

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département Mathématiques



Mémoire de fin d'études

En : Mathématiques

Spécialité : Probabilité Statistique et Application

Thème

**l'algorithme stochastique de Mann
avec différents type d'erreurs
et la théorie des points fixes**

Présente par :

M^r Dahmani Ali Abdelhalim

Présidente du jury : M^{me} Boulkroune Atika MAA Université de Béjaia.
Examinatrice : M^{me} Chahira Allouti MCB Université de Béjaia.
Promotrice : M^{me} Barache Bahia MCB Université de Béjaia.

Septembre 2021

Remerciements

Avant tous, louange à Allah, Dieu le tout puissant qui m'a accordé le courage, la patience et la volonté afin de parvenir à la finalité de ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à ma promotrice Mme. BARACHE BAHIA pour son aide précieux et conseils qu'elle m'a donné tout au long de mon travail.

Mes remerciements vont également aux membres des jury la présidente Mme. BOULKROUNE ATIKA et l'examinatrice Mme. CHAHIRA ALLOUTI qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail.

Enfin, je remercie toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

*Ma très chère mère, mon très cher père pour leur amour
inestimable, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs
qu'ils ont su m'inculquer.*

Ma soeur.

Mes petits frères.

Toute ma famille.

Et tous mes amis.

*Je le dédié aussi à tous ceux qui m'ont donné le moindre
coup de pouce pour le réalisé .*

A tous merci.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Variables aléatoires indépendantes et associées	5
1.1 Variables aléatoires indépendantes	6
1.2 Variables aléatoires négativement associées et positivement associées	9
1.2.1 Variables aléatoires positivement associées	9
1.2.2 variables aléatoires négativement associées	12
1.3 Mode de convergence	14
1.3.1 Convergence presque complète	14
1.3.2 Convergence presque sûrement	16
2 Théorie du point fixe et les méthodes itératives	18
2.1 Introduction : théorie du point fixe	18
2.2 Théorème du point fixe de Banach	20
2.3 Suite itérative de Picard	26
2.4 Suite itérative de Mann	31
2.4.1 Suite itérative de Mann	31
2.4.2 L'itération normale de Mann	33
2.4.3 Suite itérative de Mann modifiée	38
2.4.4 Suite itérative de Mann perturbé	38
2.4.5 Suite itérative de Mann avec erreur	38
3 Application numérique	40
bibliographie	53

Introduction générale

L'indépendance pour les systèmes d'événements ou pour les collections de variables aléatoires est l'une des notions principales en théorie des probabilités. En effet il existe de nombreux résultats établis pour les variables aléatoires indépendantes. Du fait tels résultats forment un noyau de la théorie moderne des probabilités. Les phénomènes étudiés de différents domaines : physique, chimie, biologie et économie et la fiabilité étaient des sources principales pour ces modèles.

L'association de variables aléatoires a été introduite dans les années 1960 par Harris pour des processus de percolation. Puis en 1966 Lehmen [18] a introduit le notion de dépendance positive entre deux variables aléatoires. Qui a été par la suite généralisée par Esary et Walkup [15]. Ils ont introduit le concept d'association, qui n'a eu l'intérêt que ces dernières années, en trouvant beaucoup d'application dans divers domaines scientifiques et industriels . Alors que les variables aléatoires positivement associées les plus efficaces ont été introduites par Esary et Proscha et Walkup [11]. Les variables aléatoires négativement associées ont été introduites pour la première fois par Alan et Saxiera en 1981. Par contre les variables aléatoires quasi associées sont les plus récentes de ses formes d'association. Cette notion a été introduite par Bulinski et Salanovitch en 1998.

La théorie du point fixe est parmi les théories modernes consacrées à la résolution des problèmes mathématiques. On trouve que la solution de plusieurs problèmes mathématiques se ramenant souvent à déterminer un élément x^* d'un ensemble \mathbb{X} qui vérifie l'équation dite équation du point fixe qui est défini par :

$$f(x) = x.$$

Parmi les résultats les plus connus dans la théorie des points fixes est le principe de contraction de Banach. Ce théorème affirme qu'une application contractante d'un espace métrique complet dans lui même admet un unique point fixe. Le théorème lui même n'assure pas uniquement l'existence et l'unicité du point fixe mais il donne aussi une procédure itérative pour le déterminer.

La suite itérative de Picard a créé une partie très importante dans la théorie des points fixes qui est les méthodes itératives d'approximation des points fixes. Les méthodes itératives d'approximation sont des méthodes récursives qui peuvent être utilisées entre autres pour résoudre des problèmes d'optimisation ou des équations du point fixe, les systèmes linéaires. En générale l'utilité de ses méthodes configure lorsque les données collectées sont soumises à un bruit. Il est en quelque sorte plus facile de déterminer la solution approchée qu'une solution exacte d'où l'intérêt principal de tels algorithmes. En 1953 [7], Mann a considéré un processus itératif défini comme suit :

$$x_n = (1 - a_n)x_n + a_n f(x_n).$$

Où est le 2^{ème} schéma ont connu beaucoup de changement avec d'autres appellations comme les schémas de Mann modifié, schéma de Mann avec erreur, d'une manière particulière pour être utilisé dans ce domaine.

$$x_n = (1 - a_n)x_n + a_n f(x_n) + b_n(\varepsilon_i).$$

Le présent mémoire est réparti en trois chapitres : le premier chapitre comporte une présentation de l'indépendance et les associées des variables aléatoires, en donnant quelques théorèmes, propriétés et exemples et les modes de convergence (notion de différents types de convergence et leurs théorèmes).

Le deuxième chapitre est consacré aux quelques théorèmes du point fixe à savoir le théorème du point fixe de Banach et de Picard, ainsi que des méthodes itératives pour l'approximation des points fixes. On s'est basé sur la méthode itérative de Mann et la méthode itérative de Mann avec

erreurs.

Le troisième chapitre concerne les algorithmes de la méthode itérative de Mann et pour voir l'efficacité de ces méthodes conclu par deux exemples comme application numérique.

Chapitre 1

Variables aléatoires indépendantes et associées

1.1 Variables aléatoires indépendantes

Il y a plusieurs définitions équivalentes de l'indépendance d'une famille finie de variables aléatoires. On peut en particulier définir l'indépendance d'une famille de tribus, et voir ensuite l'indépendance des événements et l'indépendance des variables aléatoires comme des cas particuliers de l'indépendance des tribus. Cela permet de démontrer certains résultats généraux sur l'indépendance une seule fois, pour les tribus, puis de déduire immédiatement de ce résultat général la version événements et la version variables aléatoires (un exemple est le lemme de regroupement). Cependant, il est peut-être préférable de donner d'abord deux définitions de l'indépendance des variables aléatoires qui soient opératoires pour les applications, et quelques critères commodes .

Dans ce qui suit on considère une famille (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mais éventuellement à valeurs dans des espaces différents :

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

Définition 1.1.1 [26] – (X_1, X_2, \dots, X_n) est une famille de variables aléatoires indépendantes si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

$$\bullet \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_n$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

- on a l'égalité

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i) \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\varphi_i(X_i)]$$

pour n'importe quelle suite de fonctions φ_i définies sur (E_i, \mathcal{E}_i) , à valeurs dans \mathbb{R} , dès que les espérances ci-dessus ont un sens.

Définition 1.1.2 [22] Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

$$1) \forall (A, B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2, \quad \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

2) pour tout couple de fonctions booréliennes g et h , dès que les espérances ci-dessous ont un sens, on a :

$$\mathbb{E}[g(X).h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)].\mathbb{E}[h(Y)].$$

Définition 1.1.3 [23] Les variables aléatoires $(X_i, i \in I)$ à valeurs $(\mathbb{E}_i, \varepsilon_i)$ sont dites indépendantes si les événements $(\sigma(X_i), i \in I)$ sont indépendants. Des événements $(A_i, i \in I)$ sont dits indépendants si les tribu $(\sigma(A_i), i \in I)$ sont indépendantes.

On a immédiatement :

Lemme 1.1.1 [23] Si les tribus $(\mathbb{B}_i, i \in I)$ sont indépendantes et si, pour chaque $i \in I$, (X_i) est une variable aléatoire (\mathbb{B}_i) mesurable, les variables aléatoires $(X_i, i \in I)$ sont indépendantes.

Théorème 1.1.1 [23] Soient X_i une variable aléatoire à valeurs $(\mathbb{E}_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, \dots, n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes.
- (ii) Pour tous $T_i \in \varepsilon_i$, $\mathbb{P}(X_1 \in T_1, \dots, X_n \in T_n) = \mathbb{P}(X_1 \in T_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in T_n)$.
- (iii) Pour tous $T_i \in D_i$, $\mathbb{P}(X_1 \in T_1, \dots, X_n \in T_n) = \mathbb{P}(X_1 \in T_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in T_n)$ où pour chaque i , D_i est une classe stable par intersection finie, contenant \mathbb{E}_i et telle que $\sigma(D_i) = \varepsilon_i$.
- (iv) Pour toutes $\mathcal{U}_i \in \varepsilon_i^+$, $\mathbb{E}(\mathcal{U}_1(X_1) \dots \mathcal{U}_n(X_n)) = \mathbb{E}(\mathcal{U}_1(X_1)) \dots \mathbb{E}(\mathcal{U}_n(X_n))$.
- (v) $\mu(X_1, \dots, X_n) = \mu(X_1) \otimes \dots \otimes \mu(X_n)$.

Théorème 1.1.2 Soit X et Y deux variable aléatoires indépendantes si et seulement si :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Corr}(X, Y) = 0.$$

Démonstration : Cette propriété se déduit très facilement si l'on exprime la covariance comme :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y).$$

Comme on l'a vu, l'indépendance de X et Y entraîne que

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Donc :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

Corollaire 1.1.1 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$.

(i) Si, pour tout couple (x, y) de nombres réels :

$$\mathbb{P}(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

alors X et Y sont dite indépendantes.

(ii) Si Y est à valeurs dans \mathbb{N} , et si pour tout couple $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x \text{ et } Y = n) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y = n),$$

alors X et Y sont dite indépendantes.

(iii) si X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N} et si, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{P}(X = m \text{ et } Y = n) = \mathbb{P}(X = m)\mathbb{P}(Y = n),$$

alors X et Y sont dite indépendantes.

