avec l'équation (4.6.16), on trouve que

$$\dot{\pi}_1(x, t)|_{t=0} = - \left( A'' \sin A + \left( -W^2 + B^2 \right) \cos A \sin^2 A + V^2 \cos A \right) (x). \quad (4.6.23)$$

Au final, on obtient la relation

$$(2W^2 \cos A \sin^2 A) (x) = - \int dy \left( \{V(x), V(y)\} V(y) \sin A(x) \right) \quad (4.6.24)$$

$$+ \{V(x), W(y)\} \sin A(x) W(y) \sin^2 A(y) \quad (4.6.25)$$

$$+ \{V(x), B'(y)\} B'(y) \sin A(x) \sin^2 A(y). \quad (4.6.26)$$

Ceci n'est possible que si le crochet non nul est

$$\{V(x), W(y)\} = 2W(x) \frac{\cos A(x)}{\sin A(x)} \delta(x - y). \quad (4.6.27)$$

Selon la méthode "CI" généralisée, les crochets (4.6.20) et (4.6.27) gardent leur forme dans le temps lorsqu'on remplace les conditions initiales  $\alpha(x, 0) = A(x)$ ,  $\beta(x, 0) = B(x)$ ,  $\dot{\alpha}(x, 0) = V(x)$  et  $\dot{\beta}(x, 0) = W(x)$  par leurs champs correspondants  $\alpha(x, t)$ ,  $\beta(x, t)$ ,  $\dot{\alpha}(t, x)$  et  $\dot{\beta}(t, x)$  évalués à tout instant. Les crochets non nuls sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\alpha(t, x), \dot{\alpha}(t, x)\} = \delta(x - y) \\ \{\beta(t, x), \dot{\beta}(t, x)\} = \frac{\delta(x-y)}{\sin^2 \alpha(t, x)} \\ \{\dot{\alpha}(x, t), \dot{\beta}(y, t)\} = 2\dot{\beta}(t, x) \frac{\cos \alpha(t, x)}{\sin \alpha(t, x)} \delta(x - y). \end{array} \right. \quad (4.6.28)$$

Les crochets entre les champs  $\phi_a$  et leurs moments conjugués  $\pi_a$  peuvent être déduits en utilisant ce résultat et les relations (4.6.5) et (4.6.6).

Tout d'abord, nous avons  $\{\phi_a(t, x), \phi_b(t, y)\} = 0$  car  $\{\alpha(t, x), \beta(t, y)\} = 0$ . Pour donner un aspect des calculs, prenons les crochets non triviaux suivants  $\{\phi_1(t, x), \pi_1(t, y)\}$ ,  $\{\phi_1(t, x), \pi_2(t, y)\}$  et  $\{\pi_1(t, x), \pi_2(t, y)\}$ . En effet,  $\phi_1(t, x) = \cos \alpha(t, x)$  et  $\pi_1(t, y) = \dot{\alpha}(t, y) \sin \alpha(t, y)$ . Leur crochet est

$$\begin{aligned} \{\phi_1(t, x), \pi_1(t, y)\} &= \{\alpha(x, t), \dot{\alpha}(y, t)\} \sin \alpha(x, t) \sin \alpha(t, y) \\ &= \delta(x - y) \sin^2 \alpha(x, t) = (\phi_2^2 + \phi_3^2) \delta(x - y) \\ &= (1 - \phi_1^2) \delta(x - y). \end{aligned}$$

En utilisant la relation  $\pi_2(t, y) = \dot{\alpha}(t, y) \cos \alpha(t, y) \cos \beta(t, y) - \dot{\beta}(t, y) \sin \alpha(t, y) \sin \beta(t, y)$ , on peut calculer le crochet  $\{\phi_1(t, x), \pi_2(t, y)\}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \{\phi_1(t, x), \pi_2(t, y)\} &= \{\cos \alpha(t, x), \dot{\alpha}(t, y)\} \cos \alpha(t, y) \cos \beta(t, y) \\ &= -\{\alpha(t, x), \dot{\alpha}(t, y)\} \sin \alpha(t, x) \cos \alpha(t, y) \cos \beta(t, y) \\ &= -\delta(x - y) \sin \alpha(t, x) \cos \alpha(t, x) \cos \beta(t, x) \\ &= -\phi_1 \phi_2 \delta(x - y). \end{aligned}$$

Finissons maintenant avec le crochet  $\{\pi_1(t, x), \pi_2(t, y)\}$ . En effet,

$$\begin{aligned} \{\pi_1(t, x), \pi_2(t, y)\} &= \{\dot{\alpha}(t, x), \alpha(t, y)\} \sin \alpha(t, x) \dot{\alpha}(t, y) \sin \alpha(t, y) \cos \beta(t, y) \\ &\quad + \{\dot{\alpha}(t, x), \dot{\beta}(t, y)\} \sin \alpha(t, x) \sin \alpha(t, y) \sin \beta(t, y) \\ &\quad + \{\dot{\alpha}(t, x), \alpha(t, y)\} \sin \alpha(t, x) \dot{\beta}(t, y) \cos \alpha(t, y) \sin \beta(t, y) \\ &\quad - \{\alpha(t, x), \dot{\alpha}(t, y)\} \dot{\alpha}(t, x) \cos \alpha(t, x) \cos \alpha(t, y) \cos \beta(t, y). \end{aligned}$$

A l'aide de (4.6.28), et après quelques simplifications on obtient le crochet

$$\{\pi_1(t, x), \pi_2(t, y)\} = - \left( \dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta \right) (t, x) \delta(x - y) \quad (4.6.29)$$

$$= - (\phi_1(t, x) \pi_2(t, x) - \phi_2(t, x) \pi_1(t, x)) \delta(x - y). \quad (4.6.30)$$

Suivant la même analogie, on peut déduire toutes les crochets

$$\begin{cases} \{\phi_a(t, x), \phi_b(t, y)\} = 0 \\ \{\phi_a(t, x), \pi_b(t, y)\} = \left( \delta_{ab} - \frac{\phi_a(t, x) \phi_b(t, x)}{\phi_c^2(t, x)} \right) \delta(x - y) \\ \{\pi_\phi(t, x), \pi_\phi(t, y)\} = -\frac{1}{\phi_c^2(t, x)} (\phi_a(t, x) \pi_b(t, x) - \pi_a(t, x) \phi_b(t, x)) \delta(x - y). \end{cases} \quad (4.6.31)$$

avec  $\phi_c^2 = 1$ . Ces crochets de Dirac non triviaux sont les mêmes obtenus à l'aide des autres méthodes, à savoir les approches de Dirac et de Faddeev-Jackiws. [38, 39, 40, 41].

## 4.7 Le champ de Proca

La méthode "CI" généralisée peut être utilisée pour quantifier le champ de Proca [10] décrivant des particules massives de spin 1 (les bosons de jauge massifs). Le lagrangien de Proca n'est rien d'autre que lagrangien de Maxwell avec un terme de masse qui brise la symétrie de jauge. Autrement-dit, il faut ajouter le terme de masse  $\frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu$  au lagrangien du champ Maxwell pour avoir le lagrangien de Proca

$$L = \int dx^3 \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu \right) \quad (4.7.1)$$

où  $F_{\mu\nu}$  est le tenseur électromagnétique défini par  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  où  $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Les moments conjugués du champ  $A^\mu$  sont  $\pi^\mu = -F^{0\mu}$ , ainsi  $\pi_0 = 0$ , et  $\pi^i = -F^{0i}$ . Explicitement,

$$\pi_0 = 0 \quad , \quad \dot{A}_i = \partial_i A_0 - \pi_i. \quad (4.7.2)$$

À partir du lagrangien (4.7.1), on obtient les équations de Proca  $\partial_\beta F^{\beta\mu} = -m^2 A^\mu$  comme une conséquence des équations d'Euler-Lagrange. L'application de  $\partial_\mu$  sur ces équations nous permet de conclure que le champ de Proca vérifie la condition de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , ce qui réduit les équations de mouvement à la forme  $(\partial_\beta \partial^\beta + m^2) A^\mu = 0$ . Après la séparation des composantes spatiales et temporelle de l'équation précédente, et faisant appel aux relations (4.7.2), on obtient la contrainte  $A^0 = \frac{-\partial_i \pi^i}{m^2}$  et les équations

$$\dot{A}_k = - \left( \frac{1}{m^2} \partial_k \partial_i \pi^i + \pi_k \right) \quad (4.7.3)$$

$$\dot{\pi}^k = \partial_i \partial^i A^k - \partial_i \partial^k A^i + m^2 A^k. \quad (4.7.4)$$

On remarque que les variables indépendantes de système sont  $\xi^I \in \{A^i, \pi^i\}$ , car  $\pi_0 = 0 = 0$  et  $A^0 = \frac{-\partial_i \pi^i}{m^2}$ . Ainsi le hamiltonien se réduit à la forme

$$H = \int dx^3 \left( \frac{1}{2m^2} (\partial_i \pi^i)^2 + \frac{1}{2} (\pi^i)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i A^j)^2 - \frac{1}{2} \partial_i A^j \partial_j A^i + \frac{m^2}{2} (A^i)^2 \right). \quad (4.7.5)$$

Pour appliquer la méthode CI généralisée, effectuons un développement de Taylor à l'ordre un des variables  $\xi^I \in \{A^i, \pi^i\}$  au voisinage de l'instant  $t = 0$  de la forme

$$\begin{cases} A^k(\vec{x}, t) = A^k(\vec{x}, t)|_{t=0} + \dot{A}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} t + O(t^2) \\ \pi^k(\vec{x}, t) = \pi^k(\vec{x}, t)|_{t=0} + \dot{\pi}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} t + O(t^2) \end{cases} \quad (4.7.6)$$

Supposons que nous partons des conditions initiales  $A^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = \Lambda^k(\vec{x})$ , et  $\pi^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = \Pi^k(\vec{x})$ , alors d'après (4.7.3) et (4.7.4), on déduit facilement les relations  $\dot{A}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = -\Pi^k(\vec{x}) - \frac{1}{m^2} \partial^k \partial_i \Pi^i(\vec{x})$  et  $\dot{\pi}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = \partial_i \partial^i \Lambda^k(\vec{x}) - \partial_i \partial^k \Lambda^i(\vec{x}) + m^2 \Lambda^k(\vec{x})$ . Au final,

$$A^k(\vec{x}, t) = \Lambda^k(\vec{x}) - \left( \Pi^k(\vec{x}) + \frac{\partial^k \partial_i \Pi^i(\vec{x})}{m^2} \right) t + O(t^2) \quad (4.7.7)$$

$$\pi^k(\vec{x}, t) = \Pi^k(\vec{x}) + \left( \partial_i \partial^i \Lambda^k(\vec{x}) - \partial^k \partial_i \Lambda^i(\vec{x}) + m^2 \Lambda^k(\vec{x}) \right) t + O(t^2) \quad (4.7.8)$$

Le hamiltonien est conservé dans le temps, alors  $H = H|_{t=0}$ . Autrement dit, d'après (4.7.5)

$$H = \int dx^3 \left( \frac{1}{2} (\Pi^i(\vec{x}))^2 + \frac{1}{2m^2} (\partial_i \Pi^i(\vec{x}))^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \Lambda^j(\vec{x}))^2 - \frac{1}{2} \partial_i \Lambda_j(\vec{x}) \partial^j \Lambda^i(\vec{x}) + \frac{m^2}{2} (\Lambda^j(\vec{x}))^2 \right). \quad (4.6)$$

La méthode "CI" généralisée consiste à utiliser les équations de Hamilton au voisinage de l'instant initial  $t = 0$ , à savoir  $\xi|_{t=0} = \{\xi|_{t=0}, H\}$ . Commençons par  $A^k(\vec{x}, t)$  qui doit obéir à l'équation  $\dot{A}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = \{A^k(\vec{x}, t)|_{t=0}, H\}$ , d'où<sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} -\Pi^k(\vec{x}) - \frac{\partial^k \partial_i \Pi^i(\vec{x})}{m^2} &= \int dy^3 \left[ \{ \Lambda^k(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y}) \} \left( -\Pi^j(\vec{y}) - \frac{1}{m^2} \partial'^j \partial'_i \Pi^i(\vec{y}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \{ \Lambda^k(\vec{x}), \Lambda_j(\vec{y}) \} \left( -\partial'_i \partial'^i \Lambda^j(\vec{y}) + \partial'_i \partial'^j \Lambda^i(\vec{y}) - m^2 \Lambda^j(\vec{y}) \right) \right]. \end{aligned}$$

On déduit directement par identification les crochets suivants au voisinage de l'instant initial

$$\{ \Lambda^k(\vec{x}), \Lambda_j(\vec{y}) \} = 0 \quad ; \quad \{ \Lambda^k(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y}) \} = \delta_j^k \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.7.9)$$

<sup>(4)</sup>Nous allons utiliser la propriété  $\int dy^3 (\Gamma(\vec{y}) \partial'_i \Omega(\vec{y})) = - \int dy^3 (\partial'_i \Gamma(\vec{y}) \Omega(\vec{y}))$  valable pour ses quantités  $\Gamma$  et  $\Omega$  nulle à l'infini, où  $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ .

De la même manière, partant de l'équation  $\dot{\pi}^k(\vec{x}, t)|_{t=0} = \{\pi^k(\vec{x}, t)|_{t=0}, H\}$ , on aboutit à la relation

$$(\partial_i \partial^i \Lambda^k - \partial^k \partial_i \Lambda^i + m^2 \Lambda^k)(\vec{x}) = \int dy^3 \left( \{\Pi^k(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y})\} \left( -\Pi^j(\vec{y}) - \frac{1}{m^2} \partial'^j \partial'_i \Pi^i(\vec{y}) \right) + \{\Pi^k(\vec{x}), \Lambda_j(\vec{y})\} \left( -\partial'_i \partial'_i \Lambda^j(\vec{y}) + \partial'_i \partial'^j \Lambda^i(\vec{y}) - m^2 \Lambda^j(\vec{y}) \right) \right)$$

d'où les crochets

$$\{\Pi^k(\vec{x}), \Pi_j(\vec{y})\} = 0 \quad ; \quad \{\Pi^k(\vec{x}), \Lambda_j(\vec{y})\} = -\delta_j^k \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.7.10)$$

Enfin, selon la méthode "CI" généralisée, les crochets des équations (4.7.9) et (4.7.10) gardent leur forme dans le temps, ce qui implique que les seuls crochets non nuls sont

$$\{A^k(t, \vec{x}), \pi_j(t, \vec{y})\} = \delta_j^k \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.7.11)$$

Ces crochets, identiques à ceux de littérature [10], constituent la preuve d'équivalence de cette méthode aux autres méthodes de quantification, du moins dans le traitement du champ de Proca.