1.2 Variables aléatoires négativement associées et positivement associées

1.2.1 Variables aléatoires positivement associées

L'inconvénient de la dépendance positive par quadrants est dû à sa nature bidimensionnelle. En fait, il ressort clairement de la définition que cette dépendance concerne deux variables aléatoires données et ne permet pas toute manipulation concernant les suites de variables aléatoires, à moins de le faire par paires. Sachant que cela nous conduira rapidement à des difficultés lorsqu'on traite plus de deux variables. Il existe plusieurs façons d'étendre la notion de dépendance positive par quadrants, dont quelques-unes ont reçu un certain intérêt dans la littérature. L'extension qui s'est révélé être la plus efficace est la notion d'association introduite par Esary, Proschan et Walkup [11], définit comme suit :

Définition 1.2.1 [14]

Soit I un ensemble fini de \mathbb{N} , on dit que la suite de variables aléatoires $(X_i, i \in I)$ est positivement associée si et seulement si pour toutes fonction f et g croissantes définies sur \mathbb{R}^I

$$\text{Cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in I)) \geq 0$$

Lorsque cette covariance existe.

Définition 1.2.2 [14] Soit I un ensemble fini de \mathbb{N} , on dit que la suite de variables aléatoires $(X_i, i \in I)$ est faiblement associée si pour tous sous-ensemble disjoints A et B de I et toutes fonction f et g croissantes définies sur \mathbb{R}^A et \mathbb{R}^B . [14]

$$\text{Cov}(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)) \geq 0$$

Lorsque cette covariance existe.

Caractéristiques et propriétés

On donne les propriétés caractéristiques les plus importantes présentées par Esary et al(1967) des variables associées, ce qui va nous permettre de

construire des exemples de celles-ci. Pour la démonstration de ces propriétés, (voir [11] [12]) :

1. Tous sous ensembles d'un ensemble fini de variables aléatoires réelles associées est encore associés.
2. L'union de deux sous-ensembles indépendants de variables aléatoires associées est associées.
3. Tout singleton formé d'une variable aléatoire réelle X est associé.
4. Si (X_1, \dots, X_n) est un vecteurs de variables associées et f_1, \dots, f_n des fonctions réelles croissantes définies sur \mathbb{R}^n alors le vecteur $(f_1(X), \dots, f_n(X))$ est associé.
5. Si pour tout $K > 1$, $(X_1^{(K)}, \dots, X_n^{(K)})$ est un vecteur associé et si $X_1^{(K)}$ converge en loi vers X_i pour tout $i = 1, \dots, n$ alors (X_1, \dots, X_n) est associé.

Théorème 1.2.1 [11] Dans la définition précédente de l'association, les fonctions f et g peuvent être prises dans l'une des classes suivantes :

1. Ensemble des fonctions binaires croissantes.
2. Ensemble des fonctions continues, croissantes et bornées.
3. Ensemble des fonctions croissantes bornées possédant des premières dérivées partielles bornées.

Exemples de variables aléatoires positivement associée [13] [16]

a- Statistique d'ordre : Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur associé, alors le vecteur (X_{n1}, \dots, X_{nn}) de la statistique d'ordre engendré par X est aussi associé.

b- Processus linéaire :

Soit $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ou associées et $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels. Pour tout (n, N) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$X_{n,N} = \sum_{|i| \leq N} a_i \varepsilon_n - i.$$

Supposons qu'il existe une variable aléatoire X_n telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{n,N} = X \quad p.s. |X_n| < +\infty \quad p.s. \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un processus linéaire défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$X_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \varepsilon_n - i$$

Si les termes de la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont positives, alors le processus linéaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est associé.

En effet, pour tout $N \geq 1$, la suite $(X_{n,N})_{n \in \mathbb{Z}}$ est associée. Par conséquent, l'association de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

c- Processus auto-régressif d'ordre p :

Soient $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On considère le processus auto-régressif $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$X_n = f(X_{n-1}, \dots, X_{n-p}) + \varepsilon_n.$$

On suppose que le vecteur (X_0, \dots, X_{p-1}) est associé et indépendant de la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Si f est une fonction croissante sur \mathbb{R} , alors la suite $(X_n)_{n \geq -p}$ est associée. En effet X_n est une fonction croissante des variables aléatoires associées (X_0, \dots, X_{1-p}) , $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Par conséquent l'association de la suite $(X_n)_{n \geq -p}$.

d- Processus gaussien :

Tout vecteur gaussien (X_1, \dots, X_n) est associé si et seulement si :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) \geq 0$$

e- Variables aléatoires binaires :

Un vecteur aléatoire (X_1, X_2) de variables binaires, est associé si et seulement si :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) \geq 0.$$

1.2.2 variables aléatoires négativement associées

La notion d'association négative a été introduite pour la première fois par Alam et Saxena (1981). Joag-Dev et Proschan (1983) [4] ont prouvé qu'un certain nombre de distributions multivariées bien connues possèdent la propriété d'association négative, comme la distribution multinationale, la convolution d'une multinationale différente, la distribution hypergéométrique multivariée, la distribution de Dirichlet, la distribution de permutation, la distribution normale négativement corrélée, l'échantillonnage aléatoire sans remplacement et la distribution conjointe des rangs. Cette notion a un avantage par rapport aux autres types connus de dépendance négative, basé sur le fait que toute suite de fonctions croissantes de variables aléatoires négativement associées est négativement associées [13].

Définition 1.2.3 [14]

Soit I un ensemble fini de \mathbb{N} , on dit que la suite de variables aléatoires $(X_i, i \in I)$ est négativement associée si, pour tous sous-ensembles disjoints A et B de I est toutes fonctions f et g croissantes définies sur \mathbb{R}^A et \mathbb{R}^B

$$\text{Cov}(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)) \leq 0.$$

Lorsque cette covariance existe.

Définition 1.2.4 On dit que les variables aléatoires X et Y sont négativement dépendantes si :

$$\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} \leq \mathbb{P}\{X > x\}\mathbb{P}\{Y > y\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ou d'une manière équivalente :

$$H(x, y) \leq 0$$

Définition 1.2.5 [3] On dit qu'un ensemble de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n qu'il est négativement associé si pour deux ensembles d'indices disjoints quelconques I, J de \mathbb{N}^* et deux fonctions g, h toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbb{E}(g(X_i, i \in I) \cdot h(X_j, j \in J)) \leq \mathbb{E}g(X_i, i \in I) \cdot \mathbb{E}h(X_j, j \in J)$$

Remarque 1.2.1 Il découle de cette définition que si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires négativement dépendantes, alors il en est de même pour $-X_1, -X_2, \dots, -X_n$. De même, si X_1, X_2, \dots, X_n est une suite de variables aléatoires négativement dépendantes, alors

$$\mathbb{E} \exp \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \exp(X_i) \quad (1)$$

Exemples de variables aléatoires négativement associées : [16]

a- Distributions multivariées ayant la propriété d'association négative :

· Si (X_1, \dots, X_n) est un vecteur de variables aléatoires suivant une loi multinomial, une loi hypergéométrique multivariée ou une loi de Dirichlet, alors (X_1, \dots, X_n) est négativement associé.

· Soit $X = (X_1, \dots, X_K)$ une suite de k variables aléatoires réelles, la distribution jointe du vecteur (X_1, \dots, X_k) est appelée permutation si (X_1, \dots, X_K) , elle prend comme valeurs les permutations de X avec une probabilité $\frac{1}{K!}$, $k > 1$.

· Si la distribution d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_K) est une permutation alors (X_1, \dots, X_K) est négativement associé.

b- Processus gaussien :

Un vecteur gaussien (X_1, \dots, X_n) est négativement associé si et seulement si :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) \leq 0 \quad \text{pour tous } i, j \in [1, n].$$

1.3 Mode de convergence

En théorie des probabilités, il existe différentes notions de convergence de variables aléatoires. Certaines de ces notions ne sont pas spécifiques des aux probabilités, mais de l'analyse en général, comme la convergence presque sûre de variables aléatoires, ou encore la convergence presque complète. La convergence en loi de suites de variables aléatoires est un concept appartenant plus spécifiquement à la théorie des probabilités, utilisé notamment en statistique et dans l'étude des processus stochastiques.

1.3.1 Convergence presque complète

Le concept de convergence presque complète a été introduit par Hsu et Robbins (1947). Elle implique la convergence presque sûre et se prête bien aux calculs faisant intervenir des sommes de variables aléatoires. Malgré cela, elle ne commence à devenir populaire dans la communauté statistique que dans les années 1980 après les travaux de Collomb. Elle est utilisée surtout en statistique non-paramétrique.

Définition 1.3.1 [7] *On dit que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque complètement vers une variable aléatoire X , si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty \quad (1.1)$$

et on note la convergence presque complète de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers X par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X, \quad p.co. \quad (1.2)$$

Définition 1.3.2 [7] *On dit que la vitesse de convergence presque complète de la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers X est d'ordre (u_n) , si et seulement si :*

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_0 u_n) < \infty. \quad (1.3)$$

et on écrit

$$X_n - X = O(u_n), p.co. \quad (1.4)$$

les propositions suivante présentent quelque règles de calcul concernant le mode de convergence presque complète.

Proposition 1.3.1 [18]

Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = l_x$, p.co. et $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = l_y$, p.co. où l_x et l_y sont deux nombre réels déterminés.

(i) On a :

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} X_n + Y_n = l_x + l_y, \quad p.co.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} X_n Y_n = l_x l_y, \quad p.co.$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{l_y}, \quad p.co. \text{ avec } l_y \neq 0$$

(ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n - l_x = O(u_n)$, p.co. et $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n - l_y = O(u_n)$; p.co.

On a :

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} X_n + Y_n - (l_x + l_y) = O(u_n), \quad p.co.;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} X_n Y_n - l_x l_y = O(u_n), \quad p.co.;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Y_n} - \frac{1}{l_y} = O(u_n), \quad p.co. \text{ avec } l_y \neq 0;$$

Proposition 1.3.2 Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $X_n = O(u_n)$, p.co. et $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = l_y$, p.co. et l_y est un nombre réel déterminé.

(i) On a : $X_n Y_n = O(u_n)$, p.co. ;

(ii) $\frac{X_n}{Y_n} = O(u_n)$, p.co. , avec $l_y \neq 0$.

1.3.2 Convergence presque sûrement

La notion de presque sûrement est la même que celle de presque partout mais adaptée au langage de la théorie des probabilités. La notion contraire d'un ensemble presque sûr est un ensemble négligeable. Ou la notion de presque sûr, est une propriété de la théorie des probabilités et n'a pas de lien avec d'autres termes proches tels que la certitude dans un sens plus physique ou la certitude dans un sens plus commun.