## 4.8 Le champ de Stueckelberg

Le lagrangien de Proca (4.7.1) n'est pas un invariant de jauge, ce qui n'est pas très souhaitable pour un lagrangien physique. Mais une autre formulation invariante de jauge abélienne de ce champ subsiste. Elle est proposée par Stueckelberg [15, 16], grâce à l'introduction d'un champ scalaire supplémentaire qui va restaurer la symétrie de jauge, en présence du terme de masse. Le lagrangien de stueckelberg manifeste une forte analogie avec le lagrangien de London, bien connu lors de l'étude du phénomène de la supraconductivité [19, 17, 20, 18, 21]. La quantification de ce champ a fait l'objet de plusieurs analyses dans le cadre des approches de Dirac et de Faddeev-jackiw [19, 22, 23].

Dans cette section, nous traitons avec la méthode GCI, l'action Stueckelberg qui décrit un champ scalaire  $\phi$  interagissant avec le champ  $A_\mu$  de telle sorte que le nouveau lagrangien soit [15, 25, 26, 27, 28]

$$L = \int dx^3 \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi - mA_\mu)(\partial^\mu \phi - mA^\mu) \right). \quad (4.8.1)$$

En effet, ce lagrangien de Stueckelberg est invariant de jauge quand les champs se transforment comme  $\phi \longrightarrow \phi + \chi$  et  $A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$ , où  $\chi = \chi(x)$  est une fonction quelconque de l'espace-temps. Les équations d'Euler-Lagrange relatives aux champs  $A_\mu$  et  $\phi$  nous

fournissent alors les équations de mouvement du champ  $A_\mu$

$$m(\partial^\mu \phi - mA^\mu) - \partial_\beta F^{\beta\mu} = 0 \quad (4.8.2)$$

et du champ  $\phi$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.8.3)$$

Pour fixer la jauge, choisissons les conditions supplémentaires  $A^0 = 0$  et  $\partial_i A^i = -m\phi$ . Sachant que  $\pi_\phi = \dot{\phi} - mA_0$ ,  $\pi_0 = 0$  et  $\pi^i = -F^{0i} = \partial^i A^0 - \dot{A}^i$ , les équations (4.8.2), (4.8.3) se réduisent à

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad \pi_0 = 0 \quad (4.8.4)$$

$$\dot{A}^i = -\pi^i \quad \text{et} \quad \dot{\pi}^i = m^2 A^i + \partial_j \partial^j A^i \quad (4.8.5)$$

et

$$\pi_\phi = \frac{1}{m} \partial^i \pi_i \quad \text{et} \quad \phi = -\frac{1}{m} \partial_i A^i. \quad (4.8.6)$$

Ainsi, les seules variables indépendantes de ce système sont  $\xi^I \in \{A^i, \pi^i\}$ . Le hamiltonien  $H$  se réduit à l'expression

$$H = \int dx^3 \left( \frac{1}{2} (\pi^i)^2 + \frac{1}{2m^2} (\partial_i \pi^i)^2 + \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial^i A^j - \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial^j A^i + \frac{m^2}{2} \left( \frac{1}{m} \partial_i \partial_j A^j + A_i \right)^2 \right). \quad (4.8.7)$$

Pour trouver un développement limité à l'ordre un de la solution, partons des deux conditions initiales  $\Lambda^i(\vec{x})$  et  $\Pi^i(\vec{x})$ . Autrement-dit, supposons que  $A^i(\vec{x}, 0) = \Lambda^i(\vec{x})$  et  $\pi^i(\vec{x}, 0) = \Pi^i(\vec{x})$ . En utilisant les équations (4.8.4) et (4.8.3) au voisinage de l'instant initial, on déduit que  $\dot{A}^i|_{t=0} = -\pi^i|_{t=0} = -\Pi^i(\vec{x})$  et  $\dot{\pi}^i|_{t=0} = m^2 A^i + \partial_j \partial^j A^i|_{t=0} = m^2 \Lambda^i + \partial_j \partial^j \Lambda^i$ . Ainsi on peut écrire le développement de Taylor à l'ordre un de la solution sous la forme

$$A^i(\vec{x}, t) = \Lambda^i(\vec{x}) - \Pi^i(\vec{x})t + O(t^2) \quad (4.8.8)$$

$$\pi^i(\vec{x}, t) = \Pi^i(\vec{x}) + (m^2 \Lambda^i - \Delta \Lambda^i) t + O(t^2) \quad (4.8.9)$$

Comme le hamiltonien est conservé dans le temps, on peut le réécrire sous la forme

$$H = \int dx^3 \left( \frac{1}{2} (\Pi^i)^2 + \frac{1}{2m^2} (\partial_i \Pi^i)^2 + \frac{1}{2} \partial_i \Lambda_j \partial^i \Lambda^j - \frac{1}{2} \partial_i \Lambda_j(\vec{x}) \partial^j \Lambda^i + \frac{m^2}{2} \left( \frac{1}{m^2} \partial_i \partial_j \Lambda^j + \Lambda_i \right)^2 \right). \quad (4.8.10)$$

Appliquons maintenant la méthode "CI" généralisée qui utilise les équations de Hamilton au voisinage de l'instant initial en commençant par l'équation  $\dot{A}_k(\vec{x}, 0) = \{A_k(\vec{x}, 0), H\}$ .

D'après le développement limité (4.8.8) et l'expression (4.8.10) du hamiltonien, on obtient après de simples manipulations la relation

$$-\Pi_k(\vec{x}) = \int dy^3 \left[ \left( - \left( \delta_i^j + \frac{1}{m^2} \partial'_i \partial'^j \right) \{ \Lambda_k(\vec{x}), \Pi^i(\vec{y}) \} \right) \Pi_j(\vec{y}) + \left( \left( \delta_j^i + \frac{1}{m^2} \partial'_j \partial'^i \right) \{ \Lambda_k(\vec{x}), \Lambda_i(\vec{y}) \} \right) (\Delta' \Lambda^j(\vec{y}) - m^2 \Lambda^j(\vec{y})) \right] \quad (4.8.11)$$

En comparant les deux parties de l'expression précédente, on en déduit que

$$\left( \delta_i^j + \frac{1}{m^2} \partial'_i \partial'^j \right) \{ \Lambda_k(\vec{x}), \Pi^i(\vec{y}) \} = \delta_k^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad ; \quad \{ \Lambda_k(\vec{x}), \Lambda_i(\vec{y}) \} = 0 \quad (4.8.12)$$

La première équation peut-être inversée pour obtenir le crochet

$$\{ \Lambda_k(\vec{x}), \Pi^i(\vec{y}) \} = \left( \delta_k^i + \frac{\partial_k \partial^i}{\nabla^2 - m^2} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.8.13)$$

L'équation de Hamilton à l'instant initial de  $\pi^k(\vec{x}, t)$  est  $\dot{\pi}^k(\vec{x}, 0) = \{ \pi^k(\vec{x}, 0), H \}$ , donc grâce au développement limité (4.8.9) et à l'expression (4.8.10) du hamiltonien, on aura, toujours après de simples manipulations, la relation

$$m^2 \Lambda^k(\vec{x}) - \Delta \Lambda^k(\vec{x}) = \int dy^3 \left[ \left( - \left( \delta_i^j + \frac{1}{m^2} \partial'_i \partial'^j \right) \{ \Pi^k(\vec{x}), \Pi^i(\vec{y}) \} \right) \Pi_j(\vec{y}) + \left( \left( \delta_j^i + \frac{1}{m^2} \partial'_j \partial'^i \right) \{ \Pi^k(\vec{x}), \Lambda_i(\vec{y}) \} \right) (\Delta' \Lambda^j(\vec{y}) - m^2 \Lambda^j(\vec{y})) \right] \quad (4.8.14)$$

Par identification, on obtient directement

$$\begin{aligned} \left( \delta_j^i + \frac{1}{m^2} \partial'_j \partial'^i \right) \{ \Pi^k(\vec{x}), \Lambda_i(\vec{y}) \} &= -\delta_j^k \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \Rightarrow \\ \{ \Pi^k(\vec{x}), \Lambda_i(\vec{y}) \} &= - \left( \delta_k^i + \frac{\partial_k \partial^i}{\nabla^2 - m^2} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.8.15)$$

au moment où  $\{ \Pi^k(\vec{x}), \Pi^i(\vec{y}) \} = 0$ . Au final, les crochets non nuls à tout instant  $t$  vont être

$$\{ A_i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{y}, t), \} = \left( \delta_i^j + \frac{\partial_i \partial^k}{\nabla^2 - m^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.8.16)$$

Maintenant, en utilisant ce dernier résultat et les relations (4.8.6), on déduit facilement les autres crochets

$$\begin{aligned}\{\phi(\vec{x}, t), \pi^i(\vec{y}, t)\} &= -\frac{m}{\Delta - m^2} \partial^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A_i(\vec{x}, t), \pi_\phi(\vec{y}, t)\} &= \frac{m}{\Delta - m^2} \partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\phi(\vec{x}, t), \pi_\phi(\vec{y}, t)\} &= \left( \frac{\Delta}{\Delta - m^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).\end{aligned}\tag{4.8.17}$$

Ces résultats obtenus en utilisant la méthode "CI" généralisée, sont identiques à ceux des approches de Dirac et de Faddeev–Jackiw [22, 23], ce qui montre leur équivalence une autre fois, du moins, dans le cas étudié.

## 4.9 Modèle self-dual (SD)

La densité lagrangienne [34] décrivant cette interaction  $\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon^{\mu\gamma\rho}}{2m} B^\mu \partial^\gamma B^\rho + \frac{B_\mu B^\mu}{2}$  et les moments conjugués des champs sont  $\pi_\beta = -\frac{m}{2} \varepsilon_{\mu 0\beta} B^\mu$ . Explicitement,

$$\pi_0 = 0 \quad ; \quad \pi_i = -\frac{m}{2} \varepsilon_{0ij} B^j \quad i, j = 1, 2.\tag{4.9.1}$$

Les équations d'Euler-Lagrange conduisent aux équations  $\varepsilon^{\alpha\gamma\beta} \partial_\gamma B_\beta + m B^\alpha = 0$ , d'où les relations

$$\begin{cases} B^0 = \frac{\varepsilon^{0ik}}{m} \partial_i B_k \\ \partial_0 B_j = \partial_j B_0 - m \varepsilon_{0ij} B^i \end{cases} \Rightarrow \dot{B}_j = \frac{\varepsilon^{0ik}}{m} \partial_j \partial_i B_k - m \varepsilon_{0ij} B^i.\tag{4.9.2}$$

Le hamiltonien est donné par la formule suivante :

$$H = \int dx^2 \left( -\frac{1}{2} B_\mu B^\mu + \frac{\varepsilon^{0ij}}{m} B_0 \partial_i B_j \right).\tag{4.9.3}$$

Pour appliquer la méthode GCI, on va utiliser le développement limité à l'ordre un de la solution des équations de mouvement

$$B_j(\vec{x}, t) = B_j(\vec{x}, 0) + \dot{B}_j(\vec{x}, 0)t + O(t^2) \quad j \in \{1, 2\}.$$

Les conditions initiales sont  $B_j(\vec{x}, 0) = \tilde{B}_j(\vec{x})$ . En remplaçant dans (4.9.2), on aura  $\dot{B}_j(\vec{x}, 0) = \left( \frac{\varepsilon^{0kl}}{m} \partial_j \partial_k \tilde{B}_l(\vec{x}) - m \varepsilon_{0ij} \tilde{B}^i(\vec{x}) \right)$ , et le développement limité à l'ordre un va s'écrire

$$B_j(\vec{x}, t) = \tilde{B}_j(\vec{x}) + \left( \frac{\varepsilon^{0kl}}{m} \partial_j \partial_k \tilde{B}_l(\vec{x}) - m \varepsilon_{0ij} \tilde{B}^i(\vec{x}) \right) t + O(t^2).\tag{4.9.4}$$

Le hamiltonien est conservé dans temps, alors il s'exprime en fonction des conditions initiales sous la forme

$$\tilde{H} = H(\vec{x}, 0) = \int dx^2 \left( -\frac{1}{2} \tilde{B}^i(\vec{x}) \tilde{B}_i(\vec{x}) - \frac{1}{2m^2} \tilde{B}_j(\vec{x}) \partial_i \partial^i \tilde{B}^j(\vec{x}) + \frac{1}{2m^2} \tilde{B}_j(\vec{x}) \partial_i \partial^j \tilde{B}^i(\vec{x}) \right) \quad (4.9.5)$$

où on a utilisé la relation  $\tilde{B}^0 = \frac{\varepsilon^{0ik}}{m} \partial_i \tilde{B}_k$ .

Afin de déterminer le crochet  $\{B_j(\vec{x}), B_i(\vec{x})\}$ , nous allons utiliser l'équation de Hamilton à l'instant initial  $\dot{B}_j \Big|_{t=0} = \left\{ \tilde{B}_j(\vec{x}), \tilde{H} \right\}$  pour avoir l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{0kl}}{m} \partial_j \partial_k \tilde{B}_l(\vec{x}) - m \varepsilon_{0ij} \tilde{B}^i(\vec{x}) &= \int dy^2 \left( - \left\{ \tilde{B}_j(\vec{x}), \tilde{B}_i(\vec{y}) \right\} \tilde{B}^i(\vec{y}) \right. \\ &\quad - \frac{1}{m^2} \left\{ \tilde{B}_j(\vec{x}), \tilde{B}_m(\vec{y}) \right\} \partial_n \partial^n \tilde{B}^m(\vec{y}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{m^2} \left\{ \tilde{B}_j(\vec{x}), \tilde{B}_n(\vec{y}) \right\} \partial_i \partial^n \tilde{B}^i(\vec{y}) \right). \end{aligned}$$

On en déduit directement le crochet recherché

$$\left\{ \tilde{B}_j(\vec{x}), \tilde{B}_i(\vec{y}) \right\} = m \varepsilon_{0ij} \delta^2(x - y). \quad (4.9.6)$$

La covariance des crochets dans le temps nous permet de déduire le crochet

$$\{B_j(\vec{x}, t), B_i(\vec{y}, t)\} = m \varepsilon_{0ij} \delta^2(x - y). \quad (4.9.7)$$

A présent, on peut déduire les crochets faisant intervenir  $B_0(\vec{y}, t) = \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \partial^i B^j(\vec{y}, t)$ . En effet,

$$\{B_k(\vec{x}, t), B_0(\vec{y}, t)\} = \left\{ B_k(\vec{x}, t), \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \partial^i B^j(\vec{y}, t) \right\} = \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \partial'_i \{B_k(\vec{x}, t), B_j(\vec{y}, t)\}$$

où  $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ . Après simplification, on aboutit au crochet

$$\{B_k(\vec{x}, t), B_0(\vec{y}, t)\} = -\partial_k \delta^2(x - y). \quad (4.9.8)$$

De même,

$$\{B_k(\vec{x}, t), \pi^i(\vec{y}, t)\} = \left\{ B_k(\vec{x}, t), -\frac{\varepsilon^{0ij}}{2m} B_j(\vec{y}, t) \right\} = -\frac{\varepsilon^{0ij}}{2m} \{B_k(\vec{x}, t), B_j(\vec{y}, t)\}$$

d'où

$$\{B_k(\vec{x}, t); \pi^i(\vec{y}, t)\} = \frac{\delta_k^i}{2} \delta^2(x - y). \quad (4.9.9)$$

Les résultats obtenus ici sont cohérents avec ceux obtenus par les méthodes de Dirac et F-J [29, 35, 36], ce qui montre la validité de la méthode GCI.