Définition 1.3.3 [9] Soit $(\mathbb{X}_n)_n$ et \mathbb{X} sont des variables aléatoires à valeur dans \mathbb{R} , on dit que $(\mathbb{X}_n)_n$ converge presque sûrement vers X si et seulement si :

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{X}_n(\omega) = X(\omega)) = 1$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{X}_n = X$ p.s. ou $\mathbb{X}_n \rightarrow X$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Proposition 1.3.3 [23] La suite $\{\mathbb{X}_n\}$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire X si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\{\cup_{k \geq n} (|\mathbb{X}_k - X|) > \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

Proposition 1.3.4 [23] Si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(|\mathbb{X}_n - \mathbb{X}| > \varepsilon) < +\infty,$$

alors la suite $\{\mathbb{X}_n\}$ converge p.s. vers \mathbb{X} .

Démonstration :

$$\mathbb{P}\{\cup_{k \geq n} (|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}| > \varepsilon)\} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{(|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}| > \varepsilon)\}$$

Il suffit alors d'utiliser la Proposition (1.3.3)

On en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 1.3.1 S'il existe une suite $(\varepsilon_n > 0)$, avec $\lim \varepsilon_n = 0$ et

$$\sum \mathbb{P}(|\mathbb{X}_k - \mathbb{X}| > \varepsilon_n) < +\infty.$$

Alors la suite $\{\mathbb{X}_n\}$ converge p.s. vers \mathbb{X} .

Proposition 1.3.5 [9] Soit \mathbb{X}_n une suite de variable aléatoire si :

$$\sum \mathbb{P}(|\mathbb{X}_{n+1} - \mathbb{X}_n| > \varepsilon_n) < +\infty$$

pour une suite $\varepsilon_n > 0$ vérifiant :

$$\sum \varepsilon_n < +\infty.$$

la suite $\{\mathbb{X}_n\}$ converge p.s.

Démonstration :

D'après le lemme de Borel-Cantelli, il existe un ensemble Ω de probabilité tel que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $n_0(\omega)$ tel que pour tout :

$$n \geq n_0(\omega), |\mathbb{X}_{n+1}(\omega) - \mathbb{X}_n(\omega)| \leq \varepsilon_n.$$

On a donc pour $n > m \geq n_0(\omega)$:

$$|\mathbb{X}_n(\omega) - \mathbb{X}_m(\omega)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |\mathbb{X}_{k+1}(\omega) - \mathbb{X}_k(\omega)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k$$

Vu la convergence de $\sum(\varepsilon_n)$, ceci implique que $\{\mathbb{X}_n(\omega)\}$ est une suite de Cauchy et donc $\{\mathbb{X}_n(\omega)\}$ converge.

Proposition 1.3.6 [9] Soit $(\mathbb{X}_n)_n$ une suite de variables aléatoire alors :

(i) Si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|\mathbb{X}_n - \mathbb{X}| \geq \varepsilon) < +\infty.$$

alors $(\mathbb{X}_n)_n$ converge presque sûrement vers \mathbb{X} .

(ii) Si les $(\mathbb{X}_n)_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $(\mathbb{X}_n)_n$ converge presque sûrement vers 0 si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|\mathbb{X}_n| \geq \varepsilon) < +\infty.$$

Chapitre 2

Théorie du point fixe et les méthodes itératives

2.1 Introduction : théorie du point fixe

La théorie des points fixes est une théorie moderne pour la résolution des problèmes mathématiques qui sont à la base des problèmes de physique, de chimie, biologie etc. L'histoire de cette théorie remonte à 1922 où S.Banach a établi, dans son papier [2], l'existence et l'unicité du point fixe pour les contractions d'un espace métrique complet dans lui même. A la différence de Brower qui a exigé seulement la continuité de l'application sur un intervalle fermé borné dans lui même et ce théorème assure l'existence pas l'unicité. Dix ans plus tard Schauder généralise le théorème du point fixe de Brower en affirmant l'existence du point fixe d'une application continue sur les convexes compacts.

On appelle point fixe x d'un espace \mathbb{X} tout solution de l'équation $f(x) = x$ tel que f est un opérateur de \mathbb{X} dans lui même.

Dans ce chapitre nous allons énoncer le théorème de point fixe de Banach et quelque généralisation de ce théorème. Le théorème du point fixe de Banach est caractérisé par une suite itérative appelée suite itérative de Picard. Cette suite permet de déterminer la solution approchée de l'équation précédente. Il est généralement impossible de trouver la solution exacte de l'équation $f(x) = x$. Donc on sera amené à chercher la solution approchée. Les méthodes itératives est un meilleure moyenne pour faire cette recherche.

Ce procédé commence par choisir un point initial qui devra nous conduire vers la solution recherchée qui à son tour, doit être appropriée selon le domaine de l'application pour que cette procédure soit efficace. Il faut que la suite des solutions approximatives converge vers la solution voulue, en l'occurrence l'une des meilleures méthodes pour ce faire est la méthode de Picard ainsi que la méthode itérative de Mann et la méthode itérative de Mann avec erreurs qui fera principalement l'objet dans ce chapitre et bien d'autres méthodes similaires.

2.2 Théorème du point fixe de Banach

C'est en 1922 que le concept de contraction de Banach est apparu[6]. Ce théorème, ayant une importance particulière dans la résolution des équations intégrales. Il est très répandu dans les branches de l'analyse mathématique plus précisément dans les équations différentielles. Ce théorème est généralisé par la suite dans divers espaces.

Théorème 2.2.1 point fixe de Banach [7] page 21

Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique complet et soit $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ une application k -contractante. Alors f admet un unique point fixe x^* .

De plus, x^* est la limite des itérations de f à partir de n'importe quel point x_0 , c'est à dire :

$$x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0)$$

et la vitesse de convergence et géométrique de rapport k :

$$d(x^*, f^n(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x_0)).$$

$$\implies d(x^*, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Démonstration

Unicité :

par l'absurde. Supposons que $f(x_0) = x_0$ et $f(y_0) = y_0$ tel que $x_0 \neq y_0$. on a :

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) &= d(f(x_0), f(y_0)) \\ \implies d(x_0, y_0) &\leq kd(x_0, y_0) \\ \implies 1 &\leq k \end{aligned}$$

alors que $k \in]0, 1[$ contradiction

donc $x_0 = y_0$

d'où x_0 est unique.

Existence :

Montrons que si $x \in \mathbb{X}$, la suite $(f^n(x))_n \subset \mathbb{X}$ est de Cauchy, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}(x), f^n(x)) &\leq kd(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq k^2d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) \\ &\leq \dots \leq k^nd(f(x), x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d(f^{n+p}(x), f^n(x)) &\leq k^{n+\dots+p-1}d(f(x), x) + \dots + k^nd(f(x), x). \\ \Rightarrow d(f^{n+p}(x), f^n(x)) &\leq k^n(1 + k + \dots + k^{p-1})d(f(x), x). \end{aligned}$$

D'où

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} d(f(x), x).$$

Alors quand $n \rightarrow +\infty$, $d(f^{n+p}(x), f^n(x)) \rightarrow 0$.

Ainsi on déduit que $(f^n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{X} qui est complet donc $(f^n(x))_n$ converge vers une limite que l'on note x^* .

Montrons que x^* est un point fixe de f on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)$$

D'autre part,

f est contractante, donc elle est continue

$$\Rightarrow x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f^{n+1}(x))$$

$$\Rightarrow x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(f^n(x)))$$

$$\Rightarrow x^* = (f \lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x)))$$

$$\Rightarrow x^* = f(x^*)$$

.

C'est à dire x^* est un point fixe de f .

Il reste à montrer que :

$$d(f^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

On a :

$$d(f^{n+p}(x), f^n(x)) \leq k^n \frac{1-k^p}{1-k} d(f(x), x)$$

Si on fixe n et on fait tendre p vers l'infini on aura

$$d(x^*, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

Exemple 2.2.1 Soit la fonction f définie par :

$$f : C = [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

• On a C est stable par f , en effet pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} + 1 = \frac{(x-1)^2}{2x} + 1 \geq 1.$$

Donc $f(C) \subset C$.

• Montrons que f est contractante : pour tout $x, y \in [1, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{(x-1)^2}{2x} - \frac{(y-1)^2}{2y} \right| = \left| \frac{y(x-1)^2 - x(y-1)^2}{2xy} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2xy} (x-y)(xy-1) \right| \leq \frac{1}{2} |x-y| \frac{xy-1}{xy} \end{aligned}$$

Alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x-y|$$

D'où :
 f est contractante.

• Comme C est un intervalle fermé de \mathbb{R} alors C est complet. D'après ce qui précède, les hypothèses du théorème de contraction de Banach sont vérifiées alors f admet un unique point fixe (il est facile de vérifier que le point fixe est égale à 1).

Application du théorème

Exemple dans \mathbb{R} :

1) Soit $X = \mathbb{R}^+$, $f : X \rightarrow X$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}.$$

le point fixe est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Soit $\mathbb{X} = [\frac{1}{2}, 1]$, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$,

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

le point fixe est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Contre exemples :

Les exemples suivantes montrent que chacune des hypothèses du théorème de Banach est très importante.

i) \mathbb{X} n'est pas complet :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2}, \mathbb{X} =]0, \frac{\pi}{4}[.$$

L'application f est contractante car :

$$f(]0, \frac{\pi}{4}[) =]0, \frac{\pi}{4}[\subset]0, \frac{\pi}{4}[, \sup|f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$$

Mais \mathbb{X} n'est pas complet et f n'admet pas de point fixe dans \mathbb{X} .

ii) \mathbb{X} n'est pas stable par f :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, X = [0, 1].$$

L'application f est contractante car :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow |f'(x)| < 1.$$

Mais on a $f([1, \sqrt{2}]) \not\subset [1, \sqrt{2}]$, donc X n'est pas stable par f et l'application n'a pas de point fixe.

iii) f n'est pas contractante :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \mathbb{X} = [0, +\infty[$$

on a :

$$\sup |f'(x)| = 1.$$

Et l'application f n'a pas de point fixe.

Remarque 2.2.1 -Il existe des applications admettant un unique point fixe et non contractante.

-Il existe des applications admettant plus d'un point fixe.

Exemples

1-

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

L'unique point fixe de f est 2 mais f n'est pas contractante.

2-

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x.$$

L'unique point fixe de f est 0 mais f n'est pas contractante.

3-

$$\mathbb{X} = [0, 1], f(x) = 1 - x$$

L'unique point fixe de f est 2 mais f n'est pas contractante.

4— l'application identité dans \mathbb{X} ,

$$f(x) = x.$$

n'est pas contractante mais tout point de \mathbb{R} est un point fixe de f .

Théorème 2.2.2 Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique compact avec $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, vérifiant :

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{X}.$$

T est contractive, alors T admet un unique point fixe.

Démonstration

1) L'unicité :

Supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{X}$, tel que $x = T(x)$ et $y = T(y)$, Alors

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

Contradiction.

Ce que donne l'unicité de point fixe .

2) L'existence :

Remarquons que l'application $\mathbb{K} : x \rightarrow d(x, T(x))$, atteint son minimum en un point que nous notons $x_0 \in \mathbb{X}$.

Donc on obtient que $T(x_0) = x_0$, qui est une contradiction du fait que $\mathbb{K}(T(x_0)) = \mathbb{K}(x_0)$.

2.3 Suite itérative de Picard

Définition 2.3.1 [10] Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique complet. Une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est appelée application de Picard (strict) s'il existe un unique $x^* \in \mathbb{X}$ tel que :

$$F_T = \{x^*\}.$$

Et :

$$T_n(x_0) \rightarrow x^* \text{ (uniformément) pour tout } x_0 \in \mathbb{X}.$$

avec F_T est l'ensemble du point fixe de l'application T .

Définition 2.3.2 Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique, $\mathbb{K} \subset \mathbb{X}$ un sous ensemble fermé de \mathbb{X} et $T : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ une application possédant au moins un point fixe $p \in F_T$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{K}$ donné, la suite d'itérations $(x_n)_n$ donnée par :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

est appelée la suite des approximations successives avec valeur initiale x_0 , on l'appelle aussi l'itération de Picard.

Théorème 2.3.1 [10] Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique complet et $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ est une a -contraction, c'est-à-dire un opérateur satisfaisant :

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{X} \quad (1)$$

avec $a \in]0, 1[$ alors :

- i) T possède un unique point fixe, c'est-à-dire $F_T = \{x^*\}$.
- ii) L'itération de Picard associée à T , c'est-à-dire la suite $(x_n)_n$ définit par :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

converge vers x^* , pour toute estimation initiale $x_0 \in \mathbb{X}$.

- iii) Les estimations d'erreur a priori et a posteriori suivantes sont valables :

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3) \quad (\text{erreur priori}).$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4) \quad (\text{erreur posteriori}).$$

iv) Le taux de convergence est donné par :

$$d(x_n, x^*) \leq a d(x_{n-1}, x^*) \leq a^n \cdot d(x_0, x^*), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Démonstration :

Il existe au plus un point fixe, c'est-à-dire que le card $(F_T) \leq 1$. En effet, en supposant que $x^*, y^* \in F_T, x^* \neq y^*$, puisque $0 \leq K < 1$, on obtient la contradiction.

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq a \cdot d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*).$$

Pour prouver l'existence du point fixe, nous allons montrer que, pour tout donné. $x_0 \in \mathbb{X}$, l'itération de Picard $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Nous avons par(1) :

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq a \cdot d(x_1, x_0),$$

et par induction,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a^n d(x_1, x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Ainsi pour tout nombre $n, p \in \mathbb{N}, p > 0$, on a :

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} a^k d(x_1, x_0) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_1, x_0). \quad (7)$$

Puisque $0 < K < 1$, il en résulte que $a^n \rightarrow 0$ (quand $n \rightarrow \infty$), ce qui avec (7), montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Mais (\mathbb{X}, d) est un espace métrique complet, donc $(x_n)_n$ converge vers un

certain $x^* \in \mathbb{X}$.

D'autre part, toute application lipschitzienne est continue. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$$

D'où :

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(x^*)$$

Ce qui donne $x^* = Tx^*$, c'est-à-dire que x^* est un point fixe de T .

Cela montre que pour tout $x_0 \in \mathbb{X}$, l'itération de Picard converge en \mathbb{X} et que sa limite est un point fixe de T . Puisque $T \in a$ au plus un point fixe, nous déduisons que, pour tout choix de $x_0 \in \mathbb{X}$,

l'itération de Picard converge vers la même valeur x^* , c'est-à-dire l'unique point fixe de T .

Nous avons donc prouvé (i) et (ii). Pour prouver (iii), nous utilisons (7),

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

et la continuité de la métrique et donc, en pour $p \rightarrow \infty$, nous trouve :

$$d(x_n, x^*) = d(x^*, x_n) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{a^n}{1-a} \cdot d(x_0, x_1), \quad n \geq 0$$

et donc (3) est prouvé.

Pour obtenir l'estimation a posteriori (4), remarquons que par (1) on a :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1})$$

et par induction :

$$d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq a^k d(x_n, x_{n-1}), \quad k \in \mathbb{N}^*$$

donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (a + a^2 + \dots + a^p) d(x_n, x_{n-1}) \leq a \frac{1-a^p}{1-a} d(x_n, x_{n-1}).$$

En laissant $p \rightarrow \infty$ dans la dernière inégalité, on obtient exactement (4).

Remarque 2.3.1

1— L'estimation à priori (3) montre que, lorsqu'on part d'une estimation initiale $x_0 \in \mathbb{X}$, l'erreur d'approximation de la $n^{\text{ième}}$ itération est complètement déterminée par le coefficient de contraction a et le déplacement initial $d(x_1, x_0)$.

2— De même, l'estimation à posteriori montre que, pour obtenir l'erreur souhaitée d'approximation du point fixe par itération de Picard, c'est-à-dire pour que $d(x_n, x^*) < \varepsilon$,

ε il faut arrêter le processus itératif au premier pas n pour lequel le déplacement entre deux itérations consécutives est au plus $(1 - a)\frac{\varepsilon}{a}$.

Ainsi, l'estimation à posteriori offre un critère d'arrêt direct pour l'approximation itérative de points fixe par itération de Picard, tandis que l'estimation a priori donne indirectement un critère d'arrêt.

3— Il est facile à voir que l'estimation a posteriori est meilleure que l'estimation a priori, dans le sens où à partir de (4) on peut obtenir (3), au moyen de (6).

4— Chacune des trois estimations données dans le théorème 2.3.1 montre que la convergence de l'itération de Picard est au moins aussi rapide que celle de la série géométrique $\{a_n\}$.

Le processus itératif défini au moyen de la fonction d'itération T_2 (c'est-à-dire l'itération de Picard) est si rapide.

Cependant, comme le montre (5), le taux de convergence de l'itération de Picard pour toute contraction est linéaire.

5— Dans la plupart des cas, la condition de contraction (1) n'est pas satisfaite dans l'ensemble de l'espace \mathbb{X} , mais seulement localement. Dans ce contexte, une version locale du principe d'une application contractante est très utile pour certains objectifs pratiques.

Corollaire 2.3.1 Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique complet et :

$$B(y_0, R) = \{x \in \mathbb{X} \mid d(x, y_0) < R\}$$

soit la boule ouverte. Soit $T : B(y_0, R) \rightarrow \mathbb{X}$ une a -contraction, telle que :

$$d(T, y_0) < (1 - a)R.$$

Alors T possède un point fixe qui peut être obtenu en utilisant le schéma itératif de Picard, à partir de tout $x_0 \in B(y_0, R)$.

Théorème 2.3.2 Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et dérivable sur (a, b) , avec $|f'(x)| < 1$. Alors pour tout $x \in (a, b)$, f admet un unique point fixe.

En outre, toute suite de Picard pour f est convergente et converge vers l'unique point fixe de f .

Lemme 2.3.1 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée dans \mathbb{R}^n alors la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si toutes les sous-suites convergentes de $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent vers la même limite.

Corollaire 2.3.2 Une suite bornée $(x_n)_{n \geq 1}$ dans \mathbb{R}^n diverge si et seulement si $(x_n)_{n \geq 1}$ possède au moins deux points d'accumulation.

2.4 Suite itérative de Mann

2.4.1 Suite itérative de Mann

L'itération de Mann ayant été introduite en 1953 est la suivant :

Définition 2.4.1 [7] page [46]

Soit \mathbb{E} un espace vectoriel normé, C un ensemble convexe de E et $f : C \rightarrow C$ une application et $x_1 \in C$ une valeur arbitraire. Soit $A = [a_{nj}]$ une matrice réelle qui satisfait :

- $(A_1) a_{nj} \geq 0, \quad \forall n, j$ et $a_{nj} = 0, j > n$.
- $(A_2) \sum_{j=1}^n a_{nj} = 1, \quad \forall n \geq 1$.
- $(A_3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = 0, \quad \forall j \geq 1$.

La suite $(x_n)_n$ définie par :

$$x_{n+1} = f(u_n).$$

où :

$$u_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j,$$

Et dit le processus itérative de Mann noté $M(x_1, A, f)$. Il existe beaucoup de littératures sur la convergence de l'itération Mann pour différentes classe d'opérateurs considérées dans différents espaces .

On commence par le premier théorème donné par Mann puis généralise par Dotson.

Théorème 2.4.1 [7]

Soit \mathbb{E} un espace topologique linéaire de Hausdorff localement convexe. C une partie fermé convexe de \mathbb{E} , $f : C \rightarrow C$ est une application continue, $x_1 \in C$. Soit $M(x_1, A, f)$ l'itération générale de Mann.

Alors si l'une des suite $(x_n)_n$ ou $(u_n)_n$ de ce schéma converge vers un point $p \in C$, l'autre aussi converge vers le point p . Et de plus ce point est un point fixe de f dans C .

Remarque 2.4.1 Mann a montré ce résultat dans un espace de Banach et Dotson (en 1970) a montré que ce résultat est valable aussi dans l'espace topologique linéaire de Hausssdorf localement convexe (espace de Hausssdorf : espace séparé).

On trouve un résultat important qui affirme que si la suite $(x_n)_n$ converge vers un point, ce point ne peut être qu'un point fixe pour l'application mais suivant certaines conditions.

Le résultat est la suivant :

Théorème 2.4.2 [7] Soit f une application d'un sous ensemble \mathbb{K} fermé convexe d'un espace de Banach réel $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$. Soit $(x_n)_n$ l'itération de Mann de f avec une matrice régulière.