Pour récapituler, dans ce chapitre, nous avons examiné avec succès la validité de la méthode "CI" généralisée comme étant une approche alternative, simple et directe de quantification des systèmes aux degrés de liberté finis et infinis. Grâce à un développement de Taylor à l'ordre un, nous avons d'abord trouvé les relations entre les variables et leurs dérivées à l'instant initial en utilisant les équations de mouvement. Ensuite, en postulant les équations de Hamilton à cet instant initial, nous avons déduit les crochets de Dirac entre les conditions initiales suite à une identification directe. Finalement, la covariance des crochets nous a permis de les avoir à tout instant.

---

# Conclusion Générale

L'objectif principal de cette thèse, intitulée "sur la quantification canonique des systèmes avec contraintes", est l'étude des systèmes singuliers sujets à des contraintes qui surgissent lors du passage à la formulation hamiltonienne. Dans sa version standard, la mécanique analytique reste impuissante devant les difficultés rencontrées à cause de ces contraintes, absentes dans le cas régulier. En particulier, les crochets de Poisson sont sans grand intérêt dans cette situation.

Nous avons commencé notre travail par un bref rappel de la mécanique analytique dans ses versions lagrangienne et hamiltonienne, en montrant le rôle des crochets de Poisson dans la quantification canonique. Grâce aux notions de fonctionnelle et de dérivées fonctionnelles, nous avons fait l'extension à la théorie des champs.

Pour étudier les systèmes singuliers, nous avons fait appel à deux approches standards dans le traitement des contraintes la première est la méthode de Dirac, qui consiste d'abord à déterminer et à classer toutes les contraintes, afin de déduire les crochets de Dirac après l'inversion de la matrice de ces contraintes. La deuxième est la méthode de Faddeev-Jackiw, basée sur un lagrangien du premier ordre. Elle utilise les équations de mouvement afin d'obtenir la matrice symplectique, dont l'inversion permet de retrouver directement les crochets souhaités.

Nous avons traité plusieurs exemples de quantification de systèmes au degré de liberté fini et infini, dans le but de maîtriser les approches de Faddeev-Jackiw et de Dirac, et de mettre en évidence leur équivalence.

La troisième méthode abordée dans cette thèse est la méthode des constantes d'intégration généralisée (GCI). C'est une autre méthode alternative, simple, directe, et accessible, n'exigeant pas des outils mathématiques très avancés. Nous avons, en effet, pu étudier avec succès plusieurs systèmes singuliers à l'aide de cette approche, où elle s'est montrée efficace dans le traitement des systèmes avec contraintes non intégrables. Son principe est d'utiliser le développement limité de la solution des équations de mouvement au voisinage de l'instant initial, et se servir des conditions initiales pour déduire les crochets nécessaires à la quantification canonique, par de simples identifications.

Notre contribution commence par les champs de Klein-Gordon et de Maxwell. Dans le premier cas, le calcul est direct car le champ de Klein-Gordon est complètement in-

dépendant ainsi que leur moment conjugué, contrairement au champ de Maxwell où les composantes du champ et son moments conjugués sont liées par des contraintes dues à la symétrie de jauge et par les conditions de fixation de cette jauge. Le problème est résolu, dans l'espace des positions, grâce au recours théorème de Helmholtz et l'introduction de la fonction delta transverse, tandis que dans l'espace des impulsions, la transformation de Fourier a permis de séparer complètement les différentes composantes.

Par la suite, une étude du champ de Proca, décrit par un lagrangien sans symétrie de jauge, est effectuée. Nous avons d'abord développé la solution des équations de mouvement contenant un terme de masse, au voisinage de l'instant initial en se servant des conditions initiales. Ensuite, leur injection dans les équations de Hamilton s'est terminée par l'obtention des bon crochets des variables fondamentales par identification.

Nous nous sommes après intéressés à l'action de Stueckelberg qui une formulation invariante de jauge du champ de Proca, obtenue suite au couplage du terme de masse avec un champ scalaire réel. Nous avons calculé tous les crochets des variables fondamentales, après avoir fixé la jauge avec des conditions supplémentaires bien appropriées. La quantification s'est faite en suivant les étapes claires et directes de la méthode "CI" généralisée.

Dans les exemples précédents, nous sommes arrivés aux mêmes conclusions que les approches de Dirac et Faddeev-Jackiw, ce qui peut être comptabilisé en faveur de la méthode "CI" généralisée. Cette approche de quantification au voisinage de l'instant initial n'attend qu'être mise à l'épreuve dans la quantification d'autres systèmes singuliers, dont on peut citer par exemple :

\*) la mécanique pseudo-classique qui utilise les variables de Grassmann pour donner une image classique de certains aspects quantiques comme la dynamique du spin, l'oscillateur fermionique, l'équation de Pauli, l'équation de Dirac et la mécanique quantique supersymétrique ;

\*\*) la théorie de la gravitation linéaire qui s'obtient suite à linéarisation des équations d'Einstein dans le cas du champ gravitationnel relativement faible ;

\*\*\*) Le modèle de Maxwell-Chern-Simons qui est une généralisation du champ électromagnétique de Maxwell conservant la symétrie de jauge, obtenue en lui ajoutant le terme de Chern-Simons ce modèle est d'une importance fondamentale pour expliquer l'effet de Hall quantique.