Supposons que $(x_n)_n$ converge vers un point $p \in \mathbb{K}$. S'il existence des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, et $\delta < 1$ tel que :

$$\|f(x_n) - f(x_p)\| \leq \alpha \|x_n - p\| + \beta \|x_n + f(x_n)\| + \gamma \|p - f(x_n)\| + \delta \max(\|p - f(p)\|, \|x_n - f(p)\|).$$

Alors p est un point fixe de f . Voir [10]

2.4.2 L'itération normale de Mann

Définition 2.4.2 [7] Soit (\mathbb{X}, d) un espace métrique. L'opérateur $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est appelé opérateur de Zamfirescu s'il existe des nombres réels α, β et γ satisfaisant $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1], \gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ tels que pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, l'une des conditions suivant vérifiée :

$$(Z_1)d(f(x), f(y)) \leq d(x, y),$$

$$(Z_2)d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))],$$

$$(Z_3)d(f(x), f(y)) \leq \gamma[d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

Théorème 2.4.3 [7] Soit \mathbb{E} un espace de Banach uniformément convexe, K une partie fermée convexe de \mathbb{E} et $f : K \rightarrow K$ un opérateur de Zamfirescu. Alors le schéma itérative de Mann $(x_n)_n$ défini par

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Avec $(\alpha_n)_n$ satisfait les conditions suivantes :

1. $\alpha_1 = 1$,
2. $0 \leq \alpha_n < 1, \quad \forall n > 1$
3. $\sum \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$

Converge vers l'unique point fixe de f .

Remarque 2.4.2 Le schéma itératif défini dans ce théorème est noté par $M(x_1, \alpha_n, f)$, dit schéma itératif normal de Mann associé à une application f avec une valeur initiale x_1 et une suite de paramètre α_n .

Proposition 2.4.1 [2] Soit C un sous-ensemble convexe non vide d'un espace de Banach uniformément convexe \mathbb{X} et $T : C \rightarrow C$ une correspondance avec $F(T) \neq \emptyset$ satisfaisant la condition :

$$\|T(x - p)\| \leq \|x - p\| \text{ pour tout } x \in C \text{ et } p \in F(T)$$

Définir une suite $\{x_n\}$ dans C par :

$$\begin{cases} x_1 \in C; \\ x_{n+1} = M(x_n, \alpha_n, T), n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

Avec la restriction que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min \{ \alpha_n, 1 - \alpha_n \} = \infty.$$

Alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$

Démonstration :

La proposition 2.4.1 implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ existe pour $p \in F(T)$.
Observez que

$$\|T(x_n) - p\| \leq \|x_n - p\| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et :

$$x_{n+1} - p = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n(Tx_n - p) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Nous obtenons que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$.

Théorème 2.4.4 [7]

Soit \mathbb{X} un espace de Banach uniformément convexe, \mathbb{K} un sous ensemble convexe fermé de \mathbb{X} et $T : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ une application de Zamfirescu. Ensuite, l'itération de Mann $\{x_n\}$,

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_nTx_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

avec $\{a_n\}$ satisfaisant aux conditions :

- (i) $a_1 = 1$;
- (ii) $0 \leq a_n < 1$, pour tout $n > 1$;

(iii) $\sum a_n (1 - a_n) = \infty$.

converge vers le point fixe de T .

Démonstration :

T a un point fixe unique dans \mathbb{K} . On le note p . Pour tout $x_1 \in \mathbb{K}$, nous avons

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - a_n) \|x_n - p\| + a_n \|Tx_n - p\|$$

Comme toute application de Zamfirescu est quasi contractive, nous en déduisons que

$$\|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|,$$

Ce qui montre que la suite $\{\|x_n - p\|\}$ décroît. Nous avons aussi

$$\|x_n - Tx_n\| = \|(x_n - p) - (Tx_n - p)\| \leq 2 \|(x_n - p)\|$$

Maintenant, supposons qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que $\|x_n - p\| \geq a$ pour tout n .

Supposons que $\{\|x_n - Tx_n\|\}_{n \geq 1}$ ne converge pas vers zéro. Ensuite, il existe deux possibilités : soit il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|x_n - Tx_n\| \geq \varepsilon$ ou $\liminf \|x_n - Tx_n\| = 0$.

1. Dans le premier cas, en utilisant le lemme de Groetsch avec $b = 2\delta \left(\frac{\varepsilon}{\|x_1 - p\|} \right)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq ((1 - a_n (1 - a_n) b)) \|x_n - p\|. \\ &\leq \|x_{n-1} - p\| - a_{n-1} (1 - a_{n-1}) b \|x_n - p\| - ba_n (1 - a_n) \|x_n - p\|. \\ &\leq \|x_{n-1} - p\| - b [a_{n-1} (1 - a_{n-1}) + a_n (1 - a_n)] \|x_n - p\|. \end{aligned}$$

Par induction on obtient :

$$a \leq \|x_{n+1} - p\| \leq \|x_0 - p\| - b \sum_{k=1}^n a_k (1 - a_k) \|x_n - p\|$$

À cet effet :

$$a [1 + b \sum_{k=1}^n a_k (1 - a_k)] \leq \|x_n - p\|, \quad \text{ce qui contredit (iii).}$$

Dans le second cas, il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0,$$

Si x_{n_k}, x_{n_l} satisfont (z_1) , c'est-à-dire :

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \alpha \|x_{n_k} - x_{n_l}\|,$$

ainsi :

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \alpha [\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| + \|Tx_{n_l} - x_{n_l}\|]$$

et donc :

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \alpha(1 - \alpha)^{-1} [\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_l} - x_{n_l}\|]$$

et si x_{n_k}, x_{n_l} satisfont (z_2) , alors :

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \beta [\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|]$$

et si x_{n_k}, x_{n_l} satisfont (z_3) , alors :

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \gamma [\|x_{n_k} - Tx_{n_l}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_k}\|]$$

Ce qui donne :

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq \gamma(1 - 2\gamma)^{-1} [\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|],$$

Par conséquent, dans tous les cas, $\{Tx_{n_k}\}$ est une suite de Cauchy et donc convergente.

Soit u sa limite.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = u$$

De plus,

$$\|u - Tu\| \leq \|u - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Tu\|.$$

Nous montrerons que $u = Tu$, c'est-à-dire, u est un point fixe de T . En effet, si x_{n_k}, u satisfont (z_1) , alors :

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq \alpha \|x_{n_k} - u\|.$$

Si x_{n_k}, u satisfont (z_2) , alors :

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq \beta \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|u - Tu\|$$

qui conduit à :

$$\|u - Tu\| \leq \|u - x_{n_k}\| + (1 + \beta) \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + (1 - \beta)$$

et, finalement, si x_{n_k} , u satisfont (z_3) , alors :

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Tu\| &\leq \gamma [\|x_{n_k} - Tu\| + \|u - Tx_{n_k}\|] \\ &\leq \gamma [\|x_{n_k} - Tu\| + \|Tx_{n_k} - Tu\| + \|u - Tx_{n_k}\|] \end{aligned}$$

ou :

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq \gamma(1 - \gamma)^{-1} [\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|u - Tx_{n_k}\|]$$

Par conséquent $u = Tu$.

Puisque p est l'unique point fixe de T , il en résulte que $p = u$, et donc les deux conditions $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = u = p$ et $\{\|x_n - p\|\}$ décroient par rapport à n et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$.

2.4.3 Suite itérative de Mann modifiée

Définition 2.4.3 Soit K une partie non vide convexe d'un espace vectoriel normé \mathbb{E} , $f : K \rightarrow K$ et $(\alpha_n)_n$ une suite réelle définie dans $[0, 1]$. La suite $(x_n)_n$ définie pour $x_0 \in K$ par :

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n f^{(n)}(x_n), n \in \mathbb{N}$$

est dit processus de Mann modifiée.

2.4.4 Suite itérative de Mann perturbé

Définition 2.4.4 Soit un espace de Banach $K \in \mathbb{E}$. $f : K \rightarrow K$. La suite $(x_n)_n$ définie pour $x_1 \in K$ par

$$x_{n+1} = (1 - \lambda_n) x_n + \lambda_n f(x_n) - \lambda_n \theta_n (x_n - x_1), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec $(\lambda_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ des suites réelles qui satisfont les conditions suivantes :

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$,
- (b) $\lambda_n (1 + \theta_n) \leq 1, \sum \lambda_n \theta_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\theta_n} = 0$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\theta_n - 1}{\theta_n}\right)^{-1}}{\lambda_n \theta_n} = 0$.

est dite processus de Mann perturbé.

2.4.5 Suite itérative de Mann avec erreur

L'itération de Mann a connu un autre développement ce qu'on appelle l'itération de Mann avec erreurs . L'idée de compte tenu du schéma itératif de Mann avec erreur ou d'Ishikawa avec erreur vient pratiquement de calcul numérique

Définition 2.4.5 [10] Soit \mathbb{K} un sous ensemble d'un espace de Banach \mathbb{E} , et $T : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{E}$ une application, soit $x_0 \in K$ la suite $\{x_n\}$ définie dans \mathbb{E} par

$$x_{n+1} = (1 - a_n) x_n + a_n T x_n + u_n.$$

où $\{a_n\}$ une suite dans $[0, 1]$ et $\{u_n\}$ une suite telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$$

est appelé l'itération de Mann avec erreurs.

Définition 2.4.6 [10] Soient \mathbb{K} un sous ensemble non vide convexe d'un espace de Banach \mathbb{E} et $T : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{E}$ une application. Pour un $x_0 \in \mathbb{K}$ donné, la suite $\{x_n\}$ définie par :

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n T x_n + c_n u_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

où $\{U_n\}$ une suite bornée dans \mathbb{K} et $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites dans $[0, 1]$ telles que

$$a_n + b_n + c_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

est appelée aussi l'itération de Mann avec erreur.

Théorème 2.4.5 Soit \mathbb{K} un sous ensemble compact convexe d'un espace de Hilbert réel \mathbb{H} et $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue hémicontractive. Soit $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ des suites réelles dans $[0, 1]$ qui satisfaisant les conditions suivantes :

- 1- $a_n + b_n + c_n = 1$,
- 2- $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$,
- 3- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$,
- 4- $0 \leq b_n + c_n < 1$.

Alors le schéma itératif de Mann avec erreur converge fortement vers le point fixe de f .

Remarque 2.4.3 une application de \mathbb{K} dans \mathbb{K} est dite hémicontractive si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{K}$:

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|x - f(x)\|^2.$$

Chapitre 3

Application numérique

Dans ce chapitre on va traiter quatre exemples numériques par la méthode de Mann.