---

# Annexes

## 4.10 Annexe A

La matrice de Dirac  $G_{ij}(x, y)$  elle a un inverse  $G^{ij}(x, z)$  pour la trouver on utilise la relation suivante

$$\int dz^3 G^{kw'}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) G_{w'w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_w^k \delta^3(x - y).$$

Nous avons établi cette formulation pour calculer  $G^{11}(x, y)$

$$\begin{aligned} \int dz^3 G^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (G_{11}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{12}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{13}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{14}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_3^1 \delta^3(x - y) \\ \int dz^3 G^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (0 + 0 - \delta^2(x - y) + 0) &= 0 \\ G^{11}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} \int dz^3 G^{21}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (G_{11}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{12}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{13}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{14}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_4^1 \delta^3(x - y) \\ \int dz^3 G^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (0 + 0 + m\delta^2(x - y) + 0) &= 0 \\ G^{11}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière, on déduit  $G^{13}(x, y)$

$$\begin{aligned} \int dz^3 G^{13}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (G_{31}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{32}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{33}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{34}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_1^1 \delta^3(x - y) \\ \int dz^3 G^{13}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (\delta^3(z, y) + 0 + 0 + 0) &= \delta^3(x - y) \\ G^{13}(x, y) &= \delta^3(x - y). \end{aligned}$$

Ou encore pour déterminer  $G^{24}(x, y)$

$$\begin{aligned}
 \int dz^3 G^{24}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(G_{41}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{42}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{33}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{44}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_2^2 \delta^3(x - y) \\
 \int dz^3 G^{24}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \nabla^2(\delta^3(z - y)) &= \delta^3(x - y) \\
 \int dz^3 (\partial_i(G^{24}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \partial_i \delta^3(z - y)) - \partial_i G^{24}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \partial_i \delta^3(z - y)) &= \delta^3(x - y) \\
 \int dz^3 (\partial_i(G^{24}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \partial_i \delta^3(z - y)) - \partial_i \partial_i(G^{24}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \delta^3(z - y)) + (\partial_i \partial_i G^{24}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \delta^3(z - y)) &= \delta^3(x - y) \\
 \nabla^2(G^{24}(x, y)) &= \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

Pour trouver expression de  $G^{24}(x, y)$  on pose  $\vec{R} = \vec{x} - \vec{y}$  et  $\nabla^2 = \nabla_R^2$

$$\nabla_R^2 G^{24}(\vec{R}) = \delta^3(\vec{R}). \quad (4.10.1)$$

Selon la transformation de Fourier

$$G^{24}(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk^3 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \tilde{G}^{24}(\vec{k}) \quad \text{et} \quad \delta^3(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk^3 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

On remplace les deux relations précédentes dans (4.10.1) on trouve

$$\frac{-1}{(2\pi)^3} \int dk^3 k^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \tilde{G}^{24}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk^3 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}.$$

On peut réécrire de la manière suivante :

$$\frac{-1}{(2\pi)^3} \int dk^3 k^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} (\tilde{G}^{24}(\vec{k}) + \frac{1}{k^2}) = 0.$$

Donc nous allons voir que

$$G^{24}(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk^3 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \tilde{G}^{24}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^3}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}.$$

Donc  $G^{24}(\vec{R})$  est alors définie par

$$G^{24}(\vec{R}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^3}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}.$$

Dans le système des coordonnées sphériques

$$\vec{k} \cdot \vec{R} = |\vec{k}| \cdot |\vec{R}| \cdot \cos \theta \quad \text{et} \quad dk^3 = k^2 dk d\Omega.$$

$d\Omega$  : est l'angle solide qui définit par  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  avec  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$   
ou  $0 \leq |k|$ , donc  $G^{24}(\vec{R})$  devient :

$$G^{24}(\vec{R}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} e^{i|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|\cdot\cos\theta} k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi.$$

On pose que  $u = \cos\theta$  et  $du = -\sin\theta d\theta$  et  $u \in [-1; 1]$ . On utilise ces notations pour écrire  $G^{24}(\vec{R})$  :

$$\begin{aligned} G^{24}(\vec{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|\cdot u} dk du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk \frac{e^{i|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|\cdot u}}{i|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 R} \int dk \frac{(e^{i|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|} - e^{-i|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|})}{ik} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 R} \int dk \frac{\sin kR}{k}. \end{aligned}$$

On a alors la relation finale

$$G^{24}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (4.10.2)$$

On définit alors les autres éléments de la même manière que les trois exemples précédents.

## 4.11 Annexe B

on va calculer les crochets de Poisson entre les quatre contraintes de ce système,  $\Omega_1 = \pi_0$ ,  $\Omega_i = \pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{0ij}B^j$  et  $\Omega_4 = m^2B_0 - m\varepsilon_{0ij}\partial^i B^j$

$$\begin{aligned} \{\Omega_1, \Omega_i\} &= \int dz^2 \left( \frac{\delta\Omega_1(\mathbf{x})}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta\Omega_i(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\Omega_1(\mathbf{x})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta\Omega_i(\mathbf{y})}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\ &= - \int dz^2 \frac{\delta\pi_0(\mathbf{x})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z})} \frac{\delta(\pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{0ij}B^j)(\mathbf{y})}{\delta B^\mu(\mathbf{z})} \\ &= -\frac{m}{2}\varepsilon_{0ij} \delta_0^\mu \delta_\mu^j \delta^2(x-y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\{\Omega_1, \Omega_4\} &= \int dz^2 \left( \frac{\delta\Omega_1(\mathbf{x}) \delta\Omega_4(\mathbf{y})}{\delta B^\mu(\mathbf{z}) \delta\pi_\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\Omega_1(\mathbf{x}) \delta\Omega_4(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z}) \delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= - \int dz^2 \left( \frac{\delta\pi_0(\mathbf{x}) \delta(m^2 B_0 - m\varepsilon_{0ij}\partial^i B^j)(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z}) \delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= - \int dz^2 (\delta_0^\mu \delta^2(x-z)(m^2\delta_{\mu 0}\delta^2(y-z) - m\delta_\mu^j \varepsilon_{0ij} \partial^i \delta^2(y-z))) \\
&= -m^2\delta^2(y-x).
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\{\Omega_k, \Omega_i\} &= \int dz^2 \left( \frac{\delta\Omega_k(\mathbf{x}) \delta\Omega_i(\mathbf{y})}{\delta B^\mu(\mathbf{z}) \delta\pi_\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\Omega_k(\mathbf{x}) \delta\Omega_i(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z}) \delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= \int dz^2 \left( \frac{\delta(\pi_k + \frac{m}{2}\varepsilon_{0kl}B^l)(\mathbf{x}) \delta(\pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{0in}B^n)_i(\mathbf{y})}{\delta B^\mu(\mathbf{z}) \delta\pi_\mu(\mathbf{z})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta(\pi_k + \frac{m}{2}\varepsilon_{0kl}B^l)(\mathbf{x}) \delta(\pi_i + \frac{m}{2}\varepsilon_{0ij}B^j)_i(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z}) \delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= \left( \frac{m}{2} \delta_\mu^l \varepsilon_{0kl} \partial^l \delta^2(y-z) \right) \delta_i^\mu \delta^2(x-z) \\
&\quad - \delta_k^\mu \delta^2(x-z) \left( \frac{m}{2} \delta_\mu^j \varepsilon_{0ij} \partial^i \delta^2(y-z) \right) \\
&= m\varepsilon_{0ki}\delta^2(x-y).
\end{aligned}$$

On a en plus

$$\begin{aligned}
\{\Omega_k, \Omega_4\} &= \int dz^2 \left( \frac{\delta\Omega_k(\mathbf{x}) \delta\Omega_4(\mathbf{y})}{\delta B^\mu(\mathbf{z}) \delta\pi_\mu(\mathbf{z})} - \frac{\delta\Omega_k(\mathbf{x}) \delta\Omega_4(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z}) \delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= - \int dz^2 \left( \frac{\delta\Omega_k(\mathbf{x}) \delta\Omega_4(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z}) \delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= - \int dz^2 \left( \frac{\delta(\pi_k + \frac{m}{2}\varepsilon_{0kl}B^l)(\mathbf{x}) \delta(m^2 B_0 - m\varepsilon_{0ij}\partial^i B^j)(\mathbf{y})}{\delta\pi_\mu(\mathbf{z}) \delta B^\mu(\mathbf{z})} \right) \\
&= - \int dz^2 (\delta_k^\mu \delta^2(x-z)(m\delta_{\mu 0}\delta^2(y-z) - \delta_\mu^j \varepsilon_{0ij} \partial^i \delta^2(y-z))) \\
&= m\varepsilon_{0ik}\partial^i \delta^2(x-y).
\end{aligned}$$