Algorithme de la méthode de Mann :

```
function [R,Eabs,Erel]=mann(n, x0)
clc
format short
for i = 1 : 1 + n

    X(1)= (1-a/i)*x0+a/i*(f(x0))+1/i* ε);
X(i+1)=(1-a/i)*X(i)+a/i*(f(xi))+1/i*ε);
end;
Eabs= abs(X - X(n));
Erel = num2str(Eabs/X);
R=['X : ',num2str(n),' ',num2str(X(n)),',
',num2str(Eabs), ' ',num2str(Erel)];
disp(R);

plot(X, '*', 'markerSize',12)
title('Itération de Mann');
end
```

Exemple 1 :

Pour le cas réels considérons la fonction f telle que :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

On sait que la fonction f admet un seule point fixe $x^* \simeq 0,682927$ qui a été calculé a l'aide d'un logiciel.

On remplacer $f(x)$ Dans L'algorithme sous MATLAB de la méthode de Mann on obtenu le programme suivant :

```
function [R,Eabs,Erel]=mann(n, x0)
clc
formatshort
for i = 1 : 1 + n
a = 2;
X(1) = (1 - a/i) * x0 + a/i * (1/(1 + (x0)^2) + 1/i * 0.01);
X(i + 1) = (1 - a/i) * X(i) + a/i * (1/(1 + X(i)^2) + 1/i * 0.01);
end;

Eabs= abs(0.682327 - X(n));
Erel = num2str(Eabs/0.682327);
R=['X : ',num2str(n),' ',num2str(X(n)),' ',num2str(Eabs), ' ',num2str(Erel)];
disp(R);

plot(X,'*', 'markerSize',12)
title('Itération de Mann');
end
```

Pour l'exécution de ce programme on prend $a = 2$, $x_1 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$,
 $n = 10$.

On obtient le

graphe suivant :

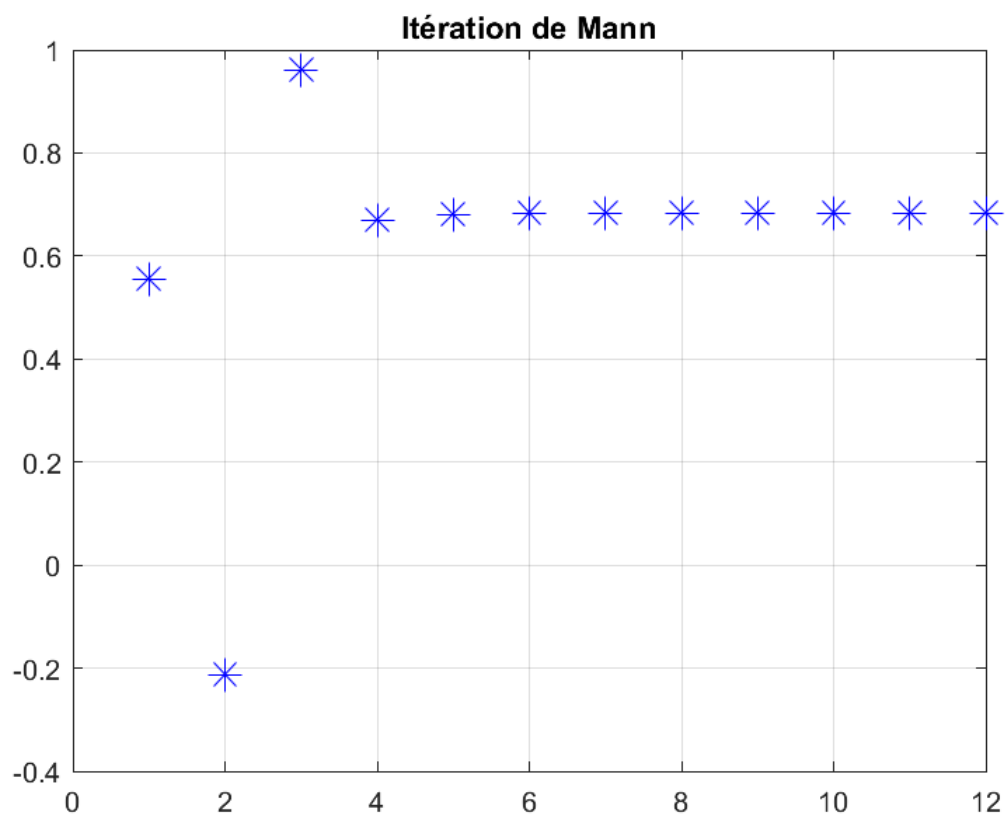


FIGURE 3.1 – Itération de mann

Pour l'exécution de ce programme on prend $a = 2$, $x_1 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$,
 $n = 100$.

On obtient le graphe suivant :

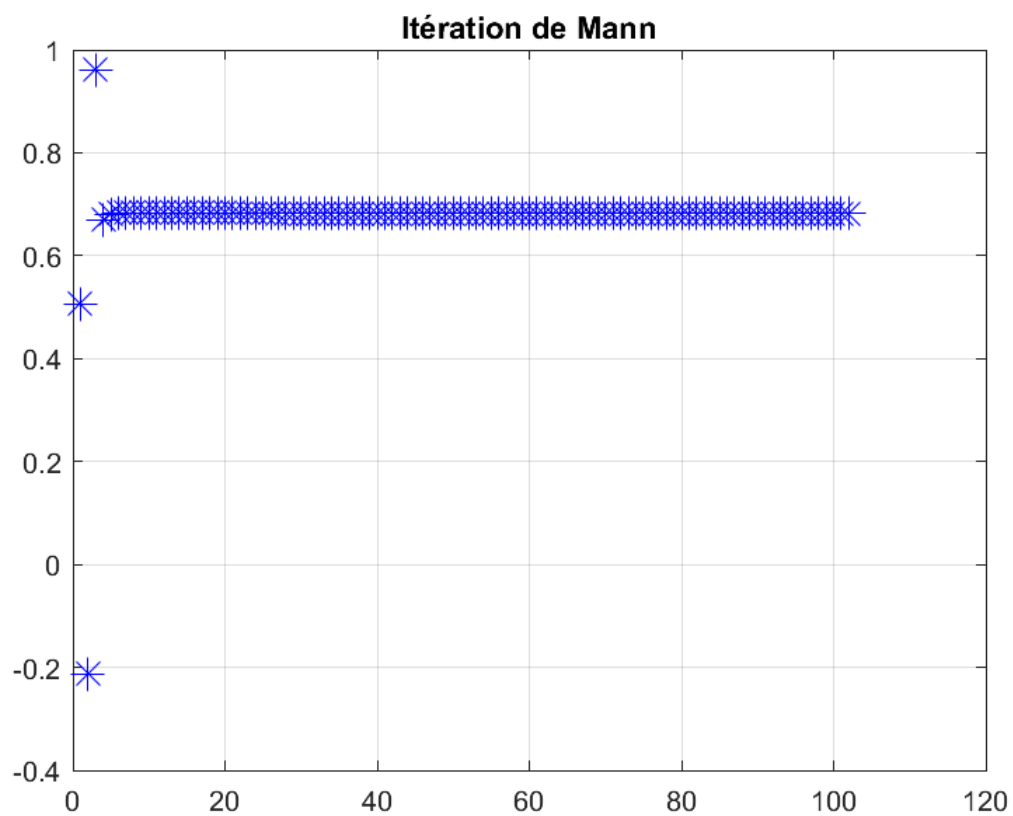


FIGURE 3.2 – Itération de mann

Pour l'exécution de ce programme on prend $a = 2$, $x_1 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $n = 1000$.

On obtient le graphe suivant :

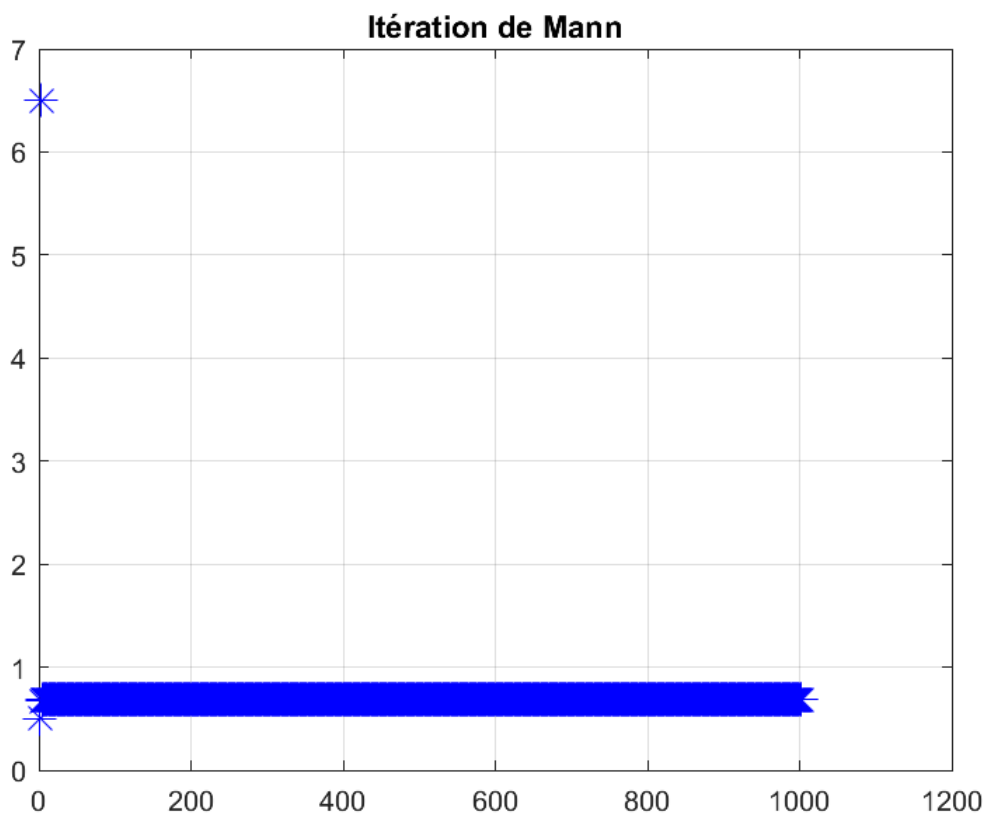


FIGURE 3.3 – Itération de mann

n	x_n	<i>Erreur absolue</i>	<i>Erreur relative</i>
10	0.68308	0.00074853	0.001097
100	0.68242	$8.8221e - 05$	0.00012929
1000	0.68233	$9.6049e - 06$	$1.4077e - 05$
10000	0.68233	$1.6845e - 06$	$2.4688e - 06$
100000	0.68233	$8.9191e - 07$	$1.3072e - 06$
1000000	0.68233	$8.1264e - 07$	$1.191e - 06$

On note que à partir de $n = 1000$, la valeur approche du point fixe est presque égale à la valeur exacte.

Exemple 2 :

On a la fonction g telle que :

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \rightarrow \sqrt{1+x}$$

On sait que la fonction f admet un seule point fixe $x^* \simeq 1.61803399$.

On remplace $g(x)$ dans l'algorithme sous MATLAB de la méthode de Mann on obtient le programme suivant :

```
function [R,Eabs,Erel]=mann1(n, x0)
clc
formatshort
for i = 1 : 1 + n
a = 2;
X(1) = (1 - a/i) * x0 + a/i * (sqrt(x0 + 1) + 1/i * 0.01);
X(i + 1) = (1 - a/i) * X(i) + a/i * (sqrt(X(i) + 1) + 1/i * 0.01);
end;

Eabs= abs(1.61803399 - X(n));
Erel = num2str(Eabs/1.61803399);
R=['X : ',num2str(n),' ',num2str(X(n)),' ',num2str(Eabs), ' ',num2str(Erel)];
disp(R);

plot(X, '*','markerSize',12)
title('Itération de Mann');
end
```


Pour l'exécution de ce programme on prend $a = 2$, $x_1 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$,
 $n = 10$.

On obtient le graphe suivant :

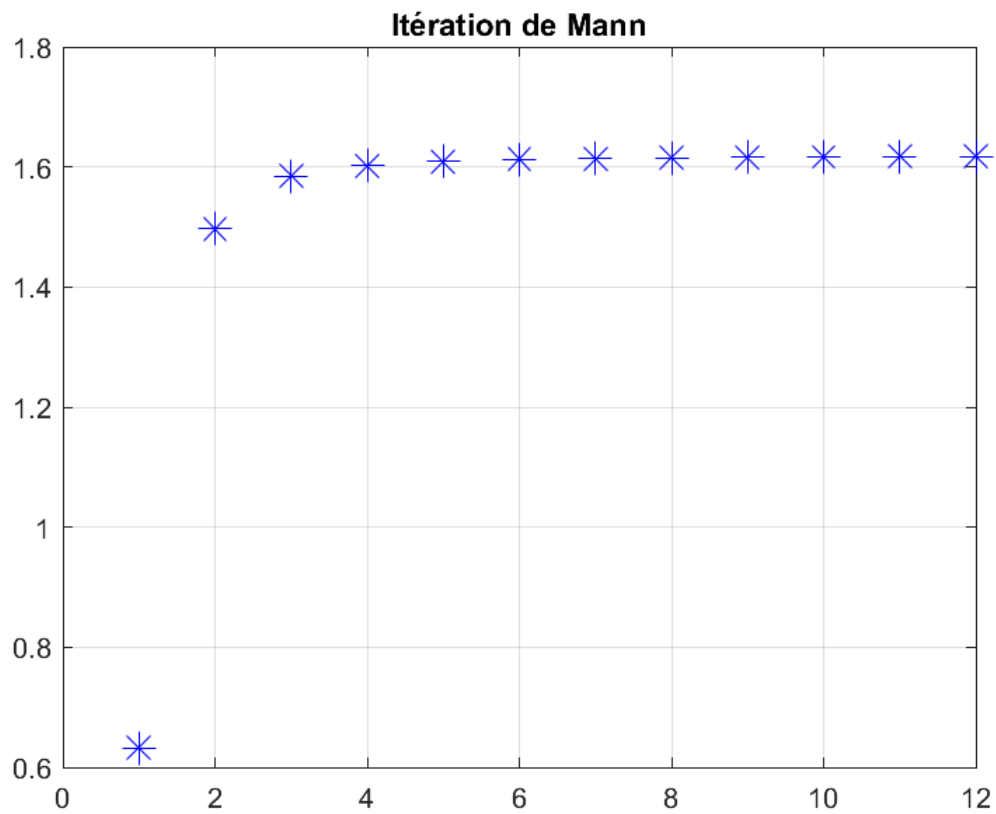


FIGURE 3.4 – Itération de mann

Pour l'exécution de ce programme on prend $a = 2$, $x_1 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$,
 $n = 100$.

On obtient le graphe suivant :

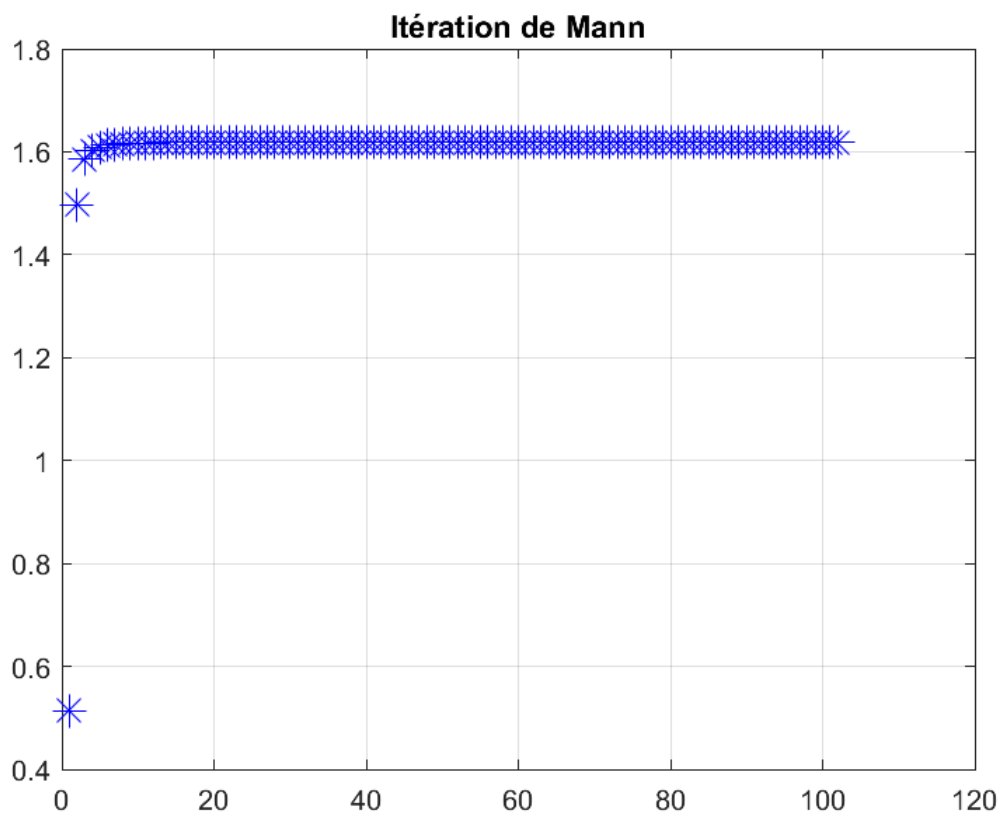


FIGURE 3.5 – Itération de mann

Pour l'exécution de ce programme on prend $a = 2$, $x_1 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $n = 1000$.

On obtient le graphe suivant :

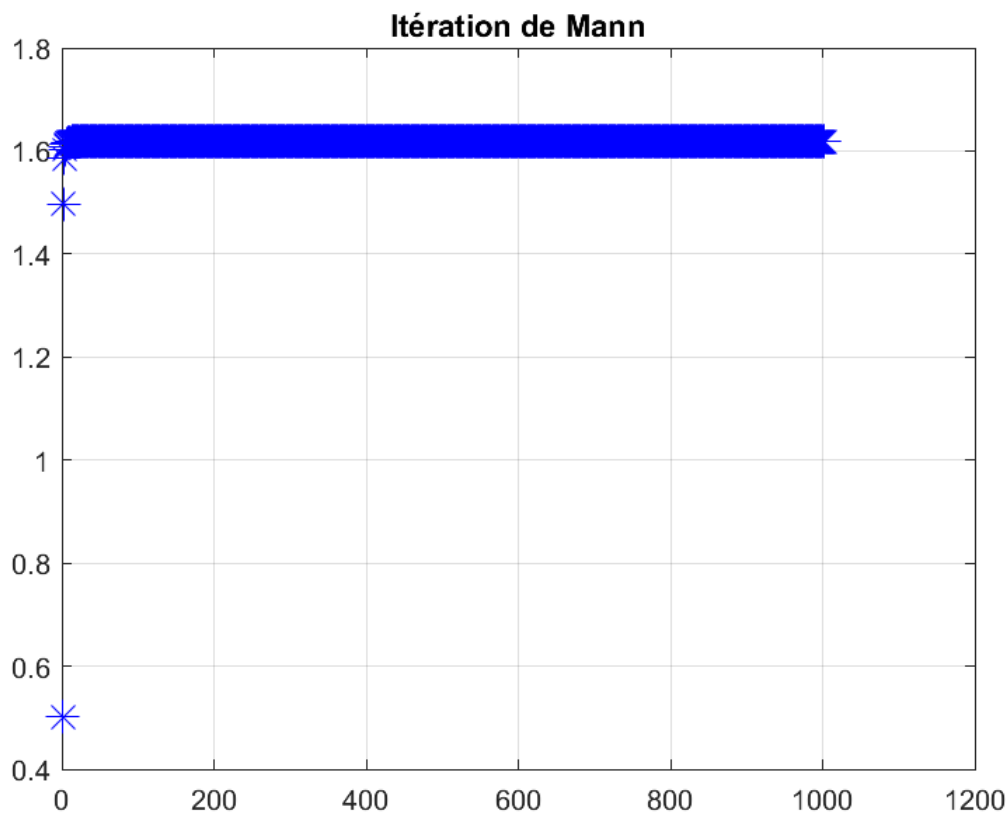


FIGURE 3.6 – Itération de mann

n	x_n	<i>Erreur absolue</i>	<i>Erreur relative</i>
10	1.6167	0.0013348	0.00082498
100	1.6183	0.00026457	0.00016351
1000	1.6181	$4.1502e - 05$	$2.565e - 05$
10000	1.618	$4.7822e - 06$	$2.9556e - 06$
100000	1.618	$5.0355e - 07$	$3.1121e - 07$
1000000	1.618	$5.033e - 08$	$3.1106e - 08$

Algorithme de la méthode de Mann avec erreur :

```

function[iter, X, Err,rela] = Mannrrr11(x1,ε,a)
syms x
h = format short;
D = [0 : 0.01 : 1];
for i = 1 : length(D)
H(i) = double(subs(h, x, D(i)));
end
R = randn(100000, 1);
X(1) = x1;
XX = 0.828427124;
X(2) = ((1 - a) * X(1)) + (a * double(subs(f, x, X(1)))) + (a * R(1));
iter = 1;
Err = abs(X(2) - X(1));
Err,rela = (abs(X(2) - XX))/(abs(XX));
i = 3;
while Err > ε
X(i) = ((1 - (a/(i - 1))) * X(i - 1)) + (a/(i - 1)) * (double(subs(f, x, X(i - 1)))) + (a/((i - 1)^2)) * R(i));
Err = abs(X(i) - X(i - 1));
Err,rela(i) = (abs(X(i) - XX))/(abs(XX));
i = i + 1;
iter = iter + 1
end
for j = 1 : length(X)
FF(j) = double(subs(f, x, X(j)));
end
plot(D, F, D, D, X, FF,' +')

```

Exemple 3 :

On a la fonction suivant :

$$h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Dans le chois de $x_1 = 0, \varepsilon = 0,001, a = 1,25$.