On va calculer l'inverse de la matrice de Dirac (2.6.12) pour la trouver on utilise la relation suivante

$$\int dz^2 G^{kw'}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) G_{w'w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_w^k \delta^2(x-y)$$

d'ou  $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sont les éléments de la matrice de Dirac,  $G^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  sont leurs inverses, On calcule le premier élément de la matrice inverse  $G^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\begin{aligned} \int dz^2 G^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (G_{11}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{12}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{13}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{14}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_4^1 \delta^2(x - y) \\ \int dz^2 G^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (0 + 0 + 0 - m^2 \delta^2(x - y)) &= 0 \implies G^{11}(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} \int dz^2 G^{21}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (G_{11}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{12}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{13}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{14}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_4^1 \delta^2(x - y) \\ m \int dz^2 G^{21}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \delta^2(x - y) &= 0 \implies G^{21}(x, y) = 0, \end{aligned} \tag{4.11.1}$$

et de la même manière on déduit  $G^{14}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\begin{aligned} \int dz^3 G^{41}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (G_{11}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{12}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{13}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{14}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_4^4 \delta^2(x - y) \\ \int dz^3 G^{41}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (0 + 0 + 0 - m^2 \delta^2(z - y)) &= \delta_4^4 \delta^2(x - y) \\ G^{14}(x, y) &= \frac{-1}{m^2} \delta^2(x - y), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int dz^2 G^{22}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (G_{21}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{22}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{23}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + G_{24}(\mathbf{z}, \mathbf{y})) &= \delta_1^1 \delta^2(x - y) \\ \int dz^3 G^{22}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (0 + 0 + \delta^2(x - y) - \partial^2 \delta^2(x - y)) &= 0 \\ \partial^2 G^{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

On définit les autres éléments de la même manière que les exemples précédents. Les crochets de Dirac des variables dynamiques sont pris selon l'équation suivante

$$\{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\}_D = \{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\} - \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \sigma_k(\mathbf{u})\} G^{-kw}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\sigma_w(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\}. \tag{4.11.2}$$

D'après la matrice inverse (2.6.13) et la relation du crochet de Dirac précédente, les crochets de Dirac de ce système s'écrivent

$$\begin{aligned}
\{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\}_D &= \{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_1(\mathbf{u})\} G^{-12}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_2(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_1(\mathbf{u})\} G^{-13}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_3(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_1(\mathbf{u})\} G^{-14}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_4(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_2(\mathbf{u})\} G^{-23}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_3(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_3(\mathbf{u})\} G^{-31}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_1(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_3(\mathbf{u})\} G^{-32}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_2(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\} \\
&- \int \int du^2 dv^2 \{F(\mathbf{x}), \Omega_4(\mathbf{u})\} G^{-41}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\Omega_1(\mathbf{v}), G(\mathbf{y})\}.
\end{aligned}$$

On calcule  $\{B_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\}_D$

$$\begin{aligned}
\{B_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\}_D &= \{B_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\} \\
&- \int dv^2 du^2 \left\{ B_i(\mathbf{x}), \left( \pi_1 + \frac{m}{2} B^2 \right) (\mathbf{u}) \right\} \delta^2(u - v) \left\{ \left( \pi_2 - \frac{m}{2} B^1 \right) (\mathbf{v}), B_j(\mathbf{y}) \right\} \\
&+ \int dv^2 du^2 \left\{ B_i(\mathbf{x}), \left( \pi_2 - \frac{m}{2} B^1 \right) (\mathbf{u}) \right\} \delta^2(u - v) \left\{ \left( \pi_1 + \frac{m}{2} B^2 \right) (\mathbf{v}), B_j(\mathbf{y}) \right\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\{B_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\}_D &= \int dv^2 du^2 (\delta_{i1} \delta^3(x - u)) \delta^3(u - v) (\delta_{j2} \delta^3(y - u)) \\
&- \int dv^2 du^2 (\delta_{i2} \delta^3(x - u)) \delta^2(u - v) (\delta_{j1} \delta^3(y - u)) \\
&= \frac{1}{m} (\delta_{i1} \delta_{j2} - \delta_{i2} \delta_{j1}) \delta^2(x - y).
\end{aligned}$$

On déduit alors le crochet de Dirac

$$\{B_i(x); B_j(y)\}_D = \frac{\varepsilon_{0ij}}{m} \delta^2(x - y) \tag{4.11.3}$$

---

# Bibliographie

- [1] P.A.M. Dirac, Generalized Hamiltonian Dynamics, Can. J. Math. 2 129 (1950).
- [2] P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Yeshiva University Press, New York (1964).
- [3] L. Faddeev, R. Jackiw, Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems, Phys. Rev. Lett, 60, 1692 (1988)
- [4] Z. Belhadi, Quantization in the neighborhood of the initial instant, Preprint at : <https://arxiv.org/abs/2303.08236> (2023)
- [5] Z. Belhadi, The integration constants method in quantum field theory, Preprint at : <https://arxiv.org/abs/2303.08799> (2023)
- [6] W. Benarab, Z. Belhadi, On the direct quantization of Maxwell field. Phys. Scr. 99 (2024) 075224
- [7] W. Benarab, Z. Belhadi, On the direct quantization of Proca gauge invariant field Phys. Lett. A502 129395 (2024).
- [8] Z. Belhadi, F. Menas, A. Bérard and H. Mohrbach, Quantization of soluble classical constrained systems, Annals of Physics ; 351, 426–443 (2014)
- [9] Z. BELHADI, thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou (2015).
- [10] W. Greiner, Field Quantization, Springer (1996)
- [11] A. CHARLIER, A. BERARD, M. CHARLIER, Mécanique Analytique du cours aux travaux dirigés, ellipses, (1989).
- [12] S Anjali, S Gupta, Faddeev–Jackiw quantization of Christ–Lee model. Annals of Physics 35, No. 10, 2050072 (2020)
- [13] J. Douglas, *Solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Trans. Am. Math. Soc. **50** (1941).
- [14] S. Hojman and L.F. Urrutia, *On the inverse problem of the calculus of variations*, J. Math. Phys. **22** (1981).
- [15] E. C.G. Stückelberg, Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kräfte, Helvetica Physica Acta, 11 : 225 (1938)