Résultats de programme :

i	$X(i)$	Erreurs relative
1	0.5000	0.5360
5	0.5156	0.3776
10	0.6758	0.1843
15	0.7044	0.1497
20	0.7349	0.1129

Résultat de l'algorithme de Mann avec erreurs.

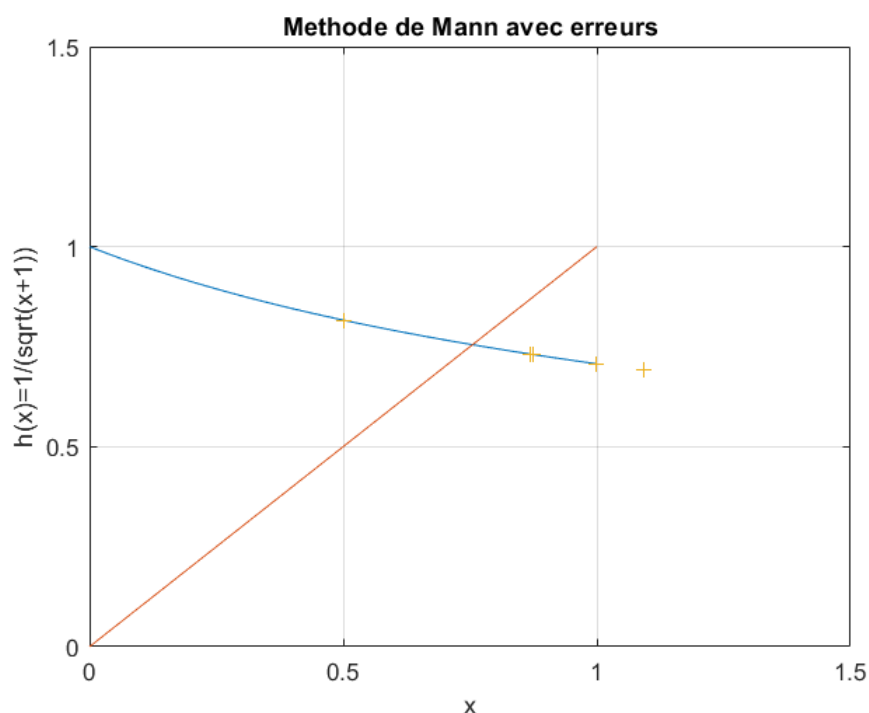


FIGURE 3.7 – Mèthode de mann avec erreur

Exemple 4 :

Variables aléatoires négativement associées on considérons la fonction h telle que :

$$S : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto S(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}.$$

Pour déterminer le point fixe de la fonction S , il faut résoudre une équation polynomiale de degré 5. Selon la théorie de Galois, il n'existe pas de formule générale pour exprimer les racines de ce polynôme.

La constante de Lipschitz de S est $C = \frac{1}{18}4^{\frac{2}{3}}5^{\frac{5}{6}} = 0,53527$ et le point fixe est $x^* = 0,808731$. On suppose que $a = 2, x_1 = \frac{1}{2}, N = 1$.

Le cas associé négativement gaussien :

$$Y_i = - \sum_{k=1}^{i-1} X_k + iX_i$$

alors

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = -\frac{1}{3} < 0, \forall i \neq j,$$

et donc Y_1, Y_2, \dots, Y_n sont quasi-associés.

Tableau :

n	x_n	$ x_n - x^2 $	Erreurs relative
10	0.7859191	2.2812×10^{-2}	2.8207×10^{-2}
100	0.8067919	1.9391×10^{-3}	2.3977×10^{-3}
500	0.8082863	4.447×10^{-4}	5.4987×10^{-4}
1000	0.8087087	2.23×10^{-5}	2.7574×10^{-5}

Erreurs absolues et Erreurs relatives

Le cas gaussien associé négativement Nous avons :

$$\mathbb{P}\{|x_{n+1} - x^*| > \varepsilon\} \leq K_4 e^{-\varepsilon n^{(1-c)}}.$$

où

$$K_4 = 2e^{N + \frac{\pi^2}{2}s^2}.$$

On obtient $K_4 = 2e^{1 + \frac{4}{2} * 4.5467} = 48,366$.

$48\,366 * e^{-0,01 * n^{0,9}} = 0,01$. La solution est $\{[n = 3478,8]\}$.

$48\,366 * e^{-0,05 * n^{0,9}} = 0,01$. La solution est $\{[n = 581,83]\}$.

$48\,366 * e^{-0,1 * n^{0,9}} = 0,01$. La solution est $\{[n = 269,35]\}$.

Conclusions

Dans ce mémoire, nous avons rappelé les définitions de variables aléatoires indépendantes et des variables aléatoires négativement associées ainsi que des variables aléatoires positivement associées. Nous avons donné aussi quelques résultats principaux sur ce type de variables aléatoires. Nous avons abordé la théorie des points fixes en insistant sur le théorème du point fixe de Banach ainsi que les schémas itératives de Picard, de Mann et de Mann avec erreur. Et pour donner l'intérêt à ces deux théories (théorie d'association des variables aléatoires et la théorie des points fixes) nous avons illustré deux exemples numériques pour déterminer une valeur approchée d'un point fixe par la méthode itérative de Mann.

Bibliographie

- [1] Meehan M Agarwal and O'Regan. Fixed point thm and applications. *Combridge university press, 2004.*
- [2] Ravi P Agarwal, Donal O'Regan, and DR Sahu. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, *volume 6. Springer, 2009.*
- [3] Chahira Allouti, Bahia Barache, and Abdelnasser Dahmani. *Exponential inequalities for mann's stochastic algorithm.* Sequential Analysis, *39(1) :32–51, 2020.*
- [4] Arab.I. *Procedures d'approximation stochastique a erreurs associées.* Université Bejaia, 2016.
- [5] Hassina Arroudj, Idir Arab, and Abdelnasser Dahmani. *Strongly mixed random errors in mann's iteration algorithm for a contractive real function.* arXiv preprint arXiv :1701.08737, 2017.
- [6] Stefan Banach. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. math, *3(1) :133–181, 1922.*
- [7] Bahia Barache. *Inégalités exponentielles pour le processus itératif de mann avec des erreurs aléatoires.* Université Bejaia, 2017.
- [8] Bahia Barache, Idir Arab, and Abdelnasser Dahmani. *Exponential inequalities for mann itérative scheme with functional random errors.* Sequential Analysis, *37(1) :18–30, 2018.*

- [9] *Philippe Barbe and Michel Ledoux. Probabilité. EDP Sciences, 2021.*
- [10] *Vasile Berinde and F Takens. Iterative approximation of fixed points, volume 1912. Springer, 2007.*
- [11] *Alexander Vadimovich Bulinski and E Shabanovich. Asymptotical behaviour for some functionals of positively and negatively dependent random fields. Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika, 4(2) :479–492, 1998.*
- [12] *AV Bulinski. On the convergence rates in the clt for positively and negatively dependent random fields. Probability Theory and Mathematical Statistics, pages 3–14, 1996.*
- [13] *J Theodore Cox and Geoffrey Grimmett. Central limit theorems for associated random variables and the percolation model. The annals of probability, pages 514–528, 1984.*
- [14] *Lahcen Douge. Sur l'estimation fonctionnelle des processus associés et quasi-associés. PhD thesis, Paris 6, 2009.*
- [15] *James D Esary, Frank Proschan, and David W Walkup. Association of random variables, with applications. The Annals of Mathematical Statistics, pages 1466–1474, 1967.*
- [16] *Yacine Ferrani. Sur l'estimation non paramétrique de la densité et du mode dans les modèles de données incomplètes et associées. Université du Littoral Côte d'Opale, 2014.*
- [17] *Frédéric Ferraty and Philippe Vieu. Statistique fonctionnelle : modèles de régression pour variables aléatoires uni, multi et infiniment dimensionnées. Université Paul Sabatier, laboratoire de statistique et probabilités, UMR C5583, 2001.*
- [18] *Frédéric Ferraty and Philippe Vieu. Nonparametric functional data analysis : theory and practice. Springer Science & Business Media, 2006.*

- [19] Aapo Hyvärinen and Erkki Oja. *Independent component analysis : algorithms and applications*. Neural networks, 13(4-5) :411–430, 2000.
- [20] Ouvrard Jean-Yves. *probabilités II*. Cassini, 2009.
- [21] Raoul S Kallabis and Michael H Neumann. *An exponential inequality under weak dependence*. Bernoulli, 12(2) :333–350, 2006.
- [22] Olav Kallenberg and Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability, volume 2*. Springer, 1997.
- [23] Jean Lacroix and Pierre Priouret. *Probabilités approfondies*. Université Pierre et Marie Curie, 2006, 2005.
- [24] Robert Lemlich. *A theory for the limiting conductivity of polyhedral foam at low density*. Journal of colloid and Interface Science, 64(1) :107–110, 1978.
- [25] Yurii Vasil'evich Prokhorov. *W. feller, an introduction to probability theory and its applications*. Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya, 10(1) :204–206, 1965.
- [26] Sheldon M Ross. *Initiation aux probabilités*. PPUR presses polytechniques, 2007.