- 
- [16] M. Ruiz-Altaba, H. Ruegg, The Stueckelberg Field, arXiv preprint hep-th/0304245 (2003)
- [17] S. Weinberg, Superconductivity for particular theorists, Progress of theoretical physics supplement 86 43-53 (1986)
- [18] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, B. I. Halperin, On anyon superconductivity, International Journal of Modern Physics B, 3(07), 1001-1067 (1989)
- [19] Y. C. HUANG, L. X. YI, Faddeev–Jackiw and the improved methods in quantization of the superconductive system. Annals of Physics, vol. 325, no 10, p. 2140-2152 (2010)
- [20] D. Senechal, Chern-Simons superconductivity without parity violation, Physics Letters B, 297(1-2), 138-143 (1992)
- [21] N. Kaloper, A. Lawrence, London equation for monodromy inflation, Physical Review D, 95(6), 063526 (2017)
- [22] G. E. Zambrano, B. M. Pimentel, Canonical structure of gauge invariance Proca’s electrodynamics theory, Momento, (56), 26-44 (2018)
- [23] B. M. Pimentel, G. E. R. Zambrano, Faddeev-Jackiw quantization of Proca Electrodynamics, Nuclear and Particle Physics Proceedings, 267, 183-185 (2015)
- [24] J. L. Yang Y. C. Huang, improved Faddeev-Jackiw quantization of the electromagnetic field and Lagrange multiplier fields. Chinese Physics C, vol. 32, no 10, p. 788 (2008)
- [25] D. N. Blaschke, F. Gieres. On the canonical formulation of gauge field theories and Poincaré transformations. Nuclear Physics B 965 : 115366 (2021)
- [26] H. Park, T. Lee, Canonical quantization of massive symmetric rank-two tensor in string theory. Nuclear Physics B 954 : 115006 (2020)
- [27] A. Escalante, M. Zarate, Dirac and Faddeev–Jackiw quantization of a five-dimensional Stueckelberg theory with a compact dimension. Annals of Physics 353 : 163-178 (2015)
- [28] E. Harikumar, M. Sivakumar, On the equivalence between topologically and non-topologically massive abelian gauge theories. Modern Physics Letters A 15.02 : 121-131 (2000).
- [29] H. Lee, Y. W. Kim, Y. J. Park, Topological Massive Gauge Theories in Three Dimensions Based on the Faddeev-Jackiw Formalism. Journal of the Korean Physical Society, Vol. 30, No. 1 : 23-27 (1997).
- [30] C. C. Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Gilbert, Photons and Atoms, Wiley (1989).
- [31] A. M. Stewart, Longitudinal and transverse components of a vector field, Sri Lankan. J. Phy. 12, 33-42 (2011).

- 
- [32] X. L. Zhou : Progress In Electromagnetics Research, PIER 65, 93–102 (2006).
- [33] Y. F. Gui and W. B. Dou, Progress In Electromagnetics Research, PIER 69, 287–304 (2007)L.
- [34] P. K. Townsend, K. Pilch and P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. 136B, 38 (1984).
- [35] S. Deser and R. Jackiw, Phys. Lett. B, 139(5-6), 371-373 (1984).
- [36] Y. W. Kim, Y. J. Park, K. Y. Kim and Y. Kim, Phys. Rev. D, 51(6), 2943 (1995).
- [37] R. Casalbuoni, Il Nuovo Cimento A, 33(1), 115-125 (1976).
- [38] U. Kulshreshtha, D.S. Kulshreshtha and H.J.W. Müller-Kirsten, Helvetica Physica Acta, 66 (1993)
- [39] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron and O. S. Zandron, Int. Jour. Theo. Phys, Vol. 36, No. 12, (1997)
- [40] J. Barcelos-Neto, Ashok K. Das, W. Scherer, Canonical quantization of constrained systems. Acta physica polonica, Vol. B18 No 4 (1987)
- [41] J. Maharana, Quantization of nonlinear sigma model in constrained Hamiltonian formalism. Physics letters. Vol. 128B, No. 6, ( 1983)
- [42] L. Bouzerbaib, N. Ferkous, Théorie des champs avec contraintes, Mémoire de master. Université de jijel (2021).

## Résumé

Ce travail de thèse étudie la question de la quantification des systèmes physiques singuliers ayant des contraintes. Il met l'accent sur une méthode particulière, dite la méthode des constantes d'intégration généralisée, qui est une méthode simple, directe, et accessible, n'exigeant pas des outils mathématiques très avancées. Son principe est d'utiliser le développement limité de la solution des équations de mouvement au voisinage de l'instant initial, et se servir des conditions initiales pour déduire les crochets nécessaires à la quantification canonique, par de simples identifications.

Plusieurs systèmes sont traités avec succès, à commencer par le champ de Klein-Gordon qui est un champ régulier, dont la quantification est relativement simple. A l'opposé, le champ de Maxwell présentant une symétrie de jauge est un champ singulier, et nécessite plus d'effort pour résoudre les difficultés rencontrées. Dans les deux cas, la quantification s'est faite dans l'espace des positions et dans l'espace des impulsions.

Par la suite, une étude du champ de Proca, décrit par un lagrangien contenant un terme de masse, brisant sa symétrie de jauge, est effectuée et elle s'est soldée par l'obtention des bons crochets des variables fondamentales. A la fin, l'action de Stueckelberg qui est une formulation invariante de jauge du champ de Proca, obtenue suite au couplage du terme de masse avec un champ scalaire réel est quantifiée, suivant les étapes claires et directes de la méthode des constantes d'intégration généralisées.

## Abstract

This thesis studies the question of the canonical quantification of singular physical systems with constraints. It focuses on a particular method, called the method of generalized integration constants, which is a simple, direct, and an accessible method, not requiring very advanced mathematical tools. Its principle is to use the Taylor expansion of the solution of the motion equations near the initial instant, and to use the initial conditions to deduce the brackets necessary for the canonical quantification, by simple identifications.

Several systems are successfully treated, starting with the Klein-Gordon field which is a regular field, so its quantification is relatively simple. In contrast, the Maxwell field is a singular system with gauge symmetry, and requires more subtlety to resolve the difficulties encountered. In both cases, the quantification is performed in the positions space and in the impulses space.

Subsequently, the Proca field, described by a Lagrangian containing a mass term, breaking its gauge symmetry, is studied and we obtain the correct brackets for the fundamental variables. At the end, the Stueckelberg action which is a gauge invariant formulation of the Proca field, obtained following the coupling of the mass term with a real scalar field, is quantized following the different steps of the method of generalized integration constants.

## ملخص

تدرس هذه الأطروحة مسألة التكميم القانوني للأنظمة الفيزيائية الفردية ذات القيود، حيث نركز فيها على طريقة ثوابت التكامل المعممة، وهي طريقة بسيطة و مباشرة، غنية عن الحاجة إلى أدوات رياضية متقدمة للغاية. تعتمد هذه الطريقة على النشر المحدود لحل معادلات الحركة بالقرب من اللحظة الأولية، بالإضافة لاستخدام الشروط الابتدائية لاستنتاج الأقواس اللازمة للتكميم القانوني، عن طريق المطابقة البسيطة.

تمت دراسة العديد من الأنظمة بنجاح، بدءاً من حقل كلاين-جوردون وهو حقل منتظم، وتكميمه القانوني بسيط نسبياً. في المقابل، فإن حقل ماكسويل ذو التماثل المقياسي هو حقل فردي، ويتطلب المزيد من الجهد لحل الصعوبات التي تمت مواجهتها. في كلتا الحالتين، تم إجراء التكميم القانوني في فضاء المواضع وفي فضاء الأطوار.

بعد ذلك، تمت دراسة حقل بروكا، الذي يحتوي دالة لاغرانج على حد للكتلة، يكسر تماثله المقياسي، حيث تمكنا من الحصول على أقواس المتغيرات الأساسية المطلوبة. في النهاية، تطرقنا إلى دالة لاغرانج لستوكلبرغ، وهي صيغة استرجعت التماثل المقياسي لحقل بروكا، وقد تم الحصول عليها بعد اقتران الحد الذي يحتوى على الكتلة مع حقل سلمي حقيقي. التكميم القانوني قد تم بنجاح بإتباع الخطوات الواضحة والمباشرة لطريقة ثوابت التكامل المعممة.